Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1:** (hilfsmittelfreier Teil mit analytischer Geometrie)

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	5	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter:
$a, b, c, \dots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \dots \in \mathbb{R}$.

a) Die Abbildung 1.1 zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion g' einer ganzrationalen Funktion g mit allen Nullstellen.

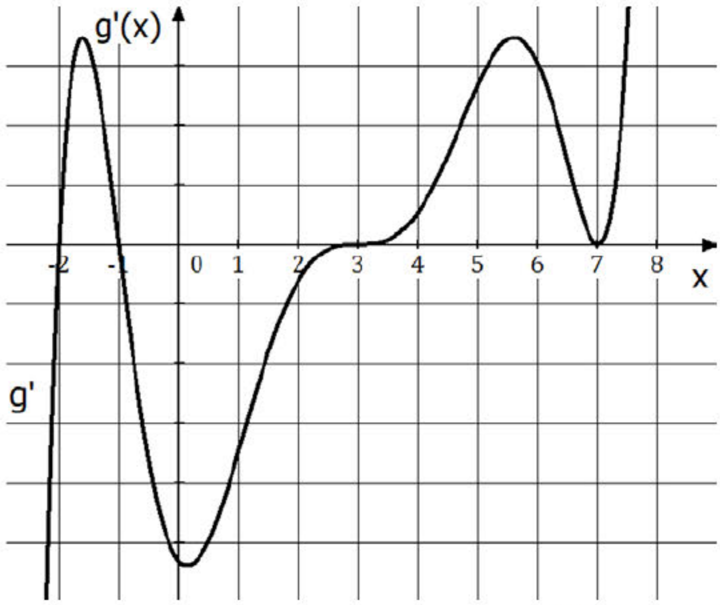

Abbildung 1.1

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

<u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Die Ableitungsfunktion g' kann dargestellt werden mit $g'(x) = a \cdot (x-3)^3 \cdot (x+2) \cdot (x-7)^2 \cdot (x+1)$.		
Der höchste Exponent des Funktionsterms von $g(x)$ ist ungerade.		
Der Graph von g hat an der Stelle $x = -2$ einen Hochpunkt.		
Der Graph der Funktion g hat mindestens zwei Wendepunkte.		
Es gilt: $g(-1) < g(2)$		

b) In der Abbildung 1.2 ist der Graph der Funktion f mit den Nullstellen x_1 und x_2 dargestellt, wobei gilt: $x_1 < x_2$.

b1) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f ‘ von f in die Abbildung 1.3.

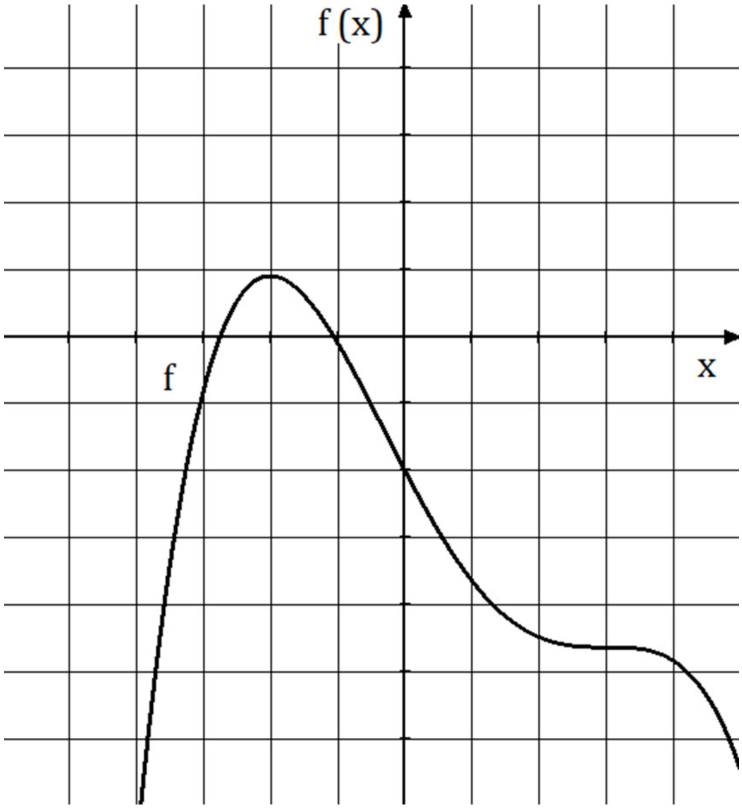

Abbildung 1.2

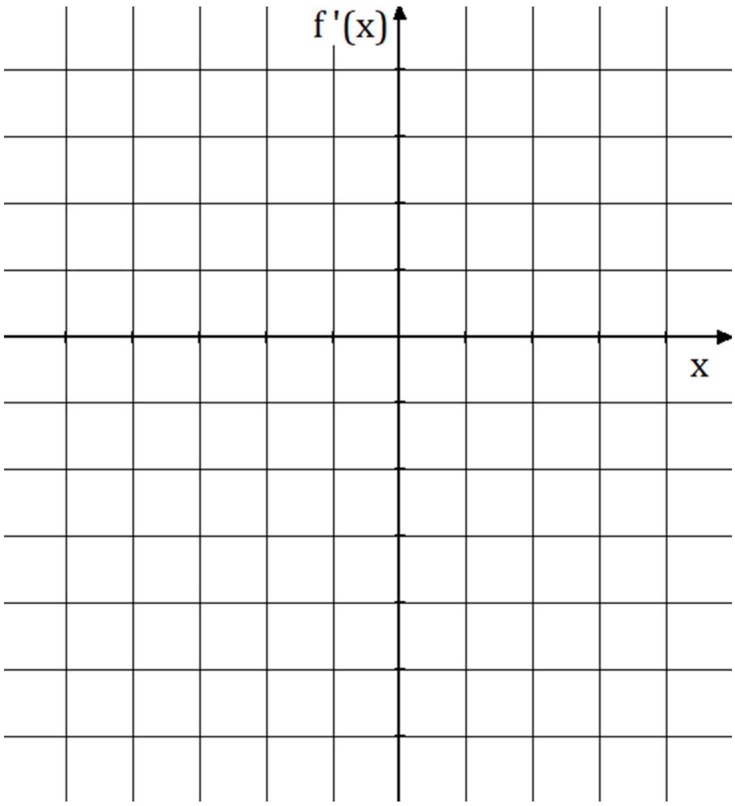

Abbildung 1.3

b2) Geben Sie einen Lösungsansatz an, mit dem die Maßzahl der Fläche, die vom Graphen von f und der Abszisse eingeschlossen wird, berechnet werden kann.

c) Gegeben ist die Funktionsgleichung von f_a durch $f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot x^3 + x$ mit $a \neq 0$.

c1) Bestimmen Sie den Wert des Parameters a so, dass die Funktion f_a bei $x = 3$ eine Extremstelle hat.

c2) Zeigen Sie, dass alle Funktionsgraphen der Funktion f_a punktsymmetrisch zum Ursprung sind.

d) Gegeben sind die Funktion h sowie ihre erste und zweite Ableitung:

$$h(x) = \frac{3}{2} \cdot \sin(x - \pi) - 1 \qquad h'(x) = -\frac{3}{2} \cdot \cos(x) \qquad h''(x) = \frac{3}{2} \cdot \sin(x).$$

d1) Skizzieren Sie den Graphen von h im Intervall $-\pi \leq x \leq 2\pi$ in die Abbildung 1.4.

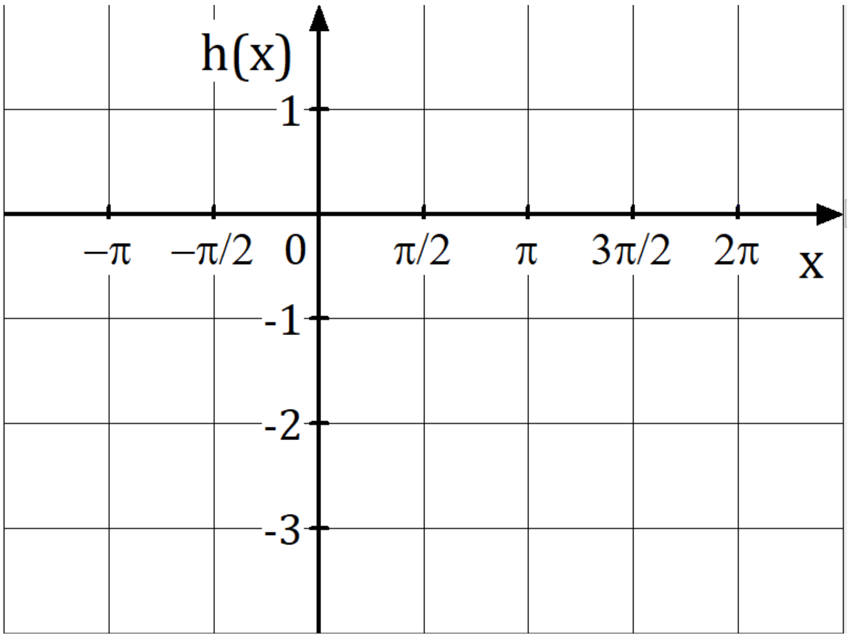

Abbildung 1.4

d2) Berechnen Sie die Wendepunkte der Funktion h im Intervall $-\pi \leq x \leq \pi$ und geben Sie die Steigung an der Stelle $x = 0$ an.

Hinweis: Bei der Berechnung der Wendepunkte kann auf den Nachweis der hinreichenden Bedingung verzichtet werden.

e) Gegeben sind zwei Geraden g_1 und g_2 mit

$$g_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } g_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

e1) Nennen Sie die möglichen Lagebeziehungen zweier Geraden im $\mathbb{R}^3$.

e2) Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden g_1 und g_2.

f) Gegeben sind ein Punkt $P(8 \mid -11 \mid 9)$ und eine Gerade g_3 mit

$$g_3\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

f1) Prüfen Sie, ob der Punkt P auf der Geraden g_3 liegt.

f2) Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem eine Ebenengleichung für die Ebene bestimmt werden kann, die durch einen Punkt und eine Gerade festgelegt wird.

g) Gegeben sind die Ebene E_c mit der Ebenengleichung

$$E_c\colon 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + c \cdot x_3 = 20$$

sowie die Darstellung eines zugehörigen Ebenenabschnitts mit den Achsenschnittpunkten S_1, S_2 und S_3 in der Abbildung 1.5.

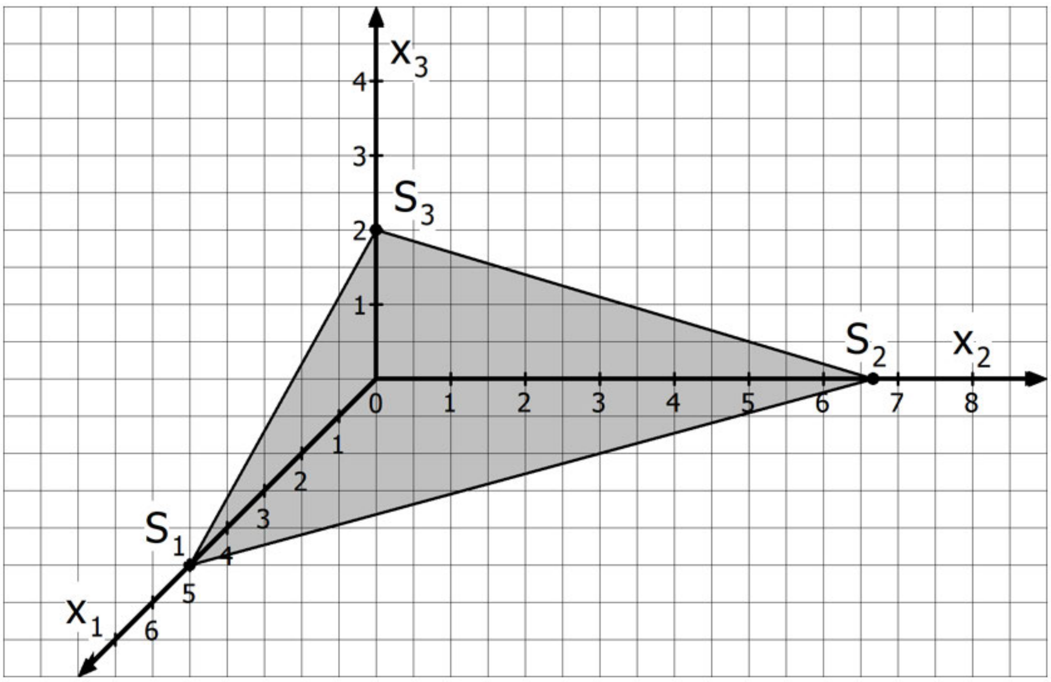

Abbildung 1.5

g1) Geben Sie den Parameter c für die in der Abbildung 1.5 dargestellte Ebene an.

g2) Zeigen Sie, dass es einen Wert für den Parameter c gibt, so dass der Punkt $R(3{,}2 \mid 2{,}4 \mid 4)$ der Spiegelpunkt des Ursprungs an der Ebene E_c ist und

geben Sie einen Term für den Abstand des Punktes R von dieser Ebene E_c an.

h) Gegeben ist ein Koordinatensystem mit den Punkten A(4 | − 2 | 3) und B(3 | 2 | − 1).

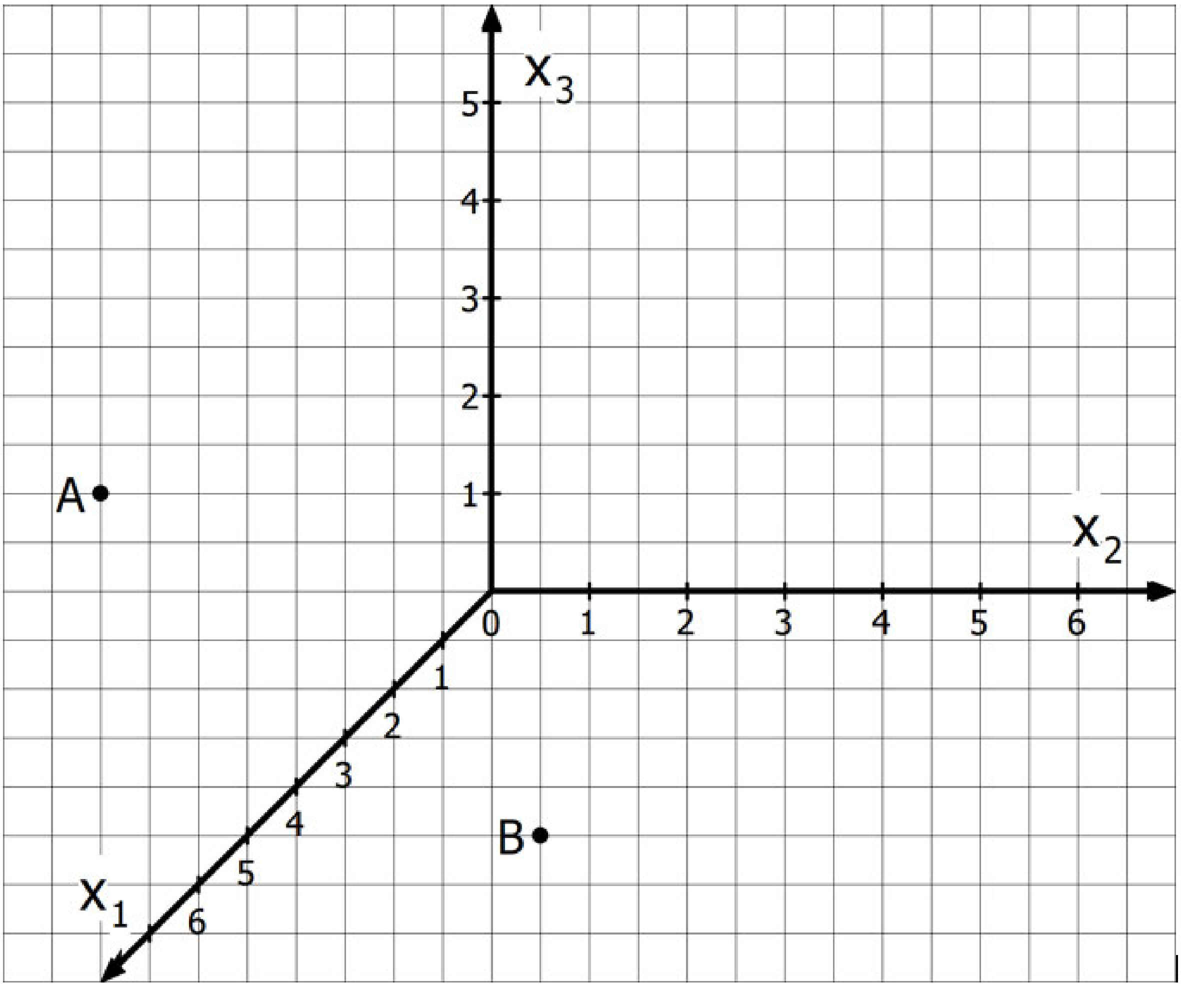

Abbildung 1.6

h1) Zeichnen Sie die beiden Punkte C(−2 | 1 | 3) und D(1 | − 3,5 | 1,5) in Abbildung 1.6 ein.

h2) Entscheiden Sie begründet, ob die Punkte A, B, C und D in einer Ebene liegen.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 2**: (Analytische Geometrie) **Neubaugebiet**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	6	4	6	5*	3	4	6*	6*	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Die Stadt Beutelsdorf hat für die stetig wachsende Einwohnerzahl den Bebauungsplan geändert und neue Flächen für die Wohnbebauung ausgewiesen.
Das neu geplante Baugebiet „Am Moor" hat einen viereckigen Grundriss und befindet sich in einer leichten Hanglage am Moor (vgl. Abbildung 2.1).

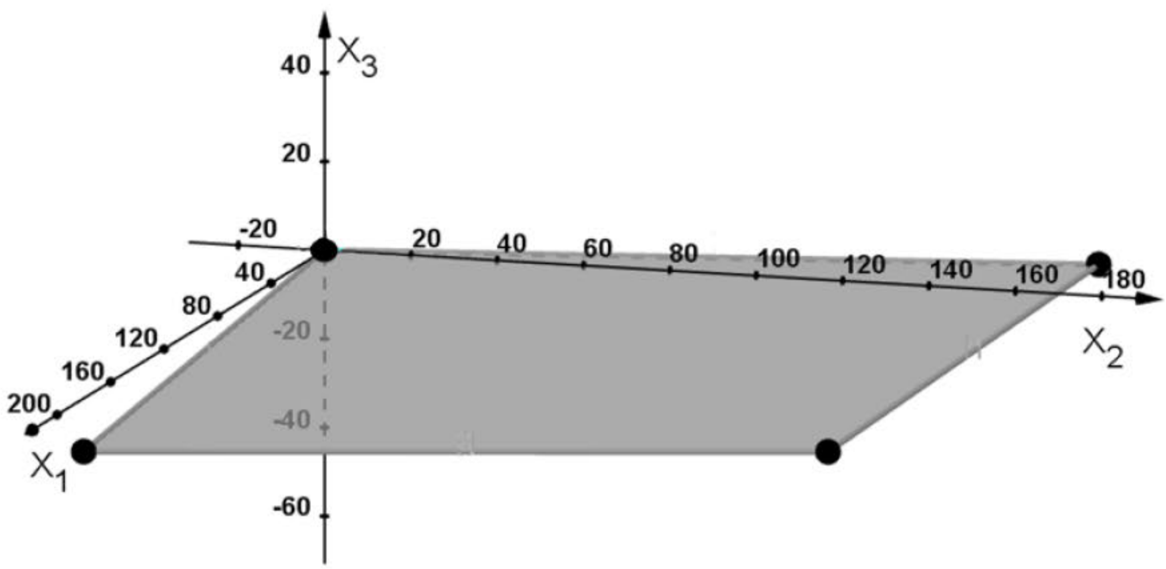

Abbildung 2.1

Die Koordinaten der Eckpunkte des Baugebietes lassen sich festlegen durch:

$A(0 \mid 0 \mid 0)$, $B(180 \mid 0 \mid -12)$, $C(140 \mid 160 \mid c_3)$, $D(-30 \mid 170 \mid 1)$.

Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.
Die folgende Ebenengleichung beschreibt die Ebene, in der das Baugebiet liegt:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -30 \\ 170 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ -170 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 210 \\ -170 \\ -13 \end{pmatrix}$$

a) Beschreiben Sie die Form dieser Ebenengleichung und

erläutern Sie, wie die Ebene E aus den gegebenen Punkten aufgestellt werden kann.

b) Berechnen Sie den genauen Wert für die Koordinate c_3 des Punktes C.

Für weitere Betrachtungen gilt im Folgenden: $c_3 = -10{,}3$.

Das Baugebiet soll durch eine Straße in zwei Teile geteilt werden. Die geplante Straße verläuft diagonal vom Punkt B zum Punkt D durch das Baugebiet und soll eine Steigung von maximal 5 % haben.

c) Weisen Sie nach, dass die Steigung der Straße geringer als 5 % ist und

ermitteln Sie den Neigungswinkel der Straße.

Der für die Erschließung des Baugebiets zuständige Stadtplaner benötigt für die Planung der Finanzierung die Flächengröße des Neubaugebiets. Dazu nutzt er den folgenden Ansatz:

$$\text{Flächeninhalt} = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|$$

d) Beurteilen Sie den Ansatz des Stadtplaners.

Mittig auf der Strecke $\overline{DB}$ soll ein Hauptabwasserschacht entstehen.

e) Zeigen Sie, dass der Hauptabwasserschacht im Punkt $K(75 \mid 85 \mid -5{,}5)$ entstehen soll.

Ein Abwasserkanal soll vom Hauptabwasserschacht im Punkt K auf kürzestem Wege zur Baugebietsgrenze $\overline{BC}$ verlaufen. Der Bauleiter stellt dazu die folgende Gleichung auf:

$$\begin{pmatrix} -40 \\ 160 \\ 1{,}7 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 75 \\ 85 \\ -5{,}5 \end{pmatrix}\right] = 0$$

f) Interpretieren Sie die Gleichung im Sachzusammenhang.

An der Baugebietsgrenze $\overline{AD}$ soll ein größerer Parkplatz entstehen, damit möglichst wenig Autoverkehr innerhalb des Wohngebiets stattfindet. Für diesen gepflasterten Parkplatz wird eine Entwässerung benötigt. Die Entwässerungsrohre verlaufen unterirdisch und werden zu einem Sammelschacht geführt, dessen unteres Ende die Koordinaten $S(-6 \mid 136 \mid -3)$ hat. Von dort wird das Wasser durch ein Abflussrohr zu einem Austrittspunkt in der Ebene E geführt, so dass das Wasser dann an der Oberfläche in das angrenzende Moorgebiet ablaufen kann. Das Abflussrohr ist geplant mit dem Richtungsvektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 47 & \frac{17}{3} & -\frac{23}{10} \end{pmatrix}^T.$$

g) Berechnen Sie den Austrittspunkt des Abflussrohres in der Ebene E.

Aus früheren Erduntersuchungen des Baugebiets ist bekannt, dass sich unter dem Baugebiet eine Wasserader befindet, die für die Bewässerung von Grünanlagen genutzt werden könnte. Der Stadtplaner beschließt die Nutzung dieser Quelle und gibt seinem Bauleiter den Auftrag, die Wasserquelle im Punkt $Q(50 \mid 20 \mid -30)$ zu erschließen. Der Bauleiter plant für die Erschließung senkrecht von oben in $W(50 \mid 20 \mid w_3)$ zur Quelle in Q zu bohren. Doch der Stadtplaner gibt zu bedenken, dass Geld beim Brunnenbau gespart werden könnte, wenn die leichte Hanglage des Baugebiets berücksichtigt und der Punkt der Hangebene mit der kürzesten Entfernung zum Punkt Q berechnet würde. Ein leichter Schrägverlauf zur Wasserförderung wäre unproblematisch. Eine Anfrage bei einem Brunnenbauer hat ergeben, dass Bohrungen in dieser Tiefe 130 € pro Meter kosten.

h) Untersuchen Sie, ob der Vorschlag des Stadtplaners zu einer nennenswerten Ersparnis führen würde.

Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1:** (hilfsmittelfreier Teil mit analytischer Geometrie)

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	5	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

a) Die Abbildung 1.1 zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion g' einer ganzrationalen Funktion g mit allen Nullstellen.

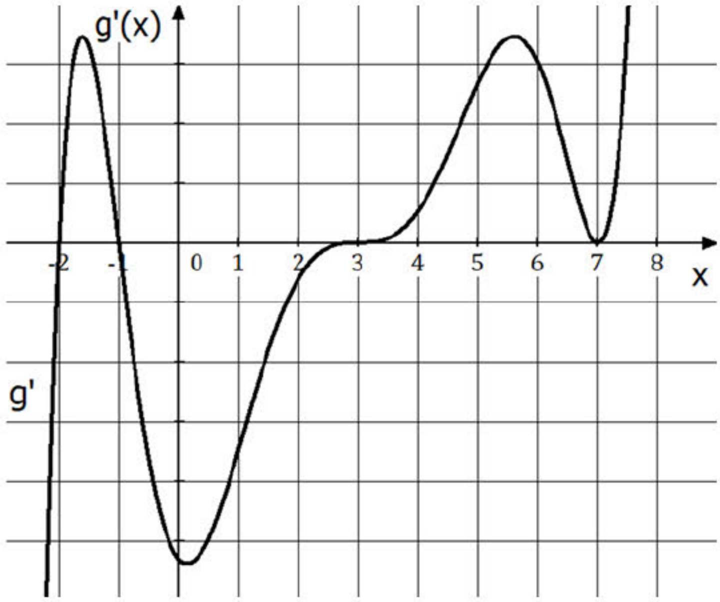

Abbildung 1.1

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).

	wahr	falsch
Die Ableitungsfunktion g' kann dargestellt werden mit $g'(x) = a \cdot (x-3)^3 \cdot (x+2) \cdot (x-7)^2 \cdot (x+1)$.		
Der höchste Exponent des Funktionsterms von $g(x)$ ist ungerade.		
Der Graph von g hat an der Stelle $x = -2$ einen Hochpunkt.		
Der Graph der Funktion g hat mindestens zwei Wendepunkte.		
Es gilt: $g(-1) < g(2)$		

b) In der Abbildung 1.2 ist der Graph der Funktion f mit den Nullstellen x_1 und x_2 dargestellt, wobei gilt: $x_1 < x_2$.

b1) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f ‘ von f in die Abbildung 1.3.

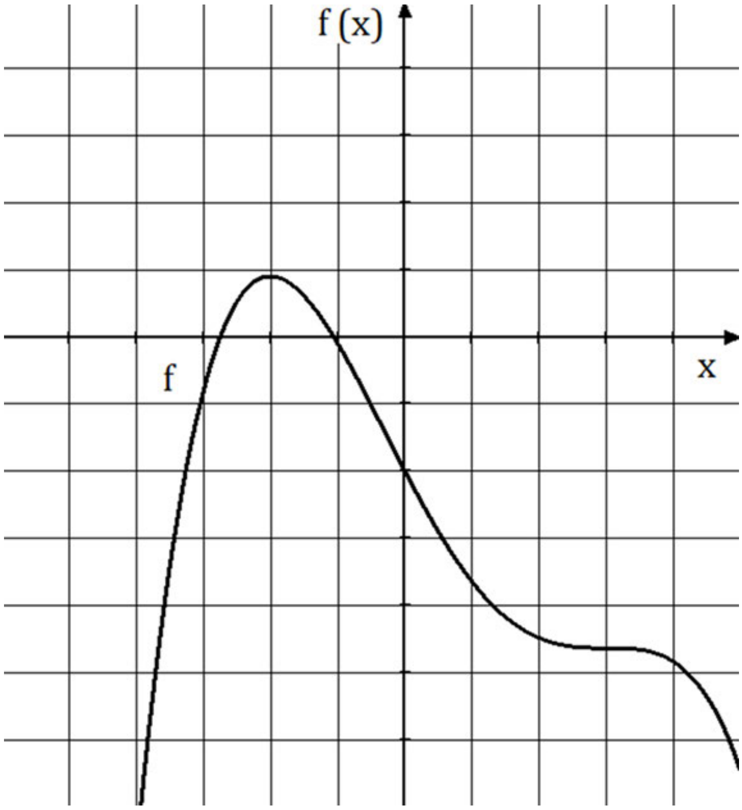

Abbildung 1.2

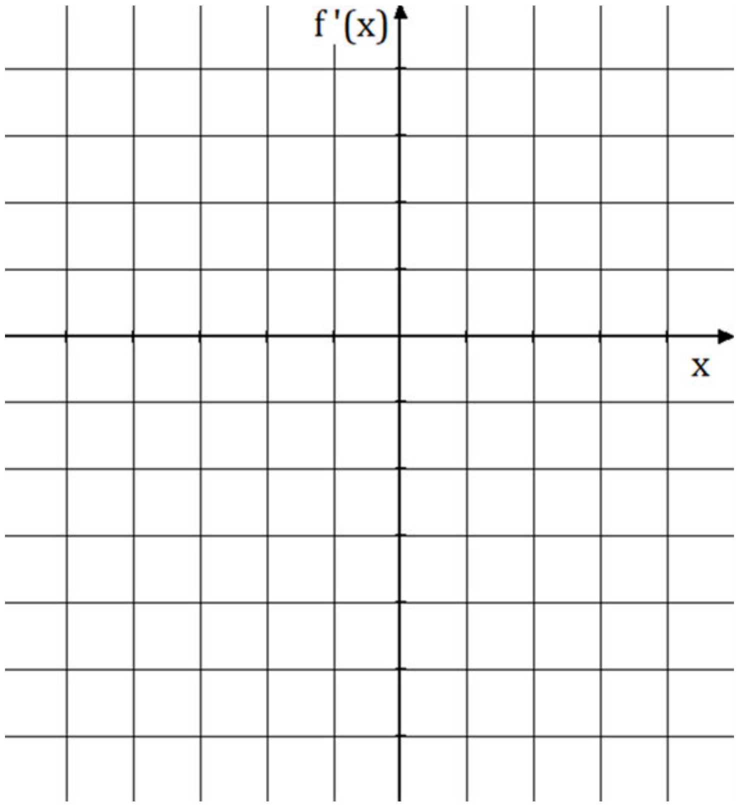

Abbildung 1.3

b2) Geben Sie einen Lösungsansatz an, mit dem die Maßzahl der Fläche, die vom Graphen von f und der Abszisse eingeschlossen wird, berechnet werden kann.

c) Gegeben ist die Funktionsgleichung von f_a durch $f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot x^3 + x$ mit $a \neq 0$.

c1) Bestimmen Sie den Wert des Parameters a so, dass die Funktion f_a bei $x = 3$ eine Extremstelle hat.

c2) Zeigen Sie, dass alle Funktionsgraphen der Funktion f_a punktsymmetrisch zum Ursprung sind.

d) Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = e^x \cdot (x^2 - 2x)$.

d1) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion h.

d2) Zeigen Sie, dass $h'(x) = e^x \cdot (x^2 - 2)$ die erste Ableitungsfunktion von h ist und geben Sie die Steigung an der Stelle $x = 0$ an.

e) Gegeben sind zwei Geraden g_1 und g_2 mit

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

e1) Nennen Sie die möglichen Lagebeziehungen zweier Geraden im $\mathbb{R}^3$.

e2) Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden g_1 und g_2.

f) Gegeben sind ein Punkt $P(8 \mid -11 \mid 9)$ und eine Gerade g_3 mit

$$g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

f1) Prüfen Sie, ob der Punkt P auf der Geraden g_3 liegt.

f2) Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem eine Ebenengleichung für die Ebene bestimmt werden kann, die durch einen Punkt und eine Gerade festgelegt wird.

g) Gegeben sind die Ebene E_c mit der Ebenengleichung

$$E_c: 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + c \cdot x_3 = 20$$

sowie die Darstellung eines zugehörigen Ebenenabschnitts mit den Achsenschnittpunkten S_1, S_2 und S_3 in der Abbildung 1.4.

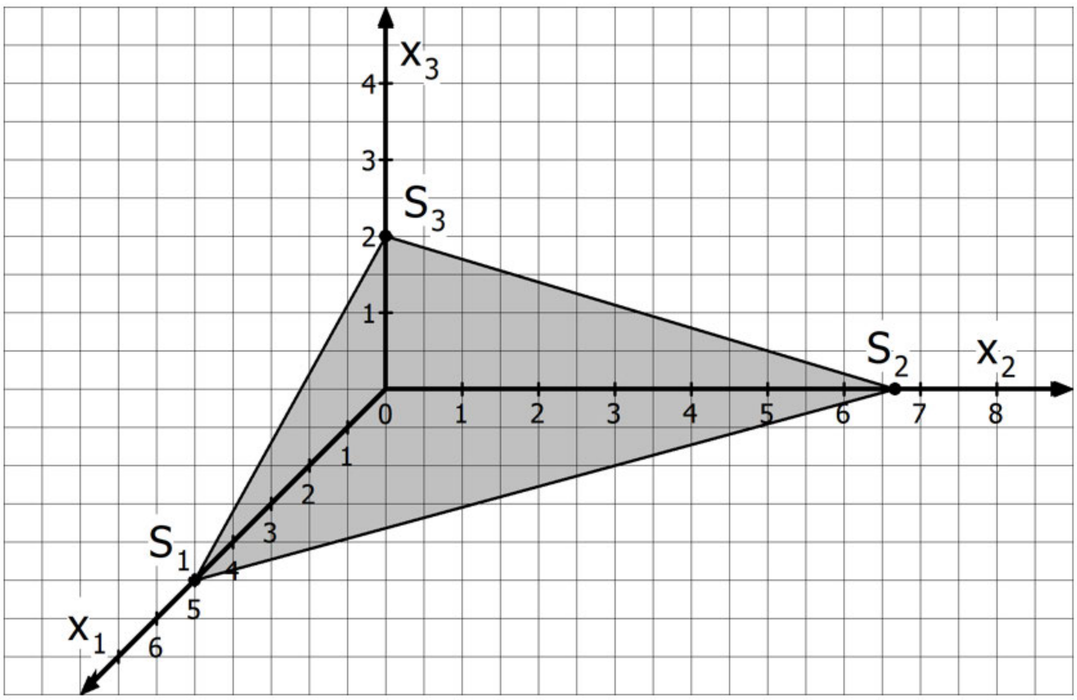

Abbildung 1.4

g1) Geben Sie den Parameter c für die in der Abbildung 1.4 dargestellte Ebene an.

g2) Zeigen Sie, dass es einen Wert für den Parameter c gibt, so dass der Punkt $R(3{,}2 \mid 2{,}4 \mid 4)$ der Spiegelpunkt des Ursprungs an der Ebene E_c ist und

geben Sie einen Term für den Abstand des Punktes R von dieser Ebene E_c an.

h) Gegeben ist ein Koordinatensystem mit den Punkten A(4 | − 2 | 3) und B(3 | 2 | − 1).

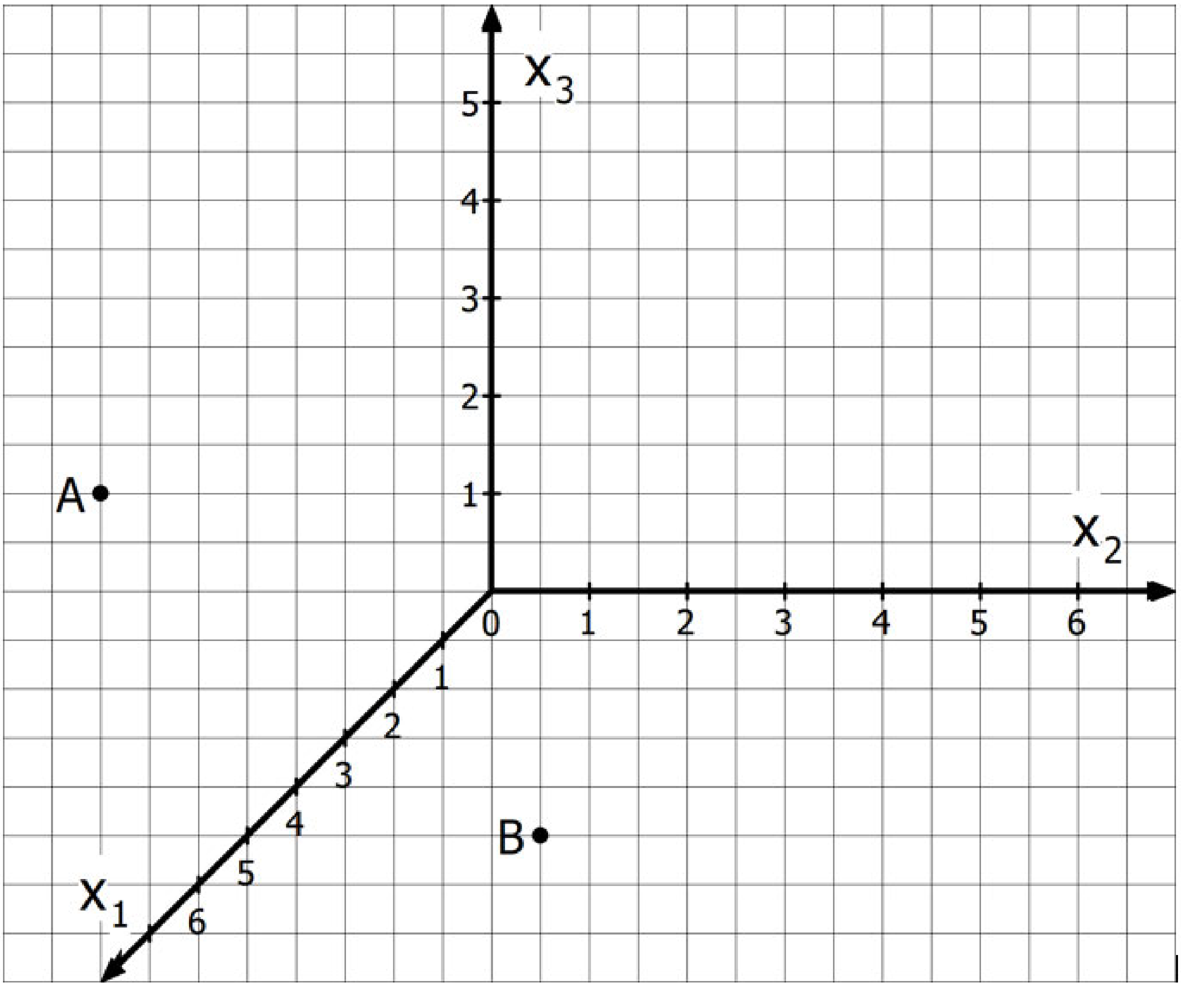

Abbildung 1.5

h1) Zeichnen Sie die beiden Punkte C(−2 | 1 | 3) und D(1 | − 3,5 | 1,5) in Abbildung 1.5 ein.

h2) Entscheiden Sie begründet, ob die Punkte A, B, C und D in einer Ebene liegen.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 2** : (Analytische Geometrie) **Neubaugebiet**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	6	4	6	5*	3	4	6*	6*	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Die Stadt Beutelsdorf hat für die stetig wachsende Einwohnerzahl den Bebauungsplan geändert und neue Flächen für die Wohnbebauung ausgewiesen.
Das neu geplante Baugebiet „Am Moor" hat einen viereckigen Grundriss und befindet sich in einer leichten Hanglage am Moor (vgl. Abbildung 2.1).

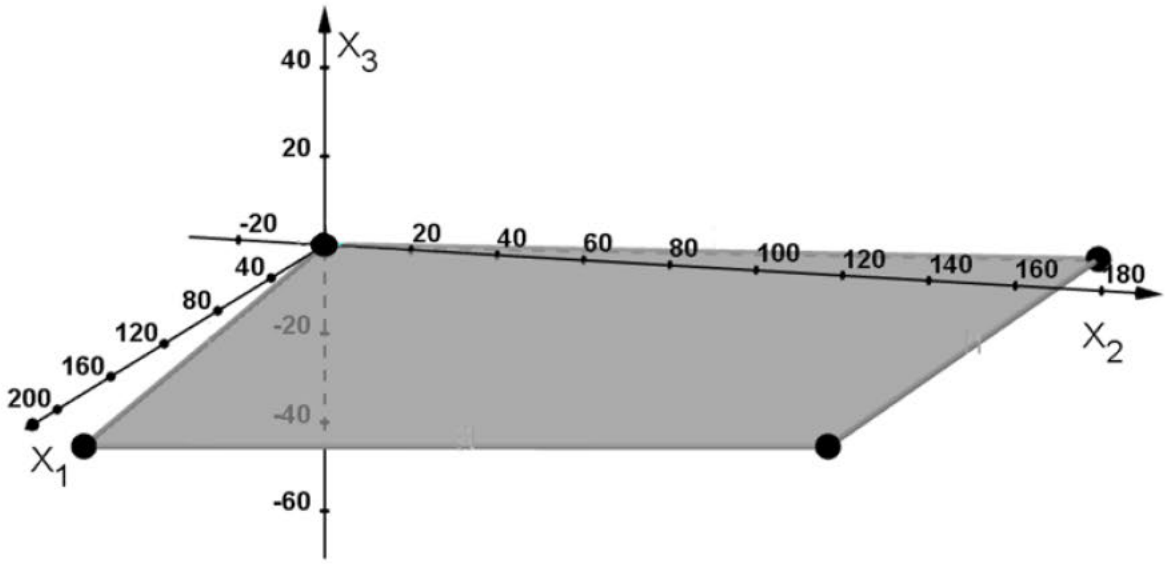

Abbildung 2.1

Die Koordinaten der Eckpunkte des Baugebietes lassen sich festlegen durch:

$A(0 \mid 0 \mid 0)$, $B(180 \mid 0 \mid -12)$, $C(140 \mid 160 \mid c_3)$, $D(-30 \mid 170 \mid 1)$.

Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.
Die folgende Ebenengleichung beschreibt die Ebene, in der das Baugebiet liegt:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -30 \\ 170 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ -170 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 210 \\ -170 \\ -13 \end{pmatrix}$$

a) Beschreiben Sie die Form dieser Ebenengleichung und erläutern Sie, wie die Ebene E aus den gegebenen Punkten aufgestellt werden kann.

b) Berechnen Sie den genauen Wert für die Koordinate c_3 des Punktes C.

Für weitere Betrachtungen gilt im Folgenden: $c_3 = -10{,}3$.

Das Baugebiet soll durch eine Straße in zwei Teile geteilt werden. Die geplante Straße verläuft diagonal vom Punkt B zum Punkt D durch das Baugebiet und soll eine Steigung von maximal 5 % haben.

c) Weisen Sie nach, dass die Steigung der Straße geringer als 5 % ist und

ermitteln Sie den Neigungswinkel der Straße.

Der für die Erschließung des Baugebiets zuständige Stadtplaner benötigt für die Planung der Finanzierung die Flächengröße des Neubaugebiets. Dazu nutzt er den folgenden Ansatz:

$$\text{Flächeninhalt} = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|$$

d) Beurteilen Sie den Ansatz des Stadtplaners.

Mittig auf der Strecke $\overline{DB}$ soll ein Hauptabwasserschacht entstehen.

e) Zeigen Sie, dass der Hauptabwasserschacht im Punkt $K(75 \mid 85 \mid -5{,}5)$ entstehen soll.

Ein Abwasserkanal soll vom Hauptabwasserschacht im Punkt K auf kürzestem Wege zur Baugebietsgrenze $\overline{BC}$ verlaufen. Der Bauleiter stellt dazu die folgende Gleichung auf:

$$\begin{pmatrix} -40 \\ 160 \\ 1{,}7 \end{pmatrix} \cdot \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 75 \\ 85 \\ -5{,}5 \end{pmatrix}\right] = 0$$

f) Interpretieren Sie die Gleichung im Sachzusammenhang.

An der Baugebietsgrenze $\overline{AD}$ soll ein größerer Parkplatz entstehen, damit möglichst wenig Autoverkehr innerhalb des Wohngebiets stattfindet. Für diesen gepflasterten Parkplatz wird eine Entwässerung benötigt. Die Entwässerungsrohre verlaufen unterirdisch und werden zu einem Sammelschacht geführt, dessen unteres Ende die Koordinaten $S(-6 \mid 136 \mid -3)$ hat. Von dort wird das Wasser durch ein Abflussrohr zu einem Austrittspunkt in der Ebene E geführt, so dass das Wasser dann an der Oberfläche in das angrenzende Moorgebiet ablaufen kann. Das Abflussrohr ist geplant mit dem Richtungsvektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 47 & \frac{17}{3} & -\frac{23}{10} \end{pmatrix}^T.$$

g) Berechnen Sie den Austrittspunkt des Abflussrohres in der Ebene E.

Aus früheren Erduntersuchungen des Baugebiets ist bekannt, dass sich unter dem Baugebiet eine Wasserader befindet, die für die Bewässerung von Grünanlagen genutzt werden könnte. Der Stadtplaner beschließt die Nutzung dieser Quelle und gibt seinem Bauleiter den Auftrag, die Wasserquelle im Punkt $Q(50 \mid 20 \mid -30)$ zu erschließen. Der Bauleiter plant für die Erschließung senkrecht von oben in $W(50 \mid 20 \mid w_3)$ zur Quelle in Q zu bohren. Doch der Stadtplaner gibt zu bedenken, dass Geld beim Brunnenbau gespart werden könnte, wenn die leichte Hanglage des Baugebiets berücksichtigt und der Punkt der Hangebene mit der kürzesten Entfernung zum Punkt Q berechnet würde. Ein leichter Schrägverlauf zur Wasserförderung wäre unproblematisch. Eine Anfrage bei einem Brunnenbauer hat ergeben, dass Bohrungen in dieser Tiefe 130 € pro Meter kosten.

h) Untersuchen Sie, ob der Vorschlag des Stadtplaners zu einer nennenswerten Ersparnis führen würde.

Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1:** (hilfsmittelfreier Teil mit linearer Algebra)

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	5	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

a) Die Abbildung 1.1 zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion g' einer ganzrationalen Funktion g mit allen Nullstellen.

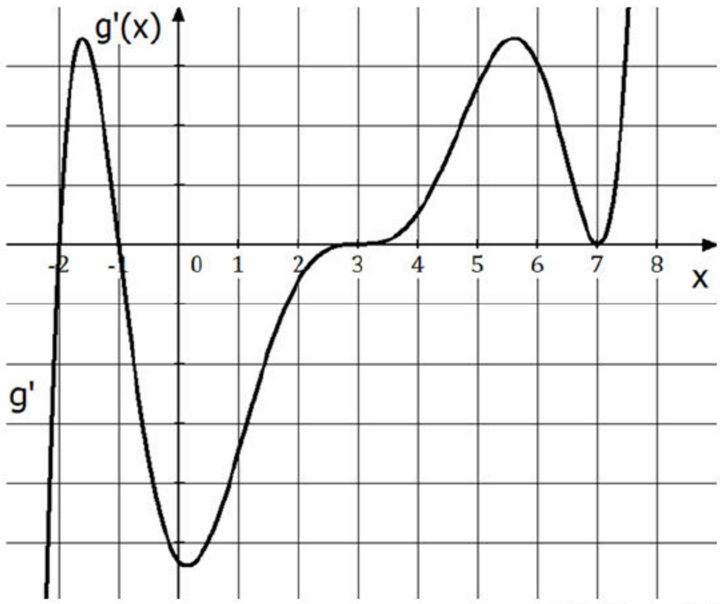

Abbildung 1.1

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).

	wahr	falsch
Die Ableitungsfunktion g' kann dargestellt werden mit $g'(x) = a \cdot (x-3)^3 \cdot (x+2) \cdot (x-7)^2 \cdot (x+1)$.		
Der höchste Exponent des Funktionsterms von $g(x)$ ist ungerade.		
Der Graph von g hat an der Stelle $x = -2$ einen Hochpunkt.		
Der Graph der Funktion g hat mindestens zwei Wendepunkte.		
Es gilt: $g(-1) < g(2)$		

b) In der Abbildung 1.2 ist der Graph der Funktion f mit den Nullstellen x_1 und x_2 dargestellt, wobei gilt: $x_1 < x_2$.

b1) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f ‘ von f in die Abbildung 1.3.

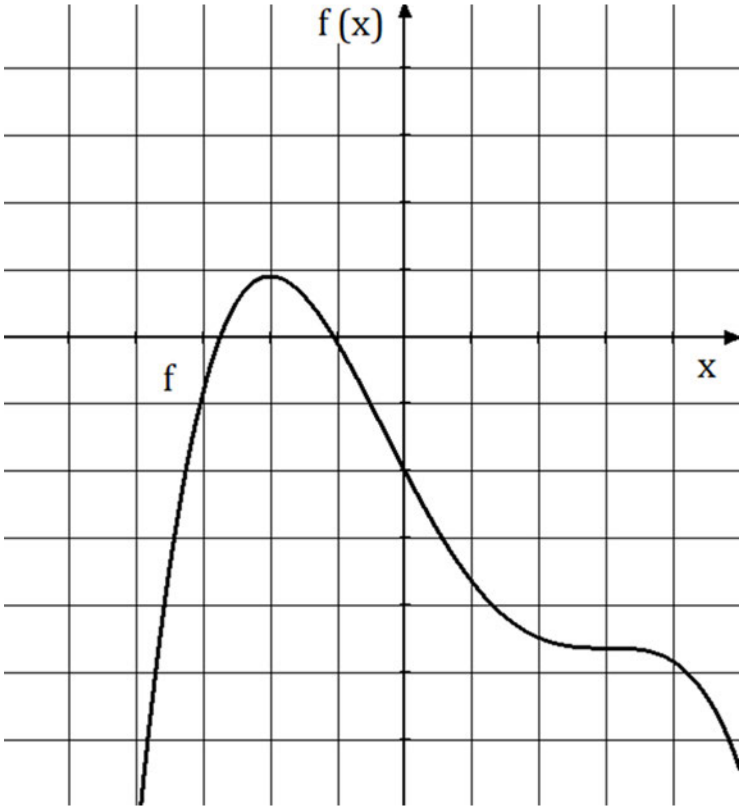

Abbildung 1.2

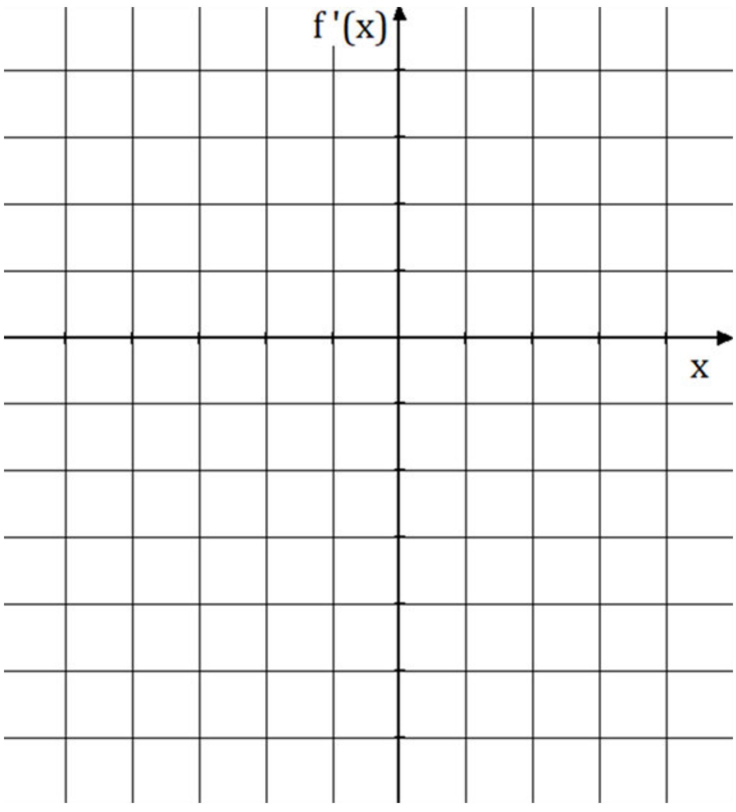

Abbildung 1.3

b2) Geben Sie einen Lösungsansatz an, mit dem die Maßzahl der Fläche, die vom Graphen von f und der Abszisse eingeschlossen wird, berechnet werden kann.

c) Gegeben ist die Funktionsgleichung von f_a durch $f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot x^3 + x$ mit $a \neq 0$.

c1) Bestimmen Sie den Wert des Parameters a so, dass die Funktion f_a bei $x = 3$ eine Extremstelle hat.

c2) Zeigen Sie, dass alle Funktionsgraphen der Funktion f_a punktsymmetrisch zum Ursprung sind.

d) Gegeben sind die Funktion h sowie ihre erste und zweite Ableitung:

$$h(x) = \frac{3}{2} \cdot \sin(x - \pi) - 1 \qquad h'(x) = -\frac{3}{2} \cdot \cos(x) \qquad h''(x) = \frac{3}{2} \cdot \sin(x).$$

d1) Skizzieren Sie den Graphen von h im Intervall $-\pi \leq x \leq 2\pi$ in die Abbildung 1.4.

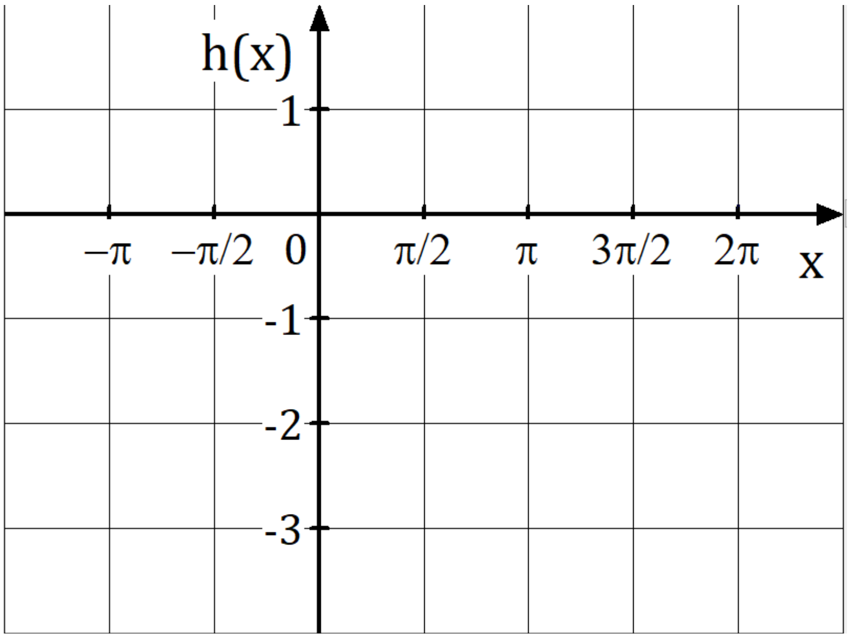

Abbildung 1.4

d2) Berechnen Sie die Wendepunkte der Funktion h im Intervall $-\pi \leq x \leq \pi$ und geben Sie die Steigung an der Stelle $x = 0$ an.

Hinweis: Bei der Berechnung der Wendepunkte kann auf den Nachweis der hinreichenden Bedingung verzichtet werden.

e) Gegeben sind zwei Matrizen A und B für die gilt: $A \cdot B = B \cdot A$

e1) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

<u>Hinweis:</u> Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Wenn $A \cdot B = B \cdot A$ gilt, so sind A und B vom gleichen Typ.		
Es gilt $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \Leftrightarrow A \cdot B = B \cdot A$		

Die Matrix A sei gegeben mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

e2) Ermitteln Sie alle Matrizen B, die die Bedingung $A \cdot B = B \cdot A$ erfüllen.

f) Gegeben ist die erweiterte Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & k^2 - 16 & 8 + 2 \cdot k \end{array}\right) \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie den Wert des Parameters k jeweils so, dass es

- keine Lösung,
- genau eine Lösung,
- unendlich viele Lösungen für das Gleichungssystem gibt und

bestimmen Sie die Lösungsmenge für den Fall, dass es unendliche viele Lösungen gibt.

g) g1) Geben Sie an, unter welchen Bedingungen zwei Matrizen invers zueinander sind.

g2) Zeigen Sie, dass die gegebene Aussage wahr ist:

„Eine Matrix vom Typ 2×2 mit ausschließlich positiven Matrizenelementen kann keine Inverse besitzen, die ebenfalls nur positive Matrizenelemente enthält.“

h) Für eine unbekannte Matrix X sind zwei Matrizengleichungen gegeben:

$$(1.) \qquad X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$(2.) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X^T = \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \end{pmatrix}$$

h1) Erläutern Sie, von welchem Typ die Matrix X ist.

h2) Berechnen Sie die Matrix X.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 2** (Lineare Algebra): **Kakao**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	6	3	4	5*	7*	4	5	6*	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Die javanische Kakaomotte ist ein Insekt, das seine Eier auf den Früchten des Kakaobaumes ablegt. Dieser Schädling ist auf vielen Kakaoplantagen zu finden. Jede Motte legt im Durchschnitt 200 Eier pro Monat. Innerhalb des nächsten Monats entwickeln sich knapp 10 % der Eier zu Larven, welche sich in die Kakaofrucht bohren, um sich dort vom Fruchtfleisch zu ernähren. Im folgenden Monat verpuppen sich $\frac{1}{5}$ der Larven und nach einem weiteren Monat entwickeln sich in etwa die Hälfte der Puppen zu Motten. Durch den Befall der javanischen Kakaomotte vertrocknen die Kakaofrüchte und die darin enthaltenen Kakaobohnen. Dies führt neben dem Ernteausfall auch dazu, dass nicht genügend Saat für die Nachzucht der Kakaobäume vorhanden ist.

Die Populationsmatrix der Kakaomotte ist in der Matrix M dargestellt:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen zur Matrix M und

begründen Sie, dass die Matrix M den Sachzusammenhang des Textes korrekt widerspiegelt.

Eine Forschungseinrichtung in Ghana hat bei einer Erstbeobachtung im Januar 1 000 Eier, 500 Larven, 200 Puppen und 150 Kakaomotten gezählt und daraus den Vektor

$$\vec{v}_0 = (1\,000 \quad 500 \quad 200 \quad 150)^T \text{ erstellt.}$$

b) Berechnen Sie die Verteilungen der beiden Folgemonate Februar und März.

Zur Bekämpfung der Kakaomotte stehen zwei bewährte Schädlingsbekämpfungsmittel (SBM) zur Verfügung. Die Forschungseinrichtung untersucht neben der Umweltbelastung auch die Wirksamkeit dieser Mittel. Für das erste Schädlingsbekämpfungsmittel SBM I ist folgende Gleichung der Populationsmatrix $M_{SBM\,I}$ bekannt:

$$M_{SBM\,I}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Geben Sie den Einfluss des Mittels SBM I im Vergleich zur Populationsentwicklung der Matrix M in einer Periode bzw. einem Monat an und

beschreiben Sie die langfristige Auswirkung auf die Kakaomottenpopulation.

Vom zweiten Mittel SBM II ist bekannt, dass nur die Entwicklung der Eier zu Larven gehemmt wird, die anderen Entwicklungsraten der Matrix M bleiben unverändert. Das Ausmaß, inwieweit sich die Entwicklungsrate Ei zur Larve verändert, ist jedoch nicht bekannt. Die Forscher haben das Mittel auf einer abgegrenzten Fläche eingesetzt und vor dem Einsatz des Mittels SBM II die Startverteilung $\vec{p}_0$ ermittelt:

$$\vec{p}_0 = (2\,000 \quad 1\,000 \quad 400 \quad 300)^T$$

Einen Monat nach dem Einsatz des Mittels SBM II wurde die Verteilung $\overrightarrow{p_{SBM\,II_1}}$ festgestellt:

$$\overrightarrow{p_{SBM\,II_1}} = (60\,000 \quad 90 \quad 200 \quad 200)^T$$

d) Ermitteln Sie, wie viel Prozent der Eier sich bei Einsatz des Mittels SBM II zu Larven entwickeln und

beurteilen Sie, ob das Mittel SBM I oder das Mittel SBM II langfristig wirksamer ist.

Die Forscher haben ein neues umweltschonendes Mittel entwickelt. Dieses neue Mittel hemmt sowohl die Entwicklung vom Ei zur Larve als auch von der Larve zur Puppe. Es wurde dazu die Populationsmatrix M_{neu} aufgestellt und Populationszahlen aus vier aufeinander folgenden Perioden festgestellt (Tabelle 2.1):

$$M_{neu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 200 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } a, b \in [0; 1]$$

Periode / Anzahl	Startperiode	1	2	3
Eier	800	30 000	3 000	3 000
Larven		40		150
Puppen	30			225
Kakaomotten	150	15	15	3

Tabelle 2.1

e) Begründen Sie die Definitionsmenge für die Werte der Parameter a und b in der Matrix M_{neu} und

bestimmen Sie die Werte für die Parameter a und b sowie die fehlenden Werte der Tabelle 2.1.

Aus der Kakaobohne werden Kakaobutter und Kakaomasse hergestellt, die als Rohstoffe bei der Schokoladenherstellung verwendet werden. In der Norderstedter Schokoladenmanufaktur „NordSchok“ werden Kakaomasse (R1), Zucker (R2), Kakaobutter (R3) und Milchpulver (R4) als Zutaten für hochwertige Schokolade in den Sorten Zartbitter (Z1), weiße Schokolade (Z2) und Vollmilchschokolade (Z3) verwendet. Diese werden in einem letzten Produktionsschritt zu Pralinen für die Packungen Sprotte (E1), Möwe (E2) und Anker (E3) verarbeitet.

Gegeben sind die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A und die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C, beide enthalten Grammangaben, sowie die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B, die den Anteil von 100 g eines Zwischenproduktes angibt, der in ein Endprodukt eingeht.

$$A = \begin{array}{c} \\ R1 \\ R2 \\ R3 \\ R4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Z1 & Z2 & Z3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 50 & 0 & 12 \\ 46 & 48 & 46 \\ 4 & 26 & 18 \\ 0 & 26 & 24 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ Z1 \\ Z2 \\ Z3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E1 & E2 & E3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}8 & 0{,}9 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad C = \begin{array}{c} \\ R1 \\ R2 \\ R3 \\ R4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E1 & E2 & E3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 18{,}6 & 27{,}4 & 17 \\ 46{,}8 & 70{,}6 & 93{,}8 \\ 17 & 26{,}4 & 41{,}8 \\ 17{,}6 & 25{,}6 & 47{,}4 \end{pmatrix} \end{array}$$

f) Geben Sie an, wie viel Gramm Zucker sich
- in einer Mengeneinheit Zartbitter befindet,
- im Endprodukt Möwe befindet und

berechnen Sie den prozentualen Anteil des Rohstoffs Zucker am Endprodukt Möwe.

Kurz vor Produktionsende sind noch 1 250 g Zartbitter, 3 400 g weiße Schokolade und 2 700 g Vollmilchschokolade vorhanden. Die Zwischenprodukte sollen am Ende des Produktionstages möglichst aufgebraucht werden. Der Betriebsleiter hat festgestellt, dass unter der Voraussetzung, die Pralinenpackungen vollständig zu befüllen, ein vollständiger Verbrauch bei diesen Mengen nicht möglich ist. Daher schlägt er vor, nur Zartbitter und weiße Schokolade vollständig zu verbrauchen und den Rest der Vollmilchschokolade den Angestellten zum Verzehr zu überlassen. Der Betriebsleiter hat zur Lösung des Problems folgendes notiert:

(a) $$100 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}8 & 0{,}9 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1\,250 \\ 3\,400 \\ 2\,700 \end{pmatrix}$$

(b) $$\begin{array}{ll} \text{I} & 30 \cdot x_1 + 50 \cdot x_2 + 10 \cdot x_3 = 1\,250 \\ \text{II} & 40 \cdot x_1 + 80 \cdot x_2 + 90 \cdot x_3 = 3\,400 \\ \text{III} & 30 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 + 100 \cdot x_3 \leq 2\,700 \end{array}$$

g) Erläutern Sie die Notizen des Betriebsleiters im Sachzusammenhang.

h) Ermitteln Sie, wie viele Packungen der Pralinensorten Sprotte (E1), Möwe (E2) und Anker (E3) sich maximal mit dem Vorschlag des Betriebsleiters befüllen lassen.

Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1:** (hilfsmittelfreier Teil mit linearer Algebra)

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	5	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

a) Die Abbildung 1.1 zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion g' einer ganzrationalen Funktion g mit allen Nullstellen.

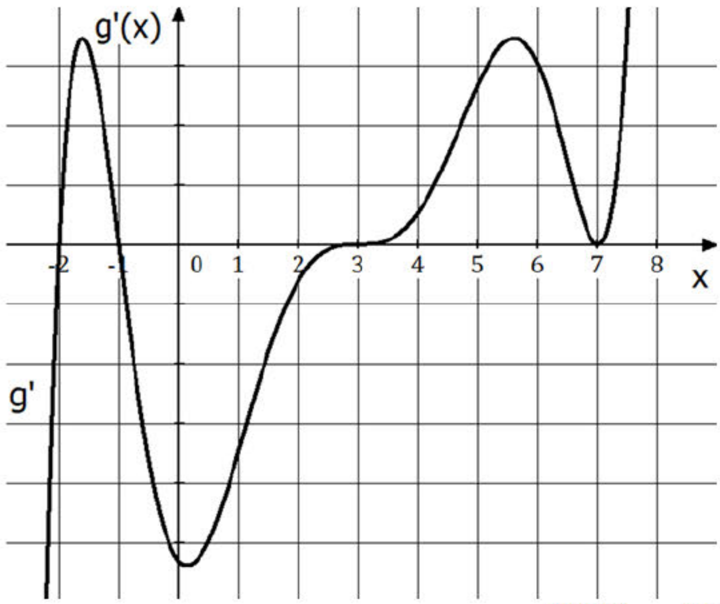

Abbildung 1.1

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

<u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).

	wahr	falsch
Die Ableitungsfunktion g' kann dargestellt werden mit $g'(x) = a \cdot (x-3)^3 \cdot (x+2) \cdot (x-7)^2 \cdot (x+1)$.		
Der höchste Exponent des Funktionsterms von $g(x)$ ist ungerade.		
Der Graph von g hat an der Stelle $x = -2$ einen Hochpunkt.		
Der Graph der Funktion g hat mindestens zwei Wendepunkte.		
Es gilt: $g(-1) < g(2)$		

b) In der Abbildung 1.2 ist der Graph der Funktion f mit den Nullstellen x_1 und x_2 dargestellt, wobei gilt: $x_1 < x_2$.

b1) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f ‘ von f in die Abbildung 1.3.

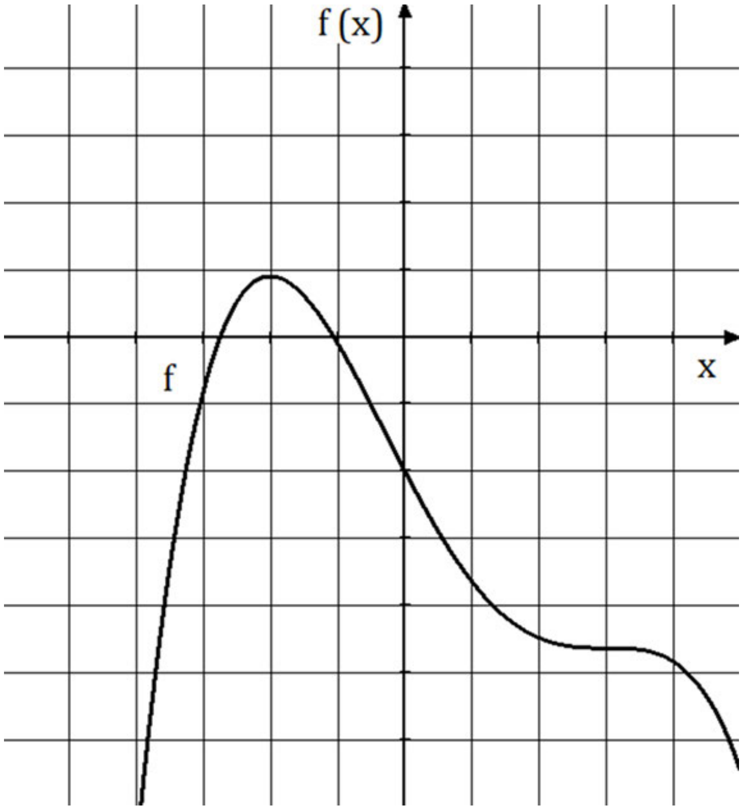

Abbildung 1.2

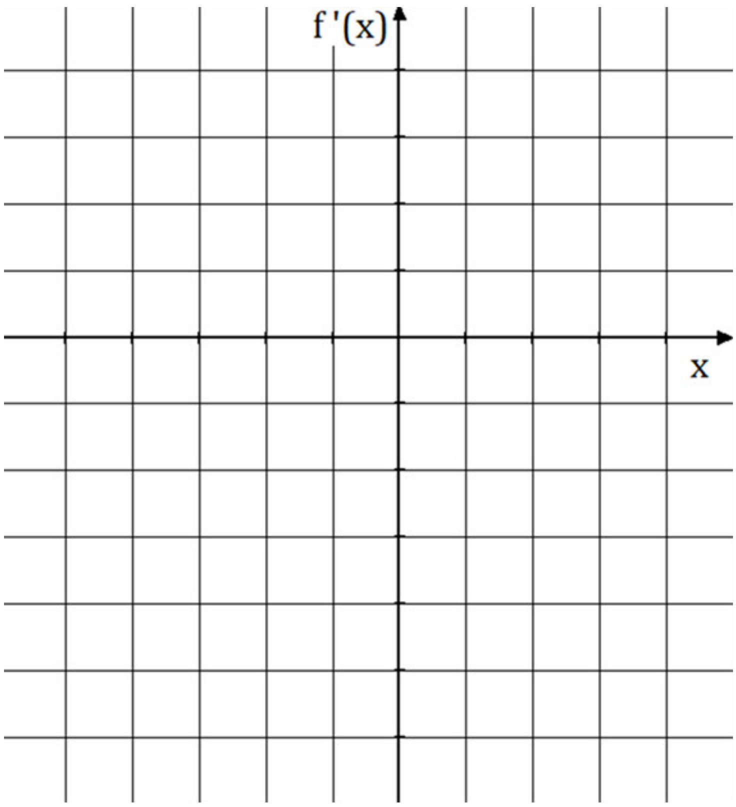

Abbildung 1.3

b2) Geben Sie einen Lösungsansatz an, mit dem die Maßzahl der Fläche, die vom Graphen von f und der Abszisse eingeschlossen wird, berechnet werden kann.

c) Gegeben ist die Funktionsgleichung von f_a durch $f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot x^3 + x$ mit $a \neq 0$.

c1) Bestimmen Sie den Wert des Parameters a so, dass die Funktion f_a bei $x = 3$ eine Extremstelle hat.

c2) Zeigen Sie, dass alle Funktionsgraphen der Funktion f_a punktsymmetrisch zum Ursprung sind.

d) Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = e^x \cdot (x^2 - 2x)$.

d1) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion h.

d2) Zeigen Sie, dass $h'(x) = e^x \cdot (x^2 - 2)$ die erste Ableitungsfunktion von h ist und geben Sie die Steigung an der Stelle $x = 0$ an.

e) Gegeben sind zwei Matrizen A und B für die gilt: $A \cdot B = B \cdot A$

e1) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Wenn $A \cdot B = B \cdot A$ gilt, so sind A und B vom gleichen Typ.		
Es gilt $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \Leftrightarrow A \cdot B = B \cdot A$		

Die Matrix A sei gegeben mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

e2) Ermitteln Sie alle Matrizen B, die die Bedingung $A \cdot B = B \cdot A$ erfüllen.

f) Gegeben ist die erweiterte Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & k^2 - 16 & 8 + 2 \cdot k \end{array}\right) \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie den Wert des Parameters k jeweils so, dass es

- keine Lösung,
- genau eine Lösung,
- unendlich viele Lösungen für das Gleichungssystem gibt und

bestimmen Sie die Lösungsmenge für den Fall, dass es unendliche viele Lösungen gibt.

g) g1) Geben Sie an, unter welchen Bedingungen zwei Matrizen invers zueinander sind.

g2) Zeigen Sie, dass die gegebene Aussage wahr ist:

„Eine Matrix vom Typ 2×2 mit ausschließlich positiven Matrizenelementen kann keine Inverse besitzen, die ebenfalls nur positive Matrizenelemente enthält.“

h) Für eine unbekannte Matrix X sind zwei Matrizengleichungen gegeben:

$$(1.) \qquad \mathrm{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$(2.) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{X}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \end{pmatrix}$$

h1) Erläutern Sie, von welchem Typ die Matrix X ist.

h2) Berechnen Sie die Matrix X.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 2** (Lineare Algebra): **Kakao**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	6	3	4	5*	7*	4	5	6*	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Die javanische Kakaomotte ist ein Insekt, das seine Eier auf den Früchten des Kakaobaumes ablegt. Dieser Schädling ist auf vielen Kakaoplantagen zu finden. Jede Motte legt im Durchschnitt 200 Eier pro Monat. Innerhalb des nächsten Monats entwickeln sich knapp 10 % der Eier zu Larven, welche sich in die Kakaofrucht bohren, um sich dort vom Fruchtfleisch zu ernähren. Im folgenden Monat verpuppen sich $\frac{1}{5}$ der Larven und nach einem weiteren Monat entwickeln sich in etwa die Hälfte der Puppen zu Motten. Durch den Befall der javanischen Kakaomotte vertrocknen die Kakaofrüchte und die darin enthaltenen Kakaobohnen. Dies führt neben dem Ernteausfall auch dazu, dass nicht genügend Saat für die Nachzucht der Kakaobäume vorhanden ist.

Die Populationsmatrix der Kakaomotte ist in der Matrix M dargestellt:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen zur Matrix M und

begründen Sie, dass die Matrix M den Sachzusammenhang des Textes korrekt widerspiegelt.

Eine Forschungseinrichtung in Ghana hat bei einer Erstbeobachtung im Januar 1 000 Eier, 500 Larven, 200 Puppen und 150 Kakaomotten gezählt und daraus den Vektor

$$\vec{v}_0 = (1\,000 \quad 500 \quad 200 \quad 150)^T \text{ erstellt.}$$

b) Berechnen Sie die Verteilungen der beiden Folgemonate Februar und März.

Zur Bekämpfung der Kakaomotte stehen zwei bewährte Schädlingsbekämpfungsmittel (SBM) zur Verfügung. Die Forschungseinrichtung untersucht neben der Umweltbelastung auch die Wirksamkeit dieser Mittel. Für das erste Schädlingsbekämpfungsmittel SBM I ist folgende Gleichung der Populationsmatrix $M_{SBM\,I}$ bekannt:

$$M_{SBM\,I}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0{,}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Geben Sie den Einfluss des Mittels SBM I im Vergleich zur Populationsentwicklung der Matrix M in einer Periode bzw. einem Monat an und

beschreiben Sie die langfristige Auswirkung auf die Kakaomottenpopulation.

Vom zweiten Mittel SBM II ist bekannt, dass nur die Entwicklung der Eier zu Larven gehemmt wird, die anderen Entwicklungsraten der Matrix M bleiben unverändert. Das Ausmaß, inwieweit sich die Entwicklungsrate Ei zur Larve verändert, ist jedoch nicht bekannt. Die Forscher haben das Mittel auf einer abgegrenzten Fläche eingesetzt und vor dem Einsatz des Mittels SBM II die Startverteilung $\vec{p}_0$ ermittelt:

$$\vec{p}_0 = (2\,000 \quad 1\,000 \quad 400 \quad 300)^T$$

Einen Monat nach dem Einsatz des Mittels SBM II wurde die Verteilung $\overrightarrow{p_{SBM\,II_1}}$ festgestellt:

$$\overrightarrow{p_{SBM\,II_1}} = (60\,000 \quad 90 \quad 200 \quad 200)^T$$

d) Ermitteln Sie, wie viel Prozent der Eier sich bei Einsatz des Mittels SBM II zu Larven entwickeln und

beurteilen Sie, ob das Mittel SBM I oder das Mittel SBM II langfristig wirksamer ist.

Die Forscher haben ein neues umweltschonendes Mittel entwickelt. Dieses neue Mittel hemmt sowohl die Entwicklung vom Ei zur Larve als auch von der Larve zur Puppe. Es wurde dazu die Populationsmatrix M_{neu} aufgestellt und Populationszahlen aus vier aufeinander folgenden Perioden festgestellt (Tabelle 2.1):

$$M_{neu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 200 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } a, b \in [0; 1]$$

Periode / Anzahl	Startperiode	1	2	3
Eier	800	30 000	3 000	3 000
Larven		40		150
Puppen	30			225
Kakaomotten	150	15	15	3

Tabelle 2.1

e) Begründen Sie die Definitionsmenge für die Werte der Parameter a und b in der Matrix M_{neu} und

bestimmen Sie die Werte für die Parameter a und b sowie die fehlenden Werte der Tabelle 2.1.

Aus der Kakaobohne werden Kakaobutter und Kakaomasse hergestellt, die als Rohstoffe bei der Schokoladenherstellung verwendet werden. In der Norderstedter Schokoladenmanufaktur „NordSchok" werden Kakaomasse (R1), Zucker (R2), Kakaobutter (R3) und Milchpulver (R4) als Zutaten für hochwertige Schokolade in den Sorten Zartbitter (Z1), weiße Schokolade (Z2) und Vollmilchschokolade (Z3) verwendet. Diese werden in einem letzten Produktionsschritt zu Pralinen für die Packungen Sprotte (E1), Möwe (E2) und Anker (E3) verarbeitet.

Gegeben sind die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A und die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C, beide enthalten Grammangaben, sowie die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B, die den Anteil von 100 g eines Zwischenproduktes angibt, der in ein Endprodukt eingeht.

$$A = \begin{array}{c} \\ R1 \\ R2 \\ R3 \\ R4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Z1 & Z2 & Z3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 50 & 0 & 12 \\ 46 & 48 & 46 \\ 4 & 26 & 18 \\ 0 & 26 & 24 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ Z1 \\ Z2 \\ Z3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E1 & E2 & E3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}8 & 0{,}9 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad C = \begin{array}{c} \\ R1 \\ R2 \\ R3 \\ R4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} E1 & E2 & E3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 18{,}6 & 27{,}4 & 17 \\ 46{,}8 & 70{,}6 & 93{,}8 \\ 17 & 26{,}4 & 41{,}8 \\ 17{,}6 & 25{,}6 & 47{,}4 \end{pmatrix} \end{array}$$

f) Geben Sie an, wie viel Gramm Zucker sich
- in einer Mengeneinheit Zartbitter befindet,
- im Endprodukt Möwe befindet und

berechnen Sie den prozentualen Anteil des Rohstoffs Zucker am Endprodukt Möwe.

Kurz vor Produktionsende sind noch 1 250 g Zartbitter, 3 400 g weiße Schokolade und 2 700 g Vollmilchschokolade vorhanden. Die Zwischenprodukte sollen am Ende des Produktionstages möglichst aufgebraucht werden. Der Betriebsleiter hat festgestellt, dass unter der Voraussetzung, die Pralinenpackungen vollständig zu befüllen, ein vollständiger Verbrauch bei diesen Mengen nicht möglich ist. Daher schlägt er vor, nur Zartbitter und weiße Schokolade vollständig zu verbrauchen und den Rest der Vollmilchschokolade den Angestellten zum Verzehr zu überlassen. Der Betriebsleiter hat zur Lösung des Problems folgendes notiert:

(a) $$100 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}8 & 0{,}9 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1\,250 \\ 3\,400 \\ 2\,700 \end{pmatrix}$$

(b) $$\begin{aligned} &\text{I} & 30 \cdot x_1 + 50 \cdot x_2 + 10 \cdot x_3 &= 1\,250 \\ &\text{II} & 40 \cdot x_1 + 80 \cdot x_2 + 90 \cdot x_3 &= 3\,400 \\ &\text{III} & 30 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 + 100 \cdot x_3 &\leq 2\,700 \end{aligned}$$

g) Erläutern Sie die Notizen des Betriebsleiters im Sachzusammenhang.

h) Ermitteln Sie, wie viele Packungen der Pralinensorten Sprotte (E1), Möwe (E2) und Anker (E3) sich maximal mit dem Vorschlag des Betriebsleiters befüllen lassen.

Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1:** (hilfsmittelfreier Teil mit Stochastik)

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	5	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

a) Die Abbildung 1.1 zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion g' einer ganzrationalen Funktion g mit allen Nullstellen.

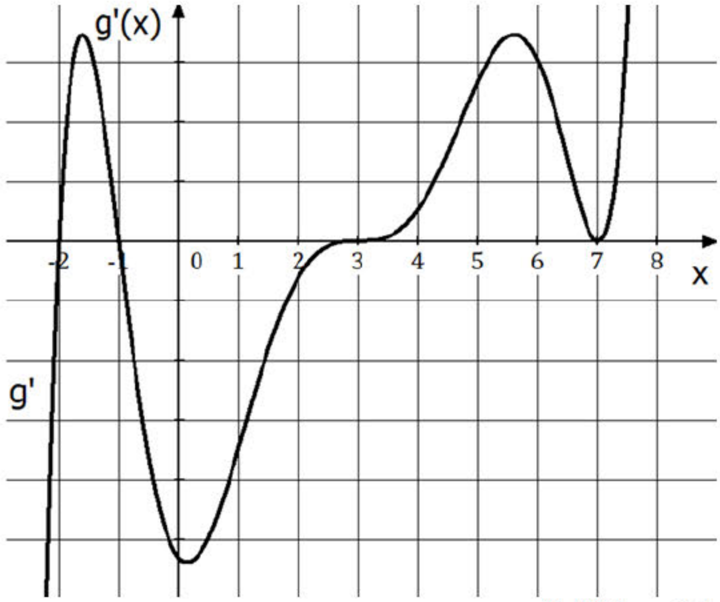

Abbildung 1.1

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

<u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Die Ableitungsfunktion g' kann dargestellt werden mit $g'(x) = a \cdot (x-3)^3 \cdot (x+2) \cdot (x-7)^2 \cdot (x+1)$.		
Der höchste Exponent des Funktionsterms von $g(x)$ ist ungerade.		
Der Graph von g hat an der Stelle $x = -2$ einen Hochpunkt.		
Der Graph der Funktion g hat mindestens zwei Wendepunkte.		
Es gilt: $g(-1) < g(2)$		

b) In der Abbildung 1.2 ist der Graph der Funktion f mit den Nullstellen x_1 und x_2 dargestellt, wobei gilt: $x_1 < x_2$.

b1) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f ‘ von f in die Abbildung 1.3.

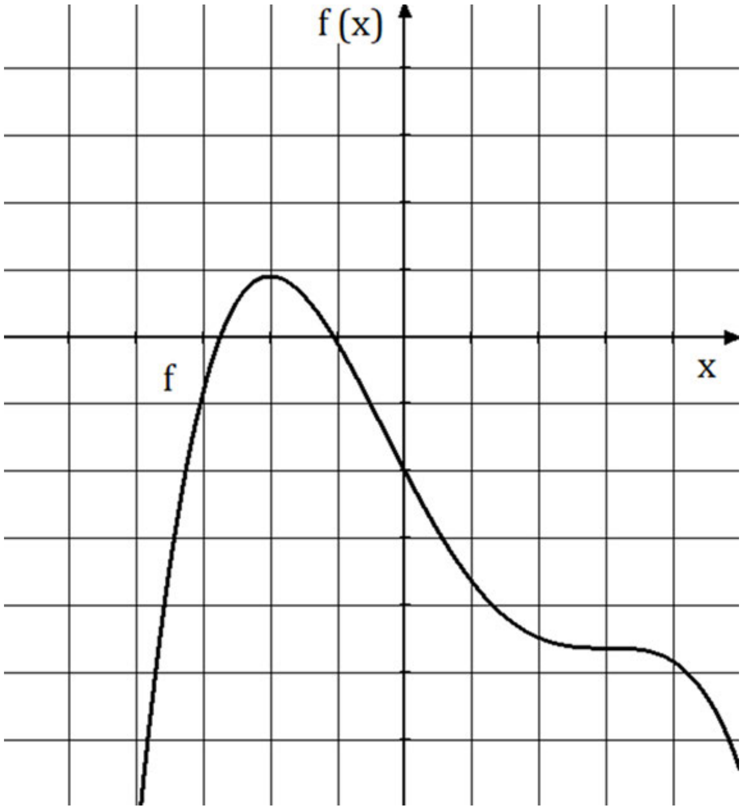

Abbildung 1.2

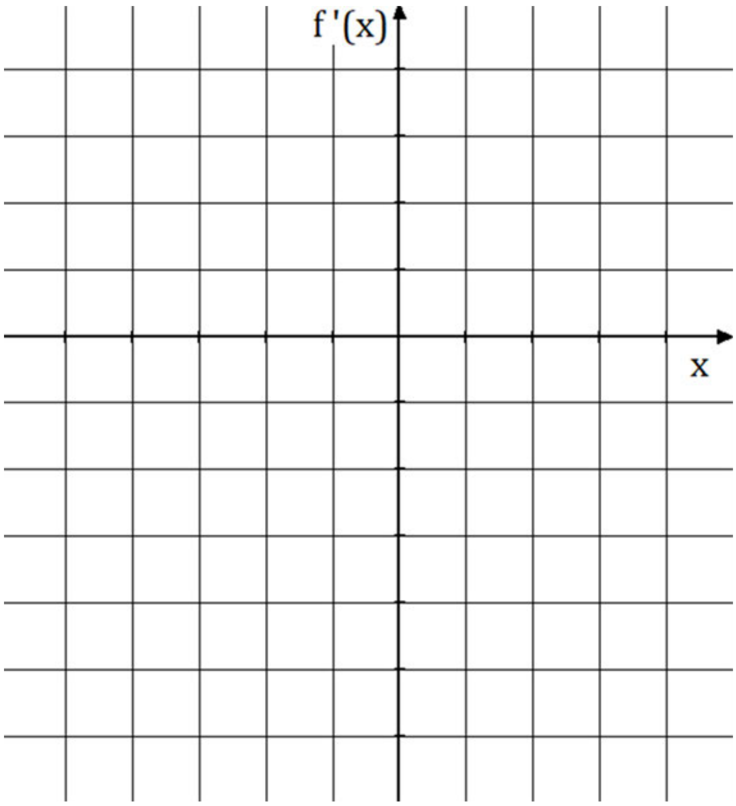

Abbildung 1.3

b2) Geben Sie einen Lösungsansatz an, mit dem die Maßzahl der Fläche, die vom Graphen von f und der Abszisse eingeschlossen wird, berechnet werden kann.

c) Gegeben ist die Funktionsgleichung von f_a durch $f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot x^3 + x$ mit $a \neq 0$.

c1) Bestimmen Sie den Wert des Parameters a so, dass die Funktion f_a bei $x = 3$ eine Extremstelle hat.

c2) Zeigen Sie, dass alle Funktionsgraphen der Funktion f_a punktsymmetrisch zum Ursprung sind.

d) Gegeben sind die Funktion h sowie ihre erste und zweite Ableitung:

$$h(x) = \frac{3}{2} \cdot \sin(x - \pi) - 1 \qquad h'(x) = -\frac{3}{2} \cdot \cos(x) \qquad h''(x) = \frac{3}{2} \cdot \sin(x).$$

d1) Skizzieren Sie den Graphen von h im Intervall $-\pi \leq x \leq 2\pi$ in die Abbildung 1.4.

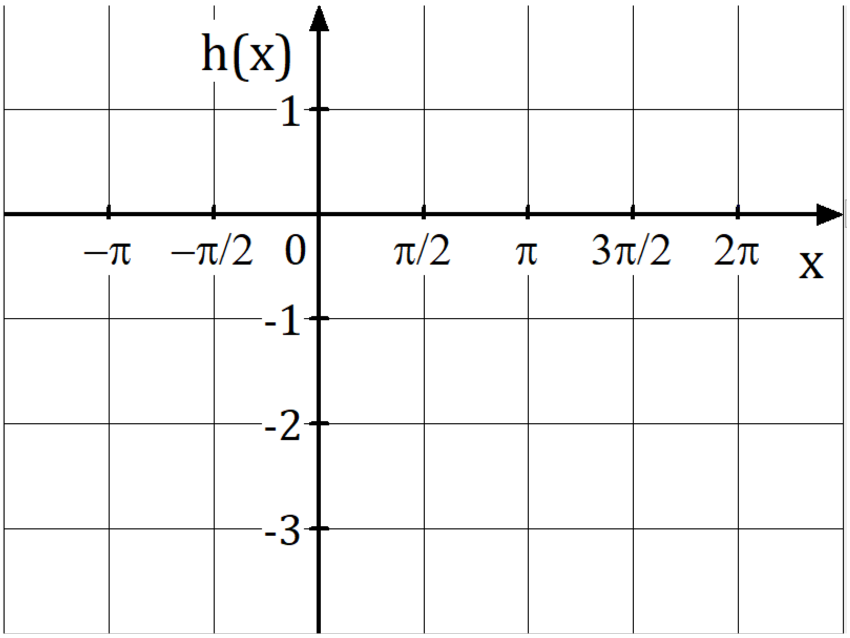

Abbildung 1.4

d2) Berechnen Sie die Wendepunkte der Funktion h im Intervall $-\pi \leq x \leq \pi$ und geben Sie die Steigung an der Stelle $x = 0$ an.

Hinweis: Bei der Berechnung der Wendepunkte kann auf den Nachweis der hinreichenden Bedingung verzichtet werden.

e) Zu einem zweistufigen Zufallsexperiment ist die folgende unvollständige Vierfelder-Tafel mit Wahrscheinlichkeiten gegeben:

P	B	$\overline{B}$	Summen
A	0,35		
$\overline{A}$			0,4
Summen	0,6		

Tabelle 1.1

e1) Vervollständigen Sie die Vierfeldertafel.

e2) Entscheiden Sie begründet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Es gilt: $P(B) = P(\overline{A})$.	
Es gilt: $P_A(B) = P_B(A)$.	
Die Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig voneinander.	

f) Das folgende Baumdiagramm (Abbildung 1.5) stellt ein zweistufiges Zufallsexperiment dar. Es können die Ereignisse A und B sowie deren Gegenereignisse $\overline{A}$ und $\overline{B}$ eintreten.

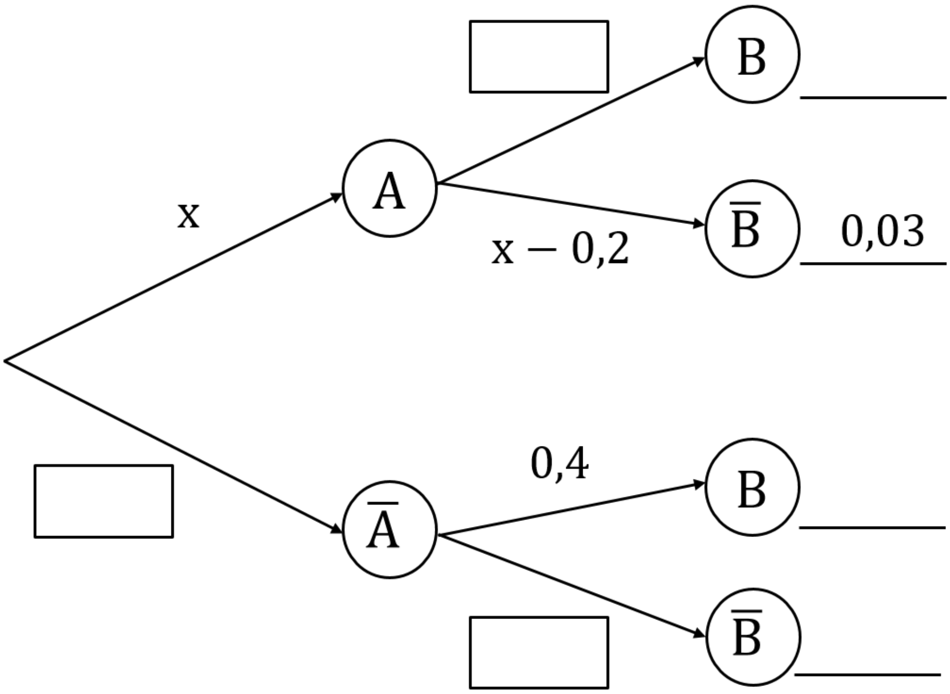

Abbildung 1.5

f1) Zeigen Sie, dass mit der Gleichung $x^2 - 0{,}2x - 0{,}03 = 0$ P(A) berechnet werden kann.

f2) Vervollständigen Sie die Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm (Abbildung 1.5), wenn $P(A) = 0{,}3$ angenommen werden kann und

berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für P(B).

g) Bei einer statistischen Befragung wurden n Merkmalsausprägungen x_i des Merkmals X erhoben. Alle Stichprobenwerte sind reelle Zahlen. Folgende Lage- und Steuungsmaße dieser Befragung sind bekannt: das arithmetisches Mittel $\overline{x} = 10$ und die Standardabweichung $\sigma = 4$.

Der Datenreihe werden zwei weitere Werte $x_{n+1} = 8$ und $x_{n+2} = 12$ hinzugefügt.

g1) Zeigen Sie, dass sich das arithmetische Mittel durch das Hinzufügen der beiden Werte nicht verändert.

g2) Begründen Sie, dass die Standardabweichung durch die zusätzlichen Werte kleiner wird.

h) Für ein Zufallsexperiment kann die Zufallsgröße X die Werte 0, 1, 2, 3 und 4 annehmen. In der Abbildung 1.6 ist die symmetrische Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.

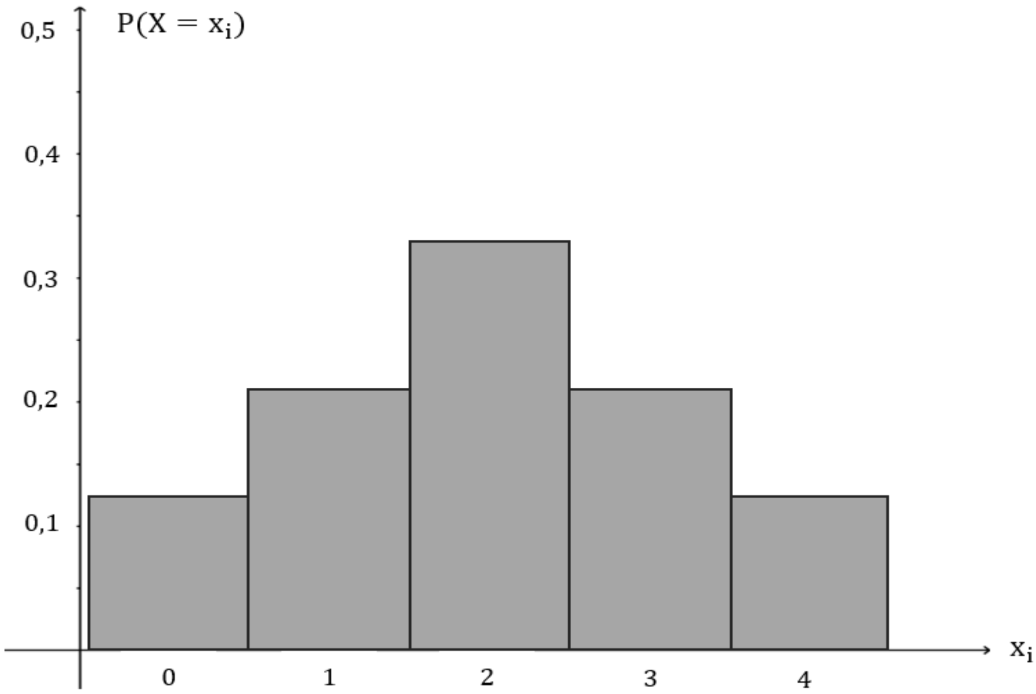

Abbildung 1.6

h1) Ermitteln Sie den Erwartungswert E(X) mithilfe der Abbildung 1.6.

h2) Begründen Sie, dass die Zufallsgröße X nicht als binomialverteilt angenommen werden kann.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 2** (Stochastik)**: Urlaub an der Nordsee**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	7	6	4	5*	5*	4	5*	4	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: a, b, c, ... $\in \mathbb{R}$ und die Variablen: x, t, ... $\in \mathbb{R}$.

Ein Urlaub an der schleswig-holsteinischen Nordsee ist wegen des Reizklimas sehr beliebt. Jedoch fürchten einige Touristen regnerische Tage, die ihnen das Urlaubsvergnügen nehmen könnten. Die Familie Meier mit der angehenden Abiturientin Conny überlegt, den Sommerurlaub entweder an der Nordsee oder vielleicht doch lieber am warmen Bodensee zu verbringen. Conny hat für eine fundierte Entscheidung Statistiken zu den durchschnittlichen monatlichen Regenmengen in beiden Urlaubsregionen gefunden.

Die Tabelle 2.1[1] zeigt die durchschnittlichen monatlichen Regenmengen für die Region Nordseeküste. Die Regenmenge wird dabei in der Maßeinheit Millimeter angegeben, wobei 1 mm der Niederschlagsmenge von einem Liter pro Quadratmeter entspricht.

[redacted]

Tabelle 2.1

Für die Bodenseeregion ist in Abbildung 2.1[2] ein Boxplot zu den durchschnittlichen monatlichen Regenmengen gegeben:

Region Bodensee

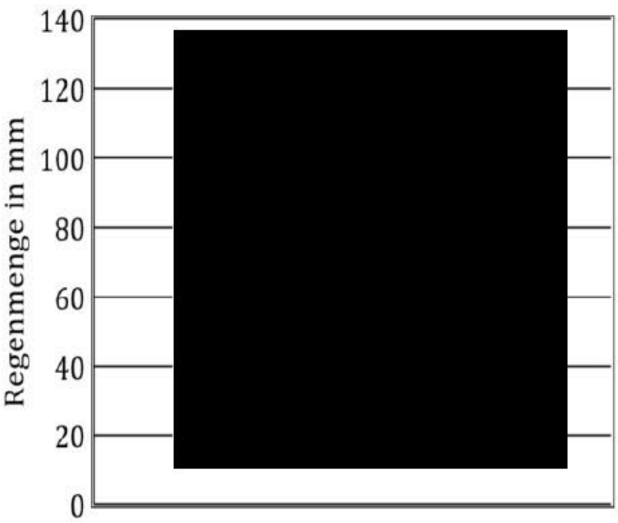

Abbildung 2.1

Region Nordseeküste

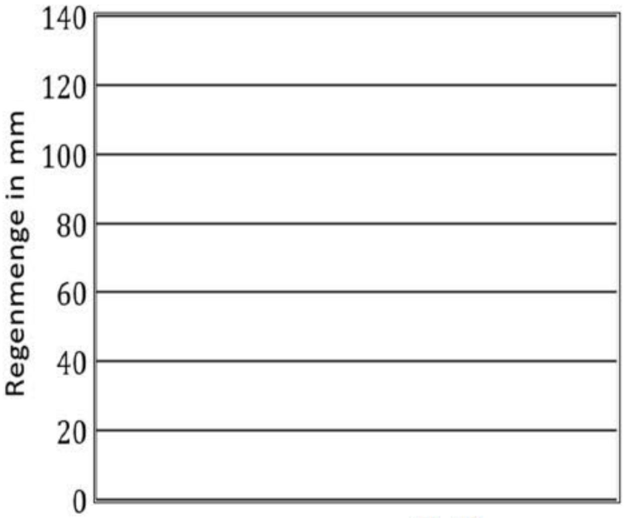

Abbildung 2.2

[1] https://www.wetter-atlas.de/klima/europa/deutschland/nordsee.php Zugriff: 04.11.2021 um 8:30 Uhr
[2] https://www.wetter-atlas.de/klima/europa/deutschald/bodensee.php Zugriff: 04.11.2021 um 9:00 Uhr

a) Ergänzen Sie in Abbildung 2.2 den Boxplot zu den durchschnittlichen monatlichen Regenmengen an der Nordseeküste und

geben Sie die dafür notwendigen Daten an und

vergleichen Sie die durchschnittlichen monatlichen Regenmengen der beiden Regionen anhand dreier Aspekte.

Tage mit einem Niederschlag von mindestens 0,1 mm in 24 Stunden gelten als Regentage. Die schleswig-holsteinische Nordseeküste weist im touristisch relevanten Zeitraum vom 15. März bis zum 15. Oktober durchschnittlich 60 Regentage auf.

b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Tag im touristisch relevanten Zeitraum ein Regentag ist, etwa 27,9 % beträgt und

erläutern Sie, unter welchen Bedingungen die Zufallsvariable X mit „X sei die Anzahl der Regentage“ als binomialverteilte Zufallsgröße angenommen werden kann.

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die Zufallsvariable X mit „X sei die Anzahl der Regentage“ binomialverteilt ist und die Wahrscheinlichkeit für einen Regentag $p = 0{,}279$ beträgt. Familie Meier plant in den Sommerferien einen 14-tägigen Urlaub an der Nordsee.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- Familie Meier einen perfekten Urlaub ohne Regentage genießen kann,
- höchstens die Hälfte der Urlaubstage von Familie Meier Regentage sein werden.

Conny badet lieber im ortsansässigen Wellenbad als in der Nordsee. Ihre Eltern erlauben es ihr aber nur an Regentagen. Conny versucht ihre Eltern mit folgender Berechnung davon zu überzeugen, dass diese Regelung unfair ist:

$$1 - \sum_{k=\square}^{14} \binom{14}{k} \cdot 0{,}721^{k} \cdot 0{,}279^{14-k} \leq 0{,}1\ \%$$

d) Erläutern Sie Connys Berechnung im Sachzusammenhang und

vervollständigen Sie die Berechnung so, dass die Ungleichung erfüllt ist.

e) Ermitteln Sie, wie viele Tage die Familie mindestens Urlaub machen muss, damit Conny mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mehr als einen Tag ins Wellenbad gehen darf.

Bei ihrer Ankunft am Urlaubsort stellt Conny fest, dass das Wellenbad aufgrund eines technischen Defekts geschlossen ist. Es laufen bereits Planungen für eine Renovierung des Wellenbades. Der Leiter des Wellenbades weiß aus den alten Jahresberichten des Tourismus-Verbandes, dass durchschnittlich 4 830 Touristen pro Tag im Ort übernachten und hat daraus eine Besucherquote von 11,2 % für das Wellenbad ermittelt. Er hat den Eindruck, dass die Besucherzahlen steigen und empfiehlt der Gemeinde deshalb neben der Renovierung auch in den Ausbau des Wellenbades zu investieren. Zur Vorbereitung auf das Treffen mit dem Finanzausschuss der Gemeinde benötigt er noch einige aussagekräftige Zahlen. Er nimmt an, dass die Zufallsvariable Y mit „Y sei die Anzahl der Touristen im Wellenbad“ $B_{4\,830;\,0{,}112}$-verteilt ist.

f) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsvariablen Y und

interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang.

Der Finanzausschuss der Gemeinde befürwortet eine Investition, wenn pro Tag mehr als 11,2 % der Touristen das ausgebaute Wellenbad besuchen. Dies versucht der Finanzausschuss durch einen Hypothesentest zu ermitteln. Dazu initiiert der Tourismusverband eine Umfrage unter den Touristen, ob sie das ausgebaute Wellenbad besuchen würden oder nicht.

g) Weisen Sie nach, dass bei einem Hypothesentest mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 2,5 % ab einer durchschnittlichen Besucherzahl pro Tag von mehr als 497 Touristen die Nullhypothese $H_0: p \geq 0{,}112$ angenommen und die Alternative $H_1: p < 0{,}112$ verworfen wird.

Einige Mitglieder des Finanzausschusses befürchten, dass es bei einer Entscheidung basierend auf dem Hypothesentest zu einer Fehlentscheidung in den Ausbau des Wellenbades kommt, da sie lediglich eine Besucherquote der Touristen von 10 % erwarten.

h) Berechnen Sie auf dieser Grundlage die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art und

interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1:** (hilfsmittelfreier Teil mit Stochastik)

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	5	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \dots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \dots \in \mathbb{R}$.

a) Die Abbildung 1.1 zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion g' einer ganzrationalen Funktion g mit allen Nullstellen.

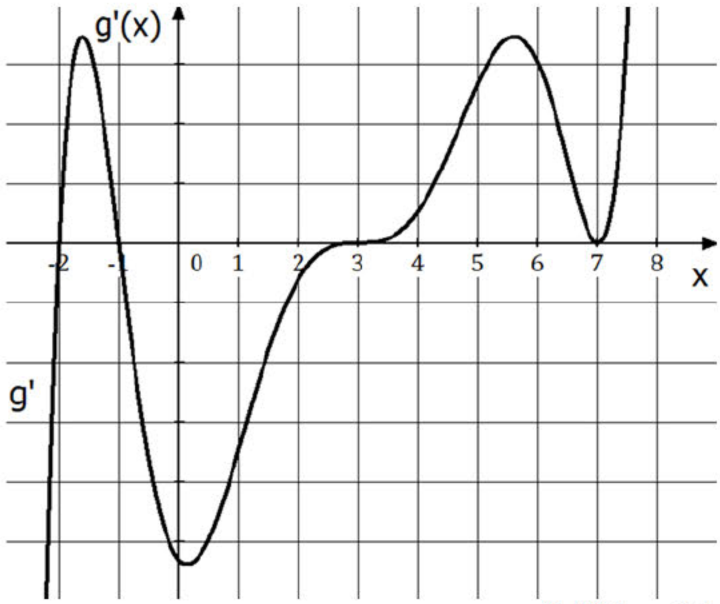

Abbildung 1.1

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Die Ableitungsfunktion g' kann dargestellt werden mit $g'(x) = a \cdot (x-3)^3 \cdot (x+2) \cdot (x-7)^2 \cdot (x+1)$.		
Der höchste Exponent des Funktionsterms von $g(x)$ ist ungerade.		
Der Graph von g hat an der Stelle $x = -2$ einen Hochpunkt.		
Der Graph der Funktion g hat mindestens zwei Wendepunkte.		
Es gilt: $g(-1) < g(2)$		

b) In der Abbildung 1.2 ist der Graph der Funktion f mit den Nullstellen x_1 und x_2 dargestellt, wobei gilt: $x_1 < x_2$.

b1) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f ‘ von f in die Abbildung 1.3.

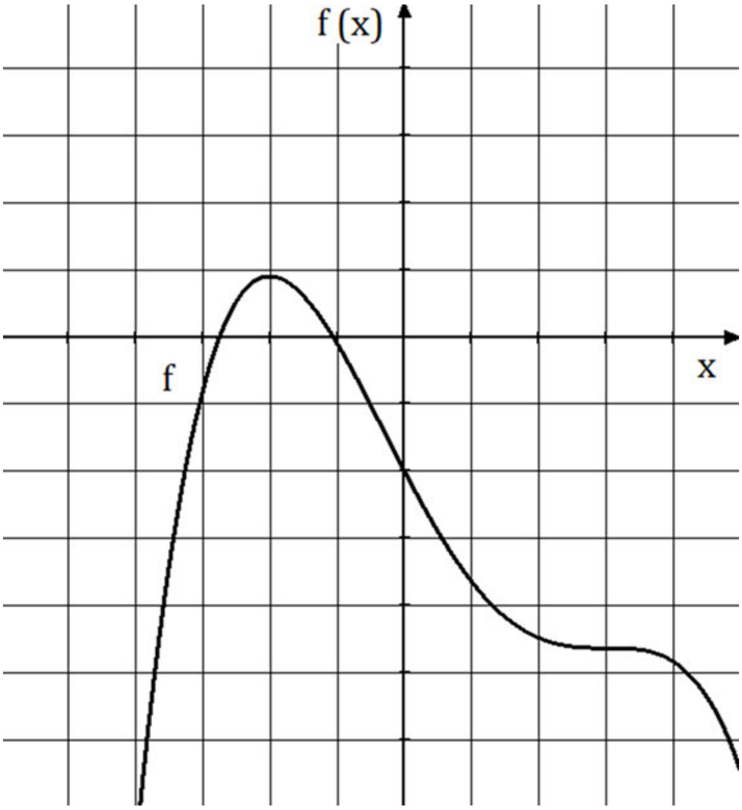

Abbildung 1.2

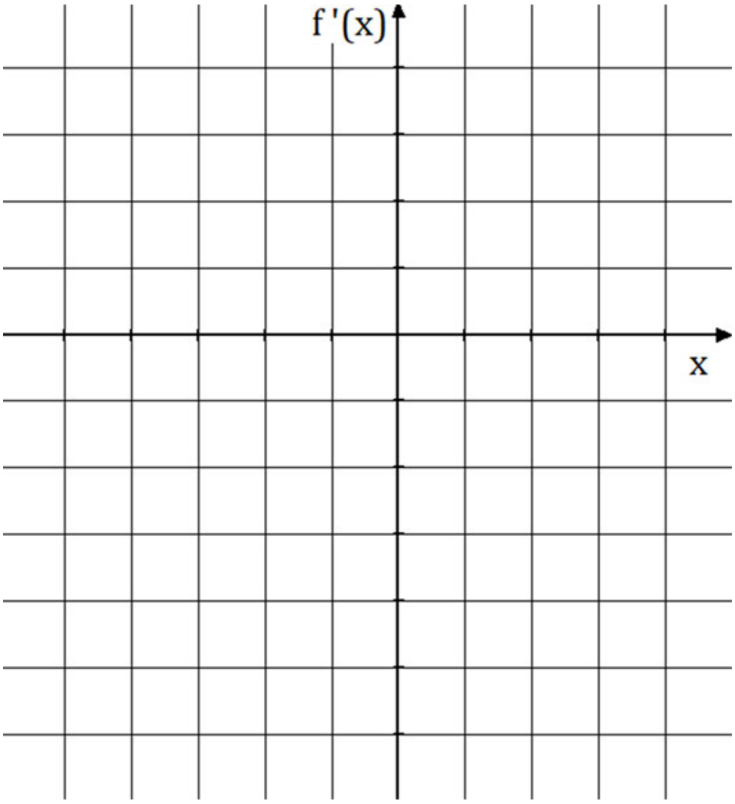

Abbildung 1.3

b2) Geben Sie einen Lösungsansatz an, mit dem die Maßzahl der Fläche, die vom Graphen von f und der Abszisse eingeschlossen wird, berechnet werden kann.

c) Gegeben ist die Funktionsgleichung von f_a durch $f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot x^3 + x$ mit $a \neq 0$.

c1) Bestimmen Sie den Wert des Parameters a so, dass die Funktion f_a bei $x = 3$ eine Extremstelle hat.

c2) Zeigen Sie, dass alle Funktionsgraphen der Funktion f_a punktsymmetrisch zum Ursprung sind.

d) Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = e^x \cdot (x^2 - 2x)$.

d1) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion h.

d2) Zeigen Sie, dass $h'(x) = e^x \cdot (x^2 - 2)$ die erste Ableitungsfunktion von h ist und. geben Sie die Steigung an der Stelle $x = 0$ an.

e) Zu einem zweistufigen Zufallsexperiment ist die folgende unvollständige Vierfelder-Tafel mit Wahrscheinlichkeiten gegeben:

P	B	$\overline{B}$	Summen
A	0,35		
$\overline{A}$			0,4
Summen	0,6		

Tabelle 1.1

e1) Vervollständigen Sie die Vierfeldertafel.

e2) Entscheiden Sie begründet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Es gilt: $P(B) = P(\overline{A})$.	
Es gilt: $P_A(B) = P_B(A)$.	
Die Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig voneinander.	

f) Das folgende Baumdiagramm (Abbildung 1.4) stellt ein zweistufiges Zufallsexperiment dar. Es können die Ereignisse A und B sowie deren Gegenereignisse $\overline{A}$ und $\overline{B}$ eintreten.

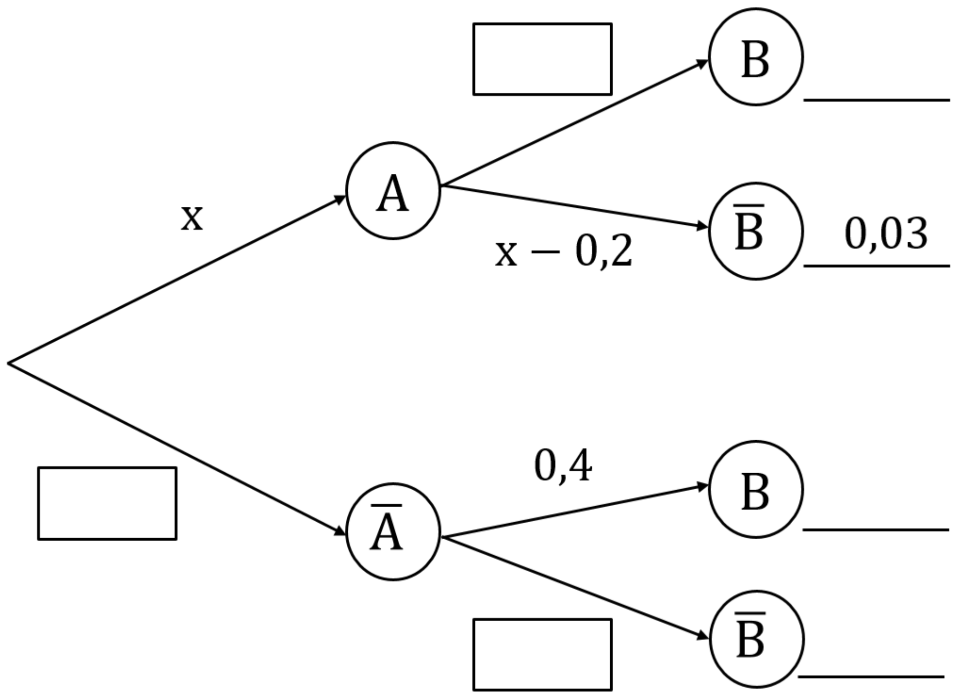

Abbildung 1.4

f1) Zeigen Sie, dass mit der Gleichung $x^2 - 0{,}2x - 0{,}03 = 0$ $P(A)$ berechnet werden kann.

f2) Vervollständigen Sie die Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm (Abbildung 1.4), wenn $P(A) = 0{,}3$ angenommen werden kann und

berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für $P(B)$.

g) Bei einer statistischen Befragung wurden n Merkmalsausprägungen x_i des Merkmals X erhoben. Alle Stichprobenwerte sind reelle Zahlen. Folgende Lage- und Steuungsmaße dieser Befragung sind bekannt: das arithmetisches Mittel $\overline{x} = 10$ und die Standardabweichung $\sigma = 4$.

Der Datenreihe werden zwei weitere Werte $x_{n+1} = 8$ und $x_{n+2} = 12$ hinzugefügt.

g1) Zeigen Sie, dass sich das arithmetische Mittel durch das Hinzufügen der beiden Werte nicht verändert.

g2) Begründen Sie, dass die Standardabweichung durch die zusätzlichen Werte kleiner wird.

h) Für ein Zufallsexperiment kann die Zufallsgröße X die Werte 0, 1, 2, 3 und 4 annehmen. In der Abbildung 1.5 ist die symmetrische Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.

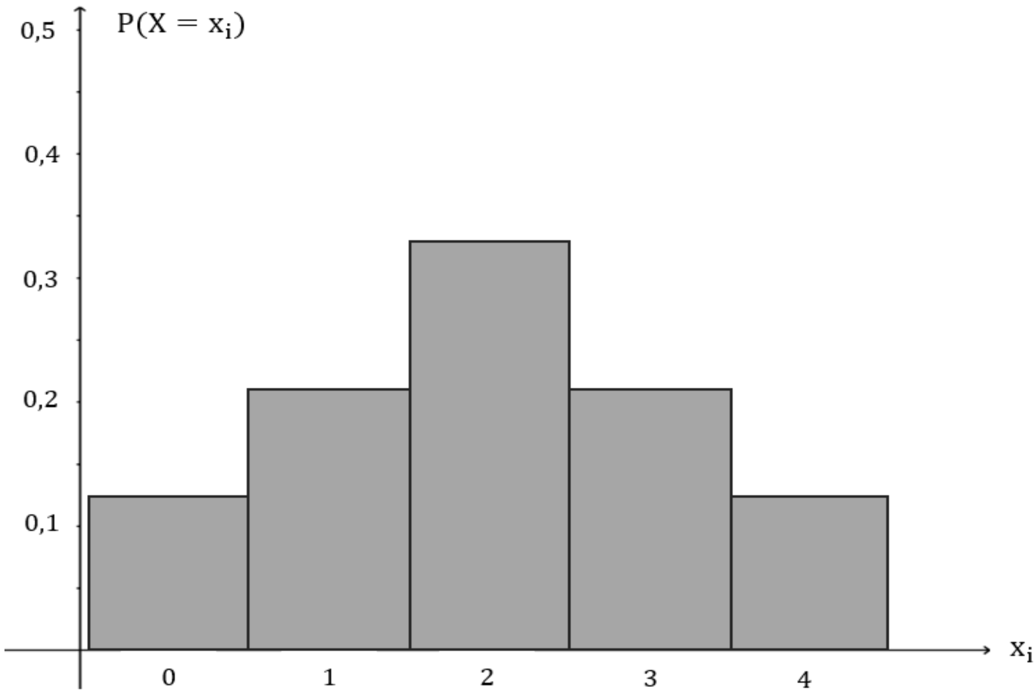

Abbildung 1.5

h1) Ermitteln Sie den Erwartungswert E(X) mithilfe der Abbildung 1.5.

h2) Begründen Sie, dass die Zufallsgröße X nicht als binomialverteilt angenommen werden kann.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 2** (Stochastik): **Urlaub an der Nordsee**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	7	6	4	5*	5*	4	5*	4	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Ein Urlaub an der schleswig-holsteinischen Nordsee ist wegen des Reizklimas sehr beliebt. Jedoch fürchten einige Touristen regnerische Tage, die ihnen das Urlaubsvergnügen nehmen könnten. Die Familie Meier mit der angehenden Abiturientin Conny überlegt, den Sommerurlaub entweder an der Nordsee oder vielleicht doch lieber am warmen Bodensee zu verbringen. Conny hat für eine fundierte Entscheidung Statistiken zu den durchschnittlichen monatlichen Regenmengen in beiden Urlaubsregionen gefunden.

Die Tabelle 2.1[1] zeigt die durchschnittlichen monatlichen Regenmengen für die Region Nordseeküste. Die Regenmenge wird dabei in der Maßeinheit Millimeter angegeben, wobei 1 mm der Niederschlagsmenge von einem Liter pro Quadratmeter entspricht.

[redacted]

Tabelle 2.1

Für die Bodenseeregion ist in Abbildung 2.1[2] ein Boxplot zu den durchschnittlichen monatlichen Regenmengen gegeben:

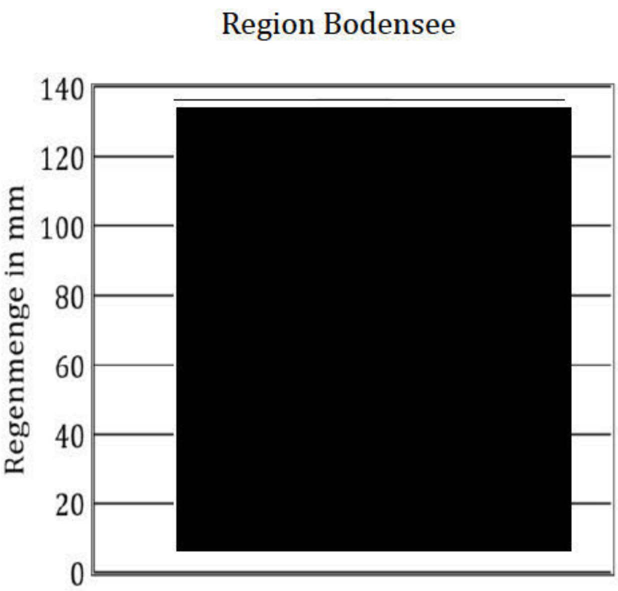

Abbildung 2.1

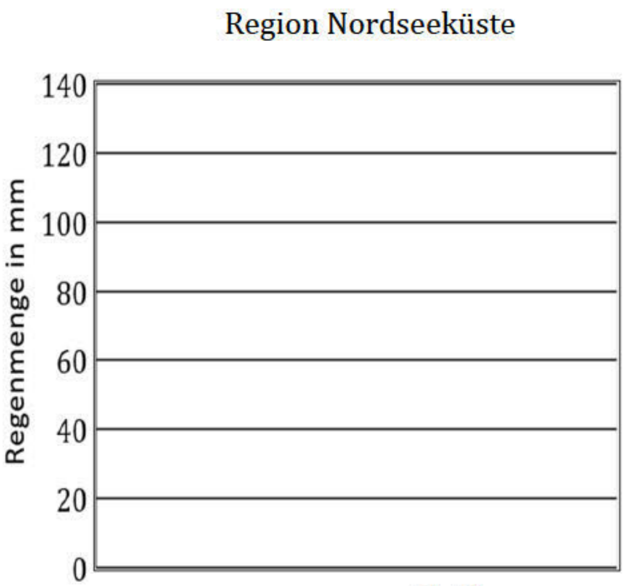

Abbildung 2.2

[1] https://www.wetter-atlas.de/klima/europa/deutschland/nordsee.php Zugriff: 04.11.2021 um 8:30 Uhr
[2] https://www.wetter-atlas.de/klima/europa/deutschald/bodensee.php Zugriff: 04.11.2021 um 9:00 Uhr

a) Ergänzen Sie in Abbildung 2.2 den Boxplot zu den durchschnittlichen monatlichen Regenmengen an der Nordseeküste und

geben Sie die dafür notwendigen Daten an und

vergleichen Sie die durchschnittlichen monatlichen Regenmengen der beiden Regionen anhand dreier Aspekte.

Tage mit einem Niederschlag von mindestens 0,1 mm in 24 Stunden gelten als Regentage. Die schleswig-holsteinische Nordseeküste weist im touristisch relevanten Zeitraum vom 15. März bis zum 15. Oktober durchschnittlich 60 Regentage auf.

b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Tag im touristisch relevanten Zeitraum ein Regentag ist, etwa 27,9 % beträgt und

erläutern Sie, unter welchen Bedingungen die Zufallsvariable X mit „X sei die Anzahl der Regentage“ als binomialverteilte Zufallsgröße angenommen werden kann.

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die Zufallsvariable X mit „X sei die Anzahl der Regentage“ binomialverteilt ist und die Wahrscheinlichkeit für einen Regentag $p = 0{,}279$ beträgt. Familie Meier plant in den Sommerferien einen 14-tägigen Urlaub an der Nordsee.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- Familie Meier einen perfekten Urlaub ohne Regentage genießen kann,
- höchstens die Hälfte der Urlaubstage von Familie Meier Regentage sein werden.

Conny badet lieber im ortsansässigen Wellenbad als in der Nordsee. Ihre Eltern erlauben es ihr aber nur an Regentagen. Conny versucht ihre Eltern mit folgender Berechnung davon zu überzeugen, dass diese Regelung unfair ist:

$$1 - \sum_{k=\square}^{14} \binom{14}{k} \cdot 0{,}721^{k} \cdot 0{,}279^{14-k} \leq 0{,}1\ \%$$

d) Erläutern Sie Connys Berechnung im Sachzusammenhang und

vervollständigen Sie die Berechnung so, dass die Ungleichung erfüllt ist.

e) Ermitteln Sie, wie viele Tage die Familie mindestens Urlaub machen muss, damit Conny mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mehr als einen Tag ins Wellenbad gehen darf.

Bei ihrer Ankunft am Urlaubsort stellt Conny fest, dass das Wellenbad aufgrund eines technischen Defekts geschlossen ist. Es laufen bereits Planungen für eine Renovierung des Wellenbades. Der Leiter des Wellenbades weiß aus den alten Jahresberichten des Tourismus-Verbandes, dass durchschnittlich 4 830 Touristen pro Tag im Ort übernachten und hat daraus eine Besucherquote von 11,2 % für das Wellenbad ermittelt. Er hat den Eindruck, dass die Besucherzahlen steigen und empfiehlt der Gemeinde deshalb neben der Renovierung auch in den Ausbau des Wellenbades zu investieren. Zur Vorbereitung auf das Treffen mit dem Finanzausschuss der Gemeinde benötigt er noch einige aussagekräftige Zahlen. Er nimmt an, dass die Zufallsvariable Y mit „Y sei die Anzahl der Touristen im Wellenbad“ $B_{4\,830;\,0{,}112}$-verteilt ist.

f) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsvariablen Y und

interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang.

Der Finanzausschuss der Gemeinde befürwortet eine Investition, wenn pro Tag mehr als 11,2% der Touristen das ausgebaute Wellenbad besuchen. Dies versucht der Finanzausschuss durch einen Hypothesentest zu ermitteln. Dazu initiiert der Tourismusverband eine Umfrage unter den Touristen, ob sie das ausgebaute Wellenbad besuchen würden oder nicht.

g) Weisen Sie nach, dass bei einem Hypothesentest mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 2,5 % ab einer durchschnittlichen Besucherzahl pro Tag von mehr als 497 Touristen die Nullhypothese $H_0\colon p \geq 0{,}112$ angenommen und die Alternative $H_1\colon p < 0{,}112$ verworfen wird.

Einige Mitglieder des Finanzausschusses befürchten, dass es bei einer Entscheidung basierend auf dem Hypothesentest zu einer Fehlentscheidung in den Ausbau des Wellenbades kommt, da sie lediglich eine Besucherquote der Touristen von 10 % erwarten.

h) Berechnen Sie auf dieser Grundlage die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art und

interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 3: Die KLOT-Show**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	i	gesamt
Erreichbar	6	3	5	3	5	5	4	5	4	40
Erstkorrektur										
Zweitkorrektur										

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Der Freizeitpark KLOT-Show zieht aufgrund seiner ausgeprägten Familienfreundlichkeit und vielen Attraktionen während der Öffnungszeiten von 10 bis 18 Uhr viele Besucher an. Die Schülerin Annika organisierte für ihre Schulklasse einen Ausflug. Am nächsten Schultag wurde der Besuch der KLOT-Show sehr gelobt. Nur die Wartezeit an der Kasse wurde kritisiert. Die Klasse stellt sich die Frage, wie sich der Besucherandrang im Laufe des Tages entwickelt. Da jeder Besucher durch eine Einlassschranke elektronisch erfasst wird, liefert der Park auf Nachfrage der Klasse umfangreiches Datenmaterial zu den Besucherzahlen. Die Klasse entscheidet sich dafür, den Besucherstrom mittels einer ganzrationalen Funktion dritten Grades zu modellieren. Es wird folgende Funktionsgleichung ermittelt und eine Graphik erstellt (Abbildung 3.1).

$$f(t) = 30 \cdot t^3 - 420 \cdot t^2 + 1\,470 \cdot t \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq \_\_\_\_\_\_\_\_$$

f(t): Anzahl der eintretenden Besucher pro Stunde ab 10:00 Uhr (Besucherstrom)
t: Zeit in Stunden

Die Kassen werden eine Stunde vor Parkschließung geschlossen.

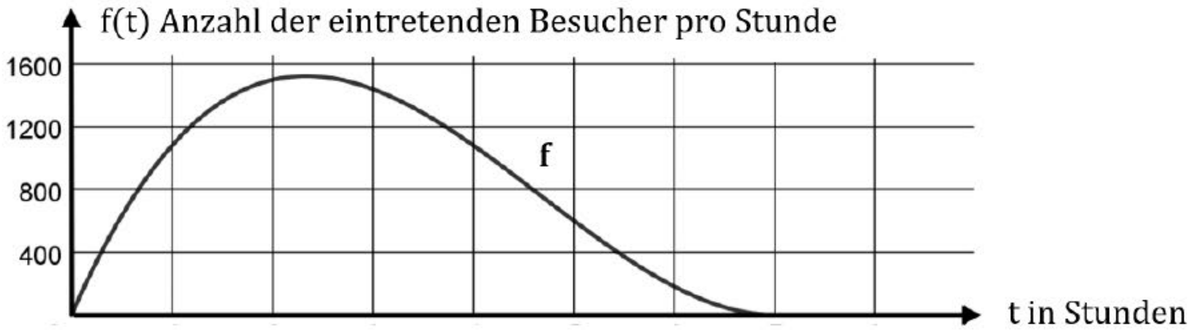

Abbildung 3.1

a) Beschreiben Sie den Graphen in der Abbildung 3.1 anhand zweier Aspekte im Sachzusammenhang und

ergänzen Sie den Definitionsbereich von f(t) sowie die Skalierung der t-Achse in Abbildung 3.1.

Ein Mitschüler behauptet: „Um 17 Uhr ist kein Besucher mehr im Park!".

b) Beurteilen Sie den Wahrheitsgehalt dieser Aussage.

c) Zeigen Sie rechnerisch, dass der Besucherstrom um 12:20 Uhr am größten ist und geben Sie an, wie groß der Besucherstrom zu diesem Zeitpunkt ist.

d) Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\frac{1}{3}\int_0^3 f(t)\,dt$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Beim Kassenschluss um 17:00 Uhr hat die Klot-Show 216 000 € über den Verkauf von 6 000 Eintritts-Tickets eingenommen. Das Ticket für Kinder kostet 10 € weniger als das Ticket für Erwachsene. Im Schnitt begleitet ein Erwachsener 1,5 Kinder.

e) Ermitteln Sie die Ticketpreise für Erwachsene und Kinder sowie die Anzahl der Kinder und Erwachsenen, die im Freizeitpark waren.

Die Schiffsschaukel „Pirat“ stellt die Hauptattraktion der KLOT-Show dar. Hat diese Schiffsschaukel volle Fahrt aufgenommen, erreicht die Mitte des Schiffes einen maximalen Höhenunterschied von zehn Metern zur tiefsten Stelle, die zwei Meter über dem Erdboden liegt (Abbildung 3.2). Der Einstieg erfolgt über eine Rampe. Bei voller Fahrt fährt man dann in der Schiffsmitte sitzend alle acht Sekunden an dem Eingangsbereich der Schiffsschaukel vorbei.

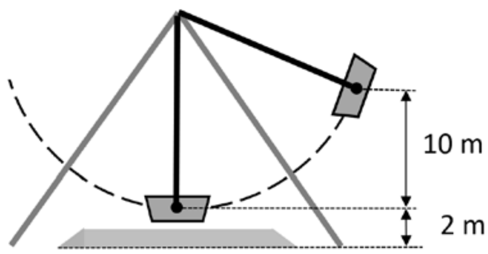

Abbildung 3.2

Dieser periodische Vorgang soll durch eine trigonometrische Funktion der Form

$$g(t) = a \cdot \sin\big(b \cdot (t + c)\big) + d \qquad \text{mit } a \neq 0 \text{ und } t \geq 0$$

beschrieben werden. Dabei soll die Funktion g die Höhe der Schiffsmitte vom Erdboden in Metern in Abhängigkeit von der Fahrzeit t in Sekunden bei voller Fahrt beschreiben. Die Beobachtungszeit beginnt, wenn die Schiffsschaukel volle Fahrt aufgenommen hat und sich am Einstiegsort befindet.

f) Modellieren Sie den Höhenverlauf der Schiffsschaukel durch eine Funktion vom Typ g.

Für kleinere Kinder gibt es eine weitere Schiffsschaukel „Wykkie“, deren Höhenverlauf bei voller Fahrt durch die folgende Funktionsgleichung modelliert wird:

$$h(t) = -3{,}5 \cdot \cos(0{,}2 \cdot \pi \cdot t) + 4{,}5 \quad \text{mit } t \geq 0$$

h(t): Höhe der Schiffsschaukel vom Erdboden in Metern, t: Zeit in Sekunden

Annikas Mitschülerin Kathy stellt mit Blick auf die Funktionsgleichung von h zwei Behauptungen auf:

I. „Der Wertebereich ist $W_h = [1;\ 8]$."

II. „Für alle $t > 0$ gilt: $h(t) = h(t + 10)$."

g) Erläutern Sie beide Behauptungen und

begründen Sie, dass Kathys Behauptungen richtig sind.

Der Höhenverlauf der Schiffsschaukel läßt sich über einen einstellbaren Parameter a verändern:

$$h_1(t) = a \cdot \cos(0{,}2 \cdot \pi \cdot t) + 4{,}5 \qquad \text{mit } a < 0 \text{ und } t \geq 0$$

Die Beobachtungszeit t beginnt, wenn die Schiffsschaukel volle Fahrt aufgenommen hat und sich am Einstiegsort befindet. Aus Sicherheitsgründen soll die Änderungsrate der Höhe $h_1'(t)$ den Betrag von $3\ \frac{m}{s}$ bei Kleinkindern nicht überschreiten.

h) Begründen Sie, dass die maximale Änderungsrate von h_1 in den Wendepunkten vorliegt und

ermitteln Sie, für welche Werte von a die maximale Änderungsrate der Höhe der Schiffsschaukel der Sicherheitsvorgabe entspricht.

Annikas Mitschüler fragen sich, ob nur die Amplitude der Funktionsgleichung Einfluss auf die maximale Änderungsrate der Höhe von „Wykkie" hat, oder ob die anderen Parameter sich auch darauf auswirken.

i) Untersuchen Sie den Einfluss der Parameter b und d der Funktion vom Typ

$$h_2(t) = -3{,}5 \cdot \cos(b \cdot t) + d \qquad \text{mit } t \geq 0$$

auf die maximale Änderungsrate der Höhe der Schiffsschaukel.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 3: Kreuzfahrtschiff**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	6	4	6	5	3	6	5	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Die Reisestrecke von Kiel nach Trelleborg ist Teil einer mehrtägigen Ostseekreuzfahrt. Um die Umwelt und die Ressourcen zu schonen, hat die Reederei für diese Teilstrecke eine Herabsetzung der Schiffsgeschwindigkeit beschlossen. Durch diese Verringerung wird nicht nur Treibstoff eingespart, sondern auch direkt proportional zum Treibstoffverbrauch der Ausstoß des klimaschädlichen Treibhausgases Kohlenstoffdioxid (CO_2) reduziert.

In der Abbildung 3.1 ist der Treibstoffverbrauch in Tonnen pro Stunde in Abhängigkeit von der Reisedauer t in Stunden durch den Graphen g vor der Geschwindigkeitsreduzierung und den Graphen h nach der Geschwindigkeitsreduzierung graphisch dargestellt.

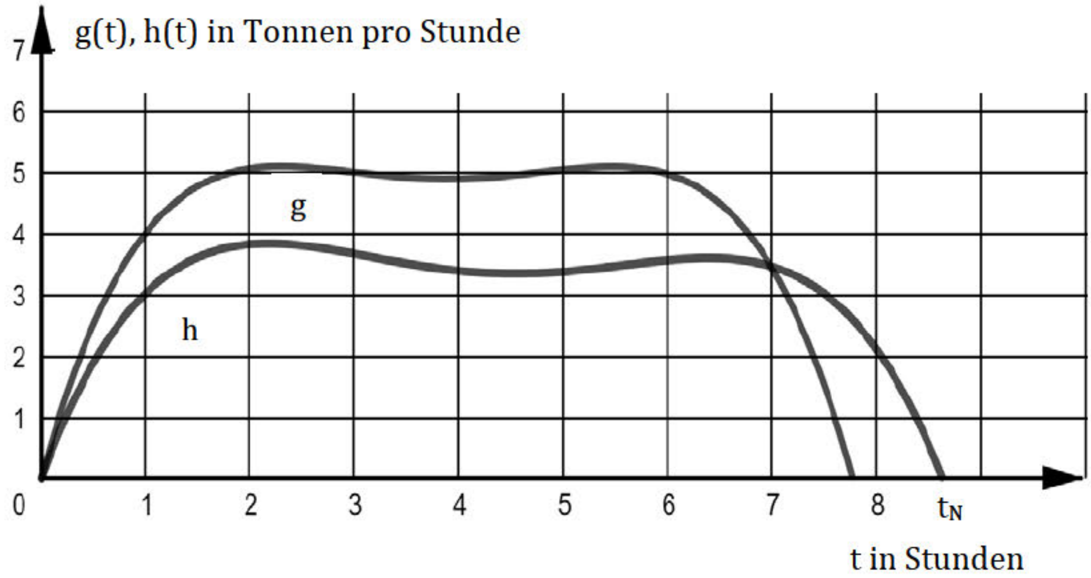

Abbildung 3.1

a) Vergleichen Sie die in Abbildung 3.1 dargestellten Graphen der Funktionen g und h anhand dreier Aspekte im Sachzusammenhang.

Der Verlauf des Graphen g soll mit einer ganzrationalen Funktion 4. Grades modelliert werden. Es ist bekannt, dass der höchste Verbrauch vor der Reduzierung der Schiffsgeschwindigkeit nach 2,3 und 5,46 Stunden bei jeweils 5,08 Tonnen pro Stunde lag.

b) Geben Sie geeignete Bedingungsgleichungen für die Modellierung von g in der nötigen Anzahl an.

Ein Aufstellen des Gleichungssystems ist nicht erforderlich.

Der Verlauf des Graphen h wird durch die Funktionsgleichung h(t) beschrieben:

$$h(t) = -0{,}0185 \cdot t^4 + 0{,}323 \cdot t^3 - 1{,}95 \cdot t^2 + 4{,}66 \cdot t \qquad \text{mit } 0 \leq t \leq t_N$$

c) Berechnen Sie den größten momentanen Treibstoffverbrauch in Tonnen pro Stunde nach der Geschwindigkeitsreduzierung und

begründen Sie, dass die Betrachtung der größten Werte des Treibstoffverbrauchs nicht geeignet ist, um eine Aussage über die Minderung des CO_2-Ausstoßes auf der Reisestrecke von Kiel nach Trelleborg treffen zu können.

Die Reisedauer vor der Reduzierung der Schiffsgeschwindigkeit betrug 7,76 Stunden und verlängert sich nach der Geschwindigkeitsreduzierung um 51,6 Minuten für die 277,61 km lange Strecke von Kiel nach Trelleborg.

Nach Aussage der Reederei wird die Geschwindigkeit, die das Verhältnis von Weg zu Zeit angibt, im Mittel um etwa $3{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ reduziert.

d) Prüfen Sie die Aussage der Reederei.

e) Geben Sie den Wert des Integrals $\int_0^{8{,}62} h(t)\,dt$ an und

interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Zur Erhaltung der Stabilität des Schiffskörpers benötigt das Kreuzfahrtschiff Ballastwasser (Seewasser), welches in den Häfen in Tanks aufgenommen oder daraus abgelassen wird. So werden Meeresorganismen wie kleine Tiere, Larven, Pflanzen oder Bakterien in andere Regionen verschleppt, die dort ökologische und ökonomische Schäden verursachen können. [redacted] Jede Ballastwasser-Behandlungsanlage wird auf ihre Wirksamkeit und Umweltverträglichkeit untersucht.

Bei Untersuchungen der Bakterienbelastung ergaben durchgeführte Messungen in einem Tank, dass der Bakterienbestand im Ballastwasser in Abhängigkeit von der Zeit t nach dem Filtern durch eine abschnittsweise definierte Funktion B wie folgt modelliert werden kann:

$$B(t) = \begin{cases} m \cdot t + 100 & \text{für } 0 \leq t < \_\_ \\ 60 - 0{,}2 \cdot e^{0{,}205 \cdot t} & \text{für } \_\_ \leq t \leq 27{,}8 \end{cases}$$

B(t): prozentualer Bakterienbestand, t: Zeit in Stunden, e: Eulersche Zahl

f) Berechnen Sie den Zeitpunkt t, an dem der lineare Abbau des Bakterienbestandes annähernd sprung- und knickfrei in den exponentiellen Abbau übergeht und

ermitteln Sie die dazugehörige Steigung m des linearen Abschnittes.

[1] https://www.umweltbundesamt.de/themen/chemikalien/biozide/ballastwasserbehandlung

Nach einer chemischen Ballastwasserbehandlung sank der Bakterienbestand von 100 % zum Zeitpunkt $t = 0$ bereits nach 6 Stunden auf 73,9 % und nach weiteren 5 Stunden auf 42 % . Der Bakterienbestand nach chemischer Behandlung soll mit der Funktionsgleichung P(t) der Form

$$P(t) = a - b \cdot e^{c \cdot t} \text{ mit } t \geq 0 \text{ und } a, b, c > 0 \text{ beschrieben werden.}$$

P(t): prozentualer Bakterienbestand nach chemischer Ballastwasserbehandlung, t: Zeit in Stunden, e: Eulersche Zahl

g) Bestimmen Sie die Werte für a, b und c gerundet auf zwei Nachkommastellen.

Gehen Sie im Folgenden von $a = 150$, $b = 50$ und $c = 0{,}07$ aus.

h) Ermitteln Sie, wie viele Stunden es dauert, bis mit der chemischen Ballastwasserbehandlung nur noch die Hälfte des Anfangsbestandes der Bakterien im Tank ist und berechnen Sie den prozentualen Abbau pro Stunde zu dieser Zeit t.