

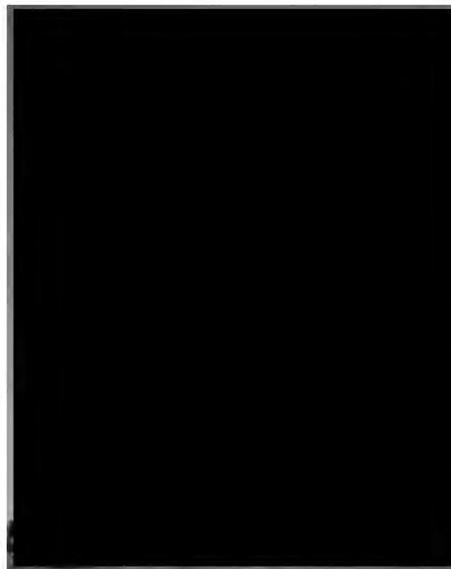
Kernfach Mathematik

Aufgabe 1: Analysis-CAS

Bei einer Darrieus-Windkraftanlage ist der Rotor vertikal angeordnet. Zwei vorgebogene Metallblätter mit geeigneter Stellung wandeln die Windenergie in Rotationsenergie um. Die Rotorblätter behalten auch bei schneller Umdrehung ihre Bogenform bei, wie ein Springseil, welches mit den Händen um den Körper geschleudert wird. Legt man die x -Achse entlang der Rotorachse, so lässt sich die geometrische Form eines Blatts des abgebildeten Rotors näherungsweise durch einen Teil des Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = -0,00045 x^4 - 0,044 x^2 + 6 \quad \text{beschreiben.}$$

Dabei entspricht eine Längeneinheit einem Meter.



- a) • Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f auf Symmetrie und bestimmen Sie die Nullstellen von f .
- Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall zwischen den Nullstellen.

(5 P)

Verwenden Sie für Ihre weiteren Berechnungen die Nullstellen $x_1 = -8,75$ und $x_2 = 8,75$.

- b) • Berechnen Sie den Winkel, den die Blätter mit der Rotorachse einschließen.
- Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Punktes P in der Rotorblattmitte bei einer Drehzahl von 80 Umdrehungen pro Minute in km/h.
 - Bei einer Darrieus-Windkraftanlage ist die so genannte Wirkfläche die Fläche zwischen den beiden Rotorblättern. Diese Darrieus-Windkraftanlage leistet pro Quadratmeter der Wirkfläche 125 Watt. Berechnen Sie die Wirkfläche in m^2 und die Leistung dieser Anlage in Watt.

(8 P)

Kernfach Mathematik

- c) Eine weitere Möglichkeit der näherungsweisen Beschreibung der Blattform der Darrieus-Windkraftanlage soll der Graph einer Funktion $g_{a;b}$ mit

$$g_{a;b}(x) = a - \frac{1}{2} (e^{b \cdot x} + e^{-b \cdot x}) \quad \text{liefere.}$$

[Bemerkung: Einige CAS-Systeme übersetzen den Term $\frac{1}{2} (e^{b \cdot x} + e^{-b \cdot x})$ in $\cosh(b \cdot x)$.]

- Bestimmen Sie die Parameter a und b so, dass der Graph der Funktion $g_{a;b}$ die Form des Rotorblatts unter Berücksichtigung der in der Abbildung gegebenen Abmessungen beschreibt.

Im Folgenden sei $g(x) = 7 - \frac{1}{2} \cdot (e^{0,3 \cdot x} + e^{-0,3 \cdot x})$ mit $x \in [-8,75 ; 8,75]$.

- Berechnen Sie den Flächeninhalt der Rotoren bei diesem Rechenmodell und geben Sie die prozentuale Abweichung zum ursprünglichen Flächeninhalt in Teilaufgabe b) an.
- Ermitteln Sie im Intervall $[0 ; 8,75]$ auf 2 Dezimalstellen genau die Stelle, an der der Unterschied von f und g am größten ist, und geben Sie diesen größten Unterschied an.

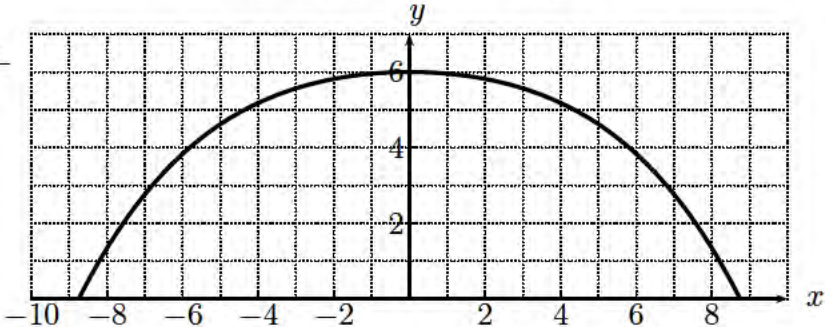
(11 P)

- d) Die Länge eines Rotorblatts (nach dem Modell mit der Funktion f) soll bestimmt werden.

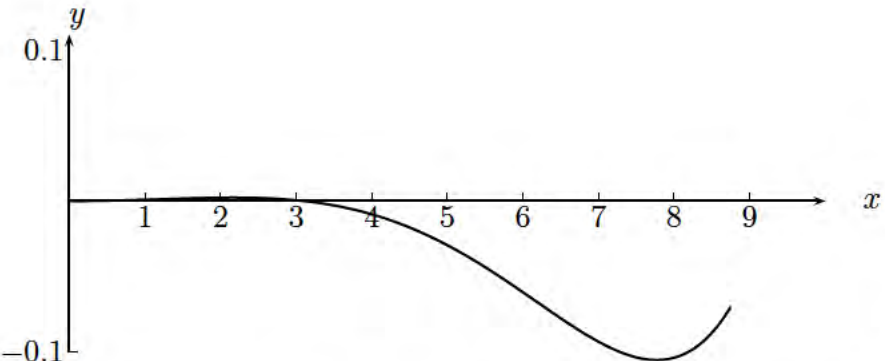
- Ersetzen Sie dazu das halbe Rotorblatt über dem Intervall $[0 ; 8,75]$ durch 2 Strecken und ermitteln Sie so näherungsweise die Rotorblattlänge.
- Beschreiben Sie eine Weiterentwicklung des Verfahrens, so dass die Länge eines Rotorblatts möglichst genau berechnet werden kann.

(6 P)

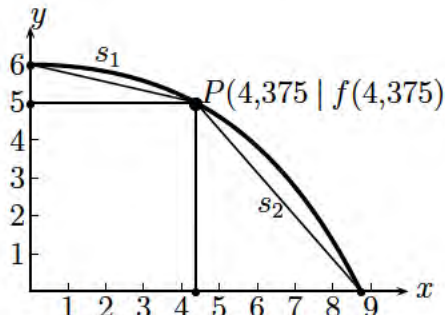
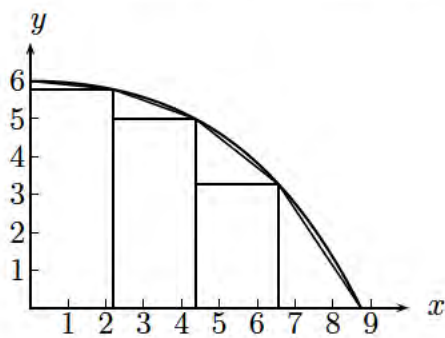
Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) <u>Symmetrie:</u> Es liegt eine Symmetrie zur y-Achse vor, da der Funktionsterm der ganzrationalen Funktion f nur gerade Exponenten aufweist. <u>Nullstellen:</u> $f(x) = -0,00045 x^4 - 0,044 x^2 + 6 = 0$ $x \approx -8,7467 \vee x \approx 8,7467$ <u>Skizze:</u> 	1		
Teilaufgabe b) Es gilt $f'(x) = -0,0018 x^3 - 0,088 x$. Damit gilt für den Winkel α der Blätter mit der Rotorachse $\tan \alpha = f'(x_1) = f'(-8,75) \approx 1,976$. Daraus ergibt sich $\alpha \approx 63,2^\circ$. Die Länge des Weges, den der Punkt P bei einer Umdrehung zurücklegt, ist $l = 2 \pi \cdot r$ mit $r = f(0) = 6$. Damit gilt für die Geschwindigkeit $v = 2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 80 \text{ m/min} = 960\pi \text{ m/min} \approx 3015,93 \text{ m/min},$ das sind etwa 181 km/h. Da die Fläche oberhalb der x-Achse den gleichen Flächeninhalt hat wie die Fläche unterhalb, gilt für die Gesamtfläche $A = 2 \cdot \int_{-8,75}^{8,75} f(x) dx \approx 2 \cdot 76,1166 \approx 152,233.$ Die Fläche zwischen den Rotorblättern ist etwa $152,2 \text{ m}^2$ groß. Die Leistung beträgt ca. $152,2 \text{ m}^2 \cdot 125 \text{ Watt/m}^2 = 19\,025 \text{ Watt} \approx 19 \text{ kW}$.		2	
		3	
	2		
	1		

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe c) Mit den in der Abbildung gegebenen Abmessungen muss gelten $g(0) = 6$, $g(8,75) = 0$ und $g(-8,75) = 0$. Daraus ergibt sich $g_{a;b}(0) = a - \frac{1}{2} \cdot (e^{b \cdot 0} + e^{-b \cdot 0}) = 6$ $g_{a;b}(8,75) = a - \frac{1}{2} \cdot (e^{b \cdot 8,75} + e^{-b \cdot 8,75}) = 0.$ Als Lösungen erhält man $a = 7$ und $b \approx -0,301$ oder $a = 7$ und $b \approx 0,301$. Somit ergibt sich $g(x) \approx 7 - \frac{1}{2} (e^{0,3 \cdot x} + e^{-0,3 \cdot x})$. Da die Fläche oberhalb der x-Achse den gleichen Flächeninhalt hat wie die Fläche unterhalb, gilt für die Gesamtfläche $A = 2 \cdot \int_{-8,75}^{8,75} g(x) dx \approx 153,452.$ Bei diesem Rechenmodell ist die Fläche zwischen den Rotorblättern etwa $153,452 \text{ m}^2$ groß und weicht damit um $\frac{153,452}{152,233} - 1 \approx 0,00801 = 0,801 \%$ von dem in Teilaufgabe b) berechneten Flächeninhalt ab. Sei $h(x) = f(x) - g(x)$. Die Suche nach lokalen Extremstellen mit der notwendigen Bedingung $h'(x) = 0$ liefert im gegebenen Intervall $[0 ; 8,75]$ $x = 0 \vee x \approx 2,18 \vee x \approx 7,76$.  Anhand des Graphen ist zu erkennen, dass keine Randextrema vorliegen und die größte Abweichung im Intervall $[5 ; 8]$ zu finden ist. Es ist $h(7,76) \approx -0,103898$. Wie man anhand der Werte erkennt, weichen an der Stelle 7,76 die Funktionswerte vom f und g am stärksten voneinander ab, und zwar beträgt der Unterschied etwa 0,1039.	2		
	2		
		2	
		1	
			4

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe d) Das Intervall $[0; 8,75]$ kann zum Beispiel in 2 gleichlange Teilintervalle eingeteilt und der Graph von f entsprechend der Teilintervalle durch Strecken ersetzt werden.  Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras folgt für die Abschnitte s_1 und s_2 $s_1 = \sqrt{(f(0) - f(4,375))^2 + 4,375^2} \quad \text{und}$ $s_2 = \sqrt{(f(4,375))^2 + 4,375^2}.$ Damit gilt für die Gesamtlänge $l = 2 \cdot (s_1 + s_2) \approx 2 \cdot 11,1279 \approx 22,256$. Ein Rotorblatt ist also etwa 22,26 m lang. [Hierbei wurde mit $f(8,75) = 0$ gerechnet. Ansonsten ergeben sich geringfügig andere Werte.] <u>Allgemeines Verfahren:</u> Das Intervall $[0; 8,75]$ wird in n äquidistante Teilintervalle eingeteilt und der Graph von f durch einen Streckenzug aus n Strecken ersetzt. Jede einzelne Strecke kann mithilfe des Satzes des Pythagoras berechnet werden. Je größer n wird, desto genauer kann die Länge des Rotorblattes bestimmt werden. [Für $n \rightarrow \infty$ nähert man sich der genauen Länge des Rotorblattes.] Beispiel für $n = 4$: 			
Punktsummen	12	15	3

Kernfach Mathematik

Aufgabe 2: Analysis-CAS

Ein Luftschiff lässt sich näherungsweise als Drehkörper eines Teils des Graphen einer Funktion $f_{a;b}$ mit $f_{a;b}(x) = a \cdot x \cdot \sqrt{b - x}$ mit geeignet gewählten, positiven Parametern a und b darstellen. Dabei entspricht eine Längeneinheit einem Meter in der Natur.

- a) • Ermitteln Sie den maximalen Definitionsbereich und die Nullstellen von $f_{a;b}$.
- Zeigen Sie, dass der Graph von $f_{a;b}$ an der Stelle $x = \frac{2}{3}b$ ein lokales Maximum besitzt und geben Sie dessen Wert an.
 - Bestimmen Sie a und b so, dass das Luftschiff eine Länge von 60 m und einen maximalen Durchmesser von 15 m hat.

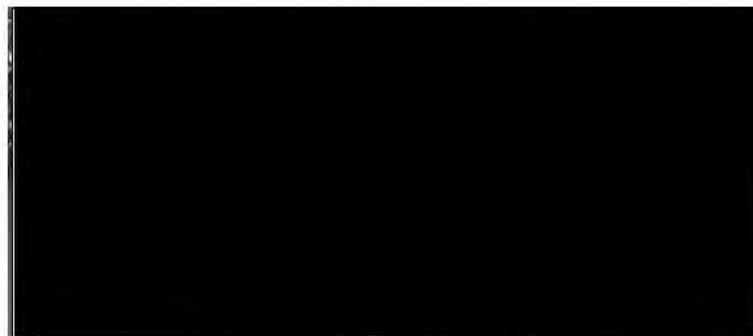
(13 P)

In den folgenden Aufgabenteilen verwenden Sie bitte für die Parameter a und b die Werte $a = 0,042$ und $b = 60$.

- b) Zeichnen Sie einen maßstabgetreuen Längsschnitt des Luftschiffs. Berechnen Sie das Volumen des Luftschiffs ohne Leitwerke und Kabine.
[Zur Kontrolle: Das Volumen beträgt ungefähr 6000 m^3 .]

(5 P)

- c) In den Luftschiffkörper sollen, wie in der Abbildung zu sehen ist, zwei kegelförmige Sicherheitszellen mit gemeinsamer Grundfläche eingebaut werden.



Zeigen Sie, dass die Funktion V mit $V(x) = 20 \cdot \pi \cdot (f_{0,042;60}(x))^2$ das Gesamtvolumen der beiden Kegel in Abhängigkeit von der Stelle x der gemeinsamen Kegelgrundfläche beschreibt. Berechnen Sie, welcher Anteil des Luftschiffvolumens maximal von den Sicherheitszellen ausgefüllt werden kann.

(9 P)

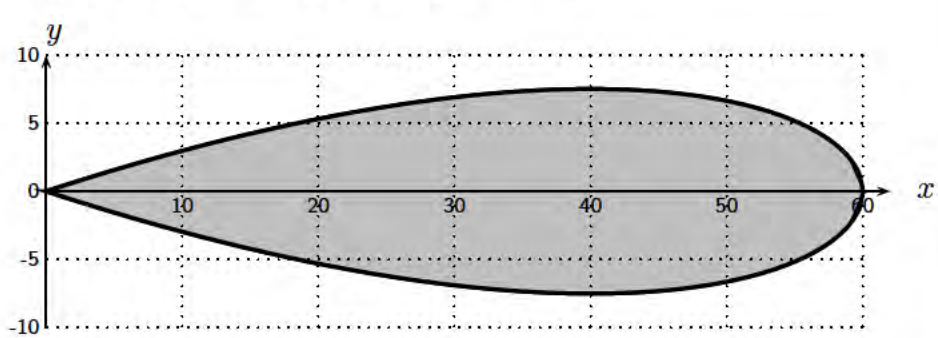
- d) Die Gasmenge im Luftschiff (das gesamte Luftschiff soll mit Gas gefüllt sein) soll sich, von der Kabinenmitte aus betrachtet, zu gleichen Teilen im Vorderteil wie im Hinterteil des Luftschiffs befinden. Bestimmen Sie die Stelle, an der die Kabinenmitte liegen muss.

(3 P)

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) Definitionsbereich: $f_{a;b}$ ist für alle x definiert, für die der Radikand des Wurzelterms $b - x \geq 0$ ist, also für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \leq b$. Also gilt $\mathbb{D} =] - \infty; b]$. Nullstellen: $f_{a;b}(x) = a \cdot x \cdot \sqrt{b - x} = 0 \iff x = b \vee x = 0 \vee a = 0$ Wegen $a, b > 0$ sind die Nullstellen von $f_{a;b}$ also $x = b$ und $x = 0$. Eine notwendige Bedingung dafür, dass an der Stelle x ein lokales Extremum vorliegt, lautet $f'_{a;b}(x) = 0$. Die Auswertung dieser Bedingung mit dem Rechner liefert: $x = \frac{2 \cdot b}{3} \vee a = 0$. Damit kann nur an der Stelle $x = \frac{2 \cdot b}{3}$ ein lokales Extremum vorliegen. Da für alle $a, b > 0$ $f''_{a;b}\left(\frac{2 \cdot b}{3}\right) = \frac{-3 \cdot \sqrt{3} \cdot a}{2 \cdot \sqrt{b}} < 0$ gilt, liegt an dieser Stelle ein lokales Maximum mit dem Funktionswert $f_{a;b}\left(\frac{2 \cdot b}{3}\right) = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot a \cdot b^{3/2}}{9}$ vor. Das den geschlossenen Rotationskörper erzeugende Graphenstück muss das von den Nullstellen von $f_{a;b}$ begrenzte sein. Betrachtet wird hier also die Funktion $f_{a;b}$ auf dem Intervall $[0; b]$ mit der Intervalllänge b, die der Länge des Luftschiffs entspricht. Damit gilt $b = 60$. Die Bedingung, dass der maximale Durchmesser des Luftschiffs 15 m betragen soll, bedeutet, dass das lokale Maximum von $f_{a;b}$ den Wert 7,5 haben muss. Es folgt also mit obigem Ergebnis: $f_{a;60}\left(\frac{2 \cdot 60}{3}\right) = \frac{2 \cdot a \cdot 60^{3/2} \cdot \sqrt{3}}{9} = 7,5 \iff a = \frac{3\sqrt{5}}{160} \approx 0,042.$	2		
	2		
	2		
	3		
		2	
		2	

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe b) Maßstabgetreue Zeichnung des Längsschnittes:  Zur Bestimmung des Volumens wird das Rotationsintegral berechnet: $V = \int_0^{60} \pi (f_{0,042;60}(x))^2 dx \approx 5985,11$ Da eine Volumeneinheit einem Kubikmeter entspricht, beträgt das Volumen des Luftschiffs ungefähr 6000 m³.	3		
Teilaufgabe c) Sei ab jetzt $f = f_{0,042;60}$ und $x \in [0; 60]$ die Stelle, an der die gemeinsame Kegelgrundfläche liege. Dann berechnet sich das Volumen des linken Kegels als $\frac{1}{3}\pi f(x)^2 \cdot x$ und das Volumen des rechten Kegels als $\frac{1}{3}\pi f(x)^2 \cdot (60 - x)$. Das Gesamtvolumen V beider Kegel zusammen in Abhängigkeit von der Wahl der Stelle x ist damit eine Funktion V mit $V(x) = \frac{1}{3}\pi f(x)^2 \cdot x + \frac{1}{3}\pi f(x)^2 \cdot (60 - x) = 60 \cdot \frac{1}{3}\pi f(x)^2 = 20\pi f(x)^2.$ Von dieser Funktion ist die Stelle des globalen Maximums auf dem Intervall $[0; 60]$ zu bestimmen. Die Kandidaten für lokale Extremstellen findet man über die notwendige Bedingung $V'(x) = 0 \iff x = 0 \vee x = 40$.		2	
		1	
		2	

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Wegen $V''(40) \approx -13,3 < 0$ liegt an der Stelle $x = 40$ ein lokales Maximum von V vor. An dieser liegt wegen $V(0) = V(60) = 0$ auch das globale Maximum von V im Intervall $[0; 60]$. Damit liegt die gesuchte Stelle an der dicksten Stelle des Luftschiffs, also an der Stelle $x = 40$, an der auch f maximal ist. Der maximal mit den Sicherheitszellen ausfüllbare Anteil des Luftschiffvolumens beträgt damit $\frac{V(40)}{5985,11} \approx \frac{3546,73}{5985,11} \approx 59,3 \, \%. $ <i>Bei guter Übersicht kann der Prüfling natürlich auch eleganter argumentieren:</i> $V(x) = 20\pi f(x)^2$ wird an der Stelle maximal, an der auch die Funktion f ihr Maximum hat, da die Funktion $g(x) = x^2$ für $x > 0$ streng monoton steigt. Damit liegt die gesuchte Stelle an der dicksten Stelle des Luftschiffs und es folgt nach Aufgabenteil a) $x = \frac{2 \cdot 60}{3} = 40$.		3	
Teilaufgabe d) Die zu bestimmende Stelle d teilt das Volumen des Luftschiffs in zwei Hälften. Zu bestimmen ist also eine Stelle d so, dass $\int_0^d \pi f(x)^2 dx = \frac{1}{2} \cdot 5985,11 \quad \text{ist.}$ Die Lösungen dieser Gleichung lauten $d_1 \approx 36,86$ und $d_2 \approx 74,85$. Da die zweite Lösung nicht im Intervall $[0; 60]$ liegt, muss die Kabinenmitte 36,86 m vom hinteren Ende des Luftschiffs entfernt liegen.		1	
Teilaufgabe d) Die zu bestimmende Stelle d teilt das Volumen des Luftschiffs in zwei Hälften. Zu bestimmen ist also eine Stelle d so, dass $\int_0^d \pi f(x)^2 dx = \frac{1}{2} \cdot 5985,11 \quad \text{ist.}$ Die Lösungen dieser Gleichung lauten $d_1 \approx 36,86$ und $d_2 \approx 74,85$. Da die zweite Lösung nicht im Intervall $[0; 60]$ liegt, muss die Kabinenmitte 36,86 m vom hinteren Ende des Luftschiffs entfernt liegen.			3
Punktsummen	12	15	3

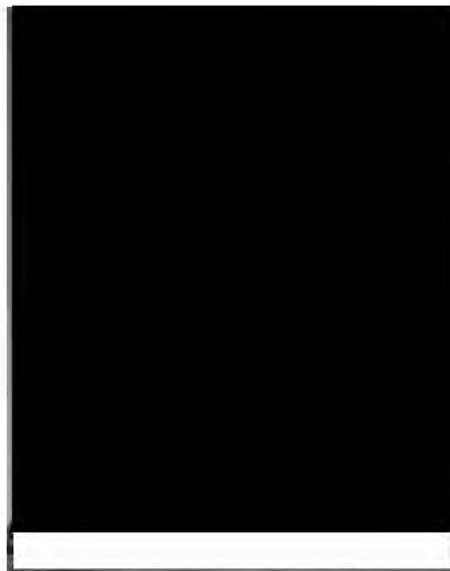
Kernfach Mathematik

Aufgabe 1: Analysis

Bei einer Darrieus-Windkraftanlage ist der Rotor vertikal angeordnet. Zwei vorgebogene Metallblätter mit geeigneter Stellung wandeln die Windenergie in Rotationsenergie um. Die Rotorblätter behalten auch bei schneller Umdrehung ihre Bogenform bei, wie ein Springseil, welches mit den Händen um den Körper geschleudert wird. Legt man die x -Achse entlang der Rotorachse, so lässt sich die geometrische Form eines Blatts des abgebildeten Rotors näherungsweise durch einen Teil des Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = -0,00045 x^4 - 0,044 x^2 + 6 \quad \text{beschreiben.}$$

Dabei entspricht eine Längeneinheit einem Meter.



- a) • Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f auf Symmetrie und bestimmen Sie die Nullstellen von f .
- Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall zwischen den Nullstellen.

(6 P)

Verwenden Sie für Ihre weiteren Berechnungen die Nullstellen $x_1 = -8,75$ und $x_2 = 8,75$.

- b) • Berechnen Sie den Winkel, den die Blätter mit der Rotorachse einschließen.
- Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Punktes P in der Rotorblattmitte bei einer Drehzahl von 80 Umdrehungen pro Minute in km/h.
 - Bei einer Darrieus-Windkraftanlage ist die so genannte Wirkfläche die Fläche zwischen den beiden Rotorblättern. Diese Darrieus-Windkraftanlage leistet pro Quadratmeter der Wirkfläche 125 Watt. Berechnen Sie die Wirkfläche in m^2 und die Leistung dieser Anlage in Watt.

(9 P)

Kernfach Mathematik

- c) Eine weitere Möglichkeit der näherungsweisen Beschreibung der Blattform der Darrieus-Windkraftanlage soll der Graph der Funktion g mit

$$g(x) = 7 - \frac{1}{2} \cdot (e^{0,3 \cdot x} + e^{-0,3 \cdot x}) \quad \text{mit } x \in [-8,75 ; 8,75] \quad \text{liefere.}$$

- Berechnen Sie den Flächeninhalt der Rotoren bei diesem Rechenmodell und geben Sie die prozentuale Abweichung zum ursprünglichen Flächeninhalt in Teilaufgabe b) an.
- Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion g in diesem Intervall keine Wendepunkte besitzt.

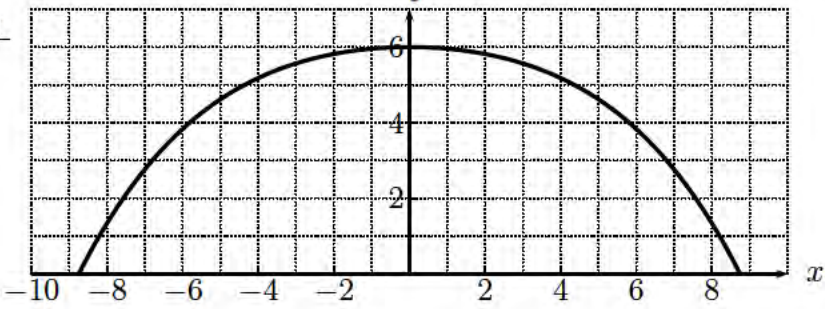
(9 P)

- d) Die Länge eines Rotorblatts (nach dem Modell mit der Funktion f) soll bestimmt werden.

- Ersetzen Sie dazu das halbe Rotorblatt über dem Intervall $[0 ; 8,75]$ durch 2 Strecken und ermitteln Sie so näherungsweise die Rotorblattlänge.
- Beschreiben Sie eine Weiterentwicklung des Verfahrens, so dass die Länge eines Rotorblatts möglichst genau berechnet werden kann.

(6 P)

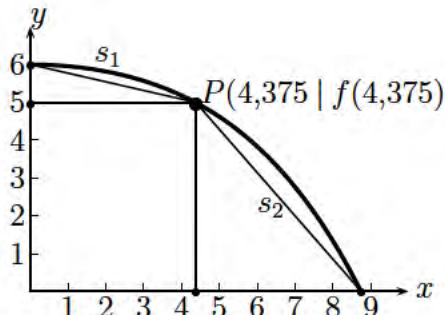
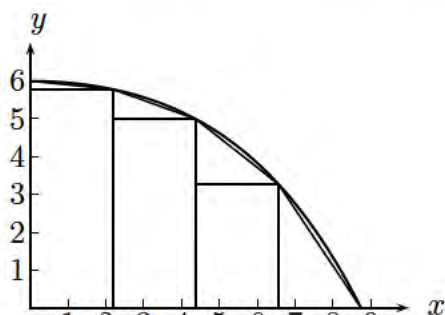
Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) <u>Symmetrie:</u> Es liegt eine Symmetrie zur y-Achse vor, da der Funktionsterm der ganzrationalen Funktion f nur gerade Exponenten aufweist. <u>Nullstellen:</u> $f(x) = -0,00045 x^4 - 0,044 x^2 + 6 = 0, \quad u = x^2$ $-0,00045 u^2 - 0,044 u + 6 = 0$ $u^2 + \frac{880}{9}u - \frac{40\,000}{3} = 0$ $u \approx 76,50 \quad \vee \quad u \approx -174,28$ Nur $u \approx 76,50$ ist positiv und liefert die Lösungen $x_1 \approx -8,75$ und $x_2 \approx 8,75$. <u>Skizze:</u> 	1		
	3		
	2		
Teilaufgabe b) Es gilt $f'(x) = -0,0018 x^3 - 0,088 x$. Damit gilt für den Winkel α der Blätter mit der Rotorachse $\tan \alpha = f'(x_1) = f'(-8,75) \approx 1,976$. Daraus ergibt sich $\alpha \approx 63,2^\circ$. Die Länge des Weges, den der Punkt P bei einer Umdrehung zurücklegt, ist $l = 2\pi \cdot r$ mit $r = f(0) = 6$. Damit gilt für die Geschwindigkeit $v = 2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 80 \text{ m/min} = 960\pi \text{ m/min} \approx 3015,93 \text{ m/min},$ das sind etwa 181 km/h.		2	
		3	

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Da die Fläche oberhalb der x-Achse den gleichen Flächeninhalt hat wie die Fläche unterhalb, gilt für die Gesamtfläche $A = 2 \cdot \int_{-8,75}^{8,75} f(x) dx = 4 \cdot \int_0^{8,75} f(x) dx$ $= 4 \cdot \left[-0,00045 \cdot \frac{1}{5} \cdot x^5 - 0,044 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 + 6 \cdot x \right]_0^{8,75}$ $\approx 4 \cdot 38,0583 \approx 152,233.$ Die Fläche zwischen den Rotorblättern ist etwa $152,2 \text{ m}^2$ groß. Die Leistung beträgt ca. $152,2 \text{ m}^2 \cdot 125 \text{ Watt/m}^2 = 19\,025 \text{ Watt} \approx 19 \text{ kW}$.	3		
Teilaufgabe c) Da die Fläche oberhalb der x-Achse den gleichen Flächeninhalt hat wie die Fläche unterhalb, gilt für die Gesamtfläche $A = 2 \cdot \int_{-8,75}^{8,75} g(x) dx$ $= 2 \cdot \left[7 \cdot x - \frac{5}{3} \cdot e^{0,3 \cdot x} + \frac{5}{3} \cdot e^{-0,3 \cdot x} \right]_{-8,75}^{8,75}$ $\approx 2 \cdot 76,7262 \approx 153,452.$ Bei diesem Rechenmodell ist die Fläche zwischen den Rotorblättern etwa $153,452 \text{ m}^2$ groß und weicht damit um $\frac{153,452}{152,233} - 1 \approx 0,00801 = 0,801 \%$ von dem in Teilaufgabe b) berechneten Flächeninhalt ab. Die Ableitungen der Funktion g sind $g'(x) = -0,15 e^{0,3 \cdot x} + 0,15 e^{-0,3 \cdot x}$ $g''(x) = -0,045 e^{0,3 \cdot x} - 0,045 e^{-0,3 \cdot x}.$ Notwendig für eine Wendestelle x ist $g''(x) = 0$. $-0,045 e^{0,3 \cdot x} - 0,045 e^{-0,3 \cdot x} = 0$ $-0,045 (e^{0,3 \cdot x} + e^{-0,3 \cdot x}) = 0$ Da $e^{0,3 \cdot x}$ und $e^{-0,3 \cdot x}$ stets positiv sind, ist die Gleichung $g''(x) = 0$ nicht lösbar und die Funktion g hat damit keine Wendestellen.	2	4	1
			2

Kernfach Mathematik

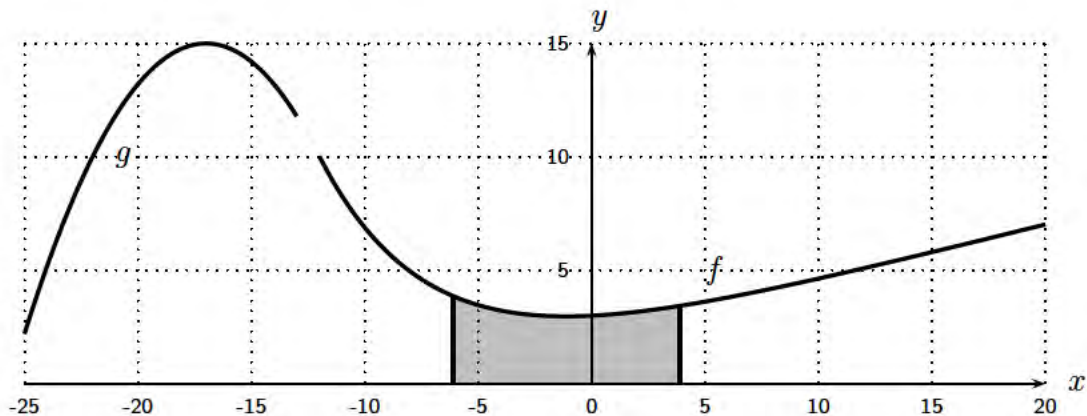
Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe d) Das Intervall $[0; 8,75]$ kann zum Beispiel in 2 gleichlange Teilintervalle eingeteilt und der Graph von f entsprechend der Teilintervalle durch Strecken ersetzt werden.  Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras folgt für die Abschnitte s_1 und s_2 $s_1 = \sqrt{(f(0) - f(4,375))^2 + 4,375^2} \quad \text{und}$ $s_2 = \sqrt{(f(4,375))^2 + 4,375^2}.$ Damit gilt für die Gesamtlänge $l = 2 \cdot (s_1 + s_2) \approx 2 \cdot 11,1279 \approx 22,256$. Ein Rotorblatt ist also etwa 22,26 m lang. [Hierbei wurde mit $f(8,75) = 0$ gerechnet. Ansonsten ergeben sich geringfügig andere Werte.] <u>Allgemeines Verfahren:</u> Das Intervall $[0; 8,75]$ wird in n äquidistante Teilintervalle eingeteilt und der Graph von f durch einen Streckenzug aus n Strecken ersetzt. Jede einzelne Strecke kann mithilfe des Satzes des Pythagoras berechnet werden. Je größer n wird, desto genauer kann die Länge des Rotorblattes bestimmt werden. [Für $n \rightarrow \infty$ nähert man sich der genauen Länge des Rotorblattes.] Beispiel für $n = 4$: 		3	3
Punktsummen	12	15	3

Kernfach Mathematik

Aufgabe 2: Analysis

Das Profil eines Tals wird durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0,25x + e^{-0,2 \cdot x} + 2$ im Intervall $[-12; 20]$ annähernd beschrieben.

Dabei entspricht eine Längeneinheit 10 Metern in der Natur.



- a) In dem Tal soll ein Kanal gebaut werden, für den jeweils 5 LE links und 5 LE rechts von der Talsohle die Erde bis zur x -Achse ausgehoben werden soll (siehe Abbildung). Berechnen Sie, wie viel Erde dann auf einer Kanallänge von 3 LE (= 30 m) ausgehoben werden muss. Geben Sie das Ergebnis sowohl in Volumeneinheiten als auch in Kubikmetern an.
[Zur Kontrolle: Die Talsohle liegt bei $x_E \approx -1,12$.]
- (10 P)
- b) Zeigen Sie, dass sich der in Volumeneinheiten gemessene Aushub in allgemeiner Form angenähert durch die Funktion V mit $V(x) = 7,5x + 35,26e^{-0,2 \cdot x} + 60$ beschreiben lässt, wenn der Kanal 5 LE links und 5 LE rechts von der Stelle x auf einer Länge von 3 LE ausgehoben wird.
- (6 P)
- c) Einer der Bauarbeiter schlägt vor, den Kanal so zu bauen, dass die Kanalmitte an einer anderen Stelle als bei $x_E \approx -1,12$ liegt, da der Erdaushub und damit die Kosten bei gleicher Kanalbreite geringer seien.
- Erläutern Sie anhand der Abbildung, aus welchen Gründen der Bauarbeiter zu dieser Einschätzung gelangt sein könnte.
 - Ermitteln Sie unter Verwendung der Funktion V , wo der Kanal gebaut werden muss, damit der Aushub minimal ist.
 - Bestimmen Sie die mögliche prozentuale Einsparung beim Erdaushub.
- (11 P)

Kernfach Mathematik

- d) Links des Tals wird das Profil des Geländes durch den Graphen einer Funktion g im Intervall $[-25; -13]$ dargestellt (siehe Abbildung).

In der Talsohle steht eine Person, die den Hang hinaufsieht. Beschreiben Sie ein rechnerisches Verfahren, um den höchsten Punkt des Hügels, den diese Person von dieser Position noch sehen kann, zu bestimmen.

(3 P)

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) Gesucht ist der Tiefpunkt des Graphen von f. Für die Funktionsgleichungen der Ableitungen erhält man $f'(x) = 0,25 - 0,2 \cdot e^{-0,2 \cdot x}$ und $f''(x) = 0,04 \cdot e^{-0,2 \cdot x}$. Notwendig für ein Extremum an der Stelle x_E ist $f'(x_E) = 0$. $\begin{aligned} f'(x_E) &= 0,25 - 0,2 \cdot e^{-0,2 \cdot x_E} = 0 \\ 0,2 \cdot e^{-0,2 \cdot x_E} &= 0,25 \\ e^{-0,2 \cdot x_E} &= 1,25 \\ x_E &= -5 \cdot \ln(1,25) \\ x_E &\approx -1,12 \end{aligned}$ Hinreichend für ein Extremum an der Stelle x_E ist $f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) \neq 0$. Da $f''(x_E) = 0,04 \cdot e^{-0,2 \cdot (-5 \cdot \ln(1,25))} = 0,05 > 0$ gilt, liegt an der Stelle $x_E \approx -1,12$ ein Tiefpunkt vor. Der Aushub V wird mithilfe eines Integrals über dem Intervall $[-6,12 ; 3,88]$ berechnet. Für die Querschnittsfläche A gilt $\begin{aligned} A &\approx \int_{-6,12}^{3,88} (0,25 \cdot x + e^{-0,2 \cdot x} + 2) dx \\ &= \left[0,125 \cdot x^2 - 5 \cdot e^{-0,2 \cdot x} + 2 \cdot x \right]_{-6,12}^{3,88} \\ &\approx 31,90. \end{aligned}$ Da der Kanal über eine Länge von $3 \text{ LE} = 30 \text{ m}$ ausgehoben wird, ergibt sich für den Aushub ein Volumen V von $V \approx 31,9 \text{ FE} \cdot 3 \text{ LE} = 95,7 \text{ VE} = 95\,700 \text{ m}^3$.	1 1		
	3		
	2		
	3		

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe b) Das zu betrachtende Intervall für den allgemeinen Fall ist $[x - 5; x + 5]$. Also gilt für den Aushub in allgemeiner Form $V(x) = 3 \cdot \int_{x-5}^{x+5} (0,25 t + e^{-0,2 \cdot t} + 2) dt$ $= 3 \cdot \left[0,125 t^2 - 5 \cdot e^{-0,2 \cdot t} + 2t \right]_{x-5}^{x+5}$ $= 3 \cdot \left(0,125 \cdot (x+5)^2 - 5 \cdot e^{-0,2 \cdot (x+5)} + 2 \cdot (x+5) - (0,125 \cdot (x-5)^2 - 5 \cdot e^{-0,2 \cdot (x-5)} + 2 \cdot (x-5)) \right)$ $= 3 \cdot (2,5 x - 5 \cdot e^{-0,2 \cdot x-1} + 5 \cdot e^{-0,2 \cdot x+1} + 20)$ $= 3 \cdot (2,5 x - 5 \cdot e^{-0,2 \cdot x} \cdot e^{-1} + 5 \cdot e^{-0,2 \cdot x} \cdot e + 20)$ $= 3 \cdot (2,5 x - 5 \cdot e^{-0,2 \cdot x} \cdot (e^{-1} - e) + 20)$ $\approx 7,5 x + 35,26 \cdot e^{-0,2 \cdot x} + 60$		2	
		2	
		1	
		1	
Teilaufgabe c) Da das Gelände auf der linken Seite des Kanals höher liegt als auf der rechten Seite, lohnt sich eine Verschiebung nach rechts. Gesucht ist das Minimum der Funktion V mit $V(x) = 7,5 x + 35,26 \cdot e^{-0,2 \cdot x} + 60.$ Für die Funktionsgleichungen der Ableitungen erhält man $V'(x) = 7,5 - 7,052 e^{-0,2 \cdot x} \quad \text{und}$ $V''(x) = 1,4104 e^{-0,2 \cdot x}.$		1	
	1		
	1		

Kernfach Mathematik

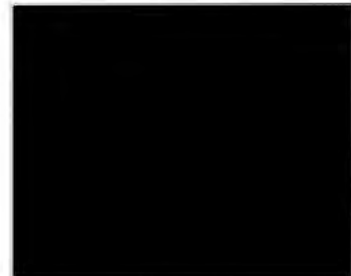
Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Notwendig für einen Extrempunkt bei x ist $V'(x) = 0$. $\begin{aligned} V'(x) &= 7,5 - 7,052 \cdot e^{-0,2 \cdot x} = 0 \\ 7,052 \cdot e^{-0,2 \cdot x} &= 7,5 \\ e^{-0,2 \cdot x} &= \frac{1875}{1763} \\ -0,2 \cdot x &= \ln\left(\frac{1875}{1763}\right) \\ x &\approx -0,31 \end{aligned}$ Hinreichend für einen Extrempunkt bei x ist $V'(x) = 0$ und $V''(x) \neq 0$. Es ist $V''(-0,31) > 0$, also liegt an der Stelle $x \approx -0,31$ ein Minimum vor. Der Aushub wird also minimal, wenn die Kanalmitte an der Stelle $x \approx -0,31$ liegt. $V(-0,31) \approx 95,19$. Damit ergibt sich in der Realität ein Aushub von ca. 95 190 m³. Die Ersparnis beträgt 510 m³, das heißt ca. 0,53 % .		3	
Teilaufgabe d) Es sei a die Augenhöhe der Person. Die Füße der Person befinden sich im Punkt $R(-1,12 f(-1,12))$ und das Auge sieht entsprechend vom Punkt $P(-1,12 f(-1,12) + a)$ aus den Hang hinauf. Gesucht ist der Berührungspunkt $Q(x g(x))$ der Tangente durch P an den Graphen der Funktion g. Die Berührstelle x muss die Eigenschaft haben, dass die Steigung der Geraden durch P und Q gleich der 1. Ableitung von g an dieser Stelle ist, das heißt $\frac{g(x) - (f(-1,12) + a)}{x - (-1,12)} = g'(x).$ Mit der Lösung dieser Gleichung berechnet man den Punkt Q.			3
Punktsummen	12	15	3

Kernfach Mathematik

Aufgabe 3: Analytische Geometrie

Der abgebildete Körper ist ein so genannter Kalkspat. Es soll im Folgenden idealisierend davon ausgegangen werden, dass gegenüber liegende Seitenflächen durch kongruente Parallelogramme beschrieben werden.

Gegeben ist dieser Spat durch die Punkte $A(0 \mid 0 \mid 0)$, $B(9 \mid 6 \mid -3)$, $C(11 \mid 10 \mid -1)$, $D(2 \mid 4 \mid 2)$ und $E(7 \mid 1 \mid 3)$. Eine Längeneinheit beträgt 1 Millimeter. Durch die Punkte A , B , C und D ist die Grundfläche festgelegt. Die dazu parallele Fläche $EFGH$ heißt Deckfläche.



- a) • Weisen Sie nach, dass es sich bei der Grundfläche tatsächlich um ein Parallelogramm handelt und bestimmen Sie dessen Flächeninhalt.
• Berechnen Sie das Spatvolumen. (9 P)

- b) Ein Lichtstrahl trifft die Deckfläche im Punkt $L(11 \mid 5 \mid 3)$ und verläuft innerhalb des Kristalls in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -11 \\ 15 \\ -19 \end{pmatrix}$.

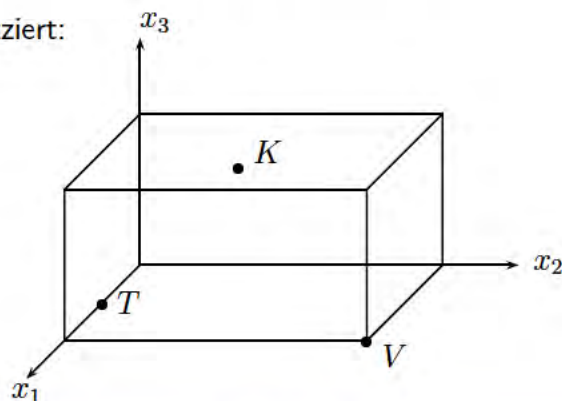
- Zeigen Sie, dass der Lichtstrahl auf die Grundfläche trifft, und berechnen Sie den Auftreffpunkt.
• Berechnen Sie den Winkel, unter dem der Lichtstrahl auf die Grundfläche trifft. (11 P)

- c) *Vorbemerkung: In dieser Teilaufgabe entspricht eine Längeneinheit einem Meter.*

Der hier besprochene Spat ist von besonderem wissenschaftshistorischen Wert und wird daher in einem Museum eines mineralogischen Instituts ausgestellt. Als Teil einer Alarmanlage ist an der Decke des Ausstellungsraumes im Punkt $K(4,5 \mid 5 \mid 4)$ ein Bewegungsmelder installiert, der eine Reichweite von 2,5 m hat.

Ein 2 m großer Einbrecher schleicht aufrecht gehend auf geradem Weg von der Tür T zur Vitrine V .

Der Raum ist hier skizziert:



Kernfach Mathematik

Gehen Sie idealisierend davon aus, dass es sich um einen sehr dünnen Einbrecher handelt, der mathematisch als „Strich“ behandelt werden kann. Die Tür und die Vitrine werden als Punkte angesehen. Die Punkte lauten $T(3 \mid 0 \mid 0)$ und $V(6 \mid 10 \mid 0)$.

Berechnen Sie die Streckenlänge, die der Dieb in Richtung Vitrine zurücklegen kann, ohne vom Bewegungsmelder erfasst zu werden.

(7 P)

- d) Der Lichtstrahl aus Aufgabe b) trifft die Grundfläche im Punkt R . Nehmen Sie an, dass dieser Strahl an der Grundfläche wie an einem ebenen Spiegel reflektiert wird. Nehmen Sie weiterhin an, dass der reflektierte Strahl ungehindert zur Deckfläche gelangen kann und diese im Punkt L^* durchdringt.

Geben Sie mit Hilfe einer Skizze einen Lösungsweg zur Berechnung der Koordinaten von L^* an. Eine tatsächliche Berechnung ist nicht verlangt!

(3 P)

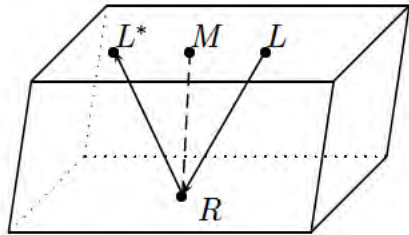
Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn zwei gegenüberliegende Seiten gleich lang und parallel sind. Vektoriell bedeutet dies, dass z.B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ gelten muss. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ Die Maßzahl des Flächeninhalts des Parallelogramms, das von den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ aufgespannt wird, beträgt $A_{Par} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \left \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right = \left \begin{pmatrix} 24 \\ -24 \\ 24 \end{pmatrix} \right = 24\sqrt{3} \approx 41,57.$ Damit beträgt der Inhalt ca. 42 mm². Das Spatvolumen wird mit Hilfe des Spatprodukts errechnet $V_{Spat} = (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \circ \overrightarrow{AE} = \left \begin{pmatrix} 24 \\ -24 \\ 24 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right = 216.$ Damit beträgt das Volumen 216 mm³.	3		
Teilaufgabe b) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 24 \\ -24 \\ 24 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der Ebene E, die die Grundfläche $ABCD$ enthält. Daher ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auch ein Normalenvektor der Ebene E, und eine Normalenform von E lautet $E: \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \vec{x} = 0$. Der Schnittpunkt der Trägergeraden des im Spat verlaufenden Lichtstrahls mit E wird errechnet, indem der Term der Geradengleichung $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 15 \\ -19 \end{pmatrix}$ in die Normalenform von E eingesetzt wird. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 15 \\ -19 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow 9 - 45s = 0 \Leftrightarrow s = 0,2$	2		
	1		

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Der Ortsvektor des Schnittpunktes R lautet damit $\vec{OR} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + 0,2 \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 15 \\ -19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,8 \\ 8 \\ -0,8 \end{pmatrix}.$ Um zu zeigen, dass R in der Grundfläche liegt, muss die Gleichung $\vec{OR} = \lambda \cdot \vec{AB} + \mu \cdot \vec{AD}$ eine Lösung $(\lambda; \mu)$ mit $\lambda, \mu \in [0; 1]$ haben. Das aus den ersten beiden Komponentengleichungen gebildete lineare Gleichungssystem lautet $\begin{aligned} 9\lambda + 2\mu &= 8,8 \\ 6\lambda + 4\mu &= 8. \end{aligned}$ Es wird durch $\lambda = \mu = 0,8$ gelöst. Damit liegt R im Inneren der Grundfläche. (Alternativ können auch die Terme einer Parameterform von E und von g gleichgesetzt werden und die Lösungen analysiert werden.) Es gilt: $\sin(\alpha) = \frac{ \vec{n} \circ \vec{v} }{ \vec{n} \cdot \vec{v} } = \frac{45}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{707}} \approx 0,9771 \Rightarrow \alpha \approx 77,7^\circ.$ Der Winkel zwischen der Grundfläche und der Geraden g ist etwa $77,7^\circ$.		2	
Teilaufgabe c) Die Gleichung der Kugel, innerhalb der der Bewegungsmelder wirkt, lautet $k: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4,5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right]^2 = 6,25.$ Die „Kopfgerade“ des Einbrechers wird durch $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ beschrieben.}$ Durch Einsetzen des Terms von h in die Kugelgleichung erhält man die Schnittparameter. $\left[\begin{pmatrix} -1,5 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^2 = 6,25$		2	

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
$9t^2 - 9t + 2,25 + 100t^2 - 100t + 25 + 4 = 6,25$ $109t^2 - 109t + 25 = 0$ $t^2 - t + \frac{25}{109} = 0$ $t = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{25}{109}} \approx 0,356 \quad \vee \quad t = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{25}{109}} \approx 0,644$ Der kleinere Schnittparameter führt zu dem Schnittpunkt S, bei dem der Einbrecher zuerst in den Erfassungsbereich des Bewegungsmelders gerät. Der Ortsvektor dieses Punktes S ist $\vec{OS} \approx \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 0,356 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,068 \\ 3,56 \\ 2 \end{pmatrix}.$ Die Länge der Wegstrecke, die der Einbrecher im Raum zurücklegen kann, ist damit etwa $\left 0,356 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \right = \left \begin{pmatrix} 1,068 \\ 3,56 \\ 0 \end{pmatrix} \right \approx 3,7$ Meter lang.		3	
Teilaufgabe d)  L, R und L^* bilden ein gleichschenkliges Dreieck. Das Einfallslot wird durch die Gerade mit der Gleichung $b: \vec{x} = \vec{OR} + u \cdot \vec{n}$ beschrieben. Das Lot durchstößt die Deckfläche des Spats im Punkt M. L^* errechnet sich aus $\vec{OL^*} = \vec{OL} + 2 \cdot \vec{LM}$.			3
Punktsummen	12	15	3

Kernfach Mathematik

Aufgabe 4: Analytische Geometrie

Um Prototypen von Flugzeugen zu testen wurde ein großes Testgebiet ausgewiesen. Ein Koordinatensystem ist so festgelegt worden, dass die $x_1 - x_2$ -Ebene den Boden darstellt. Ein Funkfeuer befindet sich am Punkt $L(-101 \mid -151 \mid 0)$.

In dem Testgebiet ist ein Dreieckskurs mit den Eckpunkten $A(50 \mid 60 \mid 2)$, $B(-30 \mid 100 \mid 4)$ und $C(10 \mid 40 \mid 5)$ festgelegt worden. Eine Längeneinheit entspricht einem Kilometer.

- a) Bestimmen Sie die Gesamtlänge des Dreieckskurses ABC und den Winkel der Kursänderung, um von der Flugroute AB zur Flugroute BC zu kommen.

(5 P)

- b) Dieser Dreieckskurs liegt in einer Ebene F .

- Bestimmen Sie eine Koordinatenform von F und ermitteln Sie die kürzeste Distanz, die ein Punkt der Ebene F zum Funkfeuer L haben kann.

[Kontrolle: Eine Koordinatenform von F ist $F : x_1 + x_2 + 20 x_3 = 150$.]

- Berechnen Sie den Punkt K der Ebene F , der zum Punkt L den kleinsten Abstand hat.
- Ermitteln Sie zwei Punkte auf dem Boden, die ebenfalls zur Ebene F gehören.

(11 P)

- c) Um die Wetterverhältnisse bei den Tests genau zu erfassen, lässt man vorher einen kugelförmigen Wetterballon steigen, dessen Mittelpunkt sich dann bei den Flügen stationär bei $M(17 \mid 62 \mid 4,8)$ befindet.

- Weisen Sie rechnerisch nach, dass ein Flugzeug auf seinem Weg von B nach C immer einen Abstand von mehr als 18 km zum Wetterballonmittelpunkt hat.
- Im Cockpit des Flugzeugs ertönt ein Warnton, sobald der Abstand zum Ballonmittelpunkt 9 km oder weniger beträgt. Geben Sie eine Kugelgleichung für den Rand dieses Warnbereichs um den Ballon an.
- Berechnen Sie den Punkt, an dem das Warnsignal zuerst ertönt, wenn der Pilot vom Punkt $D(18 \mid 76 \mid 2,8)$ direkt auf den Ballonmittelpunkt zusteuert.
(Runden Sie die Koordinaten auf zwei Nachkommastellen genau.)

(11 P)

- d) Ein Pilot hat sich sofort beim Tower zu melden, wenn er sich der Ebene Z mit $Z : 2 x_1 - 4 x_2 + x_3 = 507$ auf 50 km genähert hat.

Ein Pilot fliegt sein Flugzeug von B über C und ändert seinen Kurs auch nicht. Beschreiben Sie ein Verfahren, wie man den Meldepunkt auf dem Kurs bestimmen kann. (Eine konkrete Rechnung ist nicht verlangt.)

(3 P)

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) Es sind zunächst die Beträge der Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{AC}$ zu bestimmen. Es gilt: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -80 \\ 40 \\ 2 \end{pmatrix} = \sqrt{8004}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 40 \\ -60 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{5201} \text{ und}$ $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -40 \\ -20 \\ 3 \end{pmatrix} = \sqrt{2009}.$ Die Gesamtlänge des Kurses beträgt daher ca. 206,4 km. Für den Winkel φ zwischen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ gilt: $\cos(\varphi) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} } = \frac{\begin{pmatrix} -80 \\ 40 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ -60 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left \begin{pmatrix} -80 \\ 40 \\ 2 \end{pmatrix} \right \cdot \left \begin{pmatrix} 40 \\ -60 \\ 1 \end{pmatrix} \right } = \frac{-5598}{\sqrt{8004} \cdot \sqrt{5201}} \approx -0,868.$ Somit erhält man für den Winkel der Kursänderung $\varphi \approx 150,2^\circ$. <i>Sollte der Prüfling die Projektion auf die $x_1 - x_2$-Ebene für die Kursänderungsberechnungen betrachten, so wird dies als richtig gewertet.</i>	3		
Teilaufgabe b) Die Vektoren $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -80 \\ 40 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 40 \\ -60 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind Spannvektoren der Ebene F. Mit diesen Spannvektoren bekommt man durch das Vektorprodukt einen Normalenvektor $\begin{pmatrix} -80 \\ 40 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 40 \\ -60 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 \\ 160 \\ 3200 \end{pmatrix}$. Also kann $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor verwendet werden. Somit folgt zunächst $F : x_1 + x_2 + 20 x_3 = t$. Da A in F liegt, gilt $50 + 60 + 20 \cdot 2 = t$. Daher ist $F : x_1 + x_2 + 20 x_3 = 150$ eine Koordinatenform von F.	2		
	2		

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Aus der Hesse-Normalenform von F mit $F : \frac{1}{\sqrt{402}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix} \circ \vec{x} - \frac{150}{\sqrt{402}} = 0$ ergibt sich, dass der Abstand d nun $d = \left \frac{1}{\sqrt{402}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -101 \\ -151 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{150}{\sqrt{402}} \right = \left \frac{-402}{\sqrt{402}} \right \approx 20,05 \text{ ist.}$ L ist daher ca. 20 km von F entfernt. Der Punkt K ist einer der Punkte $P_{1,2}$ mit $\overrightarrow{OP_{1,2}} = \begin{pmatrix} -101 \\ -151 \\ 0 \end{pmatrix} \pm d \cdot \frac{1}{\sqrt{402}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -101 \\ -151 \\ 0 \end{pmatrix} \pm 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix}.$ Mit der Punktprobe $-100 - 150 + 20 \cdot 20 = 150$ folgt $\overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix} -101 \\ -151 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -100 \\ -150 \\ 20 \end{pmatrix}.$ Der gesuchte Punkt ist $K(-100 -150 20)$. Für die beiden Ebenenpunkte muss die x_3-Koordinate null sein, also müssen die anderen beiden Koordinaten die Gleichung $x_1 + x_2 = 150$ erfüllen. Daher sind zwei mögliche Punkte $G_1(150 0 0)$ und $G_2(0 150 0)$.	2		
Teilaufgabe c) Die Ebene E enthalte den Mittelpunkt M und verlaufe orthogonal zur Geraden g_{BC}. Es ist $E : \begin{pmatrix} 40 \\ -60 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 17 \\ 62 \\ 4,8 \end{pmatrix} \right] = 0$, also $E : 40 x_1 - 60 x_2 + x_3 = -3035,2$.			2

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Setzt man den Geradenterm der Geraden g_{BC} mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} -30 \\ 100 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ -60 \\ 1 \end{pmatrix}$ in die Koordinatengleichung ein, so erhält man $40 \cdot (-30 + 40s) - 60 \cdot (100 - 60s) + 4 + s = -3035,2$ $-1200 + 1600s - 6000 + 3600s + 4 + s = -3035,2$ $5201s = 4160,8$ $s = 0,8.$ Der Lotfußpunkt S ist dann $S(2 \mid 52 \mid 4,8)$. Es ist $\vec{SM} = \left \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \right = \sqrt{325} \approx 18,03 > 18.$ Das Flugzeug ist also immer mehr als 18 km vom Ballonmittelpunkt entfernt. Als Kugelgleichung erhält man mit $r = 9$: $k: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 17 \\ 62 \\ 4,8 \end{pmatrix} \right]^2 = 81.$ Der Warnpunkt W liegt sowohl auf der Kugel k als auch auf der Geraden durch D und M. Es ist $\vec{MD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{OW} = \vec{OM} + r \cdot \frac{\vec{MD}}{ \vec{MD} }, \text{ also}$ $\vec{OW} = \begin{pmatrix} 17 \\ 62 \\ 4,8 \end{pmatrix} + \frac{9}{\sqrt{201}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \\ -2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 17,63 \\ 70,89 \\ 3,53 \end{pmatrix}.$ Der gesuchte Punkt ist $W(17,63 \mid 70,89 \mid 3,53)$. <i>Eine Berechnung über die Kugelgleichung ist auch möglich.</i>	1	2	

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe d) Zunächst bildet man eine Hesse-Normalenform von Z . Setzt man den Ortsvektor eines Punktes ein und berechnet den Betrag, so bekommt man den Abstand des Punktes von der Ebene. Daher setzt man den Geradenterm der Geraden g_{BC} ein, bildet den Betrag und setzt den Betragsterm gleich 50. Aus der Betragsgleichung bekommt man zwei Lösungen für den Geradenparameter, denn es gibt einen Punkt vor der Ebene Z und einen dahinter. Die kleinere Lösung für den Parameter führt zum Meldepunkt.			3
Punktsummen	12	15	3

Kernfach Mathematik

Aufgabe 5: Stochastik

Vorbemerkung: Führen Sie stets geeignete Zufallsvariablen und Namen für Ereignisse ein. Machen Sie auch Angaben über die Verteilung der jeweiligen Zufallsvariablen.

5 Prozent einer großen Bevölkerung haben den Erreger der „W-Krankheit“ im Blut. Im Folgenden werden infizierte Personen als „I-Personen“ bezeichnet.

- a) Von einem Schnelltest ist bekannt, dass 94 % der Infizierten als Träger des Erregers erkannt werden. 8 % nicht infizierter Personen werden jedoch irrtümlich als Träger des Erregers diagnostiziert.

- Erstellen Sie zu diesem Sachverhalt entweder eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel oder die entsprechenden vollständig beschrifteten Baumdiagramme.
- Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass eine zufällig auszuwählende Person nicht infiziert ist, wenn sie ein positives Testergebnis (Test hat eine Infektion angezeigt) erhalten hat.
- Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass eine zufällig auszuwählende Person infiziert ist, wenn sie ein negatives Testergebnis (Test hat keine Infektion angezeigt) erhalten hat.
- Bewerten Sie die beiden Ergebnisse.

(9 P)

- b) Berechnen Sie mit Hilfe eines Näherungsverfahrens die Wahrscheinlichkeiten, dass sich unter 1000 Personen der betrachteten Bevölkerung

- höchstens 35 I-Personen befinden,
- mindestens 60 I-Personen befinden.

(5 P)

- c) Ein Symptom der W-Krankheit ist eine Hautveränderung. Eine Arzneimittelfirma hat ein Gegenmittel „Contra-W“ gegen diese Hautveränderung entwickelt. Die Firma behauptet, dass der Anteil der mit „Contra-W“ behandelten Personen, die nicht innerhalb von 3 Tagen gesunden, unter 10 % liegt.

- Entwickeln Sie ein Testverfahren mit 850 Probanden mit dem Ziel der Bestätigung der Firmenaussage auf dem Signifikanzniveau 0,3 %.
- Beschreiben Sie die Bedeutung des Fehlers 2. Art im Sachzusammenhang.

(13 P)

Kernfach Mathematik

- d) Nun ist der Erreger auch auf der kleinen Insel „Paradisia“ eingeschleppt worden. Der Erreger hat exakt 5 % der 20-köpfigen Inselbevölkerung befallen. Es sollen 10 Personen der Inselbevölkerung zufällig ausgewählt werden. Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der sich darunter befindenden I-Personen. Untersuchen Sie, ob die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X durch die Binomialverteilung bzw. die hypergeometrische Verteilung angemessen beschrieben werden kann.

(3 P)

Kernfach Mathematik

Tabelle zur Normalverteilung, Werte der Gaußschen Integralfunktion Φ

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$
0,01	0,4960	0,5040	0,51	0,3050	0,6950	1,01	0,1562	0,8438
0,02	0,4920	0,5080	0,52	0,3015	0,6985	1,02	0,1539	0,8461
0,03	0,4880	0,5120	0,53	0,2981	0,7019	1,03	0,1515	0,8485
0,04	0,4840	0,5160	0,54	0,2946	0,7054	1,04	0,1492	0,8508
0,05	0,4801	0,5199	0,55	0,2912	0,7088	1,05	0,1469	0,8531
0,06	0,4761	0,5239	0,56	0,2877	0,7123	1,06	0,1446	0,8554
0,07	0,4721	0,5279	0,57	0,2843	0,7157	1,07	0,1423	0,8577
0,08	0,4681	0,5319	0,58	0,2810	0,7190	1,08	0,1401	0,8599
0,09	0,4641	0,5359	0,59	0,2776	0,7224	1,09	0,1379	0,8621
0,10	0,4602	0,5398	0,60	0,2743	0,7257	1,10	0,1357	0,8643
0,11	0,4562	0,5438	0,61	0,2709	0,7291	1,11	0,1335	0,8665
0,12	0,4522	0,5478	0,62	0,2676	0,7324	1,12	0,1314	0,8686
0,13	0,4483	0,5517	0,63	0,2643	0,7357	1,13	0,1292	0,8708
0,14	0,4443	0,5557	0,64	0,2611	0,7389	1,14	0,1271	0,8729
0,15	0,4404	0,5596	0,65	0,2578	0,7422	1,15	0,1251	0,8749
0,16	0,4364	0,5636	0,66	0,2546	0,7454	1,16	0,1230	0,8770
0,17	0,4325	0,5675	0,67	0,2514	0,7486	1,17	0,1210	0,8790
0,18	0,4286	0,5714	0,68	0,2483	0,7517	1,18	0,1190	0,8810
0,19	0,4247	0,5753	0,69	0,2451	0,7549	1,19	0,1170	0,8830
0,20	0,4207	0,5793	0,70	0,2420	0,7580	1,20	0,1151	0,8849
0,21	0,4168	0,5832	0,71	0,2389	0,7611	1,21	0,1131	0,8869
0,22	0,4129	0,5871	0,72	0,2358	0,7642	1,22	0,1112	0,8888
0,23	0,4090	0,5910	0,73	0,2327	0,7673	1,23	0,1093	0,8907
0,24	0,4052	0,5948	0,74	0,2296	0,7704	1,24	0,1075	0,8925
0,25	0,4013	0,5987	0,75	0,2266	0,7734	1,25	0,1056	0,8944
0,26	0,3974	0,6026	0,76	0,2236	0,7764	1,26	0,1038	0,8962
0,27	0,3936	0,6064	0,77	0,2206	0,7794	1,27	0,1020	0,8980
0,28	0,3897	0,6103	0,78	0,2177	0,7823	1,28	0,1003	0,8997
0,29	0,3859	0,6141	0,79	0,2148	0,7852	1,29	0,0985	0,9015
0,30	0,3821	0,6179	0,80	0,2119	0,7881	1,30	0,0968	0,9032
0,31	0,3783	0,6217	0,81	0,2090	0,7910	1,31	0,0951	0,9049
0,32	0,3745	0,6255	0,82	0,2061	0,7939	1,32	0,0934	0,9066
0,33	0,3707	0,6293	0,83	0,2033	0,7967	1,33	0,0918	0,9082
0,34	0,3669	0,6331	0,84	0,2005	0,7995	1,34	0,0901	0,9099
0,35	0,3632	0,6368	0,85	0,1977	0,8023	1,35	0,0885	0,9115
0,36	0,3594	0,6406	0,86	0,1949	0,8051	1,36	0,0869	0,9131
0,37	0,3557	0,6443	0,87	0,1922	0,8078	1,37	0,0853	0,9147
0,38	0,3520	0,6480	0,88	0,1894	0,8106	1,38	0,0838	0,9162
0,39	0,3483	0,6517	0,89	0,1867	0,8133	1,39	0,0823	0,9177
0,40	0,3446	0,6554	0,90	0,1841	0,8159	1,40	0,0808	0,9192
0,41	0,3409	0,6591	0,91	0,1814	0,8186	1,41	0,0793	0,9207
0,42	0,3372	0,6628	0,92	0,1788	0,8212	1,42	0,0778	0,9222
0,43	0,3336	0,6664	0,93	0,1762	0,8238	1,43	0,0764	0,9236
0,44	0,3300	0,6700	0,94	0,1736	0,8264	1,44	0,0749	0,9251
0,45	0,3264	0,6736	0,95	0,1711	0,8289	1,45	0,0735	0,9265
0,46	0,3228	0,6772	0,96	0,1685	0,8315	1,46	0,0721	0,9279
0,47	0,3192	0,6808	0,97	0,1660	0,8340	1,47	0,0708	0,9292
0,48	0,3156	0,6844	0,98	0,1635	0,8365	1,48	0,0694	0,9306
0,49	0,3121	0,6879	0,99	0,1611	0,8389	1,49	0,0681	0,9319
0,50	0,3085	0,6915	1,00	0,1587	0,8413	1,50	0,0668	0,9332

Kernfach Mathematik

Tabelle zur Normalverteilung, Werte der Gaußschen Integralfunktion Φ

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$
1,51	0,0655	0,9345	2,01	0,0222	0,9778	2,51	0,0060	0,9940
1,52	0,0643	0,9357	2,02	0,0217	0,9783	2,52	0,0059	0,9941
1,53	0,0630	0,9370	2,03	0,0212	0,9788	2,53	0,0057	0,9943
1,54	0,0618	0,9382	2,04	0,0207	0,9793	2,54	0,0055	0,9945
1,55	0,0606	0,9394	2,05	0,0202	0,9798	2,55	0,0054	0,9946
1,56	0,0594	0,9406	2,06	0,0197	0,9803	2,56	0,0052	0,9948
1,57	0,0582	0,9418	2,07	0,0192	0,9808	2,57	0,0051	0,9949
1,58	0,0571	0,9429	2,08	0,0188	0,9812	2,58	0,0049	0,9951
1,59	0,0559	0,9441	2,09	0,0183	0,9817	2,59	0,0048	0,9952
1,60	0,0548	0,9452	2,10	0,0179	0,9821	2,60	0,0047	0,9953
1,61	0,0537	0,9463	2,11	0,0174	0,9826	2,61	0,0045	0,9955
1,62	0,0526	0,9474	2,12	0,0170	0,9830	2,62	0,0044	0,9956
1,63	0,0516	0,9484	2,13	0,0166	0,9834	2,63	0,0043	0,9957
1,64	0,0505	0,9495	2,14	0,0162	0,9838	2,64	0,0041	0,9959
1,65	0,0495	0,9505	2,15	0,0158	0,9842	2,65	0,0040	0,9960
1,66	0,0485	0,9515	2,16	0,0154	0,9846	2,66	0,0039	0,9961
1,67	0,0475	0,9525	2,17	0,0150	0,9850	2,67	0,0038	0,9962
1,68	0,0465	0,9535	2,18	0,0146	0,9854	2,68	0,0037	0,9963
1,69	0,0455	0,9545	2,19	0,0143	0,9857	2,69	0,0036	0,9964
1,70	0,0446	0,9554	2,20	0,0139	0,9861	2,70	0,0035	0,9965
1,71	0,0436	0,9564	2,21	0,0136	0,9864	2,71	0,0034	0,9966
1,72	0,0427	0,9573	2,22	0,0132	0,9868	2,72	0,0033	0,9967
1,73	0,0418	0,9582	2,23	0,0129	0,9871	2,73	0,0032	0,9968
1,74	0,0409	0,9591	2,24	0,0125	0,9875	2,74	0,0031	0,9969
1,75	0,0401	0,9599	2,25	0,0122	0,9878	2,75	0,0030	0,9970
1,76	0,0392	0,9608	2,26	0,0119	0,9881	2,76	0,0029	0,9971
1,77	0,0384	0,9616	2,27	0,0116	0,9884	2,77	0,0028	0,9972
1,78	0,0375	0,9625	2,28	0,0113	0,9887	2,78	0,0027	0,9973
1,79	0,0367	0,9633	2,29	0,0110	0,9890	2,79	0,0026	0,9974
1,80	0,0359	0,9641	2,30	0,0107	0,9893	2,80	0,0026	0,9974
1,81	0,0351	0,9649	2,31	0,0104	0,9896	2,81	0,0025	0,9975
1,82	0,0344	0,9656	2,32	0,0102	0,9898	2,82	0,0024	0,9976
1,83	0,0336	0,9664	2,33	0,0099	0,9901	2,83	0,0023	0,9977
1,84	0,0329	0,9671	2,34	0,0096	0,9904	2,84	0,0023	0,9977
1,85	0,0322	0,9678	2,35	0,0094	0,9906	2,85	0,0022	0,9978
1,86	0,0314	0,9686	2,36	0,0091	0,9909	2,86	0,0021	0,9979
1,87	0,0307	0,9693	2,37	0,0089	0,9911	2,87	0,0021	0,9979
1,88	0,0301	0,9699	2,38	0,0087	0,9913	2,88	0,0020	0,9980
1,89	0,0294	0,9706	2,39	0,0084	0,9916	2,89	0,0019	0,9981
1,90	0,0287	0,9713	2,40	0,0082	0,9918	2,90	0,0019	0,9981
1,91	0,0281	0,9719	2,41	0,0080	0,9920	2,91	0,0018	0,9982
1,92	0,0274	0,9726	2,42	0,0078	0,9922	2,92	0,0018	0,9982
1,93	0,0268	0,9732	2,43	0,0075	0,9925	2,93	0,0017	0,9983
1,94	0,0262	0,9738	2,44	0,0073	0,9927	2,94	0,0016	0,9984
1,95	0,0256	0,9744	2,45	0,0071	0,9929	2,95	0,0016	0,9984
1,96	0,0250	0,9750	2,46	0,0069	0,9931	2,96	0,0015	0,9985
1,97	0,0244	0,9756	2,47	0,0068	0,9932	2,97	0,0015	0,9985
1,98	0,0239	0,9761	2,48	0,0066	0,9934	2,98	0,0014	0,9986
1,99	0,0233	0,9767	2,49	0,0064	0,9936	2,99	0,0014	0,9986
2,00	0,0228	0,9772	2,50	0,0062	0,9938	3,00	0,0013	0,9987

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung															
	I	II	III													
Teilaufgabe a) Es kennzeichne I das Ereignis „Eine Person ist infiziert“ und T das Ereignis „Der Test zeigt ein positives Ergebnis“. $P(I \cap T) = P(I) \cdot P_I(T) = 0,05 \cdot 0,94 = 0,047$ $P(I \cap \bar{T}) = 0,05 - 0,047 = 0,003$ $P(\bar{I} \cap T) = P(\bar{I}) \cdot P_{\bar{I}}(T) = 0,95 \cdot 0,08 = 0,076$ $P(\bar{I} \cap \bar{T}) = 0,95 - 0,076 = 0,874$	1															
<table border="1"> <tr> <td></td><td>T</td><td>$\bar{T}$</td><td></td></tr> <tr> <td>I</td><td>0,047</td><td>0,003</td><td>0,05</td></tr> <tr> <td>$\bar{I}$</td><td>0,076</td><td>0,874</td><td>0,95</td></tr> <tr> <td></td><td>0,123</td><td>0,877</td><td>1</td></tr> </table> Alternative: Erstellung von zwei Baumdiagrammen:					T	$\bar{T}$		I	0,047	0,003	0,05	$\bar{I}$	0,076	0,874	0,95	
	T	$\bar{T}$														
I	0,047	0,003	0,05													
$\bar{I}$	0,076	0,874	0,95													
	0,123	0,877	1													
	4															

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
$P_T(\bar{I}) = \frac{P(T \cap \bar{I})}{P(T)} = \frac{0,076}{0,123} \approx 0,6179$ $P_{\bar{T}}(I) = \frac{P(\bar{T} \cap I)}{P(\bar{T})} = \frac{0,003}{0,877} \approx 0,0034$ Beispielbewertungen: Für den Fall, dass der Schnelltest positiv ausgefallen ist, müssen sich genauere Untersuchungen anschließen, da über 60 % der positiv getesteten Personen trotz des positiven Testergebnisses gesund sind. Damit zeigt der Prozentsatz 60 % auch, dass man als Positiv-Getesteter guten Gewissens hoffen kann, dass man doch nicht vom Erreger befallen ist. Bei einem negativen Schnelltestergebnis, das keine weiteren Untersuchungen nach sich zieht, liegt nur mit sehr kleiner Wahrscheinlichkeit eine Infektion vor, dieses Risiko ist wohl in Kauf zu nehmen.	2		
Teilaufgabe b) Bei einer großen Gesamtbevölkerung kann die Zufallsvariable X, die die Anzahl der W-Personen unter den 1000 auszuwählenden Personen beschreibt, als binomialverteilt mit den Parametern $n = 1000$ und $p = 0,05$ angesehen werden. Da $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p) = 1000 \cdot 0,05 \cdot 0,95 = 47,5 > 9$ gilt, kann X auch näherungsweise als normalverteilt angesehen werden. $P(X \leq 35) \approx \Phi\left(\frac{35,5-50}{\sqrt{47,5}}\right) \approx \Phi(-2,10) \approx 0,0179$ $P(X \geq 60) = 1 - P(X \leq 59) \approx 1 - \Phi\left(\frac{59,5-50}{\sqrt{47,5}}\right) \approx 1 - \Phi(1,38) \approx 1 - 0,9162 = 0,0838$	1 1 2		

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe c) Es soll bestätigt werden, dass bei weniger als 10 % der Probanden keine erfolgreiche Bekämpfung der Hautveränderung zu beobachten ist. Daher wird das Gegenteil als zu testende Nullhypothese angenommen: $H_0 : p \geq 0,1$. Es kennzeichne nunmehr die Zufallsvariable X die Anzahl der Probanden, bei denen die W-Krankheit durch Contra-W nicht erfolgreich bekämpft werden kann. X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 850$ und $p = 0,1$, da diese Wahrscheinlichkeit den ungünstigsten Fall bzgl. H_0 darstellt. Wegen $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) = 850 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 76,5 > 9$ kann X näherungsweise als normalverteilt angesehen werden. Die Nullhypothese wird verworfen werden, wenn unter den 850 Versuchspersonen relativ wenige nicht von der Hautveränderung befreit werden. Als Verwerfungsbereich wird daher $A = [0; k]$ gewählt. $P_{H_0 \text{ wahr}}(X \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k+0,5-85}{\sqrt{76,5}}\right) \leq 0,003$ $\frac{k+0,5-85}{\sqrt{76,5}} \leq -2,75$ $k \leq 84,5 - 2,75 \cdot \sqrt{76,5} \approx 60,45$ Der Ablehnungsbereich lautet daher $[0; 60]$. Ein Fehler zweiter Art wird bei diesem Test dann begangen, wenn die Nullhypothese beibehalten wird, obwohl diese in Wirklichkeit falsch ist. Das ist der Fall, wenn der Anteil der behandelten Personen, bei denen keine Gesundung durch „Contra-W“ eintritt, bei weniger als 10 % liegt, das Testergebnis aber trotzdem nicht im Ablehnungsbereich liegt (also mehr als 60 Nicht-Gesundungen beobachtet wurden).		2	
		1	
		1	
		1	
		1	
		4	
		1	
		2	

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe d) Auf der Insel ist genau einer der 20 Bewohner infiziert. Bei der Auswahl von 10 Bewohnern handelt es sich um eine Realisierung des Modells „Ziehen ohne Zurücklegen“, deren zugehörige Zufallsvariable durch eine hypergeometrische Verteilung mit den Parametern $N = 20$, $n = 10$, $M = 1$ richtig beschrieben wird. Dabei kann X die Werte 0 bzw. 1 annehmen. Damit die hypergeometrische Verteilung durch eine Binomialverteilung approximiert werden kann, muss die Anzahl N der Inselbewohner sehr viel größer als der Stichprobenumfang sein. Das ist hier nicht der Fall. Nimmt man z. B. X als binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0,05$ an, so könnte X die Werte $0,1,2,\dots,20$ annehmen, wobei $P_{BV}(X = 2) \approx 19\%$ beträgt. Auch dies zeigt, dass X (auch nicht näherungsweise) nicht durch eine Binomialverteilung beschrieben werden kann.			3
Punktsummen	12	15	3

Kernfach Mathematik

Aufgabe 6: Stochastik

Vorbemerkung: Führen Sie stets geeignete Zufallsvariablen und Namen für Ereignisse ein. Machen Sie auch Angaben über die Verteilung der jeweiligen Zufallsvariablen.

Eine repräsentative Umfrage ergab, dass 60 % der Menschen eines bevölkerungsreichen Landes einen Zugang zum Internet nutzen. Diejenigen, die einen Zugang zum Internet nutzen, wurden weiterhin gefragt, zu welchem Hauptzweck sie dies tun. Dabei erhielt man folgende Verteilung: (Doppelnennungen waren nicht erlaubt.)

23 %	Reiseinformationen und Urlaubsbuchungen
33 %	Einkauf über das Internet
29 %	Persönliche Weiterbildung
15 %	sonstige

a) Betrachten Sie die folgenden Ereignisse A und B:

A: „Unter zwanzig zufällig auszuwählenden Internetnutzern befindet sich genau eine Person, die das Internet hauptsächlich für Reiseinformationen und Urlaubsbuchungen nutzt“.

B: „Unter zehn zufällig auszuwählenden Internetnutzern befinden sich mindestens zwei Personen, die das Internet hauptsächlich zur persönlichen Weiterbildung nutzen.“

- Erläutern Sie, warum man strenggenommen die Binomialverteilung zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten für A und B nicht verwenden darf, sie aber eine sehr gute Näherung darstellt.
- Berechnen Sie mithilfe der Binomialverteilung die Wahrscheinlichkeiten für die beiden Ereignisse.
- Berechnen Sie mit einem Näherungsverfahren die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis C: „Von 400 zufällig auszuwählenden Menschen des Landes gehören mindestens 250 Personen und höchstens 260 Personen zur Gruppe der Internetnutzer.“

(11 P)

b) • Bestimmen Sie, wie viele Internetnutzer dieses Landes man mindestens befragen müsste, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99 % wenigstens eine Person findet, die ihren Internetzugang hauptsächlich zum Einkauf nutzt.

- In einem Wohnhaus wohnen 25 Personen, von denen 10 das Internet nutzen. Es sollen 5 zufällig auszuwählende Hausbewohner befragt werden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter diesen mehr als 3 Internetnutzer befinden.

(8 P)

Kernfach Mathematik

- c) Auf einer einwöchigen Computermesse präsentiert sich die Firma Z-Tel als neuer Internetanbieter. Die Firma möchte Laptops zu einem Schnäppchenpreis anbieten. Man rechnet damit, dass 9 % aller Messebesucher einen solchen Laptop kaufen werden. Am ersten Messetag werden 1500 Besucher erwartet.

- Berechnen Sie die Anzahl der am ersten Tag zu erwartenden Verkäufe.
- Berechnen Sie, wie viele Laptops am ersten Tag bereitgestellt werden müssen, damit das Angebot für die Besucher mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 98 % ausreicht.

(8 P)

- d) Um in diesem Land, in dem Z-Tel bisher keine Kunden hat, Kunden für Z-Tel zu gewinnen, soll ein Prozentsatz p der Menschen dieses Landes mit einem Werbebrief angeschrieben werden. Aus anderen Ländern hat Z-Tel die Erfahrung gemacht, dass 20 % der angeschriebenen Personen sich daraufhin innerhalb eines Monats für die Firma Z-Tel entscheiden, aber auch, dass sich 3 % der Menschen, die nicht angeschrieben wurden, in diesem Monat ebenfalls Z-Tel als Anbieter wählen.

Ermitteln Sie den Mindestprozentsatz p , bei dem Z-Tel unter den obigen Voraussetzungen nach einem Monat 4,5 % der Bevölkerung als Kunden hat.

(3 P)

Kernfach Mathematik

Tabelle zur Normalverteilung, Werte der Gaußschen Integralfunktion Φ

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$
0,01	0,4960	0,5040	0,51	0,3050	0,6950	1,01	0,1562	0,8438
0,02	0,4920	0,5080	0,52	0,3015	0,6985	1,02	0,1539	0,8461
0,03	0,4880	0,5120	0,53	0,2981	0,7019	1,03	0,1515	0,8485
0,04	0,4840	0,5160	0,54	0,2946	0,7054	1,04	0,1492	0,8508
0,05	0,4801	0,5199	0,55	0,2912	0,7088	1,05	0,1469	0,8531
0,06	0,4761	0,5239	0,56	0,2877	0,7123	1,06	0,1446	0,8554
0,07	0,4721	0,5279	0,57	0,2843	0,7157	1,07	0,1423	0,8577
0,08	0,4681	0,5319	0,58	0,2810	0,7190	1,08	0,1401	0,8599
0,09	0,4641	0,5359	0,59	0,2776	0,7224	1,09	0,1379	0,8621
0,10	0,4602	0,5398	0,60	0,2743	0,7257	1,10	0,1357	0,8643
0,11	0,4562	0,5438	0,61	0,2709	0,7291	1,11	0,1335	0,8665
0,12	0,4522	0,5478	0,62	0,2676	0,7324	1,12	0,1314	0,8686
0,13	0,4483	0,5517	0,63	0,2643	0,7357	1,13	0,1292	0,8708
0,14	0,4443	0,5557	0,64	0,2611	0,7389	1,14	0,1271	0,8729
0,15	0,4404	0,5596	0,65	0,2578	0,7422	1,15	0,1251	0,8749
0,16	0,4364	0,5636	0,66	0,2546	0,7454	1,16	0,1230	0,8770
0,17	0,4325	0,5675	0,67	0,2514	0,7486	1,17	0,1210	0,8790
0,18	0,4286	0,5714	0,68	0,2483	0,7517	1,18	0,1190	0,8810
0,19	0,4247	0,5753	0,69	0,2451	0,7549	1,19	0,1170	0,8830
0,20	0,4207	0,5793	0,70	0,2420	0,7580	1,20	0,1151	0,8849
0,21	0,4168	0,5832	0,71	0,2389	0,7611	1,21	0,1131	0,8869
0,22	0,4129	0,5871	0,72	0,2358	0,7642	1,22	0,1112	0,8888
0,23	0,4090	0,5910	0,73	0,2327	0,7673	1,23	0,1093	0,8907
0,24	0,4052	0,5948	0,74	0,2296	0,7704	1,24	0,1075	0,8925
0,25	0,4013	0,5987	0,75	0,2266	0,7734	1,25	0,1056	0,8944
0,26	0,3974	0,6026	0,76	0,2236	0,7764	1,26	0,1038	0,8962
0,27	0,3936	0,6064	0,77	0,2206	0,7794	1,27	0,1020	0,8980
0,28	0,3897	0,6103	0,78	0,2177	0,7823	1,28	0,1003	0,8997
0,29	0,3859	0,6141	0,79	0,2148	0,7852	1,29	0,0985	0,9015
0,30	0,3821	0,6179	0,80	0,2119	0,7881	1,30	0,0968	0,9032
0,31	0,3783	0,6217	0,81	0,2090	0,7910	1,31	0,0951	0,9049
0,32	0,3745	0,6255	0,82	0,2061	0,7939	1,32	0,0934	0,9066
0,33	0,3707	0,6293	0,83	0,2033	0,7967	1,33	0,0918	0,9082
0,34	0,3669	0,6331	0,84	0,2005	0,7995	1,34	0,0901	0,9099
0,35	0,3632	0,6368	0,85	0,1977	0,8023	1,35	0,0885	0,9115
0,36	0,3594	0,6406	0,86	0,1949	0,8051	1,36	0,0869	0,9131
0,37	0,3557	0,6443	0,87	0,1922	0,8078	1,37	0,0853	0,9147
0,38	0,3520	0,6480	0,88	0,1894	0,8106	1,38	0,0838	0,9162
0,39	0,3483	0,6517	0,89	0,1867	0,8133	1,39	0,0823	0,9177
0,40	0,3446	0,6554	0,90	0,1841	0,8159	1,40	0,0808	0,9192
0,41	0,3409	0,6591	0,91	0,1814	0,8186	1,41	0,0793	0,9207
0,42	0,3372	0,6628	0,92	0,1788	0,8212	1,42	0,0778	0,9222
0,43	0,3336	0,6664	0,93	0,1762	0,8238	1,43	0,0764	0,9236
0,44	0,3300	0,6700	0,94	0,1736	0,8264	1,44	0,0749	0,9251
0,45	0,3264	0,6736	0,95	0,1711	0,8289	1,45	0,0735	0,9265
0,46	0,3228	0,6772	0,96	0,1685	0,8315	1,46	0,0721	0,9279
0,47	0,3192	0,6808	0,97	0,1660	0,8340	1,47	0,0708	0,9292
0,48	0,3156	0,6844	0,98	0,1635	0,8365	1,48	0,0694	0,9306
0,49	0,3121	0,6879	0,99	0,1611	0,8389	1,49	0,0681	0,9319
0,50	0,3085	0,6915	1,00	0,1587	0,8413	1,50	0,0668	0,9332

Kernfach Mathematik

Tabelle zur Normalverteilung, Werte der Gaußschen Integralfunktion Φ

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$	z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$
1,51	0,0655	0,9345	2,01	0,0222	0,9778	2,51	0,0060	0,9940
1,52	0,0643	0,9357	2,02	0,0217	0,9783	2,52	0,0059	0,9941
1,53	0,0630	0,9370	2,03	0,0212	0,9788	2,53	0,0057	0,9943
1,54	0,0618	0,9382	2,04	0,0207	0,9793	2,54	0,0055	0,9945
1,55	0,0606	0,9394	2,05	0,0202	0,9798	2,55	0,0054	0,9946
1,56	0,0594	0,9406	2,06	0,0197	0,9803	2,56	0,0052	0,9948
1,57	0,0582	0,9418	2,07	0,0192	0,9808	2,57	0,0051	0,9949
1,58	0,0571	0,9429	2,08	0,0188	0,9812	2,58	0,0049	0,9951
1,59	0,0559	0,9441	2,09	0,0183	0,9817	2,59	0,0048	0,9952
1,60	0,0548	0,9452	2,10	0,0179	0,9821	2,60	0,0047	0,9953
1,61	0,0537	0,9463	2,11	0,0174	0,9826	2,61	0,0045	0,9955
1,62	0,0526	0,9474	2,12	0,0170	0,9830	2,62	0,0044	0,9956
1,63	0,0516	0,9484	2,13	0,0166	0,9834	2,63	0,0043	0,9957
1,64	0,0505	0,9495	2,14	0,0162	0,9838	2,64	0,0041	0,9959
1,65	0,0495	0,9505	2,15	0,0158	0,9842	2,65	0,0040	0,9960
1,66	0,0485	0,9515	2,16	0,0154	0,9846	2,66	0,0039	0,9961
1,67	0,0475	0,9525	2,17	0,0150	0,9850	2,67	0,0038	0,9962
1,68	0,0465	0,9535	2,18	0,0146	0,9854	2,68	0,0037	0,9963
1,69	0,0455	0,9545	2,19	0,0143	0,9857	2,69	0,0036	0,9964
1,70	0,0446	0,9554	2,20	0,0139	0,9861	2,70	0,0035	0,9965
1,71	0,0436	0,9564	2,21	0,0136	0,9864	2,71	0,0034	0,9966
1,72	0,0427	0,9573	2,22	0,0132	0,9868	2,72	0,0033	0,9967
1,73	0,0418	0,9582	2,23	0,0129	0,9871	2,73	0,0032	0,9968
1,74	0,0409	0,9591	2,24	0,0125	0,9875	2,74	0,0031	0,9969
1,75	0,0401	0,9599	2,25	0,0122	0,9878	2,75	0,0030	0,9970
1,76	0,0392	0,9608	2,26	0,0119	0,9881	2,76	0,0029	0,9971
1,77	0,0384	0,9616	2,27	0,0116	0,9884	2,77	0,0028	0,9972
1,78	0,0375	0,9625	2,28	0,0113	0,9887	2,78	0,0027	0,9973
1,79	0,0367	0,9633	2,29	0,0110	0,9890	2,79	0,0026	0,9974
1,80	0,0359	0,9641	2,30	0,0107	0,9893	2,80	0,0026	0,9974
1,81	0,0351	0,9649	2,31	0,0104	0,9896	2,81	0,0025	0,9975
1,82	0,0344	0,9656	2,32	0,0102	0,9898	2,82	0,0024	0,9976
1,83	0,0336	0,9664	2,33	0,0099	0,9901	2,83	0,0023	0,9977
1,84	0,0329	0,9671	2,34	0,0096	0,9904	2,84	0,0023	0,9977
1,85	0,0322	0,9678	2,35	0,0094	0,9906	2,85	0,0022	0,9978
1,86	0,0314	0,9686	2,36	0,0091	0,9909	2,86	0,0021	0,9979
1,87	0,0307	0,9693	2,37	0,0089	0,9911	2,87	0,0021	0,9979
1,88	0,0301	0,9699	2,38	0,0087	0,9913	2,88	0,0020	0,9980
1,89	0,0294	0,9706	2,39	0,0084	0,9916	2,89	0,0019	0,9981
1,90	0,0287	0,9713	2,40	0,0082	0,9918	2,90	0,0019	0,9981
1,91	0,0281	0,9719	2,41	0,0080	0,9920	2,91	0,0018	0,9982
1,92	0,0274	0,9726	2,42	0,0078	0,9922	2,92	0,0018	0,9982
1,93	0,0268	0,9732	2,43	0,0075	0,9925	2,93	0,0017	0,9983
1,94	0,0262	0,9738	2,44	0,0073	0,9927	2,94	0,0016	0,9984
1,95	0,0256	0,9744	2,45	0,0071	0,9929	2,95	0,0016	0,9984
1,96	0,0250	0,9750	2,46	0,0069	0,9931	2,96	0,0015	0,9985
1,97	0,0244	0,9756	2,47	0,0068	0,9932	2,97	0,0015	0,9985
1,98	0,0239	0,9761	2,48	0,0066	0,9934	2,98	0,0014	0,9986
1,99	0,0233	0,9767	2,49	0,0064	0,9936	2,99	0,0014	0,9986
2,00	0,0228	0,9772	2,50	0,0062	0,9938	3,00	0,0013	0,9987

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) Bei der Auswahl der 20 Personen liegt ein „Ziehen ohne Zurücklegen“ vor, daher verändert sich bei jedem Zug die Wahrscheinlichkeit, einen „Treffer“ zu erzielen. Es liegt hier also eine hypergeometrische Verteilung vor. Wenn die Grundgesamtheit aber groß ist, so ändert sich die „Trefferwahrscheinlichkeit“ kaum, so dass die Binomialverteilung eine sehr gute Näherung ist. Da hier von einem bevölkerungsreichen Land gesprochen wurde, kann von einer großen Grundgesamtheit ausgegangen werden. X beschreibt die Anzahl der Internetnutzer, die das Internet hauptsächlich für Reiseinformationen und zu Urlaubsbuchungen nutzen. Mit $n = 20$, $p = 0,23$ folgt $P(A) = P(X = 1) = \binom{20}{1} \cdot 0,23^1 \cdot 0,77^{19} \approx 0,032 = 3,2\%.$ X beschreibt nun die Anzahl der Internetnutzer, die das Internet hauptsächlich zur persönlichen Weiterbildung nutzen. Mit $n = 10$, $p = 0,29$ folgt $\begin{aligned} P(B) = P(X \geq 2) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - \binom{10}{0} \cdot 0,29^0 \cdot 0,71^{10} - \binom{10}{1} \cdot 0,29^1 \cdot 0,71^9 \\ &\approx 0,834 = 83,4\%. \end{aligned}$ X beschreibt nun die Anzahl der Internet-Nutzer. Mit $n = 400$, $p = 0,6$ ist $\mu = n \cdot p = 400 \cdot 0,6 = 240$. Wegen $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q = 400 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 96 > 9$ ist die Laplace-Bedingung für die Näherung durch die Normalverteilung erfüllt. $\begin{aligned} P(250 \leq X \leq 260) &= P(X \leq 260) - P(X \leq 249) \\ &\approx \Phi\left(\frac{260 + 0,5 - 240}{\sqrt{96}}\right) - \Phi\left(\frac{249 + 0,5 - 240}{\sqrt{96}}\right) \\ &\approx \Phi(2,09) - \Phi(0,97) \\ &\approx 0,9817 - 0,8340 = 0,1477 = 14,77\% \end{aligned}$	1		
	1		
	2		
	3		
	1		
	3		

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe b) X beschreibt die Anzahl der Internetnutzer, die ihren Internet-Zugang hauptsächlich zum Einkaufen nutzen. Sei n die Mindestanzahl der zu befragenden Internetnutzer. X ist binomialverteilt mit den Parametern n und $p = 0,33$. $P(X \geq 1) > 0,99$ $1 - P(X = 0) > 0,99$ $0,01 > P(X = 0)$ $0,01 > \binom{n}{0} \cdot 0,33^0 \cdot 0,67^n$ $0,67^n < 0,01$ $n \cdot \ln(0,67) < \ln(0,01)$ $n > 11,5$ Also müssen mindestens 12 Internetnutzer befragt werden. Die Zufallsgröße Y beschreibe die Anzahl der Internetnutzer unter den 5 auszuwählenden Hausbewohnern. Da es sich um eine Realisierung des Modells „Ziehen ohne Zurücklegen“ handelt, ist Y hypergeometrisch verteilt mit den Parametern $N = 25$, $n = 5$ und $M = 10$. $P(Y > 3) = P(Y = 4) + P(Y = 5)$ $= \frac{\binom{10}{4} \binom{15}{1}}{\binom{25}{5}} + \frac{\binom{10}{5} \binom{15}{0}}{\binom{25}{5}}$ $\approx 0,0593 + 0,0047$ $= 0,0640 = 6,4 \%$		2	
		2	
		2	

Kernfach Mathematik

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe c) Die erwartete Anzahl der am ersten Tag zu erwartenden Verkäufe beträgt $n \cdot p = 1500 \cdot 0,09 = 135$. X beschreibt die Anzahl der Käufer eines Laptops. X ist binomialverteilt mit $n = 1500$, $p = 0,09$. k ist die Anzahl der bereitzustellenden Laptops. Es soll gelten $P(X \leq k) \geq 0,98$. Wegen $\sigma^2 = n \cdot p \cdot q = 1500 \cdot 0,09 \cdot 0,91 = 122,85 > 9$ ist die Laplace-Bedingung für die Näherung durch die Normalverteilung erfüllt. $\Phi\left(\frac{k + 0,5 - 135}{\sqrt{122,85}}\right) \geq 0,98$ $\frac{k + 0,5 - 135}{\sqrt{122,85}} \geq 2,06,$ also $k \geq 134,5 + 2,06 \cdot \sqrt{122,85} \approx 157,33$. Es müssen also mindestens 158 Laptops bereit gestellt werden.	1	2	1
Teilaufgabe d) Es ist p der Prozentsatz der anzuschreibenden Bevölkerung. A steht für Angeschriebene, N für nicht Angeschriebene und Z für Kunde bei Z-Tel. Baumdiagramm: Der Anteil p der Menschen in der Bevölkerung, die Kunde von Z-Tel werden, soll 4,5 % betragen, also muss $p \cdot 0,2 + (1 - p) \cdot 0,03 = 0,045$ gelten. Damit ist $p \cdot 0,17 = 0,015$, also $p \approx 0,088$. Es müssen also ca. 8,8 % der Bevölkerung angeschrieben werden.			3
Punktsummen	12	15	3