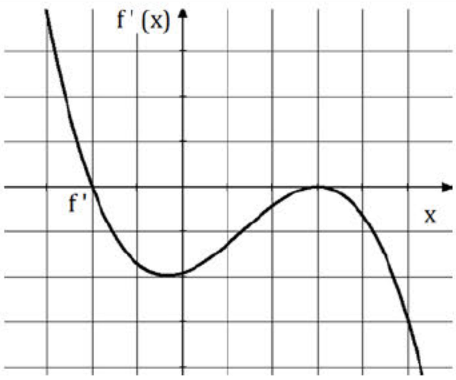
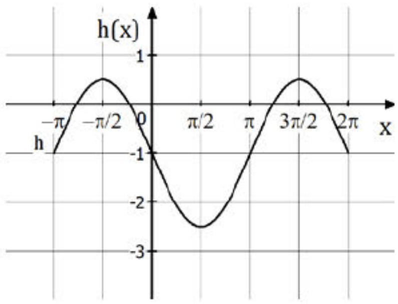
Aufgabe 1 A mit Analytischer Geometrie:

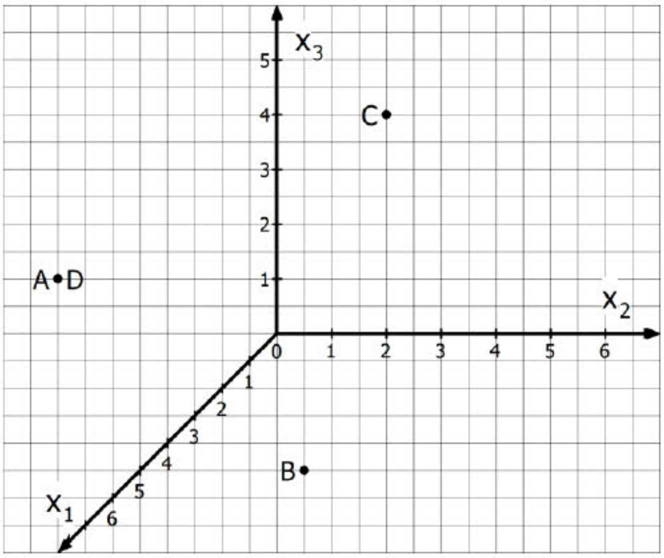
<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Lösungsskizze</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>A1</td><td>Der Prüfling …</td><td>Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:
Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Lösungsskizze sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.
<u>Bemerkung</u>:
Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.</td><td></td></tr>
<tr><td>1a</td><td>entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>
<table>
<tr><th><u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).</th><th>wahr</th><th>falsch</th></tr>
<tr><td>Die Ableitungsfunktion g' kann dargestellt werden mit
$g'(x) = a \cdot (x-3)^3 \cdot (x+2) \cdot (x-7)^2 \cdot (x+1)$.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Der höchste Exponent des Funktionsterms von $g(x)$ ist ungerade.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Der Graph von g hat an der Stelle $x = -2$ einen Hochpunkt.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Der Graph der Funktion g hat mindestens zwei Wendepunkte.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Es gilt: $g(-1) < g(2)$</td><td></td><td>X</td></tr>
</table>
</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>skizziert den Graphen der Ableitungsfunktion f ‘ und

gibt einen Lösungsansatz an, mit dem die Maßzahl der Fläche, die vom Graphen von f und der Abszisse eingeschlossen wird, berechnet werden kann.</td><td>

$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$</td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
1c	bestimmt den Wert des Parameters a so, dass die Funktion f_a bei $x = 3$ eine Extremstelle hat und zeigt, dass alle Funktionsgraphen der Funktion f_a punktsymmetrisch zum Ursprung sind.	Für alle Extremstellen x gilt: $f_a'(x) = 0 \wedge f_a''(x) \neq 0$ $f_a'(x) = \frac{3}{a}x^2 + 1 \wedge f_a''(x) = \frac{6}{a}x$ $f_a'(3) = \frac{3}{a} \cdot 3^2 + 1$ $0 = \frac{3}{a} \cdot 3^2 + 1$ $\Leftrightarrow a = -27$ $f_a''(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Zu zeigen: $f_a(-x) = -f_a(x)$ $f_a(-x) = \frac{1}{a}(-x)^3 + (-x)$ $= -\frac{1}{a}x^3 - x$ $= -\left(\frac{1}{a}x^3 + x\right)$ $= -f_a(x)$	5
1d	skizziert den Graphen der Funktion h im Intervall $-\pi \leq x \leq 2\pi$ und berechnet die Wendepunkte im Intervall $-\pi \leq x \leq \pi$ und gibt die Steigung an der Stelle $x = 0$ an.	 Es gilt: $h''(x) = 0$ $\frac{3}{2} \cdot \sin(x) = 0$ mit $-\pi \leq x \leq \pi$ $\Leftrightarrow x = \pi \vee x = 0 \vee x = -\pi$ $(h'''(x) = \frac{3}{2} \cdot \cos(x)$ $h'''(\pi) \neq 0$ und $h'''(0) \neq 0$ und $h'''(-\pi) \neq 0)$ $h(\pi) = -1 \quad \Rightarrow W_1(\pi \vert -1)$ $h(0) = -1 \quad \Rightarrow W_2(0 \vert -1)$ $h(-\pi) = -1 \quad \Rightarrow W_3(-\pi \vert -1)$ $h'(0) = -\frac{3}{2}$	5

	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
1e	nennt die möglichen Lagebeziehungen zweier Geraden im $\mathbb{R}^3$ und untersucht die Lagebeziehung der Geraden g_1 und g_2.	Zwei Geraden können zueinander parallel sein oder einen Schnittpunkt haben, sie können identisch sein oder windschief zueinander. Da die beiden Geraden Richtungsvektoren haben, die nicht linear abhängig sind, können die Geraden nicht parallel oder identisch sein. Zur Überprüfung, ob ein Schnittpunkt vorliegt, kann aus dem Ansatz $g_1 = g_2$ ein Gleichungssystem aufgestellt und gelöst werden: $$\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\-4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\0\\8\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$ $$\begin{array}{ll} \text{I.} & 3 + 2r = 7 \\ \text{II.} & 2 - 4r = 2s \\ \text{III.} & -1 + 3r = 8 + 1s \end{array}$$ Aus I. folgt $r = 2$. Das Einsetzen in II. und III. ergibt jeweils $s = -3$. Somit schneiden sich die beiden Geraden in einem Punkt. *Die Angabe des Schnittpunkts* $S(7 \mid -6 \mid 5)$ *ist nicht erforderlich.*	5
1f	prüft, ob der Punkt P auf der Geraden g_3 liegt und beschreibt ein Verfahren, mit dem eine Ebenengleichung für die Ebene, die durch einen Punkt und eine Gerade festgelegt wird, bestimmt werden kann.	Mit dem Ansatz $$\begin{pmatrix}8\\-11\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$$ kann die Punktprobe durchgeführt werden. Die Gleichung $8 = 2 + t \cdot (-1)$ führt zu $t = -6$. Dann ist $\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-11\\-9\end{pmatrix}$, also ist P kein Punkt der Gerade g_3. Mit dem Ortsvektor der Geradengleichung und dem Ortsvektor zum Punkt, der nicht auf der Geraden liegt, kann ein zweiter Spannvektor für die Ebene erstellt werden. Dann wird dieser neue Spannvektor mit einem weiteren Parameter multipliziert und damit wird die vorhandene Geradengleichung zu einer Ebenengleichung in Parameterform ergänzt.	5
1g	gibt den Parameter c für die in Abbildung 1.5 dargestellte Ebene an und	Aus dem Punkt $S_3(0 \mid 0 \mid 2)$ ergibt sich der Parameter $c = 10$. *Fortsetzung nächste Seite*	5

	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
zu 1g	zeigt, dass es einen Wert für den Parameter c gibt, so dass der Punkt R(3,2 | 2,4 | 4) der Spiegelpunkt des Ursprungs an der Ebene E_c ist und	Für die Spiegelung des Ursprungs an der Ebene wird der Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene benötigt: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ c \end{pmatrix}$. Ein Vielfaches des Normalenvektors muss dem Vektor zwischen den gespiegelten Punkten entsprechen, hier also dem Ortsvektor $\vec{r}$: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3{,}2 \\ 2{,}4 \\ 4 \end{pmatrix} = v \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ c \end{pmatrix}$. Für die ersten beiden Zeilen existiert ein Faktor $v = 0{,}8$, so dass sich aus der dritten Zeile ein Wert für c bestimmen lässt: $c = 5$.	
	gibt einen Term für den Abstand des Punktes R von dieser Ebene E_c an.	Der gesuchte Term für den Abstand ergibt sich aus der Hälfte des Betrags von $\vec{r}$: $0{,}5 \cdot \sqrt{3{,}2^2 + 2{,}4^2 + 4^2}$.	
1h	zeichnet die beiden Punkte in Abbildung 1.6 ein und	Beim Einzeichnen der Punkte ergibt sich die folgende Darstellung:  (Punkt D liegt im Koordinatensystem scheinbar am gleichen Ort wie Punkt A – tatsächlich liegen sie „hintereinander".)	5
	entscheidet begründet, ob die Punkte A, B, C und D in einer Ebene liegen.	Die zweidimensionale Zeichnung führt dazu, dass die im dreidimensionalen Raum unterschiedlichen Punkte A und D am gleichen Ort gezeichnet werden müssen. Das bedeutet, dass A und D räumlich „hintereinander" liegen. Also ist die durch die Punkte A, B und C festgelegte Ebene nicht identisch mit der durch die Punkte A, B und D festgelegten Ebene. Das heißt, die Punkte A, B, C und D liegen nicht in einer Ebene.	
			40

Aufgabe 2: Neubaugebiet

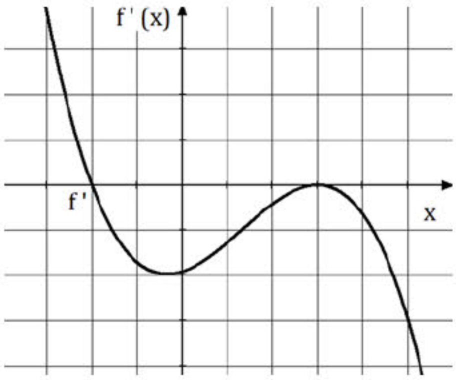
	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
A2	Der Prüfling ...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Lösungsskizze sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	
2a	beschreibt die Form der Ebenengleichung und erläutert, wie die Ebene E aus den gegebenen Punkten aufgestellt werden kann.	Die Ebenengleichung E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -30 \\ 170 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ -170 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 210 \\ -170 \\ -13 \end{pmatrix}$ ist eine Gleichung in Parameterform mit den Parametern s und t, die beliebige reelle Zahlen sind. Von den drei Vektoren ist der erste Vektor der Stützvektor der Ebene, der sich hier durch den Ortsvektor $\vec{d}$ ergibt. Als Spannvektoren der Ebene E wurden die Richtungsvektoren von D zu den Punkten A bzw. B genutzt: Richtungsvektor 1: $\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 0-(-30) \\ 0-170 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -170 \\ -1 \end{pmatrix}$ Richtungsvektor 2: $\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 180-(-30) \\ 0-170 \\ -12-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ -170 \\ -13 \end{pmatrix}$ Somit beschreibt die angegebene Gleichung eine Ebene, in der das Baugebiet liegt.	6
2b	berechnet den genauen Wert für die Koordinate c_3 des Punktes C.	Der Punkt C liegt in der Ebene E, also kann die Koordinate c_3 mit dem folgenden Ansatz berechnet werden: $\begin{pmatrix} 140 \\ 160 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ 170 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ -170 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 210 \\ -170 \\ -13 \end{pmatrix}$ I. $140 = -30 + 30s + 210t$ II. $160 = 170 - 170s - 170t$ III. $c_3 = 1 - s - 13t$ Aus I und II ergibt sich: $s = -\frac{134}{153}$ und $t = \frac{143}{153}$ Das Einsetzen in III ergibt $c_3 = -\frac{524}{51}$.	4
2c	weist nach, dass die Steigung der Straße geringer als 5 % ist und ermittelt den Neigungswinkel der Straße.	Für die prozentuale Steigung muss das Verhältnis aus der Höhendifferenz von 13 Metern zum horizontalen Abstand der Punkte $B_1(180 \mid 0 \mid 1)$ und $D(-30 \mid 170 \mid 1)$, also der Punkte in der Ebene $E_1: x_3 = 1$, gebildet werden: $m = \frac{13}{\sqrt{(180-(-30))^2 + (0-170)^2}} = \frac{13}{10\sqrt{730}} \approx 0{,}048 < 5\%$ Für den Neigungswinkel α gilt: $\tan(\alpha) = \frac{13}{10\sqrt{730}}$ $\Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{13}{10\sqrt{730}}\right) \approx 2{,}75°$	6

	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
2d	beurteilt den Ansatz des Stadtplaners.	Durch den Ansatz $\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right\|$ kann der Flächeninhalt für das durch $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ aufgespannte Parallelogramm berechnet werden. Zu prüfen ist, ob das Baugebiet ein Parallelogramm ist. Es gilt: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 180 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix}$ Die gegenüberliegende Baugebietsgrenze ist $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 140 \\ 160 \\ -10{,}3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -30 \\ 170 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 170 \\ -10 \\ -11{,}3 \end{pmatrix}$ Das bedeutet, dass unabhängig von der genäherten dritten Koordinate die gegenüberliegenden Baugebietsgrenzen nicht parallel sind, also das Baugebiet kein Parallelogramm ist. Somit ist der Ansatz des Stadtplaners nicht zielführend.	5*
2e	zeigt, dass der Hauptabwasserschacht im Punkt $K(75 \mid 85 \mid -5{,}5)$ entstehen soll.	Der Punkt K soll mittig auf der Strecke $\overline{DB}$ liegen, also $\vec{k} = \vec{d} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} -30 \\ 170 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 210 \\ -170 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ 85 \\ -5{,}5 \end{pmatrix}$ Damit ist $K(75 \mid 85 \mid -5{,}5)$ der Mittelpunkt der Strecke $\overline{DB}$.	3
2f	interpretiert die Gleichung im Sachzusammenhang.	In der Gleichung ist der erste Vektor der Richtungsvektor der Baugebietsgrenze von B nach C. Der zweite Vektor ist der Vektor von einem beliebigen Punkt X, der noch näher bestimmt werden muss, zum Punkt K. Das Skalarprodukt dieser Vektoren ist null. Das bedeutet, dass die Vektoren orthogonal zueinander sind. Daher kann mit dieser Gleichung der Punkt X auf der Baugebietsgrenze $\overline{BC}$ bestimmt werden, der den kürzesten Abstand zu K hat.	4
2g	berechnet den Austrittspunkt des Abflussrohres in der Ebene E.	Für die Gerade g_2 durch S mit der Richtung $\vec{r}$ gilt: $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 136 \\ -3 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 47 \\ \frac{17}{3} \\ -\frac{23}{10} \end{pmatrix}$ Mit der Ebenengleichung $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -30 \\ 170 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ -170 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 210 \\ -170 \\ -13 \end{pmatrix}$ ergibt sich das LGS: I. $-6 + 47n = -30 + 30s + 210t$ II. $136 + \frac{17}{3}n = 170 - 170s - 170t$ III. $-3 - 2{,}3n = 1 - s - 13t$ Das LGS ist lösbar mit $s = -0{,}8$ sowie $t = 0{,}9$ und $n = 3$. Somit ist $\overrightarrow{0R} = \begin{pmatrix} -6 \\ 136 \\ -3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 47 \\ \frac{17}{3} \\ -2{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 135 \\ 153 \\ -9{,}9 \end{pmatrix}$ Der Austrittspunkt R des Abflussrohres in der Ebene E befindet sich im Punkt $R(135 \mid 153 \mid -9{,}9)$.	6*

	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
2h	untersucht, ob der Vorschlag des Stadtplaners zu einer nennenswerten Ersparnis führen würde.	Für die Untersuchung müssen die beiden möglichen Bohrungen unterschieden werden: 1) Senkrechte Bohrung 2) Kürzeste Bohrung 1) Senkrechte Bohrung: Von der Quelle $Q(50 \mid 20 \mid -30)$ kann eine senkrecht nach oben führende Gerade g_3 mit der Ebene E geschnitten werden $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -30 \\ 170 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ -170 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 210 \\ -170 \\ -13 \end{pmatrix}$ $g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ -30 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -30 \end{pmatrix}$ Das LGS führt zu $n = -\frac{677}{765}$ und so ergibt sich ein Schnittpunkt etwa in $(50 \mid 20 \mid -3{,}45)$ mit der Bohrlänge $l_1 \approx 30 - 3{,}45 = 26{,}55$ [m] Bei senkrechter Bohrung ist der Abstand von der Quelle zur Oberfläche etwa 26,55 Meter. 2) Kürzeste Bohrung Der kürzeste Weg wird durch eine senkrecht zur Ebene E verlaufenden Gerade g_4 durch den Punkt Q ermittelt. Als Richtungsvektor der Geraden muss ein Normalenvektor der Ebene verwendet werden: Für $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -30 \\ 170 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ -170 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 210 \\ -170 \\ -13 \end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix} 30 \\ -170 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 210 \\ -170 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,040 \\ 180 \\ 30\,600 \end{pmatrix}$ Dann kann g_4 beschrieben werden mit $g_4: \vec{x} = \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ -30 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 34 \\ 3 \\ 510 \end{pmatrix}$ Das LGS führt zu $n = \frac{2\,708}{52\,253}$ und so ergibt sich ein Schnittpunkt etwa in $(51{,}76 \mid 20{,}16 \mid -3{,}57)$ mit der Bohrlänge $l_2 \approx 26{,}49$ [m] Bei kürzester Bohrung ist der Abstand von der Quelle zur Oberfläche etwa 26,49 Meter. Bei einem Längenunterschied von etwa 0,06 Metern und Bohrungskosten in Höhe von 130 € pro Meter ergibt sich eine Kostendifferenz von 7,80 €. Bezogen auf die Gesamtkosten ist der Unterschied geringfügig.	6*
			40

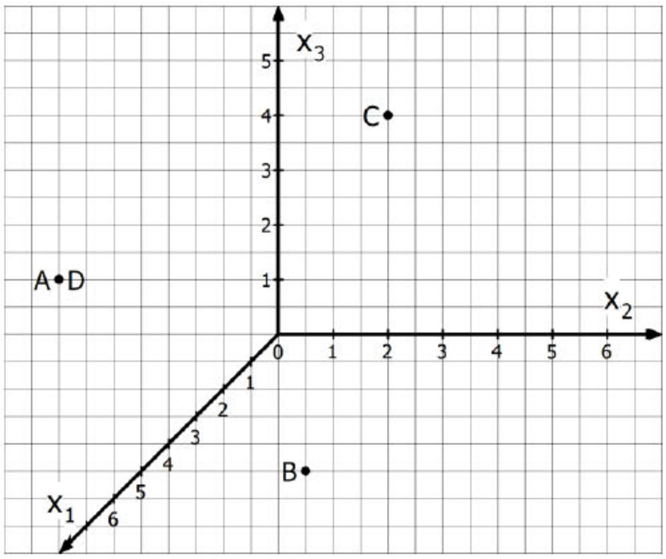
Aufgabe 1 B mit Analytischer Geometrie:

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Lösungsskizze</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>A1</td><td>Der Prüfling ...</td><td>Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:
Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Lösungsskizze sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.
<u>Bemerkung</u>:
Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.</td><td></td></tr>
<tr><td>1a</td><td>entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>
<table>
<tr><th><u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).</th><th>wahr</th><th>falsch</th></tr>
<tr><td>Die Ableitungsfunktion g' kann dargestellt werden mit
$g'(x) = a \cdot (x-3)^3 \cdot (x+2) \cdot (x-7)^2 \cdot (x+1)$.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Der höchste Exponent des Funktionsterms von $g(x)$ ist ungerade.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Der Graph von g hat an der Stelle $x = -2$ einen Hochpunkt.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Der Graph der Funktion g hat mindestens zwei Wendepunkte.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Es gilt: $g(-1) < g(2)$</td><td></td><td>X</td></tr>
</table>
</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>skizziert den Graphen der Ableitungsfunktion f ‘ und

gibt einen Lösungsansatz an, mit dem die Maßzahl der Fläche, die vom Graphen von f und der Abszisse eingeschlossen wird, berechnet werden kann.</td><td>
$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$</td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
1c	bestimmt den Wert des Parameters a so, dass die Funktion f_a bei $x = 3$ eine Extremstelle hat und zeigt, dass alle Funktionsgraphen der Funktion f_a punktsymmetrisch zum Ursprung sind.	Für alle Extremstellen x gilt: $f_a'(x) = 0 \wedge f_a''(x) \neq 0$ $f_a'(x) = \frac{3}{a}x^2 + 1 \wedge f_a''(x) = \frac{6}{a}x$ $f_a'(3) = \frac{3}{a} \cdot 3^2 + 1$ $0 = \frac{3}{a} \cdot 3^2 + 1$ $\Leftrightarrow a = -27$ $f_a''(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Zu zeigen: $f_a(-x) = -f_a(x)$ $f_a(-x) = \frac{1}{a}(-x)^3 + (-x)$ $= -\frac{1}{a}x^3 - x$ $= -\left(\frac{1}{a}x^3 + x\right)$ $= -f_a(x)$	5
1d	berechnet die Nullstellen der Funktion h und zeigt, dass $h'(x) = e^x \cdot (x^2 - 2)$ die erste Ableitungsfunktion von h ist und gibt die Steigung an der Stelle $x = 0$ an.	Es gilt: $h(x) = 0$ $e^x \cdot (x^2 - 2 \cdot x) = 0$ Satz des Nullproduktes: $e^x = 0 \vee (x^2 - 2x) = 0$ Da $e^x \neq 0$ für alle x, folgen die Nullstellen aus: $(x^2 - 2x) = 0$ $x \cdot (x - 2) = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$ Anwendung der Produktregel liefert: $u(x) = e^x$ und $u'(x) = e^x$ $v(x) = x^2 - 2 \cdot x$ und $v'(x) = 2x - 2$ Somit gilt: $h'(x) = e^x \cdot (2 \cdot x - 2) + e^x \cdot (x^2 - 2 \cdot x)$ $h'(x) = e^x \cdot (x^2 - 2)$ $h'(0) = -2$	5

	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
1e	nennt die möglichen Lagebeziehungen zweier Geraden im $\mathbb{R}^3$ und untersucht die Lagebeziehung der Geraden g_1 und g_2.	Zwei Geraden können zueinander parallel sein oder einen Schnittpunkt haben, sie können identisch sein oder windschief zueinander. Da die beiden Geraden Richtungsvektoren haben, die nicht linear abhängig sind, können die Geraden nicht parallel oder identisch sein. Zur Überprüfung, ob ein Schnittpunkt vorliegt, kann aus dem Ansatz $g_1 = g_2$ ein Gleichungssystem aufgestellt und gelöst werden: $$\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\-4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\0\\8\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$ $$\begin{array}{ll}\text{I.} & 3+2r=7\\ \text{II.} & 2-4r=2s\\ \text{III.} & -1+3r=8+1s\end{array}$$ Aus I. folgt $r = 2$. Das Einsetzen in II. und III. ergibt jeweils $s = -3$. Somit schneiden sich die beiden Geraden in einem Punkt. *Die Angabe des Schnittpunkts* $S(7\mid -6\mid 5)$ *ist nicht erforderlich.*	5
1f	prüft, ob der Punkt P auf der Geraden g_3 liegt und beschreibt ein Verfahren, mit dem eine Ebenengleichung für die Ebene, die durch einen Punkt und eine Gerade festgelegt wird, bestimmt werden kann.	Mit dem Ansatz $$\begin{pmatrix}8\\-11\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$$ kann die Punktprobe durchgeführt werden. Die Gleichung $8 = 2 + t\cdot(-1)$ führt zu $t = -6$. Dann ist $\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}-6\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-11\\-9\end{pmatrix}$, also ist P kein Punkt der Gerade g_3. Mit dem Ortsvektor der Geradengleichung und dem Ortsvektor zum Punkt, der nicht auf der Geraden liegt, kann ein zweiter Spannvektor für die Ebene erstellt werden. Dann wird dieser neue Spannvektor mit einem weiteren Parameter multipliziert und damit wird die vorhandene Geradengleichung zu einer Ebenengleichung in Parameterform ergänzt.	5
1g	gibt den Parameter c für die in Abbildung 1.4 dargestellte Ebene an und	Aus dem Punkt $S_3(0\mid 0\mid 2)$ ergibt sich der Parameter $c = 10$. *Fortsetzung nächste Seite*	5

	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
zu 1g	zeigt, dass es einen Wert für den Parameter c gibt, so dass der Punkt R(3,2 | 2,4 | 4) der Spiegelpunkt des Ursprungs an der Ebene E_c ist und	Für die Spiegelung des Ursprungs an der Ebene wird der Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene benötigt: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ c \end{pmatrix}$. Ein Vielfaches des Normalenvektors muss dem Vektor zwischen den gespiegelten Punkten entsprechen, hier also dem Ortsvektor $\vec{r}$: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3{,}2 \\ 2{,}4 \\ 4 \end{pmatrix} = v \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ c \end{pmatrix}$. Für die ersten beiden Zeilen existiert ein Faktor $v = 0{,}8$, so dass sich aus der dritten Zeile ein Wert für c bestimmen lässt: $c = 5$.	
	gibt einen Term für den Abstand des Punktes R von dieser Ebene E_c an.	Der gesuchte Term für den Abstand ergibt sich aus der Hälfte des Betrags von $\vec{r}$: $0{,}5 \cdot \sqrt{3{,}2^2 + 2{,}4^2 + 4^2}$.	
1h	zeichnet die beiden Punkte in Abbildung 1.5 ein und	Beim Einzeichnen der Punkte ergibt sich die folgende Darstellung:  (Punkt D liegt im Koordinatensystem scheinbar am gleichen Ort wie Punkt A – tatsächlich liegen sie „hintereinander“.)	5
	entscheidet begründet, ob die Punkte A, B, C und D in einer Ebene liegen.	Die zweidimensionale Zeichnung führt dazu, dass die im dreidimensionalen Raum unterschiedlichen Punkte A und D am gleichen Ort gezeichnet werden müssen. Das bedeutet, dass A und D räumlich „hintereinander“ liegen. Also ist die durch die Punkte A, B und C festgelegte Ebene nicht identisch mit der durch die Punkte A, B und D festgelegten Ebene. Das heißt, die Punkte A, B, C und D liegen nicht in einer Ebene.	
			40

Aufgabe 2: Neubaugebiet

	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
A2	Der Prüfling ...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Lösungsskizze sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	
2a	beschreibt die Form der Ebenengleichung und erläutert, wie die Ebene E aus den gegebenen Punkten aufgestellt werden kann.	Die Ebenengleichung $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -30 \\ 170 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ -170 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 210 \\ -170 \\ -13 \end{pmatrix}$ ist eine Gleichung in Parameterform mit den Parametern s und t, die beliebige reelle Zahlen sind. Von den drei Vektoren ist der erste Vektor der Stützvektor der Ebene, der sich hier durch den Ortsvektor $\vec{d}$ ergibt. Als Spannvektoren der Ebene E wurden die Richtungsvektoren von D zu den Punkten A bzw. B genutzt: Richtungsvektor 1: $\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 0-(-30) \\ 0-170 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -170 \\ -1 \end{pmatrix}$ Richtungsvektor 2: $\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 180-(-30) \\ 0-170 \\ -12-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ -170 \\ -13 \end{pmatrix}$ Somit beschreibt die angegebene Gleichung eine Ebene, in der das Baugebiet liegt.	6
2b	berechnet den genauen Wert für die Koordinate c_3 des Punktes C.	Der Punkt C liegt in der Ebene E, also kann die Koordinate c_3 mit dem folgenden Ansatz berechnet werden: $\begin{pmatrix} 140 \\ 160 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ 170 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ -170 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 210 \\ -170 \\ -13 \end{pmatrix}$ I. $140 = -30 + 30s + 210t$ II. $160 = 170 - 170s - 170t$ III. $c_3 = 1 - s - 13t$ Aus I und II ergibt sich: $s = -\frac{134}{153}$ und $t = \frac{143}{153}$ Das Einsetzen in III ergibt $c_3 = -\frac{524}{51}$.	4
2c	weist nach, dass die Steigung der Straße geringer als 5 % ist und ermittelt den Neigungswinkel der Straße.	Für die prozentuale Steigung muss das Verhältnis aus der Höhendifferenz von 13 Metern zum horizontalen Abstand der Punkte $B_1(180 \mid 0 \mid 1)$ und $D(-30 \mid 170 \mid 1)$, also der Punkte in der Ebene $E_1: x_3 = 1$, gebildet werden: $m = \frac{13}{\sqrt{(180-(-30))^2 + (0-170)^2}}$ $= \frac{13}{10\sqrt{730}}$ $\approx 0{,}048 < 5\%$ Für den Neigungswinkel α gilt: $\tan(\alpha) = \frac{13}{10\sqrt{730}}$ $\Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{13}{10\sqrt{730}}\right) \approx 2{,}75°$	6

	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
2d	beurteilt den Ansatz des Stadtplaners.	Durch den Ansatz $\lvert\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\rvert$ kann der Flächeninhalt für das durch $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ aufgespannte Parallelogramm berechnet werden. Zu prüfen ist, ob das Baugebiet ein Parallelogramm ist. Es gilt: $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}180\\0\\-12\end{pmatrix}$ Die gegenüberliegende Baugebietsgrenze ist $\overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}140\\160\\-10{,}3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-30\\170\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}170\\-10\\-11{,}3\end{pmatrix}$ Das bedeutet, dass unabhängig von der genäherten dritten Koordinate die gegenüberliegenden Baugebietsgrenzen nicht parallel sind, also das Baugebiet kein Parallelogramm ist. Somit ist der Ansatz des Stadtplaners nicht zielführend.	5*
2e	zeigt, dass der Hauptabwasserschacht im Punkt $K(75\mid 85\mid -5{,}5)$ entstehen soll.	Der Punkt K soll mittig auf der Strecke $\overline{DB}$ liegen, also $\vec{k}=\vec{d}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\begin{pmatrix}-30\\170\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}210\\-170\\-13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}75\\85\\-5{,}5\end{pmatrix}$ Damit ist $K(75\mid 85\mid -5{,}5)$ der Mittelpunkt der Strecke $\overline{DB}$.	3
2f	interpretiert die Gleichung im Sachzusammenhang.	In der Gleichung ist der erste Vektor der Richtungsvektor der Baugebietsgrenze von B nach C. Der zweite Vektor ist der Vektor von einem beliebigen Punkt X, der noch näher bestimmt werden muss, zum Punkt K. Das Skalarprodukt dieser Vektoren ist null. Das bedeutet, dass die Vektoren orthogonal zueinander sind. Daher kann mit dieser Gleichung der Punkt X auf der Baugebietsgrenze $\overline{BC}$ bestimmt werden, der den kürzesten Abstand zu K hat.	4
2g	berechnet den Austrittspunkt des Abflussrohres in der Ebene E.	Für die Gerade g_2 durch S mit der Richtung $\vec{r}$ gilt: $g_2\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}-6\\136\\-3\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}47\\\frac{17}{3}\\-\frac{23}{10}\end{pmatrix}$ Mit der Ebenengleichung $E\colon \vec{x}=\begin{pmatrix}-30\\170\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}30\\-170\\-1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}210\\-170\\-13\end{pmatrix}$ ergibt sich das LGS: I. $-6+47n=-30+30s+210t$ II. $136+\frac{17}{3}n=170-170s-170t$ III. $-3-2{,}3n=1-s-13t$ Das LGS ist lösbar mit $s=-0{,}8$ sowie $t=0{,}9$ und $n=3$. Somit ist $\overrightarrow{0R}=\begin{pmatrix}-6\\136\\-3\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}47\\\frac{17}{3}\\-2{,}3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}135\\153\\-9{,}9\end{pmatrix}$ Der Austrittspunkt R des Abflussrohres in der Ebene E befindet sich im Punkt $R(135\mid 153\mid -9{,}9)$.	6*

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Lösungsskizze</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>2h</td><td>untersucht, ob der Vorschlag des Stadtplaners zu einer nennenswerten Ersparnis führen würde.</td><td>

Für die Untersuchung müssen die beiden möglichen Bohrungen unterschieden werden:

1) Senkrechte Bohrung
2) Kürzeste Bohrung

1) Senkrechte Bohrung:

Von der Quelle Q(50 | 20 | − 30) kann eine senkrecht nach oben führende Gerade g_3 mit der Ebene E geschnitten werden

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -30 \\ 170 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ -170 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 210 \\ -170 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ -30 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -30 \end{pmatrix}$$

Das LGS führt zu $n = -\frac{677}{765}$ und so ergibt sich ein Schnittpunkt etwa in (50 | 20 | − 3,45) mit der Bohrlänge

$l_1 \approx 30 - 3{,}45 = 26{,}55$ [m]

Bei senkrechter Bohrung ist der Abstand von der Quelle zur Oberfläche etwa 26,55 Meter.

2) Kürzeste Bohrung

Der kürzeste Weg wird durch eine senkrecht zur Ebene E verlaufenden Gerade g_4 durch den Punkt Q ermittelt. Als Richtungsvektor der Geraden muss ein Normalenvektor der Ebene verwendet werden:

Für $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -30 \\ 170 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ -170 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 210 \\ -170 \\ -13 \end{pmatrix}$ ist

$$\begin{pmatrix} 30 \\ -170 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 210 \\ -170 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,040 \\ 180 \\ 30\,600 \end{pmatrix}$$

Dann kann g_4 beschrieben werden mit

$$g_4: \vec{x} = \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ -30 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 34 \\ 3 \\ 510 \end{pmatrix}$$

Das LGS führt zu $n = \frac{2\,708}{52\,253}$ und so ergibt sich ein Schnittpunkt etwa in (51,76 | 20,16 | − 3,57) mit der Bohrlänge

$l_2 \approx 26{,}49$ [m]

Bei kürzester Bohrung ist der Abstand von der Quelle zur Oberfläche etwa 26,49 Meter.

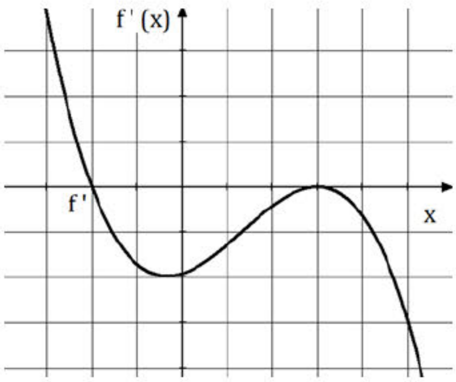
Bei einem Längenunterschied von etwa 0,06 Metern und Bohrungskosten in Höhe von 130 € pro Meter ergibt sich eine Kostendifferenz von 7,80 €.

Bezogen auf die Gesamtkosten ist der Unterschied geringfügig.

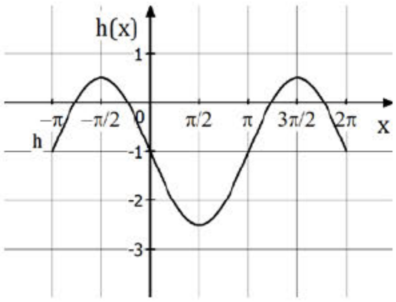
</td><td>6*</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>40</td></tr>
</table>

Aufgabe 1 A mit Linearer Algebra:

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Lösungsskizze</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>A1</td><td>Der Prüfling ...</td><td>Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:
Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Lösungsskizze sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.
Bemerkung:
Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.</td><td></td></tr>
<tr><td>1a</td><td>entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>
<table>
<tr><th>Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).</th><th>wahr</th><th>falsch</th></tr>
<tr><td>Die Ableitungsfunktion g' kann dargestellt werden mit $g'(x) = a \cdot (x-3)^3 \cdot (x+2) \cdot (x-7)^2 \cdot (x+1)$.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Der höchste Exponent des Funktionsterms von $g(x)$ ist ungerade.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Der Graph von g hat an der Stelle $x = -2$ einen Hochpunkt.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Der Graph der Funktion g hat mindestens zwei Wendepunkte.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Es gilt: $g(-1) < g(2)$</td><td></td><td>X</td></tr>
</table>
</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>skizziert den Graphen der Ableitungsfunktion f ‘ und

gibt einen Lösungsansatz an, mit dem die Maßzahl der Fläche, die vom Graphen von f und der Abszisse eingeschlossen wird, berechnet werden kann.</td><td>

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$</td><td>5</td></tr>
</table>

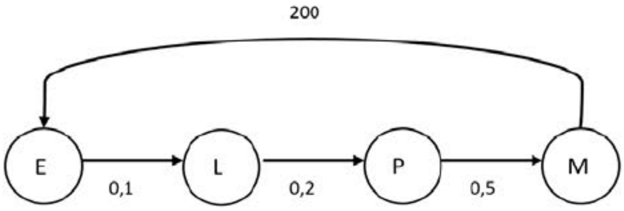
	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
1c	bestimmt den Wert des Parameters a so, dass die Funktion f_a bei $x = 3$ eine Extremstelle hat und zeigt, dass alle Funktionsgraphen der Funktion f_a punktsym-metrisch zum Ursprung sind.	Für alle Extremstellen x gilt: $f_a'(x) = 0 \wedge f_a''(x) \neq 0$ $f_a'(x) = \frac{3}{a}x^2 + 1 \wedge f_a''(x) = \frac{6}{a}x$ $f_a'(3) = \frac{3}{a} \cdot 3^2 + 1$ $0 = \frac{3}{a} \cdot 3^2 + 1$ $\Leftrightarrow a = -27$ $f_a''(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Zu zeigen: $f_a(-x) = -f_a(x)$ $f_a(-x) = \frac{1}{a}(-x)^3 + (-x)$ $= -\frac{1}{a}x^3 - x$ $= -\left(\frac{1}{a}x^3 + x\right)$ $= -f_a(x)$	5
1d	skizziert den Graphen der Funktion h im Intervall $-\pi \leq x \leq 2\pi$ und berechnet die Wendepunkte im Intervall $-\pi \leq x \leq \pi$ und gibt die Steigung an der Stelle $x = 0$ an.	 Es gilt: $h''(x) = 0$ $\frac{3}{2} \cdot \sin(x) = 0$ mit $-\pi \leq x \leq \pi$ $\Leftrightarrow x = \pi \vee x = 0 \vee x = -\pi$ $(h'''(x) = \frac{3}{2} \cdot \cos(x)$ $h'''(\pi) \neq 0$ und $h'''(0) \neq 0$ und $h'''(-\pi) \neq 0)$ $h(\pi) = -1 \quad \Rightarrow W_1(\pi \| -1)$ $h(0) = -1 \quad \Rightarrow W_2(0 \| -1)$ $h(-\pi) = -1 \quad \Rightarrow W_3(-\pi \| -1)$ $h'(0) = -\frac{3}{2}$	5

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Lösungsskizze</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>1e</td><td>entscheidet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und

ermittelt alle Matrizen B, die die Bedingung $A \cdot B = B \cdot A$ erfüllen.</td><td>
<table>
<tr><th>Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).</th><th>wahr</th><th>falsch</th></tr>
<tr><td>Wenn $A \cdot B = B \cdot A$ gilt, so sind A und B vom gleichen Typ.</td><td>x</td><td></td></tr>
<tr><td>Es gilt $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \Leftrightarrow A \cdot B = B \cdot A$</td><td></td><td>x</td></tr>
</table>
Gegeben ist $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Es ist eine allgemeine Matrix B aufzustellen:
$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
Dann gilt: $A \cdot B = B \cdot A$
$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot a & 2 \cdot b \\ a + c & b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot a + b & b \\ 2 \cdot c + d & d \end{pmatrix}$
Die Matrizeneinträge liefern vier Bedingungen:
I $\quad 2 \cdot a = 2 \cdot a + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 0$
II $\quad 2 \cdot b = b \quad \Leftrightarrow \quad b = 0$
III $\quad a + c = 2 \cdot c + d \quad \Leftrightarrow \quad a = c + d$
IV $\quad b + d = d \quad \Leftrightarrow \quad b = 0$
Somit gilt die Bedingung für alle Matrizen der Form
$B = \begin{pmatrix} c + d & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $c, d \in \mathbb{R}$,
(alternativ: $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a - c \end{pmatrix}$ bzw. $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a - d & d \end{pmatrix}$)
</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1f</td><td>bestimmt den Wert des Parameters k jeweils so, dass es
• keine Lösung,
• genau eine Lösung,
• unendlich viele Lösungen für
das Gleichungs-system gibt und
bestimmt die Lösungsmenge für den Fall, dass es unendlich viele Lösungen gibt.</td><td>
Es gibt:
• keine Lösung, wenn $k^2 - 16 = 0 \quad \wedge \quad 8 + 2 \cdot k \neq 0$ gilt.
• genau eine Lösung, wenn $k^2 - 16 \neq 0$ gilt.
• unendlich viele Lösungen, wenn $k^2 - 16 = 0 \wedge 8 + 2 \cdot k = 0$ gilt.
Es gilt $k^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow k = 4 \quad \vee \quad k = -4$.
Es gilt $8 + 2 \cdot k = 0 \Leftrightarrow k = -4$
Damit folgt, dass das Gleichungssystem
• keine Lösung für $k = 4$ besitzt,
• genau eine Lösung besitzt, wenn $k \in \mathbb{R} \setminus \{-4; 4\}$ ist und
• eine unendliche Lösungsmenge besitzt, wenn $k = -4$ gilt.
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
Mit der mittleren Zeile: $x_2 + 3 \cdot x_3 = -5 \Leftrightarrow x_2 = -5 - 3 \cdot x_3$
Mit der oberen Zeile: $x_1 - x_3 = 6 \Leftrightarrow x_1 = 6 + x_3$
Die Lösungsmenge lautet: $\mathbb{L} = \{(6 + t; \ -5 - 3 \cdot t; \ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
</td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
1g	gibt an, unter welchen Bedingungen zwei Matrizen invers zueinander sind und zeigt, dass die gegebene Aussage wahr ist.	Zwei Matrizen sind zueinander invers, wenn die Matrizen quadratisch sind und ihr Produkt die Einheitsmatrix ergibt. Zunächst werden zwei allgemeine Matrizen vom Typ 2×2 mit ausschließlich positiven Elementen definiert: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, d, e, f, g, h > 0$ Sind A und B zueinander invers, dann gilt $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Also gilt insbesondere $a \cdot f + b \cdot h = 0$ Dies steht im Widerspruch zu a, b, f und $h > 0$, d.h. wenn $a, b > 0$, dann muss $f < 0 \vee h < 0$ gelten. Die Aussage stimmt, denn wenn a und b aus der Matrix A positiv sind, muss entweder f oder h aus der Matrix B negativ sein, damit die Gleichung $a \cdot f + b \cdot h = 0$ erfüllt wird.	5
1h	erläutert, von welchem Typ die Matrix X ist und berechnet die Matrix X.	Aus der Gleichung (1.) ist ersichtlich, dass die Matrix X drei Spalten besitzen muss, damit die Matrizenmultiplikation definiert ist. Da das Produkt eine Zeile besitzt, muss die Matrix X ebenfalls nur eine Zeile besitzen. Somit ist die Matrix X vom Typ 1×3 bzw. ein Zeilenvektor mit 3 Elementen. (Dies passt auch zur Gleichung (2.). Die transponierte Matrix hat dann drei Zeilen und eine Spalte. Die Matrizenmultipliaktion ist definiert und das Produkt eine 2×1-formatige Matrix.) (1.) $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \end{pmatrix}$ (2.) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \end{pmatrix}$ Mit (1.) und (2.) gilt: $\begin{array}{lrcl} \text{I} & x_1 + 2 \cdot x_2 & = & 2 \\ \text{II} & 2 \cdot x_1 - x_2 + x_3 & = & -6 \\ \text{III} & x_1 + 3 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 & = & -10 \\ \text{IV} & x_2 + x_3 & = & 8 \end{array}$ Subtrahiert man die III. Gleichung von der I. Gleichung und addiert man die resultierende Gleichung mit Gleichung IV kann die Variable x_3 bestimmt werden: $V := I - III \quad -x_2 + 3 \cdot x_3 = 12$ $IV + V \quad 4 \cdot x_3 = 20 \quad \Leftrightarrow x_3 = 5$ Einsetzen in IV: $x_2 + 5 = 8 \quad \Leftrightarrow x_2 = 3$ Einsetzen in I: $x_1 + 2 \cdot 3 = 2 \quad \Leftrightarrow x_1 = -4$ Damit ergibt sich: $X = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.	5
			40

Aufgabe 2: Kakao

	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
A2	Der Prüfling ...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Lösungsskizze sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	
2a	zeichnet den Übergangsgraphen zur Matrix M und begründet, dass die Matrix M den Sachzusammenhang des Textes widerspiegelt.	 Die Spalten und Zeilen der Matrix geben in der gleichen Reihenfolge Eier, Larven, Puppen und Kakaomotten die Entwicklungsstadien der Kakaomotte an. Alle Entwicklungsstadien werden in einer Periodendauer (Monat) durchlaufen. Das Matrizenelement $m_{21} = 0{,}1$ besagt, dass sich in einer Periode 10 % der Eier zu Larven weiter entwickeln. Das Matrizenelement $m_{32} = 0{,}2$ besagt, dass sich in einer Periode 20 % also $\frac{1}{5}$ der Larven verpuppen, und $m_{43} = 0{,}5$, dass sich in einer Periode von den Puppen 50 % also die Hälfte zu Kakaomotten entwickeln. Das Element $m_{14} = 200$ gibt an, dass eine Motte durchschnittlich 200 Eier pro Periode legt. Die Lebensdauer einer Motte beträgt eine Periode bzw. einen Monat, da $m_{44} = 0$. Der Text macht hierzu keine Angaben. Die anderen Werte der Matrix entsprechen denen im Text.	6
2b	berechnet die Verteilungen der beiden Folgemonate Februar und März.	Es gilt für den ersten Folgemonat (Februar): $\overrightarrow{v_1} = M \cdot \overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 30\,000 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$ Im Februar gibt es 30 000 Eier, 100 Larven, 100 Puppen und 100 Kakaomotten. Für den zweiten Folgemonat (März) gilt: $\overrightarrow{v_2} = M^2 \cdot \overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 20\,000 \\ 3\,000 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix}$ Im März gibt es 20 000 Eier, 3 000 Larven, 20 Puppen und 50 Kakaomotten.	3
2c	gibt den Einfluss des Mittels SBM I im Vergleich zur Populationsentwicklung der Matrix M in einer Periode bzw.	Die Populationsmatrix von SBM I unterscheidet sich von der Ausgangsmatrix M nur im Element $m_{32} = 0{,}1$. Das Mittel SBM I wirkt somit lediglich auf die Entwicklung vom Larvenstadium zum Puppenstadium. Es entwickeln sich mit dem Mittel SBM I nur noch 10 % der Larven zu Puppen. *Fortsetzung nächste Seite*	4

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Lösungsskizze</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>zu 2c</td><td>Monat an und beschreibt die langfristige Auswirkung auf die Kakaomotten-population.</td><td>Da die vierte Potenz der Matrix die Einheitsmatrix ergibt, wird jede vierte Periode die Ausgangspopulation wieder erreicht. Das Mittel SBM I bewirkt somit keine dauerhafte Reduzierung der Schädlings-population. (Eine Reduzierung der Gesamtpopulation innerhalb der vier Perioden ist von der Anfangspopulation abhängig.)</td><td></td></tr>
<tr><td>2d</td><td>ermittelt, wie viel Prozent der Eier sich beim Einsatz des Mittels SBM II zu Larven ent-wickeln und

beurteilt, ob das Mittel SBM I oder das Mittel SBM II langfristig wirk-samer ist.</td><td>Aus 2 000 Eiern der ersten Periode werden 90 Larven in der zweiten Periode. Sei k die Entwicklungsrate der Eier zu Larven, dann gilt:
$2\,000 \cdot k = 90$
$\Leftrightarrow k = \frac{9}{200}$
$\Leftrightarrow k = 0{,}045$
Die Entwicklungsrate vom Ei zur Larve beträgt 0,045, d.h. nur noch 4,5 % der Eier entwickeln sich zu Larven.

Für das zweite Mittel SBM II gilt:
$M_{SBM\,II}{}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0{,}045 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}9 \end{pmatrix}$
Dies zeigt einen periodisch abnehmenden Prozess, da die Werte auf der Hauptdiagonalen kleiner 1 sind. Die Population nimmt ab. Beim ersten Mittel SBM I wird hingegen jede vierte Periode wieder die Ausgangspopulation erreicht. Somit ist das zweite Mittel SBM II wirksamer.</td><td>5*</td></tr>
<tr><td>2e</td><td>begründet die Definitionsmenge für die Werte der Parameter a und b in der Matrix M_{neu} und

bestimmt die Werte der Para-meter a und b sowie die fehlen-den Werte der Tabelle 2.1.</td><td>Die Werte der Parameter a und b repräsentieren die Entwicklungs-rate bzw. die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Ei zur Larve bzw. eine Larve zur Puppe entwickelt. Daher müssen diese Werte als Wahrscheinlichkeiten dem Intervall [0; 1] entstammen.

Die Angaben aus Tab. 2.1 und Matrix M_{neu} ergeben:
$E_0 = 800 \wedge L_1 = 40$: $a \cdot 800 = 40 \Leftrightarrow a = \frac{1}{20} = 0{,}05$
$K_3 = 3$: $0{,}5 \cdot P_2 = 3 \Leftrightarrow P_2 = 6$
$K_2 = 15$: $0{,}5 \cdot P_1 = 15 \Leftrightarrow P_1 = 30$
$P_2 = 6 \wedge L_1 = 40$: $b \cdot 40 = 6 \Leftrightarrow b = 0{,}15$
$P_1 = 30$: $0{,}15 \cdot L_0 = 30 \Leftrightarrow L_0 = 200$
$E_1 = 30\,000$: $0{,}05 \cdot 30\,000 = L_2 \Leftrightarrow L_2 = 1\,500$
Ergebnis für die Parameter a und b: $a = 0{,}05$ und $b = 0{,}15$.

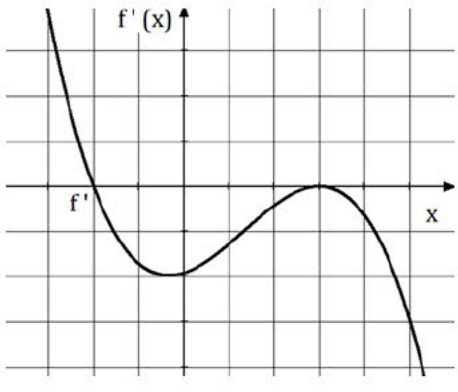
<table>
<tr><th>Periode / Anzahl</th><th>Start-periode</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th></tr>
<tr><td>Eier</td><td>800</td><td>30 000</td><td>3 000</td><td>3 000</td></tr>
<tr><td>Larven</td><td>200</td><td>40</td><td>1 500</td><td>150</td></tr>
<tr><td>Puppen</td><td>30</td><td>30</td><td>6</td><td>225</td></tr>
<tr><td>Kakaomotten</td><td>150</td><td>15</td><td>15</td><td>3</td></tr>
</table>
</td><td>7*</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
2f	gibt an, wie viel Gramm Zucker sich in einer Mengeneinheit Zartbitter befindet, im Endprodukt Möwe befindet und berechnet den prozentualen Anteil des Rohstoffs Zucker am Endprodukt Möwe.	Zucker (R2) in einer Mengeneinheit Zartbitter (Z1): 46 Gramm Zucker (R2) im Endprodukt Möwe (E2): 70,6 Gramm $\frac{70{,}6 \cdot 100\ \%}{27{,}4 + 70{,}6 + 26{,}4 + 25{,}6} \approx 47{,}07\ \%$ Das Endprodukt Möwe enthält circa 47 % Zucker.	4
2g	erläutert die Notizen des Betriebsleiters im Sachzusammenhang.	Die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix (B) wird zunächst mit dem Faktor 100 multipliziert, da die Matrix B nur den Anteil von 100 g eines Zwischenproduktes angibt, der in das Endprodukt einfließt. Die anschließende Multiplikation mit dem Spaltenvektor der Endproduktmengen, ergibt als Produkt den Vektor mit den benötigten Zwischenproduktmengen in Gramm. Diese dürfen die vorhandenen Mengen der Zwischenprodukte (Restmengen am Ende des Produktionstages: 1 250 g Zartbitter, 3 400 g weiße Schokolade und 2 700 g Vollmilchschokolade) nicht übersteigen. Der Spaltenvektor $(x_1 \quad x_2 \quad x_3)^T$ erfasst die unbekannten Endproduktmengen (mit x_1, x_2 und $x_3 \geq 0$). Die Multiplikation der 3 Faktoren aus (a) mit Berücksichtigung der Restmengen führt somit zu einer Ungleichung. In der Notiz (b) stehen linksseitig die Terme aus der Multiplikation der 3 Faktoren aus (a). Zudem ist bereits der Vorschlag des Betriebsleiters berücksichtigt, die Mengen an Zartbitter und weißer Schokolade vollständig aufzubrauchen. Für diese beiden Zwischenproduktmengen ergeben sich Gleichung I und II. Die vorhandene Menge an Vollmilchschokolade muss nicht vollständig aufgebraucht werden, daher bleibt die Ungleichung III bestehen.	5

	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
2h	ermittelt, wie viele Packungen der Pralinensorten Sprotte (E1), Möwe (E2) und Anker (E3) sich maximal mit dem Vorschlag des Betriebsleiters befüllen lassen.	Aus den beiden Gleichungen I und II aus Notiz (b) ergibt sich die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{37}{4} \cdot t - 175;\ -\frac{23}{4} \cdot t + 130;\ t \right) \middle\vert t \in \mathbb{N} \right\}$ Durch Einsetzen von $x_1 = \frac{37}{4} \cdot t - 175$ und $x_2 = -\frac{23}{4} \cdot t + 130$ und $x_3 = t$ in Ungleichung III, kann t eingegrenzt werden: III $30 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 + 100 \cdot x_3 \leq 2\,700$ $\Leftrightarrow \quad 30 \cdot \left(\frac{37}{4} \cdot t - 175 \right) + 20 \cdot \left(-\frac{23}{4} \cdot t + 130 \right) + 100 \cdot t \leq 2\,700$ $\Leftrightarrow t \leq \frac{428}{21}$ Der Parameter t gibt die Anzahl der Pralinenschachteln Anker (E3) an, daher gilt $t \in \mathbb{N}$ also $t \leq 20$. Außerdem gilt: $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$, also $\frac{37}{4} \cdot t - 175 \geq 0 \Rightarrow t \geq 18{,}9$ $-\frac{23}{4} \cdot t + 130 \geq 0 \Rightarrow t \leq 22{,}6$ und t ist ein Vielfaches von 4. Diese Bedingungen werden nur für $t = 20$ erfüllt. Einsetzen von $t = 20$ in $x_1 = \frac{37}{4} \cdot t - 175$ und $x_2 = -\frac{23}{4} \cdot t + 130$ liefert: $x_1 = \frac{37}{4} \cdot 20 - 175$ $= 10$ $x_2 = -\frac{23}{4} \cdot 20 + 130$ $= 15$ Es können somit 10 Packungen der Pralinensorte Sprotte (E1), 15 Packungen der Sorte Möwe (E2) und 20 Packungen der Sorte Anker (E3) mit den Restbeständen befüllt werden.	6*
			40

Aufgabe 1 B mit Linearer Algebra:

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Lösungsskizze</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>A1</td><td>Der Prüfling ...</td><td>Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:
Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Lösungsskizze sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.
Bemerkung:
Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.</td><td></td></tr>
<tr><td>1a</td><td>entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>
<table>
<tr><th>Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).</th><th>wahr</th><th>falsch</th></tr>
<tr><td>Die Ableitungsfunktion g' kann dargestellt werden mit $g'(x) = a \cdot (x-3)^3 \cdot (x+2) \cdot (x-7)^2 \cdot (x+1)$.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Der höchste Exponent des Funktionsterms von $g(x)$ ist ungerade.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Der Graph von g hat an der Stelle $x = -2$ einen Hochpunkt.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Der Graph der Funktion g hat mindestens zwei Wendepunkte.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Es gilt: $g(-1) < g(2)$</td><td></td><td>X</td></tr>
</table>
</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>skizziert den Graphen der Ableitungsfunktion f ‘ und

gibt einen Lösungsansatz an, mit dem die Maßzahl der Fläche, die vom Graphen von f und der Abszisse eingeschlossen wird, berechnet werden kann.</td><td>

$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$</td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
1c	bestimmt den Wert des Parameters a so, dass die Funktion f_a bei $x = 3$ eine Extremstelle hat und zeigt, dass alle Funktionsgraphen der Funktion f_a punktsymmetrisch zum Ursprung sind.	Für alle Extremstellen x gilt: $f_a'(x) = 0 \wedge f_a''(x) \neq 0$ $f_a'(x) = \frac{3}{a}x^2 + 1 \wedge f_a''(x) = \frac{6}{a}x$ $f_a'(3) = \frac{3}{a} \cdot 3^2 + 1$ $0 = \frac{3}{a} \cdot 3^2 + 1$ $\Leftrightarrow a = -27$ $f_a''(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Zu zeigen: $f_a(-x) = -f_a(x)$ $f_a(-x) = \frac{1}{a}(-x)^3 + (-x)$ $= -\frac{1}{a}x^3 - x$ $= -\left(\frac{1}{a}x^3 + x\right)$ $= -f_a(x)$	5
1d	berechnet die Nullstellen der Funktion h und zeigt, dass $h'(x) = e^x \cdot (x^2 - 2)$ die erste Ableitungsfunktion von h ist und gibt die Steigung an der Stelle $x = 0$ an.	Es gilt: $h(x) = 0$ $e^x \cdot (x^2 - 2 \cdot x) = 0$ Satz des Nullproduktes: $e^x = 0 \vee (x^2 - 2x) = 0$ Da $e^x \neq 0$ für alle x, folgen die Nullstellen aus: $(x^2 - 2x) = 0$ $x \cdot (x - 2) = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$ Anwendung der Produktregel liefert: $u(x) = e^x$ und $u'(x) = e^x$ $v(x) = x^2 - 2 \cdot x$ und $v'(x) = 2x - 2$ Somit gilt: $h'(x) = e^x \cdot (2 \cdot x - 2) + e^x \cdot (x^2 - 2 \cdot x)$ $h'(x) = e^x \cdot (x^2 - 2)$ $h'(0) = -2$	5

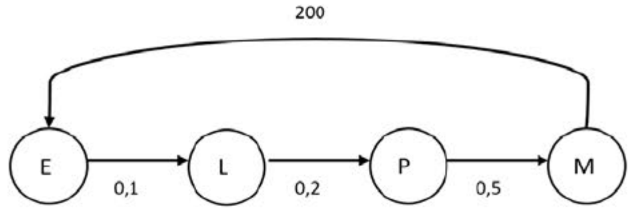
<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Lösungsskizze</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>1e</td><td>entscheidet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und

ermittelt alle Matrizen B, die die Bedingung $A \cdot B = B \cdot A$ erfüllen.</td><td>
<table>
<tr><td><u>Hinweis:</u> Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).</td><td>wahr</td><td>falsch</td></tr>
<tr><td>Wenn $A \cdot B = B \cdot A$ gilt, so sind A und B vom gleichen Typ.</td><td>x</td><td></td></tr>
<tr><td>Es gilt $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \Leftrightarrow A \cdot B = B \cdot A$</td><td></td><td>x</td></tr>
</table>
Gegeben ist $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Es ist eine allgemeine Matrix B aufzustellen:
$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
Dann gilt: $A \cdot B = B \cdot A$
$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot a & 2 \cdot b \\ a + c & b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot a + b & b \\ 2 \cdot c + d & d \end{pmatrix}$
Die Matrizeneinträge liefern vier Bedingungen:
I $2 \cdot a = 2 \cdot a + b \Leftrightarrow b = 0$
II $2 \cdot b = b \Leftrightarrow b = 0$
III $a + c = 2 \cdot c + d \Leftrightarrow a = c + d$
IV $b + d = d \Leftrightarrow b = 0$
Somit gilt die Bedingung für alle Matrizen der Form
$B = \begin{pmatrix} c + d & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $c, d \in \mathbb{R}$,
(alternativ: $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a - c \end{pmatrix}$ bzw. $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ a - d & d \end{pmatrix}$)
</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1f</td><td>bestimmt den Wert des Parameters k jeweils so, dass es
• keine Lösung,
• genau eine Lösung,
• unendlich viele Lösungen für
das Gleichungs-system gibt und
bestimmt die Lösungsmenge für den Fall, dass es unendlich viele Lösungen gibt.</td><td>
Es gibt:
• keine Lösung, wenn $k^2 - 16 = 0 \quad \wedge \quad 8 + 2 \cdot k \neq 0$ gilt.
• genau eine Lösung, wenn $k^2 - 16 \neq 0$ gilt.
• unendlich viele Lösungen, wenn $k^2 - 16 = 0 \wedge 8 + 2 \cdot k = 0$ gilt.
Es gilt $k^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow k = 4 \quad \vee \quad k = -4$.
Es gilt $8 + 2 \cdot k = 0 \Leftrightarrow k = -4$
Damit folgt, dass das Gleichungssystem
• keine Lösung für $k = 4$ besitzt,
• genau eine Lösung besitzt, wenn $k \in \mathbb{R} \setminus \{-4; 4\}$ ist und
• eine unendliche Lösungsmenge besitzt, wenn $k = -4$ gilt.
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$
Mit der mittleren Zeile: $x_2 + 3 \cdot x_3 = -5 \Leftrightarrow x_2 = -5 - 3 \cdot x_3$
Mit der oberen Zeile: $x_1 - x_3 = 6 \Leftrightarrow x_1 = 6 + x_3$
Die Lösungsmenge lautet: $\mathbb{L} = \{(6 + t;\ -5 - 3 \cdot t;\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
</td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
1g	gibt an, unter welchen Bedingungen zwei Matrizen invers zueinander sind und zeigt, dass die gegebene Aussage wahr ist.	Zwei Matrizen sind zueinander invers, wenn die Matrizen quadratisch sind und ihr Produkt die Einheitsmatrix ergibt. Zunächst werden zwei allgemeine Matrizen vom Typ 2×2 mit ausschließlich positiven Elementen definiert: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, d, e, f, g, h > 0$ Sind A und B zueinander invers, dann gilt $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Also gilt insbesondere $a \cdot f + b \cdot h = 0$ Dies steht im Widerspruch zu a, b, f und $h > 0$, d.h. wenn $a, b > 0$, dann muss $f < 0 \vee h < 0$ gelten. Die Aussage stimmt, denn wenn a und b aus der Matrix A positiv sind, muss entweder f oder h aus der Matrix B negativ sein, damit die Gleichung $a \cdot f + b \cdot h = 0$ erfüllt wird.	5
1h	erläutert, von welchem Typ die Matrix X ist und berechnet die Matrix X.	Aus der Gleichung (1.) ist ersichtlich, dass die Matrix X drei Spalten besitzen muss, damit die Matrizenmultiplikation definiert ist. Da das Produkt eine Zeile besitzt, muss die Matrix X ebenfalls nur eine Zeile besitzen. Somit ist die Matrix X vom Typ 1×3 bzw. ein Zeilenvektor mit 3 Elementen. (Dies passt auch zur Gleichung (2.). Die transponierte Matrix hat dann drei Zeilen und eine Spalte. Die Matrizenmultipliaktion ist definiert und das Produkt eine 2×1-formatige Matrix.) (1.) $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \end{pmatrix}$ (2.) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \end{pmatrix}$ Also gilt: $\begin{array}{lrcl} \text{I} & x_1 + 2 \cdot x_2 & = & 2 \\ \text{II} & 2 \cdot x_1 - x_2 + x_3 & = & -6 \\ \text{III} & x_1 + 3 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 & = & -10 \\ \text{IV} & x_2 + x_3 & = & 8 \end{array}$ Subtrahiert man die III. Gleichung von der I. Gleichung und addiert man die resultierende Gleichung mit Gleichung IV kann die Variable x_3 bestimmt werden: $V := I - III \quad -x_2 + 3 \cdot x_3 = 12$ $IV + V \quad 4 \cdot x_3 = 20 \quad \Leftrightarrow x_3 = 5$ Einsetzen in IV: $x_2 + 5 = 8 \quad \Leftrightarrow x_2 = 3$ Einsetzen in I: $x_1 + 2 \cdot 3 = 2 \quad \Leftrightarrow x_1 = -4$ Damit ergibt sich: $X = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.	5
			40

Aufgabe 2: Kakao

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Lösungsskizze</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>A2</td><td>Der Prüfling …</td><td>Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:
Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Lösungsskizze sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.</td><td></td></tr>
<tr><td>2a</td><td>zeichnet den Übergangsgraphen zur Matrix M und

begründet, dass die Matrix M den Sachzusammenhang des Textes widerspiegelt.</td><td>

Die Spalten und Zeilen der Matrix geben in der gleichen Reihenfolge Eier, Larven, Puppen und Kakaomotten die Entwicklungsstadien der Kakaomotte an. Alle Entwicklungsstadien werden in einer Periodendauer (Monat) durchlaufen. Das Matrizenelement $m_{21} = 0{,}1$ besagt, dass sich in einer Periode 10 % der Eier zu Larven weiter entwickeln. Das Matrizenelement $m_{32} = 0{,}2$ besagt, dass sich in einer Periode 20 % also $\frac{1}{5}$ der Larven verpuppen, und $m_{43} = 0{,}5$, dass sich in einer Periode von den Puppen 50 % also die Hälfte zu Kakaomotten entwickeln. Das Element $m_{14} = 200$ gibt an, dass eine Motte durchschnittlich 200 Eier pro Periode legt. Die Lebensdauer einer Motte beträgt eine Periode bzw. einen Monat, da $m_{44} = 0$. Der Text macht hierzu keine Angaben. Die anderen Werte der Matrix entsprechen denen im Text.</td><td>6</td></tr>
<tr><td>2b</td><td>berechnet die Verteilungen der beiden Folgemonate Februar und März.</td><td>Es gilt für den ersten Folgemonat (Februar):
$\vec{v_1} = M \cdot \vec{v_0}$
$= \begin{pmatrix} 30\,000 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$
Im Februar gibt es 30 000 Eier, 100 Larven, 100 Puppen und 100 Kakaomotten.
Für den zweiten Folgemonat (März) gilt:
$\vec{v_2} = M^2 \cdot \vec{v_0}$
$= \begin{pmatrix} 20\,000 \\ 3\,000 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix}$
Im März gibt es 20 000 Eier, 3 000 Larven, 20 Puppen und 50 Kakaomotten.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2c</td><td>gibt den Einfluss des Mittels SBM I im Vergleich zur Populationsentwicklung der Matrix M in einer Periode bzw.</td><td>Die Populationsmatrix von SBM I unterscheidet sich von der Ausgangsmatrix M nur im Element $m_{32} = 0{,}1$. Das Mittel SBM I wirkt somit lediglich auf die Entwicklung vom Larvenstadium zum Puppenstadium. Es entwickeln sich mit dem Mittel SBM I nur noch 10 % der Larven zu Puppen.
Fortsetzung nächste Seite</td><td>4</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Lösungsskizze</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>zu 2c</td><td>Monat an und beschreibt die langfristige Auswirkung auf die Kakaomotten-population.</td><td>Da die vierte Potenz der Matrix die Einheitsmatrix ergibt, wird jede vierte Periode die Ausgangspopulation wieder erreicht. Das Mittel SBM I bewirkt somit keine dauerhafte Reduzierung der Schädlings-population. (Eine Reduzierung der Gesamtpopulation innerhalb der vier Perioden ist von der Anfangspopulation abhängig.)</td><td></td></tr>
<tr><td>2d</td><td>ermittelt, wie viel Prozent der Eier sich beim Einsatz des Mittels SBM II zu Larven ent-wickeln und

beurteilt, ob das Mittel SBM I oder das Mittel SBM II langfristig wirk-samer ist.</td><td>Aus 2 000 Eiern der ersten Periode werden 90 Larven in der zweiten Periode. Sei k die Entwicklungsrate der Eier zu Larven, dann gilt:
$2\,000 \cdot k = 90$
$\Leftrightarrow k = \frac{9}{200}$
$\Leftrightarrow k = 0{,}045$
Die Entwicklungsrate vom Ei zur Larve beträgt 0,045, d.h. nur noch 4,5 % der Eier entwickeln sich zu Larven.

Für das zweite Mittel SBM II gilt:
$M_{SBM\,II}{}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0{,}045 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}9 \end{pmatrix}$
Dies zeigt einen periodisch abnehmenden Prozess, da die Werte auf der Hauptdiagonalen kleiner 1 sind. Die Population nimmt ab. Beim ersten Mittel SBM I wird hingegen jede vierte Periode wieder die Ausgangspopulation erreicht. Somit ist das zweite Mittel SBM II wirksamer.</td><td>5*</td></tr>
<tr><td>2e</td><td>begründet die Definitionsmenge für die Werte der Parameter a und b in der Matrix M_{neu} und

bestimmt die Werte der Para-meter a und b sowie die fehlen-den Werte der Tabelle 2.1.</td><td>Die Werte der Parameter a und b repräsentieren die Entwicklungs-rate bzw. die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Ei zur Larve bzw. eine Larve zur Puppe entwickelt. Daher müssen diese Werte als Wahrscheinlichkeiten dem Intervall [0; 1] entstammen.

Die Angaben aus Tab. 2.1 und Matrix M_{neu} ergeben:
$E_0 = 800 \wedge L_1 = 40$: $a \cdot 800 = 40 \Leftrightarrow a = \frac{1}{20} = 0{,}05$
$K_3 = 3$: $0{,}5 \cdot P_2 = 3 \Leftrightarrow P_2 = 6$
$K_2 = 15$: $0{,}5 \cdot P_1 = 15 \Leftrightarrow P_1 = 30$
$P_2 = 6 \wedge L_1 = 40$: $b \cdot 40 = 6 \Leftrightarrow b = 0{,}15$
$P_1 = 30$: $0{,}15 \cdot L_0 = 30 \Leftrightarrow L_0 = 200$
$E_1 = 30\,000$: $0{,}05 \cdot 30\,000 = L_2 \Leftrightarrow L_2 = 1\,500$
Ergebnis für die Parameter a und b: $a = 0{,}05$ und $b = 0{,}15$.

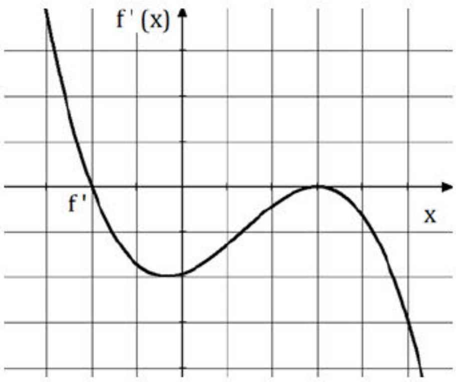
<table>
<tr><th>Periode / Anzahl</th><th>Start-periode</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th></tr>
<tr><td>Eier</td><td>800</td><td>30 000</td><td>3 000</td><td>3 000</td></tr>
<tr><td>Larven</td><td>200</td><td>40</td><td>1 500</td><td>150</td></tr>
<tr><td>Puppen</td><td>30</td><td>30</td><td>6</td><td>225</td></tr>
<tr><td>Kakaomotten</td><td>150</td><td>15</td><td>15</td><td>3</td></tr>
</table></td><td>7*</td></tr>
</table>

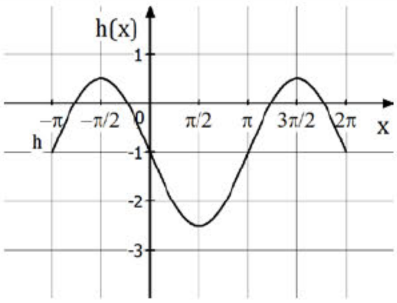
	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
2f	gibt an, wie viel Gramm Zucker sich in einer Mengeneinheit Zartbitter befindet, im Endprodukt Möwe befindet und berechnet den prozentualen Anteil des Rohstoffs Zucker am Endprodukt Möwe.	Zucker (R2) in einer Mengeneinheit Zartbitter (Z1): 46 Gramm Zucker (R2) im Endprodukt Möwe (E2): 70,6 Gramm $\frac{70{,}6 \cdot 100\ \%}{27{,}4 + 70{,}6 + 26{,}4 + 25{,}6} \approx 47{,}07\ \%$ Das Endprodukt Möwe enthält circa 47 % Zucker.	4
2g	erläutert die Notizen des Betriebsleiters im Sachzusammenhang.	Die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix (B) wird zunächst mit dem Faktor 100 multipliziert, da die Matrix B nur den Anteil von 100 g eines Zwischenproduktes angibt, der in das Endprodukt einfließt. Die anschließende Multiplikation mit dem Spaltenvektor der Endproduktmengen, ergibt als Produkt den Vektor mit den benötigten Zwischenproduktmengen in Gramm. Diese dürfen die vorhandenen Mengen der Zwischenprodukte (Restmengen am Ende des Produktionstages: 1 250 g Zartbitter, 3 400 g weiße Schokolade und 2 700 g Vollmilchschokolade) nicht übersteigen. Der Spaltenvektor $(x_1 \quad x_2 \quad x_3)^T$ erfasst die unbekannten Endproduktmengen (mit $x_1,\ x_2$ und $x_3 \geq 0$). Die Multiplikation der 3 Faktoren aus (a) mit Berücksichtigung der Restmengen führt somit zu einer Ungleichung. In der Notiz (b) stehen linksseitig die Terme aus der Multiplikation der 3 Faktoren aus (a). Zudem ist bereits der Vorschlag des Betriebsleiters berücksichtigt, die Mengen an Zartbitter und weißer Schokolade vollständig aufzubrauchen. Für diese beiden Zwischenproduktmengen ergeben sich Gleichung I und II. Die vorhandene Menge an Vollmilchschokolade muss nicht vollständig aufgebraucht werden, daher bleibt die Ungleichung III bestehen.	5

	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
2h	ermittelt, wie viele Packungen der Pralinensorten Sprotte (E1), Möwe (E2) und Anker (E3) sich maximal mit dem Vorschlag des Betriebsleiters befüllen lassen.	Aus den beiden Gleichungen I und II aus Notiz (b) ergibt sich die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{37}{4}\cdot t - 175;\ -\frac{23}{4}\cdot t + 130;\ t\right)\middle\vert t \in \mathbb{N}\right\}$ Durch Einsetzen von $x_1 = \frac{37}{4}\cdot t - 175$ und $x_2 = -\frac{23}{4}\cdot t + 130$ und $x_3 = t$ in Ungleichung III, kann t eingegrenzt werden: III $\ 30\cdot x_1 + 20\cdot x_2 + 100\cdot x_3 \leq 2\,700$ $\Leftrightarrow\ \ 30\cdot\left(\frac{37}{4}\cdot t - 175\right) + 20\cdot\left(-\frac{23}{4}\cdot t + 130\right) + 100\cdot t \leq 2\,700$ $\Leftrightarrow t \leq \frac{428}{21}$ Der Parameter t gibt die Anzahl der Pralinenschachteln Anker (E3) an, daher gilt $t \in \mathbb{N}$ also $t \leq 20$. Außerdem gilt: $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$, also $\frac{37}{4}\cdot t - 175 \geq 0 \Rightarrow t \geq 18{,}9$ $-\frac{23}{4}\cdot t + 130 \geq 0 \Rightarrow t \leq 22{,}6$ und t ist ein Vielfaches von 4. Diese Bedingungen werden nur für $t = 20$ erfüllt. Einsetzen von $t = 20$ in $x_1 = \frac{37}{4}\cdot t - 175$ und $x_2 = -\frac{23}{4}\cdot t + 130$ liefert: $x_1 = \frac{37}{4}\cdot 20 - 175$ $= 10$ $x_2 = -\frac{23}{4}\cdot 20 + 130$ $= 15$ Es können somit 10 Packungen der Pralinensorte Sprotte (E1), 15 Packungen der Sorte Möwe (E2) und 20 Packungen der Sorte Anker (E3) mit den Restbeständen befüllt werden.	6*
			40

Aufgabe 1 A mit Stochastik:

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Lösungsskizze</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>A2</td><td>Der Prüfling ...</td><td>Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:
Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Lösungsskizze sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.
<u>Bemerkung</u>:
Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.</td><td></td></tr>
<tr><td>1a</td><td>entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>
<table>
<tr><th><u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).</th><th>wahr</th><th>falsch</th></tr>
<tr><td>Die Ableitungsfunktion g′ kann dargestellt werden mit
$g'(x) = a \cdot (x-3)^3 \cdot (x+2) \cdot (x-7)^2 \cdot (x+1)$.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Der höchste Exponent des Funktionsterms von $g(x)$ ist ungerade.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Der Graph von g hat an der Stelle $x = -2$ einen Hochpunkt.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Der Graph der Funktion g hat mindestens zwei Wendepunkte.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Es gilt: $g(-1) < g(2)$</td><td></td><td>X</td></tr>
</table>
</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>skizziert den Graphen der Ableitungsfunktion f ‘ und

gibt einen Lösungsansatz an, mit dem die Maßzahl der Fläche, die vom Graphen von f und der Abszisse eingeschlossen wird, berechnet werden kann.</td><td>
$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$</td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
1c	bestimmt den Wert des Parameters a so, dass die Funktion f_a bei $x = 3$ eine Extremstelle hat und zeigt, dass alle Funktionsgraphen der Funktion f_a punktsymmetrisch zum Ursprung sind.	Für alle Extremstellen x gilt: $f_a'(x) = 0 \wedge f_a''(x) \neq 0$ $f_a'(x) = \frac{3}{a}x^2 + 1 \wedge f_a''(x) = \frac{6}{a}x$ $f_a'(3) = \frac{3}{a} \cdot 3^2 + 1$ $0 = \frac{3}{a} \cdot 3^2 + 1$ $\Leftrightarrow a = -27$ $f_a''(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Zu zeigen: $f_a(-x) = -f_a(x)$ $f_a(-x) = \frac{1}{a}(-x)^3 + (-x)$ $= -\frac{1}{a}x^3 - x$ $= -\left(\frac{1}{a}x^3 + x\right)$ $= -f_a(x)$	5
1d	skizziert den Graphen der Funktion h im Intervall $-\pi \leq x \leq 2\pi$ und berechnet die Wendepunkte im Intervall $-\pi \leq x \leq \pi$ und gibt die Steigung an der Stelle $x = 0$ an.	 Es gilt: $h''(x) = 0$ $\frac{3}{2} \cdot \sin(x) = 0$ mit $-\pi \leq x \leq \pi$ $\Leftrightarrow x = \pi \vee x = 0 \vee x = -\pi$ $(h'''(x) = \frac{3}{2} \cdot \cos(x)$ $h'''(\pi) \neq 0$ und $h'''(0) \neq 0$ und $h'''(-\pi) \neq 0\,)$ $h(\pi) = -1 \quad \Rightarrow W_1(\pi\|-1)$ $h(0) = -1 \quad \Rightarrow W_2(0\|-1)$ $h(-\pi) = -1 \quad \Rightarrow W_3(-\pi\|-1)$ $h'(0) = -\frac{3}{2}$	5

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Lösungsskizze</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>1e</td><td>vervollständigt die Vierfeldertafel und

entscheidet begründet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>

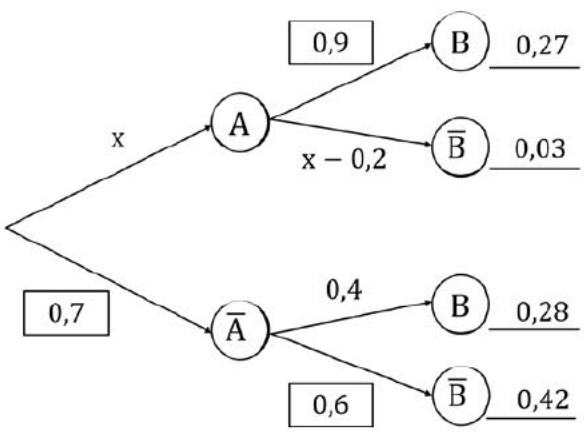
<table>
<tr><th>P</th><th>B</th><th>$\overline{B}$</th><th>Summen</th></tr>
<tr><td>A</td><td>0,35</td><td>**0,25**</td><td>**0,6**</td></tr>
<tr><td>$\overline{A}$</td><td>**0,25**</td><td>**0,15**</td><td>0,4</td></tr>
<tr><td>Summen</td><td>0,6</td><td>**0,4**</td><td>**1**</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Aussage</th><th>Entscheidung und Begründung</th></tr>
<tr><td>Es gilt: $P(B) = P(\overline{A})$.</td><td>Die Aussage ist falsch.
Aus der Vierfeldertafel können die Wahrscheinlichkeiten
$P(B) = 0{,}6$ und $P(\overline{A}) = 0{,}4$ direkt abgelesen werden.</td></tr>
<tr><td>Es gilt: $P_A(B) = P_B(A)$.</td><td>Die Aussage ist wahr.
Denn es gilt:
$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}35}{0{,}6}$
und $P_B(A) = \frac{0{,}35}{0{,}6}$.</td></tr>
<tr><td>Die Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig voneinander.</td><td>Die Aussage ist falsch.
Für stochastische Unabhängigkeit gilt:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
Da $0{,}35 \neq 0{,}6 \cdot 0{,}6$ ist, sind die beiden Ereignisse A und B stochastisch voneinander abhängig.</td></tr>
</table>

</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1f</td><td>zeigt, dass mit der gegebenen Gleichung P(A) berechnet werden kann und

vervollständigt die Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm, wenn $P(A) = 0{,}3$ angenommen werden kann und</td><td>

Anwendung der Pfadregel ergibt:
$x \cdot (x - 0{,}2) = 0{,}03$
$\Leftrightarrow x^2 - 0{,}2x - 0{,}03 = 0$
Um nun P(A) zu berechnen, muss die quadratische Gleichung nach x aufgelöst werden.

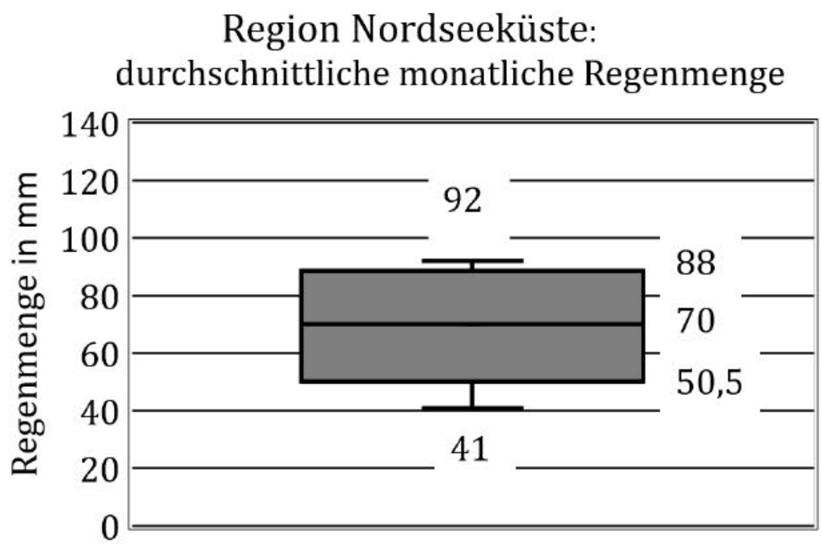


Fortsetzung nächste Seite

</td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
zu 1f	berechnet die Wahrscheinlichkeit für P(B).	Es gilt: $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$ $P(B) = 0{,}27 + 0{,}28$ $\quad\;\; = 0{,}55$	
1g	zeigt, dass sich das arithmetische Mittel durch das Hinzufügen der beiden Werte nicht verändert und	Es gilt: $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$ Für das aritmethische Mittel der neuen Liste gilt: $\bar{x} = \frac{1}{n+2} \cdot (10 \cdot n + 8 + 12)$ $\Rightarrow \bar{x} = \frac{10 \cdot n + 20}{n+2}$ $\Rightarrow \bar{x} = \frac{10 \cdot n + 2 \cdot 10}{n+2}$ $\Rightarrow \bar{x} = \frac{10 \cdot (n+2)}{n+2}$ $\Rightarrow \bar{x} = 10$	5
	begründet, dass die Standardabweichung durch die zusätzlichen Werte kleiner wird.	Die beiden neuen Werte $x_{n+1} = 8$ und $x_{n+2} = 12$ weichen jeweils um 2 Einheiten von dem gleichgebliebenen arithmetischen Mittelwert ab. Da jedoch $\sigma = 4$ gilt und der abweichende Wert unterhalb des Wertes der alten Standardabweichung liegt, muss die neue Standardabweichung kleiner sein.	
1h	ermittelt den Erwartungswert E(X) mithilfe der Abbildung 1.6 und	Der Erwartungswert kann dort aus der Abbildung abgelesen werden, wo die kumulierte Wahrscheinlichkeit von 50 % überschritten wird. Im Histogramm ist das der Wert mit der größten Wahrscheinlichkeit, also gilt: $E(X) = 2$.	5
	begründet, dass die Zufallsgröße X nicht als binomialverteilt angenommen werden kann.	Unter der Annahme, dass X binomialverteilt ist, kann aus der Symmetrie zum Erwartungswert $p = 0{,}5$ gefolgert werden. Weiter kann aus dem Histogramm die maximale Trefferanzahl k und damit $n = 4$ abgelesen werden. (Alternativ kann $p = 0{,}5$ aus $E(X) = n \cdot p$ mit $n = 4$ hergeleitet werden). Bei Vorliegen einer Binomialverteilung werden die Wahrscheinlichkeiten bestimmt: z.B. (ein Nachweis ist ausreichend): $P(X = 0) = \binom{4}{0} \cdot 0{,}5^0 \cdot 0{,}5^4$ $\qquad\qquad = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}0625$ $P(X = 1) = \binom{4}{1} \cdot 0{,}5^1 \cdot 0{,}5^3$ $\qquad\qquad = 4 \cdot 0{,}0625$ $\qquad\qquad = 0{,}25$ Die so ermittelten Wahrscheinlichkeiten stimmen nicht mit denen in der Abbildung überein, also kann die Zufallsvariable X nicht als binomialverteilt angenommen werden.	
			40

Aufgabe 2: Urlaub an der Nordsee

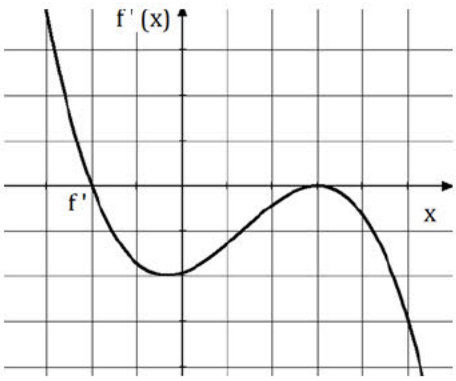
	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
A2	Der Prüfling ...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Lösungsskizze sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	
2a	ergänzt in Abbildung 2.2 den Boxplot zu den durchschnittlichen monatlichen Regenmengen an der Nordseeküste und		7
	gibt die dafür notwendigen Daten an und	$x_{min} = 41$; $x_{max} = 92$; unteres Quartil: $Q_{0,25} = 50,5$; oberes Quartil: $Q_{0,75} = 88$; Median: $Q_{0,5} = 70$	
	vergleicht die durchschnittlichen monatlichen Regenmengen der beiden Regionen anhand dreier Aspekte.	• Alle Werte zu den durchschnittlichen monatlichen Regenmengen liegen in der Region Bodensee höher als für die Region Nordseeküste. • Die Spannweite der Regenmenge ist am Bodensee größer. • An der Nordsee fällt insgesamt weniger Niederschlag als am Bodensee.	
2b	zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Tag im touristisch relevanten Zeitraum ein Regentag ist, etwa 27,9 % beträgt und	Betrachtete Periode: 15. März bis 15. Oktober $17 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 15 = 215$ Tage $\Rightarrow p = \frac{60}{215} \approx 0{,}279$ Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen Regentag 27,9 %.	6
	erläutert, unter welchen Bedingungen die Zufallsvariable X als binomialverteilte Zufallsgröße angenommen werden kann	Folgende Bedingungen müssen erfüllt sein, damit die Zufallsvariable als binomialverteilt angenommen werden kann: • Es gibt nur zwei Möglichkeiten: Treffer: Regentag. Nichttreffer: Kein Regentag. *Fortsetzung nächste Seite*	

	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
zu 2b		• Die Ergebnisse sind unabhängig voneinander und beeinflussen sich nicht gegenseitig: Die Regentage sollten als unabhängig voneinander betrachtet werden, d.h., wenn der eine Tag ein Regentag ist, heißt das nicht automatisch, dass der nächste Tag auch ein Regentag ist. • Die Wahrscheinlichkeit p für einen Treffer ändert sich nicht: Da die Wahrscheinlichkeit für einen Regentag aus den Erfahrungswerten hergeleitet wurde, gilt sie für jeden Tag im angegebenen Zeitraum. • Es handelt sich um ein diskretes Merkmal: Als Merkmalsausprägungen kommen nur ganze Zahlen vor.	
2c	berechnet die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.	Die Zufallsvariable X mit „X sei die Anzahl der Regentage" ist binomialverteilt mit der Kettenlänge $n = 14$ und der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}279$. • Keine Regentage: $P(X = 0) = \binom{14}{0} \cdot (0{,}279)^0 \cdot (0{,}721)^{14} \approx 0{,}0103$ Die Wahrscheinlichkeit, dass Familie Meier einen Urlaub ohne Regentage genießen kann, beträgt ca. 1 %. • Höchstens die Hälfte vom Urlaub verregnet: $P(0 \leq X \leq 7) = \sum_{k=0}^{7} \binom{14}{k} \cdot (0{,}279)^k \cdot (0{,}721)^{14-k} \approx 0{,}9796$ Die Wahrscheinlichkeit, dass der Urlaub von Familie Meier maximal 7 Regentage hat, beträgt ca. 98 %.	4
2d	erläutert die Berechnung im Sachzusammenhang und vervollständigt die Berechnung so, dass die Ungleichung erfüllt ist.	Von der Gesamtwahrscheinlichkeit wird die Wahrscheinlichkeit, dass es k oder mehr Nicht-Regentage geben wird, subtrahiert. Die Wahrscheinlichkeit, dass es mindestens k Nicht-Regentage geben wird, beträgt demnach mehr als 99,9 %. Connys Berechnung besagt somit, dass die Wahrscheinlichkeit, dass sie mehr als 14-(14-k)-mal bzw. mehr als k-mal ins Wellenbad gehen kann, unter 0,1 % liegt. $1 - \sum_{k=\boxed{5}}^{14} \binom{14}{k} \cdot 0{,}721^k \cdot 0{,}279^{14-k} \leq 0{,}1\ \%$	5*
2e	ermittelt, wie viele Tage die Familie mindestens Urlaub machen muss, damit Conny mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mehr als einen Tag ins Wellenbad gehen kann.	Gesucht ist der minimale Wert n so, dass $P(X \geq 2) \geq 0{,}95$ gilt. $\Rightarrow P(X \leq 1) \leq 0{,}05$ CAS liefert: für $n = 14$: $P(X \leq 1) \approx 0{,}0658$, für $n = 15$: $P(X \leq 1) \approx 0{,}0503$ und für $n = 16$: $P(X \leq 1) \approx 0{,}0384$ Familie Meier muss also mindestens 16 Tage lang Urlaub machen, damit Conny mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mehr als einmal ins Wellenbad gehen kann.	5*

	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
2f	berechnet den Erwartungswert und die Standardabweichung und interpretiert das Ergebnis im Sachzusammenhang.	$\mu = n \cdot p$ $\mu = 4\,830 \cdot 0{,}112$ ≈ 541 $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$ $\sigma = \sqrt{4\,830 \cdot 0{,}112 \cdot 0{,}888}$ $\approx 21{,}9$ Der Leiter des Freizeitbades kann durchschnittlich mit dem Besuch von 541 Touristen rechnen, wobei es eine Streuung von ca. 22 Touristen nach unten und nach oben geben kann. Üblicherweise kann mit dem Besuch von 519 bis 563 Touristen im Wellenbad gerechnet werden.	4
2g	weist nach, dass bei einem Hypothesentest mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 2,5 % ab einer durchschnittlichen Besucherzahl pro Tag von mehr als 497 Touristen die Nullhypothese $H_0: p \geq 0{,}112$ angenommen und die Alternative $H_1: p < 0{,}112$ verworfen wird.	Es wird die binomialverteilte Zufallsvariable Y mit „Y sei die Anzahl der Touristen" mit $n = 4\,830$ und $p = 0{,}112$ betrachtet. Es wird ein linksseitiger Hypothesentest durchgeführt, da angenommen wird, dass die tatsächliche Wahrscheinlichkeit kleiner ist als p_0. Nullhypothese $H_0: p \geq 0{,}112$ Alternative $H_1: p < 0{,}112$ Irrtumswahrscheinlichkeit: $\alpha = 0{,}025$ Ermittlung des Ablehnungs- und des Annahmebereichs von H_0: $P(Y \leq g) \leq 0{,}025$ $P(Y \leq 497) \approx 0{,}0227$ $P(Y \leq 498) \approx 0{,}0253$ $\Rightarrow g = 497$ Somit lautet der Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{0; 1; \ldots; 497\}$ der Annahmebereich: $A = \{498; \ldots; 4\,830\}$. Unter Berücksichtigung der vorgegebenen Hypothesen und der Irrtumswahrscheinlichkeit muss daher ab einer täglichen Besucherzahl von durchschnittlich 498 Touristen die Hypothese $H_0: p \geq 0{,}112$ angenommen und folglich die Alternative $H_1: p < 0{,}112$ verworfen wird.	5*
2h	berechnet auf dieser Grundlage die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art und interpretiert das Ergebnis im Sachzusammenhang.	Mit der angenommenen Besucherquote der Touristen von 10 % ergibt sich: $B_{4\,830;\,0{,}1}$ $P(498 \leq Y) \approx 0{,}2423$ Sollte die tatsächliche Besucherquote der Touristen bei nur 10 % liegen, so wird die Nullhypothese mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 24 % akzeptiert, obwohl sie falsch ist. Damit wird der Finanzausschuss eine Fehlentscheidung zugunsten des Ausbaus des Wellenbades treffen.	4
			40

Aufgabe 1 B mit Stochastik:

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Lösungsskizze</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>A2</td><td>Der Prüfling ...</td><td>Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:
Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Lösungsskizze sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.
<u>Bemerkung</u>:
Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.</td><td></td></tr>
<tr><td>1a</td><td>entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>
<table>
<tr><th><u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).</th><th>wahr</th><th>falsch</th></tr>
<tr><td>Die Ableitungsfunktion g′ kann dargestellt werden mit
$g'(x) = a \cdot (x-3)^3 \cdot (x+2) \cdot (x-7)^2 \cdot (x+1)$.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Der höchste Exponent des Funktionsterms von $g(x)$ ist ungerade.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Der Graph von g hat an der Stelle $x = -2$ einen Hochpunkt.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Der Graph der Funktion g hat mindestens zwei Wendepunkte.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Es gilt: $g(-1) < g(2)$</td><td></td><td>X</td></tr>
</table>
</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>skizziert den Graphen der Ableitungsfunktion f ‘ und

gibt einen Lösungsansatz an, mit dem die Maßzahl der Fläche, die vom Graphen von f und der Abszisse eingeschlossen wird, berechnet werden kann.</td><td>

$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$</td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
1c	bestimmt den Wert des Parameters a so, dass die Funktion f_a bei $x = 3$ eine Extremstelle hat und zeigt, dass alle Funktionsgraphen der Funktion f_a punktsymmetrisch zum Ursprung sind.	Für alle Extremstellen x gilt: $f_a'(x) = 0 \wedge f_a''(x) \neq 0$ $f_a'(x) = \frac{3}{a}x^2 + 1 \wedge f_a''(x) = \frac{6}{a}x$ $f_a'(3) = \frac{3}{a} \cdot 3^2 + 1$ $0 = \frac{3}{a} \cdot 3^2 + 1$ $\Leftrightarrow a = -27$ $f_a''(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Zu zeigen: $f_a(-x) = -f_a(x)$ $f_a(-x) = \frac{1}{a}(-x)^3 + (-x)$ $= -\frac{1}{a}x^3 - x$ $= -\left(\frac{1}{a}x^3 + x\right)$ $= -f_a(x)$	5
1d	berechnet die Nullstellen der Funktion h und zeigt, dass $h'(x) = e^x \cdot (x^2 - 2)$ die erste Ableitungsfunktion von h ist und gibt die Steigung an der Stelle $x = 0$ an.	Es gilt: $h(x) = 0$ $e^x \cdot (x^2 - 2 \cdot x) = 0$ Satz des Nullproduktes: $e^x = 0 \vee (x^2 - 2x) = 0$ Da $e^x \neq 0$ für alle x, folgen die Nullstellen aus: $(x^2 - 2x) = 0$ $x \cdot (x - 2) = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$ Anwendung der Produktregel liefert: $u(x) = e^x$ und $u'(x) = e^x$ $v(x) = x^2 - 2 \cdot x$ und $v'(x) = 2x - 2$ Somit gilt: $h'(x) = e^x \cdot (2 \cdot x - 2) + e^x \cdot (x^2 - 2 \cdot x)$ $h'(x) = e^x \cdot (x^2 - 2)$ $h'(0) = -2$	5

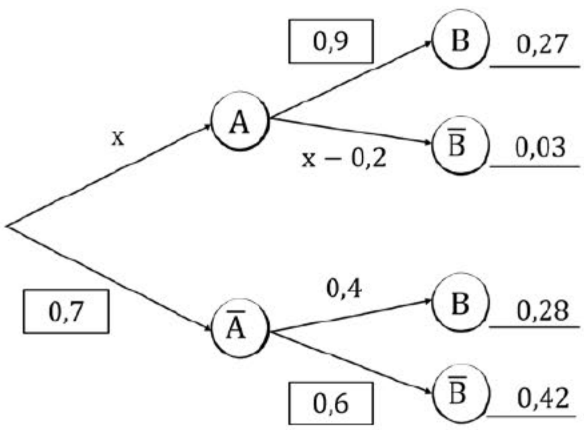
	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
1e	vervollständigt die Vierfeldertafel und	(Vierfeldertafel siehe unten)	5

P	B	$\overline{B}$	Summen
A	0,35	**0,25**	**0,6**
$\overline{A}$	**0,25**	**0,15**	0,4
Summen	0,6	**0,4**	**1**

entscheidet begründet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Es gilt: $P(B) = P(\overline{A})$.	Die Aussage ist falsch. Aus der Vierfeldertafel können die Wahrscheinlichkeiten $P(B) = 0{,}6$ und $P(\overline{A}) = 0{,}4$ direkt abgelesen werden.
Es gilt: $P_A(B) = P_B(A)$.	Die Aussage ist wahr. Denn es gilt: $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}35}{0{,}6}$ und $P_B(A) = \frac{0{,}35}{0{,}6}$.
Die Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig voneinander.	Die Aussage ist falsch. Für stochastische Unabhängigkeit gilt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Da $0{,}35 \neq 0{,}6 \cdot 0{,}6$, sind die beiden Ereignisse A und B stochastisch voneinander abhängig.

	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
1f	zeigt, dass mit der gegebenen Gleichung P(A) berechnet werden kann und	Anwendung der Pfadregel ergibt: $x \cdot (x - 0{,}2) = 0{,}03$ $\Leftrightarrow x^2 - 0{,}2x - 0{,}03 = 0$ Um nun P(A) zu berechnen, muss die quadratische Gleichung nach x aufgelöst werden.	5
	vervollständigt die Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm, wenn $P(A) = 0{,}3$ angenommen werden kann und	(Baumdiagramm siehe unten)	



Fortsetzung nächste Seite

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Lösungsskizze</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>zu 1f</td><td>berechnet die Wahrscheinlichkeit für P(B).</td><td>Es gilt: $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$
$P(B) = 0{,}27 + 0{,}28$
$= 0{,}55$</td><td></td></tr>
<tr><td>1g</td><td>zeigt, dass sich das arithmetische Mittel durch das Hinzufügen der beiden Werte nicht verändert und

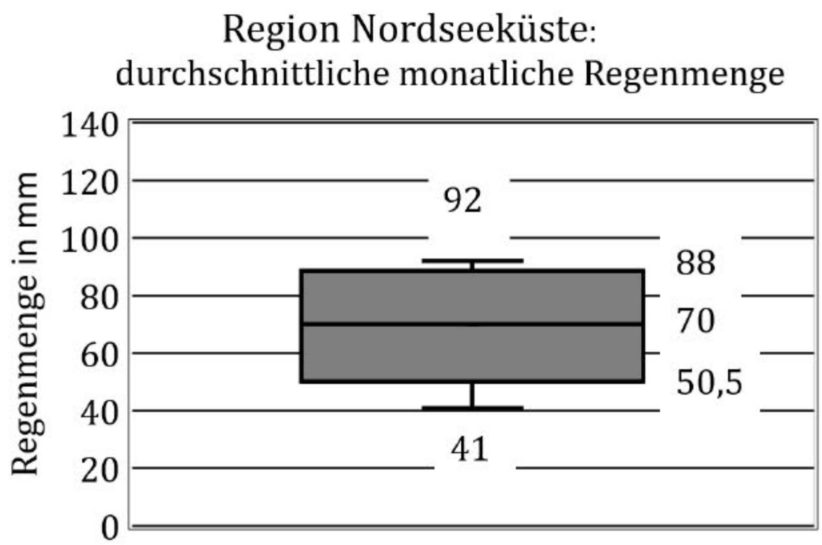
begründet, dass die Standardabweichung durch die zusätzlichen Werte kleiner wird.</td><td>Es gilt:
$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$
Für das aritmethische Mittel der neuen Liste gilt:
$\bar{x} = \frac{1}{n+2} \cdot (10 \cdot n + 8 + 12)$
$\Rightarrow \bar{x} = \frac{10 \cdot n + 20}{n+2}$
$\Rightarrow \bar{x} = \frac{10 \cdot n + 2 \cdot 10}{n+2}$
$\Rightarrow \bar{x} = \frac{10 \cdot (n+2)}{n+2}$
$\Rightarrow \bar{x} = 10$

Die beiden neuen Werte $x_{n+1} = 8$ und $x_{n+2} = 12$ weichen jeweils um 2 Einheiten von dem gleichgebliebenen arithmetischen Mittelwert ab. Da jedoch $\sigma = 4$ gilt und der abweichende Wert unterhalb des Wertes der alten Standardabweichung liegt, muss die neue Standardabweichung kleiner sein.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1h</td><td>ermittelt den Erwartungswert E(X) mithilfe der Abbildung 1.5 und

begründet, dass die Zufallsgröße X nicht als binomialverteilt angenommen werden kann.</td><td>Der Erwartungswert kann dort aus der Abbildung abgelesen werden, wo die kumulierte Wahrscheinlichkeit von 50 % überschritten wird. Im Histogramm ist das der Wert mit der größten Wahrscheinlichkeit, also gilt: $E(X) = 2$.

Unter der Annahme, dass X binomialverteilt ist, kann aus der Symmetrie zum Erwartungswert $p = 0{,}5$ gefolgert werden.
Weiter kann aus dem Histogramm die maximale Trefferanzahl k und damit $n = 4$ abgelesen werden.
(Alternativ kann $p = 0{,}5$ aus $E(X) = n \cdot p$ mit $n = 4$ hergeleitet werden).
Bei Vorliegen einer Binomialverteilung werden die Wahrscheinlichkeiten bestimmt:
z.B. (ein Nachweis ist ausreichend):
$P(X = 0) = \binom{4}{0} \cdot 0{,}5^0 \cdot 0{,}5^4$
$= 1 \cdot 1 \cdot 0{,}0625$
$P(X = 1) = \binom{4}{1} \cdot 0{,}5^1 \cdot 0{,}5^3$
$= 4 \cdot 0{,}0625$
$= 0{,}25$
Die so ermittelten Wahrscheinlichkeiten stimmen nicht mit denen in der Abbildung überein, also kann die Zufallsvariable X nicht als binomialverteilt angenommen werden.</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>40</td></tr>
</table>

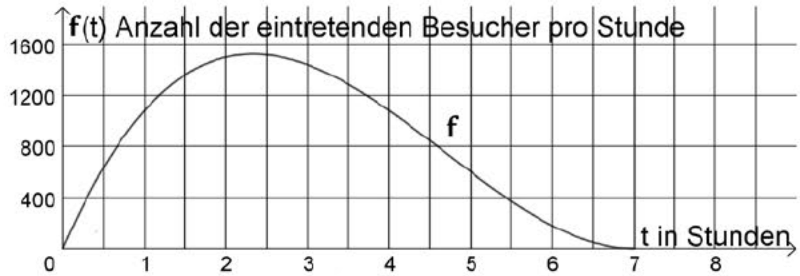
Aufgabe 2: Urlaub an der Nordsee

	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
A2	Der Prüfling ...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Lösungsskizze sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	
2a	ergänzt in Abbildung 2.2 den Boxplot zu den durchschnittlichen monatlichen Regenmengen an der Nordseeküste und		7
	gibt die dafür notwendigen Daten an und	$x_{min} = 41$; $x_{max} = 92$; unteres Quartil: $Q_{0,25} = 50{,}5$; oberes Quartil: $Q_{0,75} = 88$; Median: $Q_{0,5} = 70$	
	vergleicht die durchschnittlichen monatlichen Regenmengen der beiden Regionen anhand dreier Aspekte.	• Alle Werte zu den durchschnittlichen monatlichen Regenmengen liegen in der Region Bodensee höher als für die Region Nordseeküste. • Die Spannweite der Regenmenge ist am Bodensee größer. • An der Nordsee fällt insgesamt weniger Niederschlag als am Bodensee.	
2b	zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Tag im touristisch relevanten Zeitraum ein Regentag ist, etwa 27,9 % beträgt und	Betrachtete Periode: 15. März bis 15. Oktober $17 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 15 = 215$ Tage $\Rightarrow p = \frac{60}{215} \approx 0{,}279$ Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen Regentag 27,9 %.	6
	erläutert, unter welchen Bedingungen die Zufallsvariable X als binomialverteilte Zufallsgröße angenommen werden kann	Folgende Bedingungen müssen erfüllt sein, damit die Zufallsvariable als binomialverteilt angenommen werden kann: • Es gibt nur zwei Möglichkeiten: Treffer: Regentag. Nichttreffer: Kein Regentag. *Fortsetzung nächste Seite*	

	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
zu 2b		• Die Ergebnisse sind unabhängig voneinander und beeinflussen sich nicht gegenseitig: Die Regentage sollten als unabhängig voneinander betrachtet werden, d.h., wenn der eine Tag ein Regentag ist, heißt das nicht automatisch, dass der nächste Tag auch ein Regentag ist. • Die Wahrscheinlichkeit p für einen Treffer ändert sich nicht: Da die Wahrscheinlichkeit für einen Regentag aus den Erfahrungswerten hergeleitet wurde, gilt sie für jeden Tag im angegebenen Zeitraum. • Es handelt sich um ein diskretes Merkmal: Als Merkmalsausprägungen kommen nur ganze Zahlen vor.	
2c	berechnet die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.	Die Zufallsvariable X mit „X sei die Anzahl der Regentage“ ist binomialverteilt mit der Kettenlänge $n = 14$ und der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}279$. • Keine Regentage: $P(X = 0) = \binom{14}{0} \cdot (0{,}279)^0 \cdot (0{,}721)^{14} \approx 0{,}0103$ Die Wahrscheinlichkeit, dass Familie Meier einen Urlaub ohne Regentage genießen kann, beträgt ca. 1 %. • Höchstens die Hälfte vom Urlaub verregnet: $P(0 \leq X \leq 7) = \sum_{k=0}^{7} \binom{14}{k} \cdot (0{,}279)^k \cdot (0{,}721)^{14-k} \approx 0{,}9796$ Die Wahrscheinlichkeit, dass der Urlaub von Familie Meier maximal 7 Regentage hat, beträgt ca. 98 %.	4
2d	erläutert die Berechnung im Sachzusammenhang und vervollständigt die Berechnung so, dass die Ungleichung erfüllt ist.	Von der Gesamtwahrscheinlichkeit wird die Wahrscheinlichkeit, dass es k oder mehr Nicht-Regentage geben wird, subtrahiert. Die Wahrscheinlichkeit, dass es mindestens k Nicht-Regentage geben wird, beträgt demnach mehr als 99,9 %. Connys Berechnung besagt somit, dass die Wahrscheinlichkeit, dass sie mehr als 14-(14-k)-mal bzw. mehr als k-mal ins Wellenbad gehen kann, unter 0,1 % liegt. $1 - \sum_{k=\boxed{5}}^{14} \binom{14}{k} \cdot 0{,}721^k \cdot 0{,}279^{14-k} \leq 0{,}1\ \%$	5*
2e	ermittelt, wie viele Tage die Familie mindestens Urlaub machen muss, damit Conny mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mehr als einen Tag ins Wellenbad gehen kann.	Gesucht ist der minimale Wert n so, dass $P(X \geq 2) \geq 0{,}95$ gilt. $\Rightarrow P(X \leq 1) \leq 0{,}05$ CAS liefert: für $n = 14$: $P(X \leq 1) \approx 0{,}0658$, für $n = 15$: $P(X \leq 1) \approx 0{,}0503$ und für $n = 16$: $P(X \leq 1) \approx 0{,}0384$ Familie Meier muss also mindestens 16 Tage lang Urlaub machen, damit Conny mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mehr als einmal ins Wellenbad gehen kann.	5*

	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
2f	berechnet den Erwartungswert und die Standardabweichung und	$\mu = n \cdot p$ $\mu = 4\,830 \cdot 0{,}112$ ≈ 541 $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$ $\sigma = \sqrt{4\,830 \cdot 0{,}112 \cdot 0{,}888}$ $\approx 21{,}9$	4
	interpretiert das Ergebnis im Sachzusammenhang.	Der Leiter des Freizeitbades kann durchschnittlich mit dem Besuch von 541 Touristen rechnen, wobei es eine Streuung von ca. 22 Touristen nach unten und nach oben geben kann. Üblicherweise kann mit dem Besuch von 519 bis 563 Touristen im Wellenbad gerechnet werden.	
2g	weist nach, dass bei einem Hypothesentest mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 2,5 % ab einer durchschnittlichen Besucherzahl pro Tag von mehr als 497 Touristen die Nullhypothese $H_0: p \geq 0{,}112$ angenommen und die Alternative $H_1: p < 0{,}112$ verworfen wird.	Es wird die binomialverteilte Zufallsvariable Y mit „Y sei die Anzahl der Touristen“ mit $n = 4\,830$ und $p = 0{,}112$ betrachtet. Es wird ein linksseitiger Hypothesentest durchgeführt, da angenommen wird, dass die tatsächliche Wahrscheinlichkeit kleiner ist als p_0. Nullhypothese $H_0: p \geq 0{,}112$ Alternative $H_1: p < 0{,}112$ Irrtumswahrscheinlichkeit: $\alpha = 0{,}025$ Ermittlung des Ablehnungs- und des Annahmebereichs von H_0: $P(Y \leq g) \leq 0{,}025$ $P(Y \leq 497) \approx 0{,}0227$ $P(Y \leq 498) \approx 0{,}0253$ $\Rightarrow g = 497$ Somit lautet der Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{0; 1; \ldots; 497\}$ der Annahmebereich: $A = \{498; \ldots; 4\,830\}$. Unter Berücksichtigung der vorgegebenen Hypothesen und der Irrtumswahrscheinlichkeit muss daher ab einer täglichen Besucherzahl von durchschnittlich 498 Touristen die Hypothese $H_0: p \geq 0{,}112$ angenommen und folglich die Alternative $H_1: p < 0{,}112$ verworfen wird.	5*
2h	berechnet auf dieser Grundlage die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art und	Mit der angenommenen Besucherquote der Touristen von 10 % ergibt sich: $B_{4\,830;\,0,1}$ $P(498 \leq Y) \approx 0{,}2423$	4
	interpretiert das Ergebnis im Sachzusammenhang.	Sollte die tatsächliche Besucherquote der Touristen bei nur 10 % liegen, so wird die Nullhypothese mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 24 % akzeptiert, obwohl sie falsch ist. Damit wird der Finanzausschuss eine Fehlentscheidung zugunsten des Ausbaus des Wellenbades treffen.	
			40

Aufgabe 3: Die KLOT-Show

	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
A3	Der Prüfling ...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Lösungsskizze sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	
3a	beschreibt den Graphen anhand zweier Aspekte im Sachzusammenhang und ergänzt den Definitionsbereich von f(t) sowie die Skalierung der t-Achse in Abbildung 3.1.	Mögliche Aspekte: • Zum Zeitpunkt der Kassenöffnung um 10 Uhr ($t = 0$) beträgt der Besucherstrom 0 Besucher pro Stunde. • Anschließend steigt der Besucherstrom an und erreicht mit ca. 1 500 Besuchern pro Stunde seinen Höchststand. • Danach sinkt der Besucherstrom, bis er schließlich wieder den Wert 0 Besucher pro Stunde annimmt. *Weitere Aspekte sind möglich.* $0 \leq t \leq 7$ 	6
3b	beurteilt den Wahrheitsgehalt der Aussage.	Zwar weist der Graph hier eine Nullstelle auf, aber die besagt lediglich, dass keine weiteren Besucher den Park betreten (Kassenschluss). Über die Anzahl der sich im Park befindenden Besucher kann allein auf Grundlage von f(t) keine Aussage getroffen werden, da eine Funktion, die die Anzahl der den Park verlassenden Besucher pro Stunde beschreibt, nicht gegeben ist.	3
3c	zeigt rechnerisch, dass der Besucherstrom um 12:20 Uhr am größten ist und	Es gilt: $f'(t) = 90 \cdot t^2 - 840 \cdot t + 1\,470$ $f''(t) = 180 \cdot t - 840$ Für ein lokales Maximum gilt: $f'(t) = 0 \wedge f''(t) < 0$ Notwendige Bedingung: $90 \cdot t^2 - 840 \cdot t + 1\,470 \; = 0 \Leftrightarrow t = \frac{7}{3} \vee t = 7$ Hinreichende Bedingung: $f''\left(\frac{7}{3}\right) = -420 < 0$, d. h., es liegt ein lokales Maximum vor ($f''(7) = 420 > 0$, d. h., es liegt ein lokales Minimum vor) $f\left(\frac{7}{3}\right) \approx 1\,524{,}44$ *Fortsetzung nächste Seite*	5

	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
zu 3c	gibt an, wie groß der Besucherstrom zu diesem Zeitpunkt ist.	Bei $t=\frac{7}{3}$ liegt das lokale Maximum, das 12:20 Uhr entspricht. Somit ist zu diesem Zeitpunkt der Besucherstrom mit etwa 1 524 Besuchern pro Stunde am größten.	
3d	bestimmt den Wert des Integrals und interpretiert das Ergebnis im Sachzusammenhang.	$\frac{1}{3}\int_0^3 f(t)\,dt = 1\,147{,}5$ Zwischen 10 Uhr und 13 Uhr betreten durchschnittlich etwa 1 147 Besucher pro Stunde den Park .	3
3e	ermittelt die Ticketpreise für Erwachsene und Kinder sowie die Anzahl der Kinder und Erwachsenen, die im Freizeitpark waren.	Die gesuchten Größen können wie folgt benannt werden. TE: Ticketpreis Erwachsene, TK: Ticketpreis Kinder, E: Besucheranzahl Erwachsene, K: Besucheranzahl Kinder. Aus dem linearen Gleichungssystem I. $TK\cdot K + TE\cdot E = 216\,000$ II. $TK = TE - 10$ III. $K = 1{,}5\cdot E$ IV. $K + E = 6\,000$ folgt als Lösung, dass die Ticketpreise für Erwachsene 42 € und für Kinder 32 € betragen, sowie dass 2 400 Erwachsene mit 3 600 Kindern im Freizeitpark waren.	5
3f	modelliert den Höhenverlauf der Schiffsschaukel durch eine Funktion vom Typ g.	maximaler Höhenunterschied 10 Meter, d. h.: $2\cdot a = 10 \Leftrightarrow a = 5$ kleinste Höhe (Einstieg) 2 Meter, d. h.: $d = 2 + 5 = 7$ Schwingungsdauer 8 Sekunden, d. h.: $8 = \frac{2\cdot\pi}{b} \Leftrightarrow b = 0{,}25\cdot\pi.$ Phasenverschiebung um $c = -\frac{1}{4}\cdot p$, d. h.: $c = -\frac{1}{4}\cdot 8 \Leftrightarrow c = -2$ $g(t) = 5\cdot\sin\big(0{,}25\cdot\pi\cdot(t-2)\big)+7$	5
3g	erläutert beide Behauptungen und begründet, dass Kathys Behauptungen richtig sind.	I. Die y-Werte der Funktion h liegen zwischen eins und acht. II. Die Funktion h verläuft periodisch mit $p = 10$. I. Aus der graphischen Darstellung der Funktion kann abgelesen werden, dass die y-Werte der Hochpunkte bei acht und die der Tiefpunkte bei eins liegen. Es gibt keine y-Werte über acht oder unter eins. Also ist die erste Behauptung $W_h = [1;8]$ richtig. II. Mithilfe des Graphen von h kann festgestellt werden, dass sich nach jeweils $t = 10$ Sekunden der Kurvenverlauf wiederholt. Die zweite Behauptung ist daher ebenfalls korrekt.	4

	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
3h	begründet, dass die maximale Änderungsrate von h_1 in den Wendepunkten vorliegt und ermittelt, für welche Werte von a die maximale Änderungsrate der Höhe der Schiffschaukel der Sicherheits-vorgabe entspricht.	Die Änderungsrate der Höhe wird durch die Ableitungsfunktion der Höhe beschrieben. Die Extremstellen der Ableitungsfunktion führen zu Nullstellen in der zweiten Ableitungsfunktion und entsprechen den Wendestellen der Ausgangsfunktion (Höhe). Da bei Funktionen des vorgegebenen Typs die größte (kleinste) Steigung in den Wendepunkten auftritt, genügt es, diese zu betrachten. Der Parameter a beeinflusst die Lage der Wendestellen nicht, d. h.: $p = 10 \Leftrightarrow x_w = 2{,}5$ (alternativ: $h_1''(t) = 0$). Bedingungen: $h_1'(2{,}5) \leq 3$ mit $a < 0$ $\Leftrightarrow -0{,}2 \cdot \pi \cdot a \leq 3$ mit $a < 0$ $\Leftrightarrow -\frac{15}{\pi} \leq a < 0$ Für $a \in [-4{,}77; 0[$ wird die Sicherheitsvorgabe eingehalten.	5
3i	untersucht den Einfluss der Parameter b und d der Funktion h_2 auf die maximale Änderungsrate der Höhe der Schiffsschaukel.	$h_2(t) = -3{,}5 \cdot \cos(b \cdot t) + d$ mit $t \geq 0$ Der Parameter d beeinflusst nicht die maximale Änderungsrate der Höhe, sondern die Einstiegshöhe. Der Parameter b hat einen Einfluss - darauf, zu welchen Zeitpunkten die maximale Änderungsrate der Höhe vorliegt. - auf die Höhe der maximalen Änderungsrate. Je größer (kleiner) b ist, desto kleiner (größer) ist die Periode $p = \frac{2 \cdot \pi}{b}$ und desto größer (kleiner) ist die maximale Änderungsrate der Höhe, weil die Steigung im Wendepunkt größer (kleiner) wird. D. h., die Schiffsschaukel schwinkt schneller (langsamer). Die Amplitude von $h'(t)$ ist $3{,}5 \cdot b$, d. h., dass eine Verdoppelung von b zur Folge hat, dass sich die maximale Änderungsrate der Höhe ebenfalls verdoppelt.	4
			40

Aufgabe 3: Kreuzfahrtschiff

	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
A3	Der Prüfling ...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Lösungsskizze sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	
3a	vergleicht die in Abbildung 3.1 dargestellten Graphen der Funktionen g und h anhand dreier Aspekte im Sachzusammenhang.	Mögliche Aspekte: • Zu Beginn der Fahrt bei $t = 0$ liegt der Treibstoffverbrauch sowohl vor als auch nach der Geschwindigkeitsreduzierung bei null Tonnen pro Stunde. • Nach ca. 2 Stunden wird vor der Geschwindigkeitsreduzierung ein maximaler Treibstoffverbrauch von etwas über 5 Tonnen pro Stunde erreicht. Im Vergleich dazu liegt der maximale Treibstoffverbrauch nach der Geschwindigkeitsreduzierung nach ca. 2 Stunden nur bei ungefähr 3,9 Tonnen pro Stunde. • Ohne Geschwindigkeitsreduzierung dauert die Fahrt ca. 7,8 Stunden und nach der Geschwindigkeitsreduzierung ca. 8,6 Stunden. *Weitere Aspekte sind möglich.*	6
3b	gibt geeignete Bedingungsgleichungen für die Modellierung von g in der nötigen Anzahl an.	$g(t) = a \cdot t^4 + b \cdot t^3 + c \cdot t^2 + d \cdot t + e$ I. $g(2{,}3) = 5{,}08$ II. $g(5{,}46) = 5{,}08$ III. $g'(2{,}3) = 0$ IV. $g'(5{,}46) = 0$ V. $g(0) = 0$	4
3c	berechnet den größten momentanen Treibstoffverbrauch in Tonnen pro Stunde nach der Geschwindigkeitsreduzierung und begründet, dass die Betrachtung der größten Werte des Treibstoffverbrauchs nicht geeignet ist, um eine Aussage über die Minderung des CO_2-Ausstoßes auf der Teilstrecke treffen zu können.	$h'(t) = -0{,}074 \cdot t^3 + 0{,}969 \cdot t^2 - 3{,}9 \cdot t + 4{,}66$ $h''(t) = -0{,}222 \cdot t^2 + 1{,}938 \cdot t - 3{,}9$ Notwendige und hinreichende Bedingung: $h'(t) = 0 \wedge h''(t) \neq 0$ $-0{,}074 \cdot t^3 + 0{,}969 \cdot t^2 - 3{,}9 \cdot t + 4{,}66 = 0$ $\Rightarrow t \approx 2{,}18 \vee t \approx 4{,}53 \vee t \approx 6{,}39$ $h''(2{,}18) < 0 \Rightarrow t \approx 2{,}18$ ist die Stelle eines Hochpunktes. $h''(4{,}53) > 0 \Rightarrow t \approx 4{,}53$ ist die Stelle eines Tiefpunktes. $h''(6{,}39) < 0 \Rightarrow t \approx 6{,}39$ ist die Stelle eines Hochpunktes. $h(2{,}18) \approx 3{,}82$ und $h(6{,}39) \approx 3{,}59$ Der größte Treibstoffverbrauch betrug nach der Geschwindigkeitsreduzierung 3,82 Tonnen pro Stunde. Der berechnete Maximalwert des Treibstoffverbrauchs ist nicht geeignet, um eine Aussage über die CO_2- Minderung auf der Teilstrecke treffen zu können, da es sich nur um einen Momentanwert handelt. Es sind die Dauer der Fahrt und der durchschnittliche Treibstoffverbrauch zu berücksichtigen.	6

	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
3d	prüft die Aussage der Reederei.	Reisedauerverlängerung: 51,6 min $\widehat{=}$ 0,86 h Reisedauer vorher: $t_{alt} = 7{,}76$ Reisedauer nachher: $t_{neu} = 8{,}62$ alternativ: $h(t) = 0$ $-0{,}0185 \cdot t^4 + 0{,}323 \cdot t^3 - 1{,}95 \cdot t^2 + 4{,}66 \cdot t = 0$ $\Longrightarrow t = 0 \lor t \approx 8{,}62$ Geschwindigkeit vorher: $v_{alt} = \frac{277{,}61}{7{,}76} \approx 35{,}77$ Geschwindigkeit nachher: $v_{neu} = \frac{277{,}61}{8{,}62} \approx 32{,}21$ $\Delta v = \lvert v_{neu} - v_{alt} \rvert$ $\Rightarrow \Delta v = \lvert 32{,}21 - 35{,}77 \rvert$ $\Rightarrow \Delta v = 3{,}56 \approx 3{,}6$ Die Geschwindigkeit wurde im Mittel um ca. 3,6 Kilometer pro Stunde reduziert. Die Aussage der Reederei stimmt.	5
3e	gibt den Wert des Integrals an und interpretiert das Ergebnis im Sachzusammenhang.	$\int_0^{8{,}62} (-0{,}0185 \cdot t^4 + 0{,}323 \cdot t^3 - 1{,}95 \cdot t^2 + 4{,}66 \cdot t)\, dt \approx 26{,}54$ Nach der Geschwindigkeitsreduzierung auf der Reisestrecke von Kiel nach Trelleborg, die 8,62 Stunden dauert, liegt der Treibstoffverbrauch bei ungefähr 26,54 Tonnen.	3
3f	berechnet den Zeitpunkt t, an dem der lineare Abbau des Bakterienbestandes annähernd sprung- und knickfrei in den exponentiellen Abbau übergeht und ermittelt die dazugehörige Steigung m des linearen Abschnittes.	Für einen sprung- und knickfreien Übergang gilt: I. $m \cdot t + 100 = 60 - 0{,}2 \cdot e^{0{,}205 \cdot t}$ $\Leftrightarrow m \cdot t + 40 = -0{,}2 \cdot e^{0{,}205 \cdot t}$ II. $m = -0{,}041 \cdot e^{0{,}205 \cdot t}$ $\Rightarrow (-0{,}041 \cdot e^{0{,}205 \cdot t}) \cdot t + 40 = -0{,}2 \cdot e^{0{,}205 \cdot t}$ $\Rightarrow t \approx 20{,}25$ Nach annähernd 20,25 Stunden geht der lineare Abbau der Bakterien in den exponentiellen über. $m = B'(20{,}25)$ $m \approx -2{,}6$	6
3g	bestimmt die Werte für a, b und c gerundet auf zwei Nachkommastellen.	Es gilt: $P(0) = 100$ $\Leftrightarrow a - b = 100$ $\Leftrightarrow a = 100 + b$ Also: $P(t) = 100 + b - b \cdot e^{c \cdot t}$ Außerdem gilt: I $P(6) = 73{,}9$ II $P(11) = 42$ $\Leftrightarrow b \approx 49{,}97 \land a = 149{,}97 \land c = 0{,}07$	5

	Anforderungen	Lösungsskizze	BE
3h	ermittelt, wie viele Stunden es dauert, bis mit der chemischen Ballastwasserbehandlung nur noch die Hälfte des Anfangsbestandes der Bakterien im Tank ist und	Hälfte des Anfangsbestands: $P(t) = 50$ $50 = 150 - 50 \cdot e^{0,07 \cdot t}$ $\Rightarrow t = \frac{100}{7} \cdot \ln(2)$ $\Rightarrow t \approx 9{,}9\ [h]$ Es dauert 9,9 Stunden bis mit der chemischen Ballastwasserbehandlung nur noch die Hälfte des Anfangsbestandes der Bakterien im Tank ist.	5
	berechnet den prozentualen Abbau pro Stunde zu dieser Zeit t.	$P'(t) = -3{,}5 \cdot e^{0{,}07t}$ $P'(9{,}9) \approx -6{,}9989\ \left[\frac{\%}{h}\right]$ Nach 9,9 Stunden nimmt der Bakterienbestand mit annähernd 7 % pro Stunde ab.	
			40