

Kernfach Mathematik

Aufgabe 1: Analysis-CAS

Ein Bergprofil lässt sich annähernd mithilfe des Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = (x - 1)^2 \cdot e^{-0,5x} \quad \text{für } 0 \leq x \leq 13 \text{ beschreiben.}$$

Dabei entspricht eine Längeneinheit (LE) zehn Metern. Ergebnisse sind im Folgenden auf 2 Nachkommastellen zu runden.

- a) • Berechnen Sie die gemeinsamen Punkte des Graphen von f mit den Achsen und dessen Extrempunkte (Talsohle und Gipfel).
- Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $[0; 13]$ und wählen Sie hierfür auf der x -Achse den Maßstab $1 \text{ LE} \hat{=} 1 \text{ cm}$. Auf der y -Achse verwenden Sie das Intervall $[0; 3]$ mit dem Maßstab $1 \text{ LE} \hat{=} 3 \text{ cm}$.
 - Bestimmen Sie den Punkt mit der größten Steigung zwischen der Talsohle und dem Gipfel.

(13 P)

- b) Eine Skisprungschanze für den Nachwuchs soll neu errichtet werden. Dazu wird auf dem Hang an der Stelle $x = 0$ ein 20 m hoher Turm errichtet, von dem aus die Springer starten. Das Schanzenprofil (Anlauf) lässt sich durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion g 2. Grades beschreiben. Der Absprungpunkt (Ende des Schanzentisches), der sich im Scheitelpunkt dieser Parabel befindet, liegt genau zwei Meter (0,2 LE) über dem Gipfel.

- Bestimmen Sie die zugehörige Funktionsgleichung.

Verwenden Sie für Ihre weiteren Berechnungen $g(x) = 0,059466 x^2 - 0,594656 x + 3$.

- Skizzieren Sie das Schanzenprofil in das Koordinatensystem von Aufgabenteil a).

(6 P)

- c) Aufgrund der Statik wird ein zusätzlicher Stützpfiler benötigt. Dieser soll an der Stelle errichtet werden, an der der Höhenunterschied zwischen der Schanze und dem Gelände am größten ist.

- Berechnen Sie den Fußpunkt dieses Stützpfilers und dessen Länge.
- Begründen Sie, dass die oben genannte Bedingung nur an einer Stelle erfüllt sein kann, an der die Steigungen der Graphen von f und g gleich sind.

(6 P)

Kernfach Mathematik

- d) Nach der Fertigstellung der Schanze werden erste Probesprünge durchgeführt. Die Flugbahn des ersten Springers lässt sich näherungsweise durch einen Teil des Graphen der Funktion h mit $h(x) = -0,0387 x^2 + 0,387 x + 0,546$ darstellen.
- Berechnen Sie die Koordinaten des Landepunktes L und geben Sie die horizontale Flugweite an.
[Kontrolle: $x_L \approx 10,00$]
 - Bestimmen Sie den Winkel zwischen der Flugbahn und dem Gelände im Auftreffpunkt.
(5 P)

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) Gemeinsame Punkte mit den Achsen: y-Achse: $f(0) = 1$. Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist $S_y(0 1)$. x-Achse: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Der Schnittpunkt mit der x-Achse ist $S_x(1 0)$. Lokale Extrema: Notwendig für ein lokales Extremum von f an der Stelle x ist $f'(x) = 0$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 5$ Weil außerdem $f''(1) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}} \approx 1,21 > 0$ gilt, liegt an der Stelle $x = 1$ ein lokales Minimum mit dem Funktionswert $f(1) = 0$ vor. Der Graph von f hat also in $T(1 0)$ einen Tiefpunkt (Talsohle). Da $f''(5) = -2 \cdot e^{-\frac{5}{2}} \approx -0,16 < 0$ gilt, liegt an der Stelle $x = 5$ ein lokales Maximum mit dem Funktionswert $f(5) = 16 \cdot e^{-2,5} \approx 1,31$ vor. Der Graph von f hat also in $H(5 1,31)$ einen Hochpunkt (Gipfel). <u>Skizze:</u>	1		
	1		
	2		
	2		
	2		
	2		

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Gesucht ist der Wendepunkt des Graphen von f im Intervall $[1; 5]$. Notwendig für einen Wendepunkt des Graphen von f an der Stelle x ist $f''(x) = 0$. $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5 - 2 \cdot \sqrt{2} \approx 2,17 \vee x = 5 + 2 \cdot \sqrt{2} \approx 7,83 > 5$. Weil zusätzlich $f'''(5 - 2 \cdot \sqrt{2}) \approx -0,48 \neq 0$ gilt, ist $x \approx 2,17$ die gesuchte Wendestelle und $W(2,17 0,46)$ der Wendepunkt.		1 1 1	
Teilaufgabe b) Der Ansatz für die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion 2. Grades ist $g(x) = ax^2 + bx + c$. Mit den Bedingungen an g $g(0) = 3$ 20 m hoher Turm an der Stelle $x = 0$ $g(5) = f(5) + 0,2$ Absprungpunkt 2 Meter über dem Gipfel $g'(5) = 0$ Scheitelpunkt an der Stelle $x = 5$ ergibt sich gerundet die Funktionsgleichung $g(x) = 0,059466 x^2 - 0,594656 x + 3$. Wählt der Schüler die Scheitelpunktsform, ist die gleiche Punktzahl zu vergeben. <u>Skizze:</u>	1	 3 1	
	1		

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe c) Die Länge eines Stützpfailers an der Stelle x beträgt $d(x) = g(x) - f(x)$. Gesucht ist das globale Maximum von d im Intervall $[0; 5]$. Notwendig für ein lokales Extremum von d an der Stelle x ist $d'(x) = 0$. $d'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 0,67 \vee x = 5$ Wegen $d(0) = 2$, $d(0,67) \approx 2,55$ und $d(5) = 0,2$ liegt an der Stelle $x \approx 0,67$ das gesuchte Maximum mit $f(0,67) \approx 0,08$. Also ist $P(0,67 0,08)$ der Fußpunkt des längstmöglichen Stützpfailers, der eine Länge von 25,5 m hat. Notwendig für eine lokale Maximalstelle von d ist $d'(x) = 0$. $\begin{aligned} d'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow (g - f)'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow g'(x) - f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow g'(x) &= f'(x) \end{aligned}$ Der Höhenunterschied zwischen der Schanze und dem Gelände ist also an der Stelle extremal, an der die Steigungen der Graphen von f und g gleich sind. <i>Eine sprachliche Begründung ist ebenfalls möglich.</i>		1 2	3
Teilaufgabe d) Der gesuchte Landepunkt ist ein Schnittpunkt der Graphen von f und h für $x > 5$. $f(x) = h(x)$ liefert $x \approx 0,18$ oder $x \approx 10,00$. Es ist $f(10,00) \approx 0,55$. Also ist $L(10,00 0,55)$ der Landepunkt, und die horizontale Flugweite beträgt 50,0 m (=100,0 m - 50 m). Der gesuchte Winkel sei $\alpha = \alpha_h - \alpha_f$. Es gilt $\tan(\alpha_f) \approx f'(10,00) \approx -0,39$ und $\tan(\alpha_h) \approx h'(10,00) \approx -0,15$. Daraus ergibt sich $\alpha = \alpha_h - \alpha_f \approx -21,16^\circ - (-8,62^\circ) = 12,54^\circ$ als der gesuchte Winkel im Auftreffpunkt.		3 2	
Punktsummen	12	15	3

Kernfach Mathematik

Aufgabe 2: Analysis-CAS

Die Funktion s mit

$$s(t) = 0,005 \cdot t^4 - 0,256 \cdot t^3 + 4,386 \cdot t^2 - 25,432 \cdot t$$

modelliert einen vertikalen Tauchgang. Dabei kann man die Werte für t als Zeitangaben in Minuten auffassen, wobei der Tauchgang bei $t = 0$ beginnt. Die Funktionswerte $s(t)$ sind als Positionsangaben in Metern anzusehen, wobei der Wert 0 für die Wasseroberfläche und z.B. der Wert -10 für eine Tiefe von 10 Metern stehen.

Runden Sie Ihre Endergebnisse auf zwei Nachkommastellen.

- a) • Bestimmen Sie den Zeitpunkt (t_A), zu dem der Taucher wieder die Wasseroberfläche erreicht, sowie die Extrem- und Wendepunkte des Graphen von s .
- Skizzieren Sie den Graphen von s im Intervall $[0 ; t_A]$ unter Verwendung der ermittelten Ergebnisse.
 - Beschreiben Sie den Verlauf des Tauchgangs, indem Sie die charakteristischen Punkte im Sachzusammenhang interpretieren, und ermitteln Sie den Wert der größten Aufstiegs-geschwindigkeit.

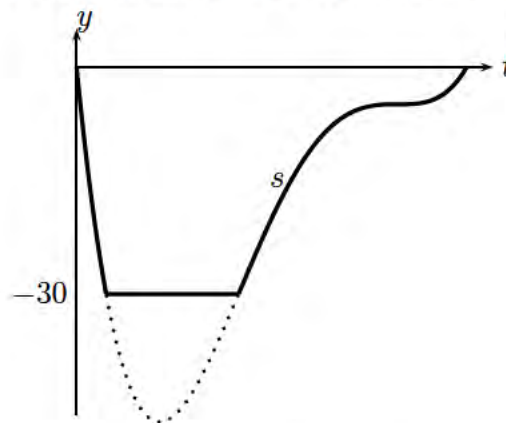
(17 P)

- b) Bestimmen Sie das 3-minütige Zeitintervall während des Aufstiegs, in dem die Tiefenänderung des Tauchers minimal ist, der Taucher sich also in einem möglichst schmalen Tiefenband bewegt.

(6 P)

Kernfach Mathematik

- c) Der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von s und der t -Achse ist ein Maß für die während des Tauchgangs benötigte Luftmenge, die der Taucher in der Flasche mitnehmen muss.
- Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.
 - Der Taucher entscheidet sich, seinen Tauchgang, wie in der Abbildung gezeigt, zu verändern, um eine bestimmte Zeit in einer Tiefe von 30 m zu verweilen.



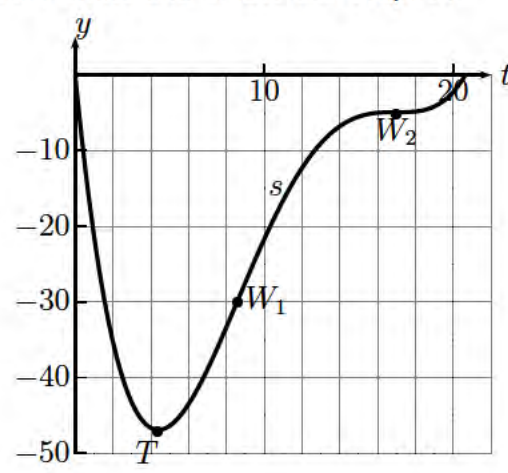
Bestimmen Sie die Verweildauer in der Tiefe von 30 m und die prozentuale Einsparung der bei diesem neuen Tauchgang benötigten Luftmenge im Vergleich zu dem in Teilaufgabe a) beschriebenen Verlauf des Tauchgangs.

(4 P)

- d) Der Taucher verweilt noch 4 min länger als bisher in der Tiefe von 30 m und taucht dann in der gleichen Art wie in Teilaufgabe c) auf.
Geben Sie die Funktion s_2 an, die den neuen Aufstieg beschreibt.

(3 P)

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) Bestimmung der Nullstellen: $s(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t \approx 20,64$. Es gilt also $t_A \approx 20,64$, der Taucher taucht ungefähr zur Zeit 20,64 min wieder auf. Lokale Extrema: Notwendig für ein lokales Extremum von s an der Stelle t ist $s'(t) = 0$. $s'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4,4 \vee t = 17$ Weil außerdem $s''(4,4) \approx 3,18 > 0$ gilt, liegt an der Stelle $t = 4,4$ ein lokales Minimum mit dem Funktionswert $s(4,4) \approx -46,92$ vor. Der Graph von s hat also den Tiefpunkt $T(4,4 -46,92)$. Wegen $s''(17) = 0$ sind an der Stelle $t = 17$ weitere Untersuchungen notwendig. Wendepunkte: Notwendig für einen Wendepunkt des Graphen von s an der Stelle t ist $s''(t) = 0$. $s''(t) = 0 \Leftrightarrow t = 8,6 \vee t = 17$ Weil zusätzlich $s'''(8,6) \approx -0,5 \neq 0$ und $s'''(17) \approx 0,5 \neq 0$ gilt, liegen an den Stellen $t = 8,6$ und $t = 17$ Wendepunkte vor. Die Funktionswerte lauten $s(8,6) \approx -29,81$ und $s(17) \approx -4,91$, die Wendepunkte des Graphen sind damit $W_1(8,6 -29,81)$ und $W_2(17 -4,91)$. Nach den Ergebnissen von oben ist die Tangente an den Graphen von s an der Stelle $t = 17$ waagrecht, W_2 ist also sogar ein Sattelpunkt. Einzeichnen der Punkte und Skizze des Graphen: 	1		
	2		
	2		
	2		
	2		
	1		
	2		

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Der Tauchvorgang beginnt bei $t = 0$. Der Taucher erreicht nach 4,4 Minuten mit ca. 47 m seine größte Tauchtiefe (Punkt T). Die größte Aufstiegs geschwindigkeit liegt entweder an der Wendestelle ($t = 8,6$) oder aber an der Stelle t_A (Rand) vor. Wegen $s'(8,6) \approx 5,93$ und $s'(t_A) \approx 4,29$ beträgt die größte Aufstiegs geschwindigkeit etwa 5,9 m/min. Diese wird nach 8,6 Minuten in einer Tiefe von ca. 29,8 m erreicht. Danach sinkt die Aufstiegs geschwindigkeit ab bis auf 0 m/min zur Zeit 17 Minuten (Punkt W_2), zu dieser Zeit befindet sich der Taucher in ca. 5 m Tiefe. Für $t > 17$ nimmt die Aufstiegs geschwindigkeit wieder zu, der Taucher erreicht nach ca. 20,6 min wieder die Wasseroberfläche.		1	
		2	
		2	
Teilaufgabe b) Da s während des Aufstiegs (für $t \in [4,4; 20,64]$) monoton steigt, wird die Tiefenänderung h in einem dreiminütigen Intervall $[t; t + 3]$, mit $t \in [4,4; 17,64]$ durch $h(t) = s(t + 3) - s(t)$ beschrieben. Von dieser Funktion ist das globale Minimum auf dem Intervall $[4,4; 17,64]$ zu bestimmen. Dieses kann an den Intervallrändern liegen oder ein lokales Minimum im Intervall sein. Notwendig für ein lokales Minimum von h an der Stelle t ist $h'(t) = 0$. $h'(t) = 0 \Leftrightarrow t \approx 7,19 \vee t \approx 15,41$ Wegen $h(4,4) \approx 10,16$, $h(7,19) \approx 17,22$, $h(15,41) \approx 0,56$ und $h(17,64) \approx 4,91$ ist das dreiminütige Intervall mit der geringsten Tiefenänderung das Intervall $[15,41; 18,41]$. <i>Sollte der Prüfling fälschlicherweise das zur Sattelstelle symmetrisch gelegene Intervall $[15,5; 18,5]$ als Lösung angeben, so soll hier nur ein Punkt vergeben werden.</i>		2	
		1	
		1	
		2	

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe c) Es ist $\left \int_0^{20,64} s(t) dt \right \approx 431,16$, also beträgt der Inhalt der gesuchten Fläche ca. 431,16 Flächeneinheiten. Für die Zeiten, in denen der Taucher sich in genau 30 m Tiefe befindet, gilt $s(t) = -30$. $s(t) = -30 \Leftrightarrow t \approx 1,56 \vee t \approx 8,57$ Wegen $8,57 - 1,56 \approx 7$ beträgt die Verweildauer ca. 7 Minuten. Der Inhalt der von der Geraden $y = -30$ und dem Graphen von s eingeschlossenen Fläche ist ein Maß für die eingesparte Luftmenge. Es ist $\left \int_{1,56}^{8,57} -30 - s(t) dt \right \approx 76,64$, also beträgt der Inhalt dieser Fläche ca. 76,64 Flächeneinheiten. Die prozentuale Einsparung beträgt damit $\frac{76,64}{431,16} \approx 17,78 \%$.		1	
		1	
		2	
Teilaufgabe d) Der Aufstieg beginnt nun bei $t \approx 12,57$, der Graph von s_2 ist gegenüber dem Graphen von s um 4 Einheiten nach rechts in Richtung der t-Achse verschoben. Demnach erhält man für die Funktion s_2 $s_2(t) = s(t - 4) = 0,005 \cdot t^4 - 0,336 \cdot t^3 + 7,938 \cdot t^2 - 74,088 \cdot t + 189,568$ mit $t \in [12,57; 24,64]$. <i>Andere Lösungen sind möglich, z.B. durch Aufstellen eines Gleichungssystems für eine geeignete ganzrationale Funktion s_2 und Lösung desselben.</i>			3
Punktsummen	12	15	3

Kernfach Mathematik

Aufgabe 1: Analysis

Die Wirkstoffmenge des Schmerzmedikaments DOLOROSA im Blutkreislauf wird innerhalb der ersten sechs Stunden nach der Einnahme des Medikaments in einer ersten Modellierung vereinfacht mittels einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades beschrieben.

Dabei werden die Werte der t -Achse als Zeit in Stunden nach der Einnahme, die Funktionswerte $f(t)$ als Menge des Wirkstoffes im Blut in mg aufgefasst.

- a) Aus den Testdaten von Probanden, die vor Einnahme von DOLOROSA keinen Wirkstoff im Blut hatten, geht hervor, dass sich eine Stunde nach der Einnahme des Medikaments 125 mg des Wirkstoffes im Blut befinden. Nach einer weiteren Stunde wird die maximale Wirkstoffmenge gemessen, und nach insgesamt sechs Stunden ist der Wirkstoff vollständig abgebaut.
- Die Abbildungen unten zeigen vier Funktionsgraphen. Geben Sie sowohl den zur Funktion f als auch den zur Ableitungsfunktion f' gehörenden Graphen an und begründen Sie Ihre Auswahl kurz.

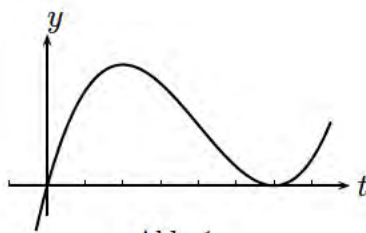


Abb. 1

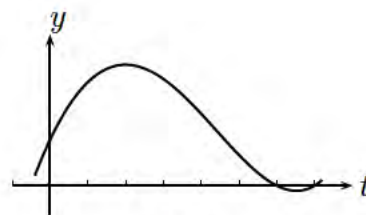


Abb. 2

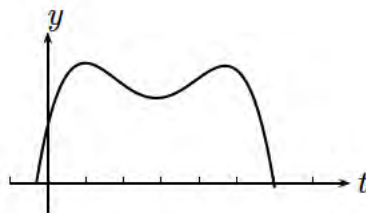


Abb. 3

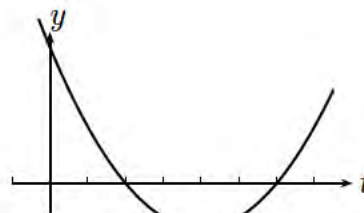


Abb. 4

- Leiten Sie begründet aus den gegebenen Daten eine Funktionsgleichung für f her.

(10 P)

Kernfach Mathematik

Verwenden Sie im Folgenden die Funktionsgleichung $f(t) = 5t^3 - 60t^2 + 180t$.

- b) • Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f auf Wendepunkte und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.
- Berechnen Sie, wie groß die Zunahmerate der Wirkstoffmenge eine Stunde nach der Einnahme des Medikaments ist.

(6 P)

- c) Ab dem Zeitpunkt $t = 2$ lässt sich der weitere Verlauf der Wirkstoffmenge im Blut besser durch eine Funktion g der Funktionenschar $g_{a,k}(t) = k \cdot (t - a) \cdot e^{-t}$ (für $t \geq 2$, k und a sind reelle Zahlen mit $k \neq 0$) beschreiben.

- Bestimmen Sie diejenige Funktion g der Funktionenschar $g_{a,k}$, deren Graph denselben Hochpunkt wie der Graph von f besitzt.

Verwenden Sie im Folgenden die Funktionsgleichung $g(t) = 160 \cdot e^2 \cdot (t - 1) \cdot e^{-t}$.

- Ermitteln Sie mit Hilfe der Stammfunktionen von f und g den Inhalt der gesamten Fläche zwischen dem Graphen zu f und der t -Achse über dem Intervall $[0; 2]$ und dem Graphen zu g und der t -Achse über dem Intervall $[2; 10]$.

(11 P)

- d) Betrachten Sie die Funktionenschar h_a mit $h_a(t) = a \cdot (t - a) \cdot e^{-t}$ und $a > 0$. Zeigen Sie, dass der Graph zu h_1 keinen der anderen Graphen der Funktionenschar rechtwinklig schneidet.

(3 P)

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) Da die Graphen in Abb. 2, Abb. 3 und Abb. 4 nicht durch den Ursprung gehen, können sie f nicht darstellen, weil zum Zeitpunkt $t = 0$ noch kein Medikament genommen worden ist. Daher zeigt Abb. 1 den Graphen der Funktion f. Zum Zeitpunkt $t = 2$ hat die Wirkstoffmenge ihr Maximum erreicht. Also muss f' an dieser Stelle den Wert 0 annehmen. Dies ist nur in Abb. 4 der Fall. Funktionsgleichung: $f(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$ für reelle Zahlen a, b, c, d; $f'(t) = 3 \cdot a \cdot t^2 + 2 \cdot b \cdot t + c$ An die Funktion f sind folgende Forderungen zu stellen: (1) $f(0) = 0$ (vor Einnahme kein Wirkstoff im Blut) (2) $f(1) = 125$ (Wirkstoffmenge nach 1 Stunde 125 mg) (3) $f(6) = 0$ (Wirkstoffmenge nach 6 Stunden abgebaut) (4) $f'(2) = 0$ (höchste Wirkstoffmenge nach 2 Stunden) Hieraus ergeben sich folgende Gleichungen: (1) $0 = d$ (2) $125 = a + b + c$ (3) $0 = 216a + 36b + 6c \Rightarrow 0 = 36a + 6b + c$ (4) $0 = 12a + 4b + c$ Aus dem Gleichungssystem erhält man die Funktionsgleichung $f(t) = 5t^3 - 60t^2 + 180t$.	1	2	
	1		
	2		
	2		
	2		

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe b) <u>Wendepunkte:</u> Die ersten drei Ableitungen von f sind $f'(t) = 15t^2 - 120t + 180,$ $f''(t) = 30t - 120,$ $f'''(t) = 30.$ Notwendig für einen Wendepunkt an der Stelle t ist $f''(t) = 0$. Aus $0 = 30t - 120$ folgt $t = 4$. Hinreichend für einen Wendepunkt an der Stelle t ist $f''(t) = 0$ und $f'''(t) \neq 0$. Da $f'''(4) = 30 \neq 0$ und $f(4) = 5 \cdot 4^3 - 60 \cdot 4^2 + 180 \cdot 4 = 80$ ist, ergibt sich der einzige Wendepunkt $W(4 80)$. <u>Interpretation:</u> Nach 4 Stunden liegt die lokal größte Abnahmerate des Wirkstoffs im Blut vor. <u>Wirkstoffzunahmerate eine Stunde nach Einnahme:</u> Wegen $f'(1) = 75$ ist die Zunahmerate der Wirkstoffmenge eine Stunde nach Einnahme des Medikaments 75 mg/h.	2		
Teilaufgabe c) Da das Maximum von f bei $t = 2$ liegt und $f(2) = 160$ ist, muss für g Folgendes gelten: (I) $g(2) = k \cdot (2 - a) \cdot e^{-2} = 160$ (II) $g'(2) = 0$ Es ist $g'(t) = k \cdot e^{-t} - k \cdot (t - a) \cdot e^{-t}$, also $g'(2) = k \cdot e^{-2} - k \cdot (2 - a) \cdot e^{-2} = 0$ $k = k \cdot (2 - a)$ $a = 1, \text{ da } k \neq 0 \text{ ist.}$ $a = 1$ in (I) ergibt $k = 160 \cdot e^2$, also ist $g(t) = 160 \cdot e^2 \cdot (t - 1) \cdot e^{-t}$.		1	
		2	
		1	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Die zu betrachtende Fläche setzt sich aus zwei Teilflächen zusammen. Weil beide Graphen im jeweiligen Intervall oberhalb der t-Achse verlaufen, werden keine Betragsstriche benötigt. Es ist $A_f = \int_0^2 (5t^3 - 60t^2 + 180t) dt = \left[\frac{5}{4}t^4 - 20t^3 + 90t^2 \right]_0^2$ $= 20 - 160 + 360 = 220.$ Eine Stammfunktion von g erhält man durch partielle Integration. $\begin{aligned} \int (160 e^2 (t-1) e^{-t}) dt &= 160 e^2 \left((t-1) (-e^{-t}) - \int (-e^{-t}) dt \right) \\ &= 160 e^2 \left((1-t) e^{-t} - e^{-t} \right) + C \\ &= -160 e^2 t e^{-t} + C \end{aligned}$ $A_g = \left[-160 e^2 t e^{-t} \right]_2^{10} \approx 319,46$ Mit $A_f + A_g \approx 539,46$ beträgt der Inhalt der Gesamtfläche ca. 539,46 FE.		1	
		2	
		3	
		1	
Teilaufgabe d) Für eine Schnittstelle t gilt $\begin{aligned} h_1(t) &= h_a(t) && \text{mit } a \neq 1 \\ (t-1) e^{-t} &= a(t-a) e^{-t} \\ t-1 &= a(t-a) \\ t &= \frac{a^2-1}{a-1} = a+1. \end{aligned}$ Die einzige Schnittstelle ist $t = a+1$. Es ist $h'_a(t) = a \cdot e^{-t} - a \cdot (t-a) \cdot e^{-t} = a \cdot (a+1-t) \cdot e^{-t}$. Daher ist die Steigung des Graphen zu h_a an der Schnittstelle $h'_a(a+1) = a \cdot (a+1-(a+1)) \cdot e^{-(a+1)} = 0$. Der Graph von h_a hat also im Schnittpunkt eine waagerechte Tangente. Um den Graphen zu h_a dort rechtwinklig zu schneiden, müsste der Graph zu h_1 an dieser Stelle eine Tangente parallel zur y-Achse aufweisen, was nicht möglich ist, weil h'_1 an dieser Stelle einen endlichen Wert annimmt.			3
Punktsummen	12	15	3

Kernfach Mathematik

Aufgabe 2: Analysis

Für ein Dentallabor soll zu Werbezwecken ein Firmenlogo entwickelt werden, das die Form des sichtbaren Teiles eines Backenzahns hat. Der Umriss wird durch einen Teil des Graphen einer ganzrationalen Funktion f modelliert, die für $x \in \mathbb{R}$ durch die Funktionsgleichung

$$f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 4$$

gegeben ist. Eine Längeneinheit entspricht dabei 1 m.

- a) • Begründen Sie, dass der Graph der Funktion f achsensymmetrisch zur y -Achse ist, und zeigen Sie, dass $x_1 = 2\sqrt{2}$ eine Nullstelle von f ist.
- Das Labor hat für die Anfertigung des Logos eine Bedingung vorgegeben: Der Höhenunterschied zwischen Hochpunkt und Tiefpunkt des Logos soll genau 0,5 m betragen. Zeigen Sie, dass die Modellierung mit der Funktion f diese Bedingung erfüllt.
 - Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f im Intervall $[-3; 3]$.

(9 P)

- b) Das Logo soll aus einer Kunststoffplatte gefräst werden.

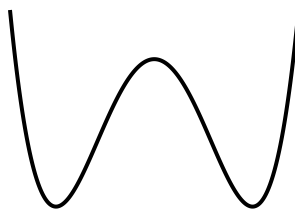
- Berechnen Sie den minimalen Flächeninhalt A einer trapezförmigen Kunststoffplatte, wenn deren Unterkante die x -Achse ist und die Platte seitlich durch die Tangenten in den Nullstellen der modellierenden Funktion begrenzt wird.
[Kontrolle: $A \approx 23,07 \text{ m}^2$]
- Bestimmen Sie den prozentualen Materialverlust bei der Herstellung des Logos.

(10 P)

- c) Innerhalb des Logos soll der Name des Dentallabors in einem Rechteck erscheinen. Bestimmen Sie die Breite dieses Rechtecks so, dass dessen Flächeninhalt maximal ist.

(8 P)

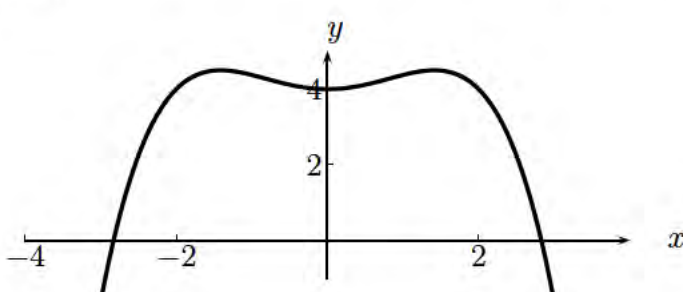
- d) Das Firmenlogo soll nun durch eine Zahnwurzel zu einem vollständigen Zahn, ähnlich der Abbildung unten, ergänzt werden. Die Zahnwurzel, also der nicht sichtbare untere Teil des Zahnes, soll durch eine ganzrationale Funktion p vierten Grades modelliert werden.



Begründen Sie, dass keine Funktion p vierten Grades gefunden werden kann, so dass die Graphen von f und p knickfrei ineinander übergehen.

(3 P)

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) Da f eine ganzrationale Funktion ist und der Funktionsterm von f nur Potenzen von x mit geraden Exponenten enthält, ist der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse. Wegen $f(2\sqrt{2}) = -\frac{1}{8} \cdot 64 + \frac{1}{2} \cdot 8 + 4 = 0$ ist $x_1 = 2\sqrt{2}$ eine Nullstelle von f. Für die Funktionsgleichungen der Ableitungen erhält man $f'(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x$ und $f''(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 1$. Eine notwendige Bedingung für ein lokales Extremum von f an der Stelle x ist $f'(x) = 0$. $f'(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x = 0$ $x \left(-\frac{1}{2}x^2 + 1 \right) = 0$ $x = 0 \vee \frac{1}{2}x^2 = 1$ $x = 0 \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$ Da $f'(0) = 0$ und $f''(0) = 1 > 0$ ist, liegt an der Stelle 0 ein lokales Minimum vor. Da $f'(\sqrt{2}) = f'(-\sqrt{2}) = 0$ und $f''(\sqrt{2}) = f''(-\sqrt{2}) = -2 < 0$ gelten, liegen an den Stellen $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ lokale Maxima vor. Wegen $f(\sqrt{2}) - f(0) = 4,5 - 4 = 0,5$ erfüllt die Funktion f die Vorgaben des Dentallabors. 	1		
	1		
	1		
	3		
	1		
	2		

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe b) Die y-Koordinate der Hochpunkte ist $f(\sqrt{2}) = 4,5$. Daher beträgt die Höhe der trapezförmigen Platte 4,5 m. Das Trapez wird durch die x-Achse, die Tangenten in den Nullstellen von f und die Gerade $g(x) = h = 4,5$ begrenzt. Um die obere Breite c des Trapezes zu bestimmen, wird der Schnittpunkt der Tangente t mit g bestimmt. Für die Steigung m der Tangente t mit $t(x) = mx + n$ an den Graphen von f an der Nullstelle x_1 gilt $m = f'(2\sqrt{2}) = -\frac{1}{2}(2\sqrt{2})^3 + 2\sqrt{2} = -6\sqrt{2}.$ Da der Punkt mit den Koordinaten $(2\sqrt{2} 0)$ auf dem Graphen von t liegt, folgt $-6\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} + n = 0$, also $n = 24$. Für die Gleichung der Tangente gilt $t(x) = -6\sqrt{2} \cdot x + 24$. Wegen $t(x) = g(x) \Leftrightarrow -6\sqrt{2} \cdot x + 24 = 4,5 \Leftrightarrow x = \frac{13}{8}\sqrt{2}$ schneiden sich die Graphen von t und g an der Stelle $x_S = \frac{13}{8}\sqrt{2}$. Für den Flächeninhalt A des Trapezes gilt somit aus Symmetriegründen $A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot h \cdot (x_1 + x_S) = 4,5 \cdot (2\sqrt{2} + \frac{13}{8}\sqrt{2}) = \frac{261}{16}\sqrt{2} \approx 23,07.$ Die trapezförmige Platte muss mindestens 23,07 m² groß sein. <i>Es gibt auch andere Lösungswege, z.B. können vom Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen 4,5 m und $4\sqrt{2}$ m die Flächeninhalte von zwei rechtwinkligen Dreiecken subtrahiert werden, welche man über die Höhe h und die Steigung $f'(2\sqrt{2}) = -6\sqrt{2}$ berechnen kann.</i> Für den Flächeninhalt L des Logos gilt $L = 2 \cdot \int_0^{2\sqrt{2}} f(x) dx = 2 \cdot \int_0^{2\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 4\right) dx$ $= 2 \cdot \left[-\frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{6}x^3 + 4x\right]_0^{2\sqrt{2}} = \frac{224}{15}\sqrt{2} \approx 21,12.$ Der prozentuale Materialverlust bei der Herstellung beträgt $\frac{A-L}{A} \approx 8,5\%$.		1	
		1	
		3	
		1	
		1	
		2	
	1		

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe c) Für den Flächeninhalt des einbeschriebenen Rechtecks gilt $A(x) = 2x \cdot f(x) = -\frac{1}{4}x^5 + x^3 + 8x,$ wobei $x \in [0; 2\sqrt{2}]$ die halbe Rechteckbreite und $f(x)$ die zugehörige Höhe ist. Gesucht ist nun x so, dass A maximal ist. Für die Funktionsgleichungen der Ableitungen erhält man $A'(x) = -\frac{5}{4}x^4 + 3x^2 + 8 \text{ und } A''(x) = -5x^3 + 6x.$ Eine notwendige Bedingung für ein lokales Extremum von A an der Stelle x ist $A'(x) = 0$. $A'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{4}x^4 + 3x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^4 - \frac{12}{5}x^2 - \frac{32}{5} = 0$ Setze $z = x^2$: $z^2 - \frac{12}{5}z - \frac{32}{5} = 0 \Leftrightarrow z = 4 \vee z = -\frac{8}{5}$ Daraus folgt $x = 2 \vee x = -2$. Eine hinreichende Bedingung für ein lokales Maximum von A an der Stelle x ist $A'(x) = 0$ und $A''(x) < 0$. Da $A''(2) = -5 \cdot (2)^3 + 6 \cdot (2) = -28 < 0$ ist, hat A bei $x_A = 2$ ein lokales Maximum mit dem Wert $A(2) = 2 \cdot 2 \cdot f(2) > 0$. Wegen $A(0) = A(2\sqrt{2}) = 0$ ist dies auch das globale Maximum auf dem betrachteten Intervall $[0; 2\sqrt{2}]$. Da x_A die halbe Rechteckbreite ist, ist der Rechteckflächeninhalt für eine Breite von 4 m maximal. Wegen $f(2) = 4 \leq f(0)$ liegt dieses Rechteck auch vollständig innerhalb der Logofläche.		1	
		1	
		1	
		2	
		2	
		1	

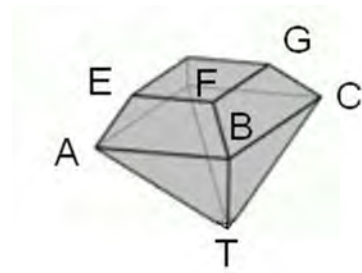
Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe d) Die Graphen von f und p schneiden sich in den Nullstellen von f. f ist in $x_1 = 2\sqrt{2}$ differenzierbar mit $f'(2\sqrt{2}) = -6\sqrt{2} < 0$. Die Wurzelspitzen sind die Tiefpunkte von p, die im 3. und 4. Quadranten liegen. Die zugehörigen Extremstellen seien x_3 und x_4 mit $x_3 < x_4$. Da p eine ganzrationale Funktion vierten Grades und für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist, muss der Graph von p für $x > x_4$ monoton steigend sein. Insbesondere gilt daher $p'(2\sqrt{2}) \geq 0$. Da $f'(2\sqrt{2}) \neq p'(2\sqrt{2})$ ist, entsteht bei der Modellierung des Zahnumrisses an der Stelle $x_1 = 2\sqrt{2}$ ein Knick. <i>Alternativ kann auch argumentiert werden, dass die Knickfreiheit bedeuten würde, dass es an einer Stelle des zusammengesetzten Logos eine senkrechte Tangente geben müsste. Eine ganzrationale Funktion (auch eine solche 4. Grades) weist aber an keiner Stelle eine senkrechte Tangente auf, da sie auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist.</i> <i>Der Prüfling wird sich hier evtl. anders ausdrücken. Für die richtige Idee und die zielgerichtete Untersuchung der Steigungen in der Nähe des Schnittpunktes sollen die entsprechenden Punkte vergeben werden.</i>			3
Punktsummen	12	15	3

Kernfach Mathematik

Aufgabe 3: Analytische Geometrie

Ein Körper ist aus einer Pyramide und einem aufgesetzten Pyramidenstumpf mit quadratischer Deckfläche zusammengesetzt. Zum Pyramidenstumpf gehören die Eckpunkte $E(6,5 \mid 4 \mid 4)$ und $F(4 \mid 6,5 \mid 4)$. Die Pyramide besitzt die Spitze $T(4 \mid 4 \mid 0,5)$. Bekannt sind ferner die Punkte $A(8 \mid 4 \mid 3)$, $B(4 \mid 8 \mid 3)$ und $C(0 \mid 4 \mid 3)$.



- a) • Zeigen Sie rechnerisch, dass das Dreieck ABC gleichschenkelig und rechtwinklig ist.
- Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D so, dass das Viereck $ABCD$ ein Quadrat ist und berechnen Sie den Mittelpunkt P einer Diagonalen.
 - Der Pyramidenstumpf ist durch Abtrennen einer Pyramide entstanden. Berechnen Sie die Koordinaten der ehemaligen Pyramidenspitze S .
 - Zeigen Sie, dass $\overrightarrow{EF} = \frac{5}{8} \cdot \overrightarrow{AB}$ gilt und berechnen Sie die Koordinaten des Punktes G .
 - Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E_{ABT} in Koordinatenform und berechnen Sie den Schnittwinkel zwischen den Ebenen E_{ABT} und E_{ABC} .
[Kontrolle: $E_{ABT} : 5x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 36$.]
- (18 P)
- b) In dem Körper befindet sich eine Kugel K mit dem Mittelpunkt $M(4 \mid 4 \mid 2,5)$ und dem Radius 1,4.
- Untersuchen Sie, ob es gemeinsame Punkte der Ebene E_{ABT} mit der Kugel K gibt.
 - Ermitteln Sie den Mittelpunkt M^* und den Radius r_S des Schnittkreises der Kugel K mit der Ebene E_{ABC} .
- (9 P)
- c) Eine Kugel mit dem Radius 1,4 „fällt“ so in die Pyramide, dass sie alle vier Seitenflächen berührt.
- Beschreiben Sie möglichst detailliert ein Verfahren, mit dem Sie den neuen Kugelmittelpunkt M' berechnen können. Die Rechnung ist nicht erforderlich.
- (3 P)

Kernfach Mathematik

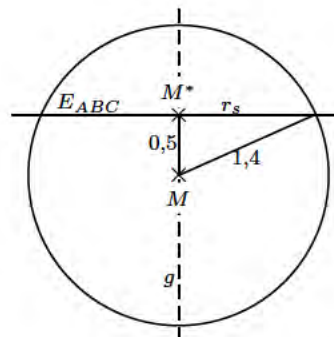
Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) Zum Nachweis der Gleichschenkligkeit des Dreiecks ABC vergleicht man die Längen der Seitenvektoren. $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$ Es gilt $\overrightarrow{BA} = \sqrt{16 + 16 + 0} = \overrightarrow{BC}$. Das Skalarprodukt ist $\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = -16 + 16 = 0$, deshalb ist der Winkel $\sphericalangle CBA$ ein rechter Winkel. $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$ Der Eckpunkt des Quadrates ist also $D(4 0 3)$. Wegen $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist $P(4 4 3)$. Die Spitze der abgetrennten Pyramide ist der Schnittpunkt der Geraden durch A und E mit der Geraden durch B und F. $g_{AE} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1,5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } g_{BF} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1,5 \\ 1 \end{pmatrix}$ Durch Gleichsetzen der Terme entsteht das Gleichungssystem $\begin{aligned} 4 &= 1,5 r \\ -4 &= -1,5 s \\ 0 &= -r + s \end{aligned}$ mit der Lösung $r = s = \frac{8}{3}$. Der Schnittpunkt lautet $S(4 4 \frac{17}{3})$.	1		
	1		
	1		
	1		
	1		
		2	
		2	

Kernfach Mathematik

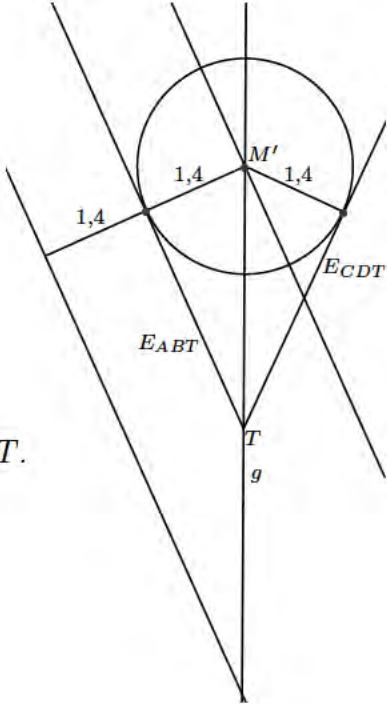
Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Es ist $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6,5 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6,5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ 2,5 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{5}{8} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{5}{8} \cdot \overrightarrow{AB}.$	1		
Da die Deckfläche ein Quadrat ist, das in einer zu E_{ABC} parallelen Ebene liegt, verlaufen auch die Kanten $\overline{BC}$ und $\overline{FG}$ parallel zueinander und daher ist $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OF} + \frac{5}{8} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6,5 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{5}{8} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$ Also hat G die Koordinaten $(1,5 \mid 4 \mid 4)$.	2		
Wegen $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BT} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -16 \end{pmatrix}$ kann $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor benutzt werden.	2		
Damit lautet eine Koordinatenform $E_{ABT} : 5x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 5 \cdot 8 + 5 \cdot 4 - 8 \cdot 3 = 36.$	1		
Es ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene E_{ABC}.	1		
Der Schnittwinkel zwischen den Ebenen ist der Winkel φ zwischen den Normalvektoren. $\cos(\varphi) = \frac{\left \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} \right }{\sqrt{1} \cdot \sqrt{114}} = \frac{ -8 }{\sqrt{114}} \approx 0,749, \text{ also ist } \varphi \approx 41,47^\circ.$		2	

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe b) Es gibt dann gemeinsame Punkte der Ebene E_{ABT} mit der Kugel K, wenn der Abstand des Kugelmittelpunktes zur Ebene kleiner ist als der Kugelradius. Der Abstand d des Kugelmittelpunktes M zur Ebene E_{ABT} ist $d = \left \frac{\vec{n}}{ \vec{n} } \circ \overrightarrow{AM} \right = \left \frac{1}{\sqrt{114}} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -0,5 \end{pmatrix} \right = \left \frac{-16}{\sqrt{114}} \right \approx 1,4985.$ Wegen $d > r$ gibt es keine gemeinsamen Punkte. Der Mittelpunkt M^* des Schnittkreises ist der Fußpunkt des Lotes, das vom Kugelmittelpunkt auf die Ebene E_{ABC} gefällt wird. Die Gerade, die durch den Kugelmittelpunkt $M(4 4 2,5)$ verläuft und senkrecht zur Ebene E_{ABC} ist, kann durch die Gleichung $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2,5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dargestellt werden.}$ Da für alle Punkte der Ebenen E_{ABC} $x_3 = 3$ gilt, folgt $2,5 + t = 3 \Leftrightarrow t = 0,5$. Dies ergibt den Mittelpunkt des Schnittkreises $M^*(4 4 3)$. Da der Abstand von M zu M^* 0,5 und der Kugelradius 1,4 beträgt, folgt nach dem Satz des Pythagoras für den Schnittkreisradius r_s: $r_s^2 = 1,4^2 - 0,5^2 = 1,71.$ Somit gilt $r_s = \sqrt{1,71} \approx 1,31$.		1	
		2	
		1	
		2	
		1	
		2	

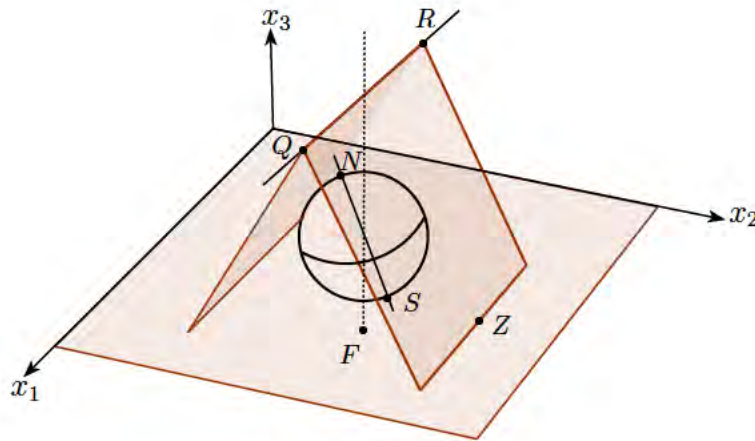


Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe c) Aus Symmetriegründen muss der Mittelpunkt M' auf der Geraden g aus Teilaufgabe b) liegen. Mit Hilfe der HNF der Ebene E_{ABT} können alle Punkte von g ermittelt werden, die von E_{ABT} den Abstand 1,4 besitzen. Nur einer dieser Punkte liegt oberhalb von T.			
			1
			1
			1
Punktsummen	12	15	3

Kernfach Mathematik

Aufgabe 4: Analytische Geometrie



Ähnlich wie auf Schloss Gottorf wird auf einem Ausstellungsgelände ein begehrbarer Globus mit dem Mittelpunkt $M(5 \mid 4,4 \mid 2,8)$ und dem Durchmesser $d = 4,1$ m installiert. Die durch den Kugelnordpol N und den Kugelsüdpol S verlaufende Drehachse ist gegenüber der Senkrechten geneigt. Der Erdboden liegt in der x_1x_2 -Ebene. Auf ihm liegt lotrecht unter dem Kugelmittelpunkt der Punkt $F(5 \mid 4,4 \mid 0)$. Eine Längeneinheit entspricht 1 Meter. Geben Sie Ihre Ergebnisse auf 2 Nachkommastellen gerundet an.

- a) • Geben Sie eine Kugelgleichung an, die den Globus beschreibt, und berechnen Sie, in welcher Höhe über dem Erdboden sich der unterste Punkt des Globus befindet.
- Die Drehachse durchstößt den Globus im Nordpol $N(5 \mid 3,56 \mid 4,67)$. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden a , auf der die Drehachse liegt.
- [Eine mögliche Lösung lautet $a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4,4 \\ 2,8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0,84 \\ -1,87 \end{pmatrix}$.]
- Berechnen Sie den Punkt P , in dem die Gerade a den Erdboden schneidet.
- Berechnen Sie, um welchen Winkel α die Drehachse gegenüber der Senkrechten geneigt ist.
- Ermitteln Sie eine Gleichung der Äquatorialebene in Koordinatenform.
[Zur Kontrolle: Eine mögliche Lösung ist $E_{\tilde{A}} : -0,84 x_2 + 1,87 x_3 = 1,54$.]

(11 P)

Kernfach Mathematik

b) Als Schutz kann ein Dach über den Globus gesetzt werden (siehe Abbildung). Die Enden des Dachfirstes sind $Q(8 \mid 4,4 \mid 8)$ und $R(2 \mid 4,4 \mid 8)$. Der Punkt $Z(5 \mid 8,4 \mid 0)$ liegt auf der Dachfläche, die in der Dachebene E_D liegt.

- Zeigen Sie, dass der Mittelpunkt des Dachfirstes und die Punkte M und F auf einer Geraden liegen.
- Berechnen Sie den Abstand e der Dachebene E_D zum Globus.
- Bestimmen Sie den Punkt T der Dachebene E_D , der dem Globus am nächsten liegt.
[Kontrolle: Das Dach liegt in der Ebene $E_D : 2x_2 + x_3 = 16,8$.]

(14 P)

c) Für jedes $k \in \mathbb{R}$ ist mit $E_k : 8x_2 + (k - 4,4)x_3 = 8k$ eine Ebene E_k gegeben.

- Zeigen Sie, dass jede Ebene E_k die Punkte Q und R enthält.
- Es gibt Punkte, die in keiner der Ebenen E_k enthalten sind. Bestimmen Sie einen solchen Punkt.

(5 P)

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) Die Kugelgleichung lautet $K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4,4 \\ 2,8 \end{pmatrix} \right]^2 = \left(\frac{d}{2} \right)^2 = 2,05^2.$ Da sich der Mittelpunkt des Globus 2,8 m über dem Erdboden befindet und der Radius 2,05 m beträgt, befindet sich der unterste Punkt des Globus $2,8 \text{ m} - 2,05 \text{ m} = 0,75 \text{ m}$ über dem Erdboden. Die Geradengleichung durch N und M lautet $a: \vec{x} = \overrightarrow{OM} + t \cdot \overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4,4 \\ 2,8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -0,84 \\ 1,87 \end{pmatrix}.$ Den Schnittpunkt von a mit der x_1x_2-Ebene (dem Erdboden) erhält man über die Betrachtung der x_3-Koordinate. $\begin{aligned} x_3 &= 0 \\ 2,8 + 1,87t &= 0 \\ t &\approx -1,50 \end{aligned}$ $\overrightarrow{OP} \approx \begin{pmatrix} 5 \\ 4,4 \\ 2,8 \end{pmatrix} - 1,50 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -0,84 \\ 1,87 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 5 \\ 5,66 \\ 0 \end{pmatrix}$ P hat also die Koordinaten $(5 \mid 5,66 \mid 0)$. Da die senkrechte Richtung durch den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ beschrieben wird, gilt für den Winkel zwischen dieser Richtung und der Richtung der Drehachse $\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -0,84 \\ 1,87 \end{pmatrix}}{1 \cdot \sqrt{4,2025}} = \frac{1,87}{2,05} \approx 0,912.$ Somit ist die Drehachse um ca. $24,19^\circ$ gegenüber der Senkrechten geneigt. ($155,81^\circ$ wird ebenfalls akzeptiert.)	1		
	1		
	1		
	2		
	1		
	1		
		2	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Der Richtungsvektor der Geraden a ist ein Normalenvektor der Ebene $E_{\tilde{A}}$ und der Mittelpunkt M liegt in dieser Ebene. So ergibt sich $E_{\tilde{A}}: -0,84 x_2 + 1,87 x_3 = -0,84 \cdot 4,4 + 1,87 \cdot 2,8 = 1,54.$		1	
		1	
Teilaufgabe b) Der Mittelpunkt M_{QR} des Dachfirstes hat die Koordinaten $M_{QR}(\frac{8+2}{2} 4,4 8)$, d.h. $M_{QR}(5 4,4 8)$. Die Gerade durch F und M ist gegeben durch $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4,4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Mit $t = 8$ ergeben sich die Koordinaten von M_{QR}, und damit liegen die 3 Punkte auf einer Geraden.	2		
Mögliche Richtungsvektoren von E_D sind $\vec{ZQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{ZR} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}.$		1	
Ein Normalenvektor von E_D erhält man durch $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -48 \\ -24 \end{pmatrix}$, also kann $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor verwendet werden.		2	
Der Abstand d des Kugelmittelpunktes M zur Ebene E_D berechnet sich zu $d = \left \frac{\vec{n}}{ \vec{n} } \circ \vec{ZM} \right = \left \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2,8 \end{pmatrix} \right = \left \frac{-5,2}{\sqrt{5}} \right \approx 2,33.$			2
Wegen $2,33 - 2,05 = 0,28$ ist der Abstand der Dachebene E_D zum Globus ca. 28 cm.			1

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Die Gerade h mit $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4,4 \\ 2,8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ verläuft senkrecht zur Dachebene E_D. Auf dieser Geraden liegen der Mittelpunkt M und der gesuchte Punkt T der Ebene. Eine Koordinatenform der Ebene E_D ist $2x_2 + x_3 = 2 \cdot 8,4 + 0 = 16,8$. Durch Einsetzen der Koordinaten von h in die Koordinatenform von E_D ergibt sich $2 \cdot (4,4 + 2r) + 2,8 + r = 16,8$ $5r = 5,2$ $r = 1,04.$ $\vec{OT} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4,4 \\ 2,8 \end{pmatrix} + 1,04 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6,48 \\ 3,84 \end{pmatrix}.$ T hat also die Koordinaten $(5 \mid 6,48 \mid 3,84)$.		2	
		1	
		2	
		1	
Teilaufgabe c) Durch Einsetzen der Koordinaten von Q bzw. R in die Gleichung E_k ergibt sich $8 \cdot 4,4 + (k - 4,4) \cdot 8 = 8k$ $35,2 + 8k - 35,2 = 8k$ $8k = 8k.$ Somit liegen beide Punkte für alle $k \in \mathbb{R}$ in jeder Ebene E_k. Es sind Zahlen x_1, x_2, x_3 gesucht, für die die Gleichung $8x_2 + (k - 4,4)x_3 = 8k$ für kein $k \in \mathbb{R}$ erfüllbar ist. Die Gleichung ist gleichwertig zu $8x_2 - 4,4x_3 = 8k - kx_3$ und $8x_2 - 4,4x_3 = (8 - x_3)k$. Mit $x_3 = 8$ ergibt sich $8x_2 - 4,4 \cdot 8 = 0$ $8x_2 = 35,2$ $x_2 = 4,4.$ Somit liegt jeder Punkt mit $x_3 = 8$ und $x_2 \neq 4,4$ in keiner der Ebenen E_k, so auch z.B. $W(1 \mid 1 \mid 8)$.		2	
			3
Punktsummen	12	15	3

Kernfach Mathematik

Aufgabe 5: Stochastik

Vorbemerkung: Führen Sie stets geeignete Zufallsvariablen und Namen für Ereignisse ein. Machen Sie auch Angaben über die Verteilung der jeweiligen Zufallsvariablen.

Nach einer Veröffentlichung zur Unfallstatistik beruhten im Jahr 2009 378 000 Unfälle mit Personenschaden im Straßenverkehr auf einem Fehlverhalten der Fahrzeugführer/innen. Der Großteil hiervon, nämlich 260 000 Unfälle, hatte dabei ein Fehlverhalten eines PKW-Fahrers/einer PKW-Fahrerin als Ursache. Bei den oben genannten 378 000 Unfällen war das häufigste festgestellte Fehlverhalten eine nicht angepasste Geschwindigkeit, die in 57 000 Fällen ermittelt wurde. 40 000 dieser Verstöße wurden dabei von PKW-Fahrern/ PKW-Fahrerinnen begangen.

- a)
- Erstellen Sie aus den Daten eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel mit auf 4 Nachkommastellen gerundeten relativen Häufigkeiten. Bezeichnen Sie mit G das Ereignis „Die Ursache für den Unfall ist eine nicht angepasste Geschwindigkeit“, A kennzeichne das Ereignis „Die Person fuhr einen PKW“.
 - Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein von einem/einer zufällig auszuwählenden PKW-Fahrer/PKW-Fahrerin verursachter Unfall eine nicht angepasste Geschwindigkeit als Ursache hatte.

(5 P)

- b) Im Jahr 2009 wurden etwa 190 000 Personen wegen Straftaten im Straßenverkehr verurteilt. In 54 % dieser Fälle ging es dabei um Alkoholdelikte. 85 % der verurteilten Personen, die alkoholisiert waren, waren zudem männlich. Für eine Aufklärungskampagne sollen die Straftaten, in denen es um Alkoholdelikte ging, genauer untersucht werden.

- Geben Sie an, wie viele Männer 2009 wegen Alkoholvergehen im Straßenverkehr verurteilt wurden.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter 50 zufällig auszuwählenden Personen, die wegen Alkoholvergehen im Straßenverkehr verurteilt wurden, genau 43 Männer sind.
- Berechnen Sie mit einem Näherungsverfahren die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 500 zufällig auszuwählenden Personen, die wegen Alkoholvergehen im Straßenverkehr verurteilt wurden, mindestens 420 Männer sind.
- Bestimmen Sie, wie viele Fälle von Verurteilungen aufgrund von Alkoholdelikten im Straßenverkehr man mindestens auswählen müsste, um mit einer Wahrscheinlichkeit von über 95 % wenigstens eine Frau zu finden.

(12 P)

Kernfach Mathematik

- c) Bei etwa 4,4 % der Unfälle, die im Jahr 2009 einen Personenschaden zur Folge hatten, war Alkoholeinfluss die Unfallursache. Die mit der Aufklärungskampagne von Aufgabenteil b) beauftragte Agentur behauptet, dass sich nach der Durchführung eines Probedurchlaufs in einem repräsentativen Landkreis der Anteil der unter Alkoholeinfluss verursachten Unfälle mit Personenschaden reduziert haben soll.

Entwickeln Sie einen Hypothesentest mit dem Ziel, die Behauptung der Agentur über eine Stichprobe von 450 Unfällen mit Personenschaden auf einem Signifikanzniveau von 1 % zu bestätigen. Geben Sie die dazugehörige Entscheidungsregel an.

(10 P)

- d) Die angesprochene Aufklärungskampagne sollte vor allem junge Verkehrsteilnehmer/innen (bis 25 Jahre) ansprechen. Eine repräsentative Umfrage nach dem Probedurchlauf ergab das folgende Ergebnis:

- 45 % der befragten Personen hatten von der Kampagne gehört und waren höchstens 25 Jahre alt.
- 10 % derjenigen, die von der Kampagne gehört hatten, waren älter als 25 Jahre.
- 40 % derjenigen, die nicht von der Kampagne gehört hatten, waren älter als 25 Jahre.

Zeigen Sie, dass drei Viertel der befragten Personen in dieser Umfrage höchstens 25 Jahre alt waren.

(3 P)

Kernfach Mathematik

Tabelle zur Normalverteilung, Werte der Gaußschen Integralfunktion Φ

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$
0,01	0,4960	0,5040	0,51	0,3050	0,6950	1,01	0,1562	0,8438
0,02	0,4920	0,5080	0,52	0,3015	0,6985	1,02	0,1539	0,8461
0,03	0,4880	0,5120	0,53	0,2981	0,7019	1,03	0,1515	0,8485
0,04	0,4840	0,5160	0,54	0,2946	0,7054	1,04	0,1492	0,8508
0,05	0,4801	0,5199	0,55	0,2912	0,7088	1,05	0,1469	0,8531
0,06	0,4761	0,5239	0,56	0,2877	0,7123	1,06	0,1446	0,8554
0,07	0,4721	0,5279	0,57	0,2843	0,7157	1,07	0,1423	0,8577
0,08	0,4681	0,5319	0,58	0,2810	0,7190	1,08	0,1401	0,8599
0,09	0,4641	0,5359	0,59	0,2776	0,7224	1,09	0,1379	0,8621
0,10	0,4602	0,5398	0,60	0,2743	0,7257	1,10	0,1357	0,8643
0,11	0,4562	0,5438	0,61	0,2709	0,7291	1,11	0,1335	0,8665
0,12	0,4522	0,5478	0,62	0,2676	0,7324	1,12	0,1314	0,8686
0,13	0,4483	0,5517	0,63	0,2643	0,7357	1,13	0,1292	0,8708
0,14	0,4443	0,5557	0,64	0,2611	0,7389	1,14	0,1271	0,8729
0,15	0,4404	0,5596	0,65	0,2578	0,7422	1,15	0,1251	0,8749
0,16	0,4364	0,5636	0,66	0,2546	0,7454	1,16	0,1230	0,8770
0,17	0,4325	0,5675	0,67	0,2514	0,7486	1,17	0,1210	0,8790
0,18	0,4286	0,5714	0,68	0,2483	0,7517	1,18	0,1190	0,8810
0,19	0,4247	0,5753	0,69	0,2451	0,7549	1,19	0,1170	0,8830
0,20	0,4207	0,5793	0,70	0,2420	0,7580	1,20	0,1151	0,8849
0,21	0,4168	0,5832	0,71	0,2389	0,7611	1,21	0,1131	0,8869
0,22	0,4129	0,5871	0,72	0,2358	0,7642	1,22	0,1112	0,8888
0,23	0,4090	0,5910	0,73	0,2327	0,7673	1,23	0,1093	0,8907
0,24	0,4052	0,5948	0,74	0,2296	0,7704	1,24	0,1075	0,8925
0,25	0,4013	0,5987	0,75	0,2266	0,7734	1,25	0,1056	0,8944
0,26	0,3974	0,6026	0,76	0,2236	0,7764	1,26	0,1038	0,8962
0,27	0,3936	0,6064	0,77	0,2206	0,7794	1,27	0,1020	0,8980
0,28	0,3897	0,6103	0,78	0,2177	0,7823	1,28	0,1003	0,8997
0,29	0,3859	0,6141	0,79	0,2148	0,7852	1,29	0,0985	0,9015
0,30	0,3821	0,6179	0,80	0,2119	0,7881	1,30	0,0968	0,9032
0,31	0,3783	0,6217	0,81	0,2090	0,7910	1,31	0,0951	0,9049
0,32	0,3745	0,6255	0,82	0,2061	0,7939	1,32	0,0934	0,9066
0,33	0,3707	0,6293	0,83	0,2033	0,7967	1,33	0,0918	0,9082
0,34	0,3669	0,6331	0,84	0,2005	0,7995	1,34	0,0901	0,9099
0,35	0,3632	0,6368	0,85	0,1977	0,8023	1,35	0,0885	0,9115
0,36	0,3594	0,6406	0,86	0,1949	0,8051	1,36	0,0869	0,9131
0,37	0,3557	0,6443	0,87	0,1922	0,8078	1,37	0,0853	0,9147
0,38	0,3520	0,6480	0,88	0,1894	0,8106	1,38	0,0838	0,9162
0,39	0,3483	0,6517	0,89	0,1867	0,8133	1,39	0,0823	0,9177
0,40	0,3446	0,6554	0,90	0,1841	0,8159	1,40	0,0808	0,9192
0,41	0,3409	0,6591	0,91	0,1814	0,8186	1,41	0,0793	0,9207
0,42	0,3372	0,6628	0,92	0,1788	0,8212	1,42	0,0778	0,9222
0,43	0,3336	0,6664	0,93	0,1762	0,8238	1,43	0,0764	0,9236
0,44	0,3300	0,6700	0,94	0,1736	0,8264	1,44	0,0749	0,9251
0,45	0,3264	0,6736	0,95	0,1711	0,8289	1,45	0,0735	0,9265
0,46	0,3228	0,6772	0,96	0,1685	0,8315	1,46	0,0721	0,9279
0,47	0,3192	0,6808	0,97	0,1660	0,8340	1,47	0,0708	0,9292
0,48	0,3156	0,6844	0,98	0,1635	0,8365	1,48	0,0694	0,9306
0,49	0,3121	0,6879	0,99	0,1611	0,8389	1,49	0,0681	0,9319
0,50	0,3085	0,6915	1,00	0,1587	0,8413	1,50	0,0668	0,9332

Kernfach Mathematik

Tabelle zur Normalverteilung, Werte der Gaußschen Integralfunktion Φ

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$
1,51	0,0655	0,9345	2,01	0,0222	0,9778	2,51	0,0060	0,9940
1,52	0,0643	0,9357	2,02	0,0217	0,9783	2,52	0,0059	0,9941
1,53	0,0630	0,9370	2,03	0,0212	0,9788	2,53	0,0057	0,9943
1,54	0,0618	0,9382	2,04	0,0207	0,9793	2,54	0,0055	0,9945
1,55	0,0606	0,9394	2,05	0,0202	0,9798	2,55	0,0054	0,9946
1,56	0,0594	0,9406	2,06	0,0197	0,9803	2,56	0,0052	0,9948
1,57	0,0582	0,9418	2,07	0,0192	0,9808	2,57	0,0051	0,9949
1,58	0,0571	0,9429	2,08	0,0188	0,9812	2,58	0,0049	0,9951
1,59	0,0559	0,9441	2,09	0,0183	0,9817	2,59	0,0048	0,9952
1,60	0,0548	0,9452	2,10	0,0179	0,9821	2,60	0,0047	0,9953
1,61	0,0537	0,9463	2,11	0,0174	0,9826	2,61	0,0045	0,9955
1,62	0,0526	0,9474	2,12	0,0170	0,9830	2,62	0,0044	0,9956
1,63	0,0516	0,9484	2,13	0,0166	0,9834	2,63	0,0043	0,9957
1,64	0,0505	0,9495	2,14	0,0162	0,9838	2,64	0,0041	0,9959
1,65	0,0495	0,9505	2,15	0,0158	0,9842	2,65	0,0040	0,9960
1,66	0,0485	0,9515	2,16	0,0154	0,9846	2,66	0,0039	0,9961
1,67	0,0475	0,9525	2,17	0,0150	0,9850	2,67	0,0038	0,9962
1,68	0,0465	0,9535	2,18	0,0146	0,9854	2,68	0,0037	0,9963
1,69	0,0455	0,9545	2,19	0,0143	0,9857	2,69	0,0036	0,9964
1,70	0,0446	0,9554	2,20	0,0139	0,9861	2,70	0,0035	0,9965
1,71	0,0436	0,9564	2,21	0,0136	0,9864	2,71	0,0034	0,9966
1,72	0,0427	0,9573	2,22	0,0132	0,9868	2,72	0,0033	0,9967
1,73	0,0418	0,9582	2,23	0,0129	0,9871	2,73	0,0032	0,9968
1,74	0,0409	0,9591	2,24	0,0125	0,9875	2,74	0,0031	0,9969
1,75	0,0401	0,9599	2,25	0,0122	0,9878	2,75	0,0030	0,9970
1,76	0,0392	0,9608	2,26	0,0119	0,9881	2,76	0,0029	0,9971
1,77	0,0384	0,9616	2,27	0,0116	0,9884	2,77	0,0028	0,9972
1,78	0,0375	0,9625	2,28	0,0113	0,9887	2,78	0,0027	0,9973
1,79	0,0367	0,9633	2,29	0,0110	0,9890	2,79	0,0026	0,9974
1,80	0,0359	0,9641	2,30	0,0107	0,9893	2,80	0,0026	0,9974
1,81	0,0351	0,9649	2,31	0,0104	0,9896	2,81	0,0025	0,9975
1,82	0,0344	0,9656	2,32	0,0102	0,9898	2,82	0,0024	0,9976
1,83	0,0336	0,9664	2,33	0,0099	0,9901	2,83	0,0023	0,9977
1,84	0,0329	0,9671	2,34	0,0096	0,9904	2,84	0,0023	0,9977
1,85	0,0322	0,9678	2,35	0,0094	0,9906	2,85	0,0022	0,9978
1,86	0,0314	0,9686	2,36	0,0091	0,9909	2,86	0,0021	0,9979
1,87	0,0307	0,9693	2,37	0,0089	0,9911	2,87	0,0021	0,9979
1,88	0,0301	0,9699	2,38	0,0087	0,9913	2,88	0,0020	0,9980
1,89	0,0294	0,9706	2,39	0,0084	0,9916	2,89	0,0019	0,9981
1,90	0,0287	0,9713	2,40	0,0082	0,9918	2,90	0,0019	0,9981
1,91	0,0281	0,9719	2,41	0,0080	0,9920	2,91	0,0018	0,9982
1,92	0,0274	0,9726	2,42	0,0078	0,9922	2,92	0,0018	0,9982
1,93	0,0268	0,9732	2,43	0,0075	0,9925	2,93	0,0017	0,9983
1,94	0,0262	0,9738	2,44	0,0073	0,9927	2,94	0,0016	0,9984
1,95	0,0256	0,9744	2,45	0,0071	0,9929	2,95	0,0016	0,9984
1,96	0,0250	0,9750	2,46	0,0069	0,9931	2,96	0,0015	0,9985
1,97	0,0244	0,9756	2,47	0,0068	0,9932	2,97	0,0015	0,9985
1,98	0,0239	0,9761	2,48	0,0066	0,9934	2,98	0,0014	0,9986
1,99	0,0233	0,9767	2,49	0,0064	0,9936	2,99	0,0014	0,9986
2,00	0,0228	0,9772	2,50	0,0062	0,9938	3,00	0,0013	0,9987

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung																		
	I	II	III																
Teilaufgabe a) Aus den gegebenen Daten erhält man die folgende Vierfeldertafel mit relativen Häufigkeiten (auf vier Nachkommastellen gerundet): <table border="1"> <tr> <td></td><td>A</td><td>$\bar{A}$</td><td></td></tr> <tr> <td>G</td><td>0,1058</td><td>0,0450</td><td>0,1508</td></tr> <tr> <td>$\bar{G}$</td><td>0,5820</td><td>0,2672</td><td>0,8492</td></tr> <tr> <td></td><td>0,6878</td><td>0,3122</td><td>1,0000</td></tr> </table> Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit, die sich dann wie folgt berechnen lässt: $P_A(G) = \frac{P(A \cap G)}{P(A)} \approx \frac{0,1058}{0,6878} \approx 0,1538 = 15,38 \%$		A	$\bar{A}$		G	0,1058	0,0450	0,1508	$\bar{G}$	0,5820	0,2672	0,8492		0,6878	0,3122	1,0000	4		
	A	$\bar{A}$																	
G	0,1058	0,0450	0,1508																
$\bar{G}$	0,5820	0,2672	0,8492																
	0,6878	0,3122	1,0000																
Teilaufgabe b) $190\,000 \cdot 0,54 \cdot 0,85 = 87\,210$ 87 210 Männer wurden im Jahr 2009 wegen eines Alkoholdelikts im Straßenverkehr verurteilt. X beschreibt die Anzahl der Männer unter den wegen Alkoholdelikten verurteilten 50 Personen. Es handelt sich um eine binomialverteilte Zufallsgröße mit den Parametern $n = 50$, $p = 0,85$. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit folgt dann $P(X = 43) = \binom{50}{43} \cdot 0,85^{43} \cdot 0,15^7 \approx 0,1575 = 15,75 \%$ X beschreibt jetzt die Anzahl der Männer unter den wegen Alkoholdelikten verurteilten 500 Personen. Mit $n = 500$, $p = 0,85$ folgt $\mu = 500 \cdot 0,85 = 425$ und $\sigma^2 = 500 \cdot 0,85 \cdot 0,15 = 63,75 > 9$. Die Laplace-Bedingung für die Näherung durch die Normalverteilung ist also erfüllt. $P(X \geq 420) = 1 - P(X \leq 419) \approx 1 - \Phi\left(\frac{419 + 0,5 - 425}{\sqrt{63,75}}\right) \approx 1 - \Phi(-0,69) \approx 1 - 0,2451 = 0,7549 = 75,49 \%$	1 1 1 2 2																		

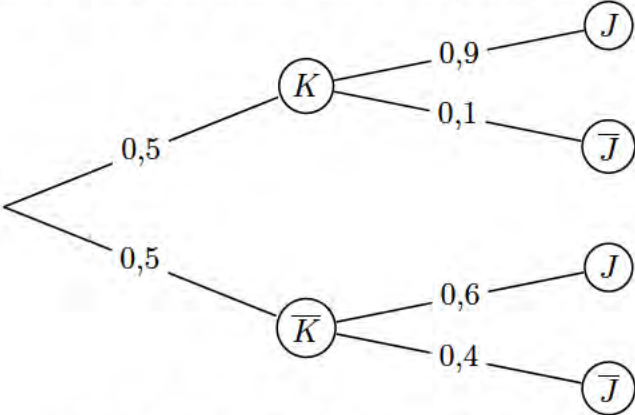
Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
n sei die Anzahl der wegen Alkoholdelikten verurteilten Personen. Y beschreibt die Anzahl der Frauen unter diesen Personen. Y ist binomialverteilt mit den Parametern n und $p = 0,15$. $P(Y \geq 1) > 0,95$ $1 - P(Y = 0) > 0,95$ $P(Y = 0) < 0,05$ $\binom{n}{0} \cdot 0,15^0 \cdot 0,85^n < 0,05$ $0,85^n < 0,05$ $n \cdot \ln(0,85) < \ln(0,05)$ $n > \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,85)} \approx 18,43$ Es müssen also mindestens 19 Fälle ausgewählt werden.		1	
		3	
		1	

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe c) Es soll bestätigt werden, dass bei weniger als 4,4 % der Unfälle mit Personenschaden Alkohol als Unfallursache zu beobachten ist. Daher wird das Gegenteil als zu testende Nullhypothese angenommen: $H_0 : p \geq 0,044$. Die Nullhypothese wird verworfen, wenn unter den 450 Unfällen relativ wenige unter Alkoholeinfluss zustande kamen. Als Verwerfungsbereich wird daher $V = [0; k]$ gewählt (linksseitiger Test). Die Zufallsvariable X_p beschreibt die Anzahl der Unfälle mit Personenschäden, bei denen Alkohol eine Unfallursache war. X_p wird als binomialverteilt mit den Parametern $n = 450$ und $p \geq 0,044$ angenommen. Für den Verwerfungsbereich ist nun das größte natürliche $k \in [0; 450]$ so zu bestimmen, dass für alle $p \geq 0,044$ die Ungleichung $P(X_p \leq k) \leq 0,01$ erfüllt ist. Wegen $P(X_p \leq k) \leq P(X_{0,044} \leq k)$ für $p \geq 0,044$ ist dies gleichbedeutend mit der Aufgabe, das größte natürliche $k \in [0; 450]$ so zu bestimmen, dass die Ungleichung $P(X_{0,044} \leq k) \leq 0,01$ erfüllt ist. <i>Sollte der Prüfling hier weniger präzise argumentieren, aber prinzipiell begründen, warum es ausreicht, im Weiteren die Ungleichung $P(X_{0,044} \leq k) \leq 0,01$ zu untersuchen, so soll der Punkt trotzdem vergeben werden.</i> Wegen $\sigma^2 = 450 \cdot 0,044 \cdot 0,956 = 18,9288 > 9$ ist die Laplace-Bedingung für die Näherung durch die Normalverteilung für $X_{0,044}$ erfüllt. $P(X_{0,044} \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k + 0,5 - 19,8}{\sqrt{18,9288}}\right) \leq 0,01$ $\frac{k + 0,5 - 19,8}{\sqrt{18,9288}} \leq -2,33$ $k + 0,5 - 19,8 \leq -2,33 \cdot \sqrt{18,9288}$ $k \leq -2,33 \cdot \sqrt{18,9288} - 0,5 + 19,8 \approx 9,16$ Der Verwerfungsbereich lautet daher $V = [0; 9]$. Sind unter den Unfällen also höchstens neun unter Alkoholeinfluss zustande gekommen, so würde man der Behauptung der Agentur Glauben schenken.		2	
		1	
		1	
		1	
		3	
		1	
		1	

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe d) Es kennzeichne J das Ereignis „Die befragte Person war höchstens 25 Jahre alt“ und K kennzeichne das Ereignis „Die befragte Person hatte von der Kampagne gehört“. Die jeweiligen Gegenereignisse werden mit $\bar{J}$ beziehungsweise $\bar{K}$ bezeichnet. Gesucht ist dann $P(J)$. Aus den Angaben erhält man das folgende Baumdiagramm:  Daraus folgt $P(J) = P(K \cap J) + P(\bar{K} \cap J) = 0,75$.			3
Punktsummen	12	15	3

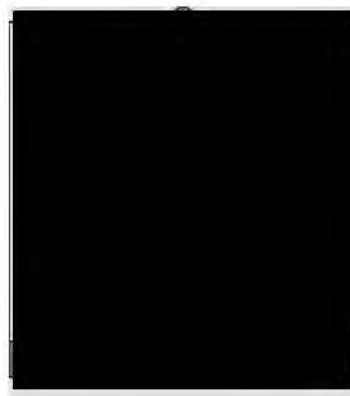
Kernfach Mathematik

Aufgabe 6: Stochastik

Vorbemerkung: Führen Sie stets geeignete Zufallsvariablen und Namen für Ereignisse ein. Machen Sie auch Angaben über die Verteilung der jeweiligen Zufallsvariablen.

Für ein Schulfest plant eine Klasse einen Glücksspielstand mit einem Galton-Brett. In diesem Galton-Brett sind nach nebenstehendem Muster Stifte so eingelassen, dass sie in untereinander liegenden Reihen immer um den halben Stiftabstand gegeneinander versetzt sind.

Wird das Brett mit der Grundseite exakt horizontal gehalten, so werden Kugeln, die vertikal von oben eingeworfen werden, auf jedem der tiefer liegenden Stifte jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0,5$ nach rechts bzw. nach links abgelenkt, um dann auf die tiefer liegenden Stifte oder die Auffangbehälter A , B , C , D und E zu treffen.



- a) • Die Tabelle gibt die Wahrscheinlichkeiten an, mit denen eine eingeworfene Kugel in die jeweiligen Auffangbehälter fällt.

Behälter	A	B	C	D	E
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Begründen Sie die Werte für die Behälter A und B .

- Leichtes Verbiegen des Stifts links außen in der vierten Reihe (von oben) führt dazu, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine eingeworfene Kugel im Auffangbehälter A landet, $\frac{1}{32}$ beträgt.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der dieser verbogene Stift die Kugeln nach links ablenkt.
- Durch leichtes Schrägstellen des Original-Bretts wird erreicht, dass sich die Ablenk-
wahrscheinlichkeiten aller Stifte in gleicher Weise verändern.
Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der Kugeln im Auffangbehälter C beim Einwerfen von 256 Kugeln, wenn alle Stifte jetzt mit den Wahrscheinlichkeiten $p_{\text{links}} = \frac{1}{4}$ und $p_{\text{rechts}} = \frac{3}{4}$ ablenken.

(9 P)

Kernfach Mathematik

- b) Das exakt horizontal stehende Galton-Brett (1. Tabelle aus Aufgabenteil a)) möchte die Klasse für ein Glücksspiel nutzen. Nach Einwurf jeweils nur einer Kugel sollen bei einem Einsatz des Spielers von 1 € je nach Auftreffen der Kugel in den Auffangbehältern die folgende Beträge ausgezahlt werden:

Behälter	A	B	C	D	E
Auszahlung	3 €	1,20 €	0 €	1,20 €	3 €

- Berechnen Sie den zu erwartenden Verlust oder Gewinn des Spielers pro Spiel.
- Der Klassenlehrer drängt auf eine Änderung der Spielregeln, da bei Glücksspielen in der Schule weder Gewinne noch Verluste erzielt werden sollten.
Berechnen Sie, wie die Auszahlung bei den Ergebnissen „Kugel landet in dem Behälter A “ und „Kugel landet in dem Behälter E “ geändert werden müssen. Bei beiden Ergebnissen sollen die Auszahlungen aus Symmetriegründen gleich groß sein.

(7 P)

- c) Das Galton-Brett wird wieder exakt horizontal aufgestellt.

- Berechnen Sie mit Hilfe der Binomialverteilung die Wahrscheinlichkeit, dass beim Einwurf von 50 Kugeln 16 oder 17 Kugeln in den Behälter C fallen.
- Zeigen Sie, dass die eben berechnete Wahrscheinlichkeit auch näherungsweise mit der Normalverteilung bestimmt werden kann, und führen Sie die Rechnung durch.
- Bestimmen Sie, wie viele Kugeln man mindestens einwerfen muss, damit die Wahrscheinlichkeit, dass der Behälter A leer bleibt, kleiner als 7 % ist.

(11 P)

- d) Bei einem schräg aufgestellten Galton-Brett mit n Stiftreihen sei p_A die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine eingeworfene Kugel in Auffangbehälter A fällt, p_B sei die entsprechende Wahrscheinlichkeit für Behälter B .

Außerdem gelte $p_B = 3 \cdot n \cdot p_A$.

Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Stifte die Kugel nach links ablenken.

(3 P)

Kernfach Mathematik

Tabelle zur Normalverteilung, Werte der Gaußschen Integralfunktion Φ

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$
0,01	0,4960	0,5040	0,51	0,3050	0,6950	1,01	0,1562	0,8438
0,02	0,4920	0,5080	0,52	0,3015	0,6985	1,02	0,1539	0,8461
0,03	0,4880	0,5120	0,53	0,2981	0,7019	1,03	0,1515	0,8485
0,04	0,4840	0,5160	0,54	0,2946	0,7054	1,04	0,1492	0,8508
0,05	0,4801	0,5199	0,55	0,2912	0,7088	1,05	0,1469	0,8531
0,06	0,4761	0,5239	0,56	0,2877	0,7123	1,06	0,1446	0,8554
0,07	0,4721	0,5279	0,57	0,2843	0,7157	1,07	0,1423	0,8577
0,08	0,4681	0,5319	0,58	0,2810	0,7190	1,08	0,1401	0,8599
0,09	0,4641	0,5359	0,59	0,2776	0,7224	1,09	0,1379	0,8621
0,10	0,4602	0,5398	0,60	0,2743	0,7257	1,10	0,1357	0,8643
0,11	0,4562	0,5438	0,61	0,2709	0,7291	1,11	0,1335	0,8665
0,12	0,4522	0,5478	0,62	0,2676	0,7324	1,12	0,1314	0,8686
0,13	0,4483	0,5517	0,63	0,2643	0,7357	1,13	0,1292	0,8708
0,14	0,4443	0,5557	0,64	0,2611	0,7389	1,14	0,1271	0,8729
0,15	0,4404	0,5596	0,65	0,2578	0,7422	1,15	0,1251	0,8749
0,16	0,4364	0,5636	0,66	0,2546	0,7454	1,16	0,1230	0,8770
0,17	0,4325	0,5675	0,67	0,2514	0,7486	1,17	0,1210	0,8790
0,18	0,4286	0,5714	0,68	0,2483	0,7517	1,18	0,1190	0,8810
0,19	0,4247	0,5753	0,69	0,2451	0,7549	1,19	0,1170	0,8830
0,20	0,4207	0,5793	0,70	0,2420	0,7580	1,20	0,1151	0,8849
0,21	0,4168	0,5832	0,71	0,2389	0,7611	1,21	0,1131	0,8869
0,22	0,4129	0,5871	0,72	0,2358	0,7642	1,22	0,1112	0,8888
0,23	0,4090	0,5910	0,73	0,2327	0,7673	1,23	0,1093	0,8907
0,24	0,4052	0,5948	0,74	0,2296	0,7704	1,24	0,1075	0,8925
0,25	0,4013	0,5987	0,75	0,2266	0,7734	1,25	0,1056	0,8944
0,26	0,3974	0,6026	0,76	0,2236	0,7764	1,26	0,1038	0,8962
0,27	0,3936	0,6064	0,77	0,2206	0,7794	1,27	0,1020	0,8980
0,28	0,3897	0,6103	0,78	0,2177	0,7823	1,28	0,1003	0,8997
0,29	0,3859	0,6141	0,79	0,2148	0,7852	1,29	0,0985	0,9015
0,30	0,3821	0,6179	0,80	0,2119	0,7881	1,30	0,0968	0,9032
0,31	0,3783	0,6217	0,81	0,2090	0,7910	1,31	0,0951	0,9049
0,32	0,3745	0,6255	0,82	0,2061	0,7939	1,32	0,0934	0,9066
0,33	0,3707	0,6293	0,83	0,2033	0,7967	1,33	0,0918	0,9082
0,34	0,3669	0,6331	0,84	0,2005	0,7995	1,34	0,0901	0,9099
0,35	0,3632	0,6368	0,85	0,1977	0,8023	1,35	0,0885	0,9115
0,36	0,3594	0,6406	0,86	0,1949	0,8051	1,36	0,0869	0,9131
0,37	0,3557	0,6443	0,87	0,1922	0,8078	1,37	0,0853	0,9147
0,38	0,3520	0,6480	0,88	0,1894	0,8106	1,38	0,0838	0,9162
0,39	0,3483	0,6517	0,89	0,1867	0,8133	1,39	0,0823	0,9177
0,40	0,3446	0,6554	0,90	0,1841	0,8159	1,40	0,0808	0,9192
0,41	0,3409	0,6591	0,91	0,1814	0,8186	1,41	0,0793	0,9207
0,42	0,3372	0,6628	0,92	0,1788	0,8212	1,42	0,0778	0,9222
0,43	0,3336	0,6664	0,93	0,1762	0,8238	1,43	0,0764	0,9236
0,44	0,3300	0,6700	0,94	0,1736	0,8264	1,44	0,0749	0,9251
0,45	0,3264	0,6736	0,95	0,1711	0,8289	1,45	0,0735	0,9265
0,46	0,3228	0,6772	0,96	0,1685	0,8315	1,46	0,0721	0,9279
0,47	0,3192	0,6808	0,97	0,1660	0,8340	1,47	0,0708	0,9292
0,48	0,3156	0,6844	0,98	0,1635	0,8365	1,48	0,0694	0,9306
0,49	0,3121	0,6879	0,99	0,1611	0,8389	1,49	0,0681	0,9319
0,50	0,3085	0,6915	1,00	0,1587	0,8413	1,50	0,0668	0,9332

Kernfach Mathematik

Tabelle zur Normalverteilung, Werte der Gaußschen Integralfunktion Φ

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$
1,51	0,0655	0,9345	2,01	0,0222	0,9778	2,51	0,0060	0,9940
1,52	0,0643	0,9357	2,02	0,0217	0,9783	2,52	0,0059	0,9941
1,53	0,0630	0,9370	2,03	0,0212	0,9788	2,53	0,0057	0,9943
1,54	0,0618	0,9382	2,04	0,0207	0,9793	2,54	0,0055	0,9945
1,55	0,0606	0,9394	2,05	0,0202	0,9798	2,55	0,0054	0,9946
1,56	0,0594	0,9406	2,06	0,0197	0,9803	2,56	0,0052	0,9948
1,57	0,0582	0,9418	2,07	0,0192	0,9808	2,57	0,0051	0,9949
1,58	0,0571	0,9429	2,08	0,0188	0,9812	2,58	0,0049	0,9951
1,59	0,0559	0,9441	2,09	0,0183	0,9817	2,59	0,0048	0,9952
1,60	0,0548	0,9452	2,10	0,0179	0,9821	2,60	0,0047	0,9953
1,61	0,0537	0,9463	2,11	0,0174	0,9826	2,61	0,0045	0,9955
1,62	0,0526	0,9474	2,12	0,0170	0,9830	2,62	0,0044	0,9956
1,63	0,0516	0,9484	2,13	0,0166	0,9834	2,63	0,0043	0,9957
1,64	0,0505	0,9495	2,14	0,0162	0,9838	2,64	0,0041	0,9959
1,65	0,0495	0,9505	2,15	0,0158	0,9842	2,65	0,0040	0,9960
1,66	0,0485	0,9515	2,16	0,0154	0,9846	2,66	0,0039	0,9961
1,67	0,0475	0,9525	2,17	0,0150	0,9850	2,67	0,0038	0,9962
1,68	0,0465	0,9535	2,18	0,0146	0,9854	2,68	0,0037	0,9963
1,69	0,0455	0,9545	2,19	0,0143	0,9857	2,69	0,0036	0,9964
1,70	0,0446	0,9554	2,20	0,0139	0,9861	2,70	0,0035	0,9965
1,71	0,0436	0,9564	2,21	0,0136	0,9864	2,71	0,0034	0,9966
1,72	0,0427	0,9573	2,22	0,0132	0,9868	2,72	0,0033	0,9967
1,73	0,0418	0,9582	2,23	0,0129	0,9871	2,73	0,0032	0,9968
1,74	0,0409	0,9591	2,24	0,0125	0,9875	2,74	0,0031	0,9969
1,75	0,0401	0,9599	2,25	0,0122	0,9878	2,75	0,0030	0,9970
1,76	0,0392	0,9608	2,26	0,0119	0,9881	2,76	0,0029	0,9971
1,77	0,0384	0,9616	2,27	0,0116	0,9884	2,77	0,0028	0,9972
1,78	0,0375	0,9625	2,28	0,0113	0,9887	2,78	0,0027	0,9973
1,79	0,0367	0,9633	2,29	0,0110	0,9890	2,79	0,0026	0,9974
1,80	0,0359	0,9641	2,30	0,0107	0,9893	2,80	0,0026	0,9974
1,81	0,0351	0,9649	2,31	0,0104	0,9896	2,81	0,0025	0,9975
1,82	0,0344	0,9656	2,32	0,0102	0,9898	2,82	0,0024	0,9976
1,83	0,0336	0,9664	2,33	0,0099	0,9901	2,83	0,0023	0,9977
1,84	0,0329	0,9671	2,34	0,0096	0,9904	2,84	0,0023	0,9977
1,85	0,0322	0,9678	2,35	0,0094	0,9906	2,85	0,0022	0,9978
1,86	0,0314	0,9686	2,36	0,0091	0,9909	2,86	0,0021	0,9979
1,87	0,0307	0,9693	2,37	0,0089	0,9911	2,87	0,0021	0,9979
1,88	0,0301	0,9699	2,38	0,0087	0,9913	2,88	0,0020	0,9980
1,89	0,0294	0,9706	2,39	0,0084	0,9916	2,89	0,0019	0,9981
1,90	0,0287	0,9713	2,40	0,0082	0,9918	2,90	0,0019	0,9981
1,91	0,0281	0,9719	2,41	0,0080	0,9920	2,91	0,0018	0,9982
1,92	0,0274	0,9726	2,42	0,0078	0,9922	2,92	0,0018	0,9982
1,93	0,0268	0,9732	2,43	0,0075	0,9925	2,93	0,0017	0,9983
1,94	0,0262	0,9738	2,44	0,0073	0,9927	2,94	0,0016	0,9984
1,95	0,0256	0,9744	2,45	0,0071	0,9929	2,95	0,0016	0,9984
1,96	0,0250	0,9750	2,46	0,0069	0,9931	2,96	0,0015	0,9985
1,97	0,0244	0,9756	2,47	0,0068	0,9932	2,97	0,0015	0,9985
1,98	0,0239	0,9761	2,48	0,0066	0,9934	2,98	0,0014	0,9986
1,99	0,0233	0,9767	2,49	0,0064	0,9936	2,99	0,0014	0,9986
2,00	0,0228	0,9772	2,50	0,0062	0,9938	3,00	0,0013	0,9987

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) Um in den Behälter A zu fallen, muss die Kugel viermal nach links abgelenkt werden. Es ist $p_A = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$. Um in den Behälter B zu fallen, muss die Kugel genau einmal nach rechts und dreimal nach links abgelenkt werden. Dies ist auf vier verschiedene Arten möglich. Es ist $p_B = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$. Nun ist $p_A = \frac{1}{32}$. Ist p_L die Wahrscheinlichkeit, mit der der defekte Stift nach links ablenkt, so gilt $p_A = \frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot p_L \Leftrightarrow p_L = \frac{1}{4}.$ Die Ablenkungswahrscheinlichkeit nach links ist 25 %. p_C sei die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel in Auffangbehälter C fällt, E_C der Erwartungswert der Anzahl der in diesen Behälter fallenden Kugeln bei 256 Einwüfen. $E_C = p_C \cdot 256 = \binom{4}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot 256 = 6 \cdot \frac{9}{256} \cdot 256 = 54$	1 1		
	1 1		
	2		
		3	

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung																				
	I	II	III																		
Teilaufgabe b) Die Zufallsvariable X beschreibt die Höhe des Gewinns des Spielers bei einem Spiel. <table><tr><td>Behälter</td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>E</td></tr><tr><td>Gewinn</td><td>2 €</td><td>0,2 €</td><td>-1 €</td><td>0,2 €</td><td>2 €</td></tr><tr><td>Wahrscheinlichkeit</td><td>$\frac{1}{16}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{3}{8}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td><td>$\frac{1}{16}$</td></tr></table> Berechnung des Erwartungswertes: $E(X) = \frac{1}{16} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 0,2 + \frac{3}{8} \cdot (-1) + \frac{1}{4} \cdot 0,2 + \frac{1}{16} \cdot 2 = -\frac{1}{40} = -0,025$ Es ergibt sich ein mittlerer Verlust von 2,5 ct pro Spiel. <i>Alternativ könnte man natürlich auch statt mit den Gewinnen gleich mit den Auszahlungsbeträgen rechnen.</i> Sei G der bei den Ergebnissen „Kugel fällt in Behälter A“ oder „Kugel fällt in Behälter E“ erzielte Gewinn. Dann gilt für ein faires Spiel $\frac{1}{16} \cdot G + \frac{1}{4} \cdot 0,2 - \frac{3}{8} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 0,2 + \frac{1}{16} \cdot G = 0 \quad \Rightarrow \quad G = 2,20.$ Weil der Einsatz von 1 € berücksichtigt werden muss, müssen die Auszahlungsbeträge für die Behälter A und E nun jeweils 3,20 € betragen.	Behälter	A	B	C	D	E	Gewinn	2 €	0,2 €	-1 €	0,2 €	2 €	Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$		2	
Behälter	A	B	C	D	E																
Gewinn	2 €	0,2 €	-1 €	0,2 €	2 €																
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$																
		2																			
		2																			
		1																			

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe c) Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Kugeln im Behälter C bei einem Einwurf von 50 Kugeln. X ist binomialverteilt mit $n = 50$ und $p = \frac{3}{8}$. $P(X = 16) + P(X = 17)$ $= \binom{50}{16} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^{16} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{34} + \binom{50}{17} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^{17} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{33}$ $\approx 0,0864 + 0,1037 = 0,1901 = 19,01 \%$ Wegen $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p) = 50 \cdot 0,375 \cdot 0,625 \approx 11,72 > 9$ ist die Laplace-Bedingung erfüllt und die Normalverteilung kann als Näherung verwendet werden. $P(16 \leq X \leq 17) = P(X \leq 17) - P(X \leq 15)$ $\approx \Phi\left(\frac{17 + 0,5 - 50 \cdot 0,375}{\sqrt{11,72}}\right) - \Phi\left(\frac{15 + 0,5 - 50 \cdot 0,375}{\sqrt{11,72}}\right)$ $\approx \Phi(-0,37) - \Phi(-0,95) \approx 0,3557 - 0,1711 = 0,1846 = 18,46 \%$ Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Kugeln im Behälter A bei einem Einwurf von n Kugeln. Es soll $P(X = 0) < 0,07$ gelten. $P(X = 0) < 0,07$ $\binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{16}\right)^0 \cdot \left(\frac{15}{16}\right)^n < 0,07$ $\left(\frac{15}{16}\right)^n < 0,07$ $n \cdot \ln\left(\frac{15}{16}\right) < \ln(0,07)$ $n > \frac{\ln(0,07)}{\ln(\frac{15}{16})} \approx 41,2$ Es müssen also mindestens 42 Kugeln eingeworfen werden.	1		
	2		
	1		
	2		
		1	
		3	
		1	

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe d) Bei einem Galton-Brett mit n Stiftreihen und einer Ablenkwahrscheinlichkeit p_L nach links gilt für p_A und p_B $p_A = p_L^n$ $p_B = n \cdot p_L^{n-1} \cdot (1 - p_L).$ Wegen $p_B = 3 \cdot n \cdot p_A$ gilt für $p_L > 0$ $n \cdot p_L^{n-1} \cdot (1 - p_L) = 3 \cdot n \cdot p_L^n$ $p_L^{n-1} - p_L^n = 3 \cdot p_L^n$ $p_L^{n-1} = 4 \cdot p_L^n$ $1 = 4 \cdot p_L$ $p_L = \frac{1}{4}.$ Daher ist die Ablenkwahrscheinlichkeit $p_L = \frac{1}{4}$.			3
Punktsummen	12	15	3