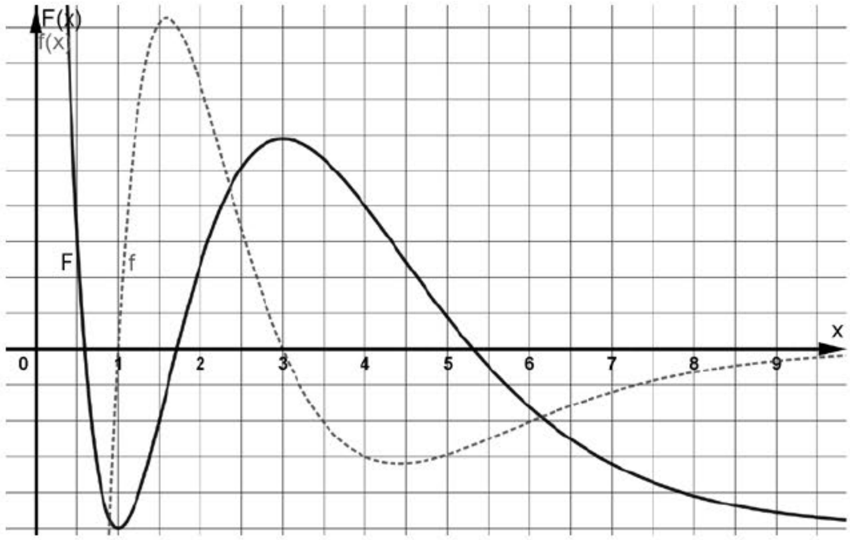
Aufgabe 1 A mit Analytischer Geometrie:

	Anforderungen	Modelllösungen	
A1	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. <u>Bemerkung</u>: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	BE
1a	skizziert den Graphen einer möglichen Stammfunktion F von f in das obere Koordinatensystem (Abbildung 1.1) und entscheidet begründet, ob die Aussage wahr oder falsch ist.	 	5
		Aussage: Der Funktionsgraph von f' besitzt zwei Wendepunkte. **Entscheidung und Begründung:** Die Aussage ist wahr. Der Graph von $f'(x)$ wechselt zweimal sein Krümmungsverhalten, also besitzt der Graph von $f'(x)$ zwei Wendepunkte.	
1b	zeigt, dass der Graph der Funktion f_b im Schnittpunkt mit der Ordinatenachse die Steigung $m = -b$ hat und berechnet den Wert für den Parameter b so, dass der Graph mit der Abszissenachse eine Fläche von 4 FE einschließt.	Es gilt: $f_b'(x) = 1{,}5x^2 - b$ Damit gilt $m = f_b'(0) = -b$. Bestimmen der Nullstellen als Integrationsgrenzen: $0 = 0{,}5 \cdot x^3 - b \cdot x$ $\Leftrightarrow 0 = x \cdot (0{,}5 \cdot x^2 - b)$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee 0{,}5 \cdot x^2 - b = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 2b$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt{2b} \vee x = -\sqrt{2b}$ *Fortsetzung nächste Seite*	5

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>zu 1b</td><td></td><td>Eine mögliche Stammfunktion ist $F_b(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2} \cdot b \cdot x^2$

Wegen der Punktsymmetrie zum Ursprung genügt es, den Flächeninhalt im II. Quadranten zu betrachten. Dieser ist 2 FE groß.

Für den Inhalt der gesuchten Fläche gilt:

$2 \cdot \int_{-\sqrt{2b}}^{0} f_b(x)\,dx = 4$
$\Leftrightarrow 2 \cdot [F_b(x)]_{-\sqrt{2b}}^{0} = 4$
$\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{8} \cdot \left(-\sqrt{2b}\right)^4 - \frac{1}{2}b \cdot \left(-\sqrt{2b}\right)^2\right) = 2$
$\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{8} \cdot 4b^2 - \frac{1}{2}b \cdot 2b\right) = 2$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}b^2 = 2$
$\Leftrightarrow b^2 = 4$
$\Leftrightarrow b = 2 \ \vee \ b = -2$
Aufgrund der Einschränkung $b > 0$ gibt es nur die Lösung $b = 2$.</td><td></td></tr>
<tr><td>1c</td><td>bestimmt einen Term für alle Nullstellen von $f_{a;b}$ und

entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>Für Nullstellen gilt: $f_{a;b}(x) = 0$
$\Leftrightarrow 0 = a \cdot \cos(b \cdot x) + a$
$\Leftrightarrow -1 = \cos(b \cdot x)$
Damit liegt eine Nullstelle bei $x = \frac{\pi}{b}$
Durch die Periodenlänge $p = \frac{2\pi}{b}$ ergibt sich der Term für alle Nullstellen:
$\frac{\pi}{b} + n \cdot \frac{2\pi}{b}$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

<table><tr><th>Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).</th><th>wahr</th><th>falsch</th></tr><tr><td>Für alle x gilt: Wenn $a < 0$, dann gilt $f_{a;b}(x) < 0$.</td><td></td><td>x</td></tr><tr><td>Es gilt: $g_{a;b}(x) = f_{a;b}(x)$ für alle x.</td><td>x</td><td></td></tr></table></td><td>5</td></tr>
<tr><td>1d</td><td>erläutert, warum zwischen dem Graphen von f und der Abszisse zwei Flächen eingeschlossen werden und

begründet ohne Rechnung, dass $f'(4) = 0$ gilt und</td><td>Mit dem Satz vom Nullprodukt lassen sich mithilfe der Linearfaktordarstellung drei Nullstellen ermitteln. Somit werden zwei Flächen zwischen Graph und Abszisse eingeschlossen.

Durch die doppelte Nullstelle an der Stelle $x = 4$ hat f im Punkt $P(4|0)$ eine waagerechte Tangente. Somit gilt: $f'(4) = 0$.

Fortsetzung nächste Seite</td><td>5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>zu 1d</td><td>ermittelt die Gleichung der Ableitungsfunktion f'.</td><td>Anwendung des Distributivgesetzes:
$f(x) = (x^2 + x) \cdot (x - 4)^2$
Anwendung der Produkt- und Kettenregel:
$f'(x) = (2x + 1) \cdot (x - 4)^2 + (x^2 + x) \cdot 2 \cdot (x - 4)$</td><td></td></tr>
<tr><td>1e</td><td>zeigt, dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht orthogonal zueinander sind und

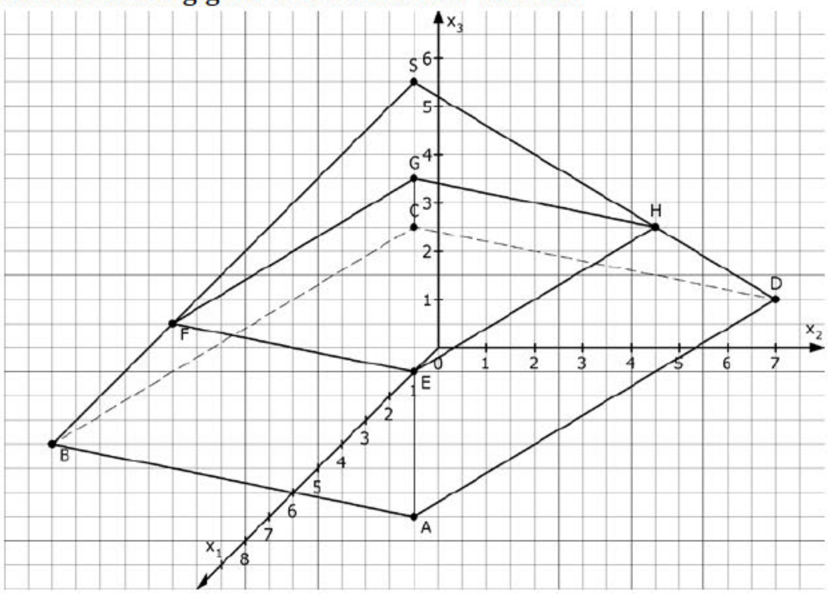
berechnet den Betrag von $\vec{c}$ und

gibt die geometrische Interpretation sowohl für das Kreuzprodukt $\vec{c}$ als auch für den Betrag von $\vec{c}$ an.</td><td>Es gilt:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 - 6 + 4 = 1 \neq 0$
Also sind die Vektoren nicht orthogonal zueinander.

$|\vec{c}\,| = \left| \begin{pmatrix} -10 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{100 + 16 + 121} = \sqrt{237}$

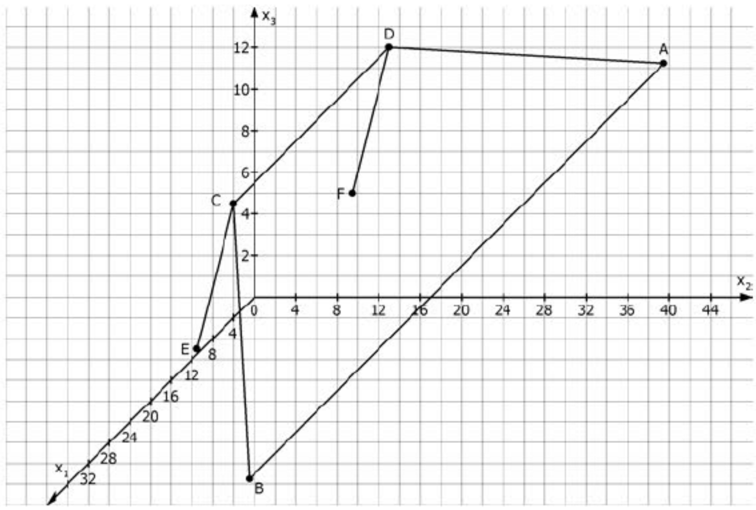
Das Kreuzprodukt $\vec{c}$ ist senkrecht zu den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, also ein Normalenvektor des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.
Dabei gibt der Betrag von $\vec{c}$ einerseits die Länge des Vektors an und ist andererseits der Wert für die Fläche des aufgespannten Parallelogramms.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1f</td><td>entscheidet begründet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind und

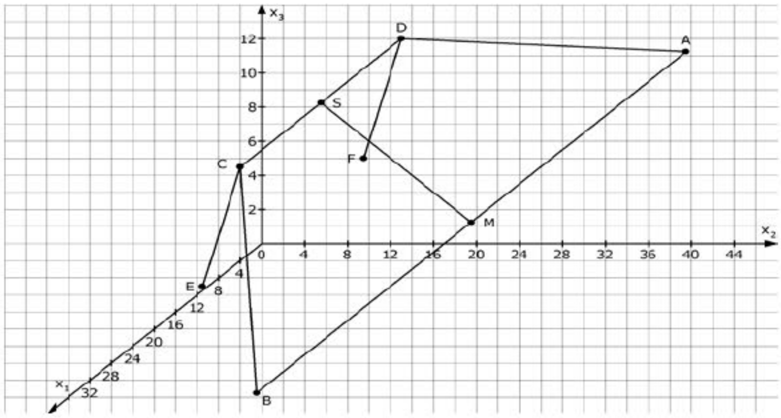
bestimmt den Parameter b so, dass der Punkt B in der Ebene E liegt.</td><td><table>
<tr><th>Aussage</th><th>Entscheidung und Begründung</th></tr>
<tr><td>Für $b = 4$ liegt der Punkt C auf der Geraden durch A und B.</td><td>Die Aussage ist wahr.
Mit $b = 4$ kann die Gerade durch A und B dargestellt werden durch
$g_{AB}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$
und mit $r = 2$ gilt dann:
$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OC}$</td></tr>
<tr><td>Die Gerade durch A und C ist orthogonal zur Ebene E.</td><td>Die Aussage ist wahr, denn der Normalenvektor der Ebene ist ein Vielfaches des Richtungsvektors der Geraden durch A und C.</td></tr>
</table>
Die Koordinaten des Punktes $B(3 \mid b \mid -1)$ in die Ebenengleichung E einsetzen:
$5 \cdot 3 + 3 \cdot b - 5 \cdot (-1) = 5$
$\Leftrightarrow b = -5$</td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	
1g	berechnet den Schnittpunkt S der Geraden g mit der Ebene E_1 und	Das Einsetzen der Koordinaten x_1, x_2, x_3 in die Ebenengleichung von E_1 führt zu einer linearen Gleichung für den Parameter t: $15 \cdot (-2t) + 10 \cdot (1 + t) + 6 \cdot (2 + 3t) = 30$ $\Leftrightarrow t = -4.$ Das Einsetzen von t in g ergibt die Koordinaten des Schnittpunkts $S(8 \mid -3 \mid -10)$.	5
	beschreibt ein rechnerisches Verfahren, das angewendet werden kann, um zu zeigen, dass die Gerade g in der Ebene E_2 liegt.	Das Gleichsetzen der Geradengleichung mit der Ebenengleichung führt zu einem linearen Gleichungssystem (LGS) mit drei Gleichungen und den drei Parametern als unbekannten Größen. Wenn das LGS unendlich viele Lösungen besitzt, die Parameter also linear abhängig sind, dann liegt die Gerade g in der Ebene E_2.	
1h	zeichnet die Spitze S der vollständigen Pyramide in Abbildung 1.3 ein und	Die Spitze S kann als Schnittpunkt der Geraden g_1 durch B und F sowie g_2 durch D und H für die konkrete Abbildung gezeichnet und auch in Abhängigkeit von z bestimmt werden.  	5
	weist nach, dass die Spitze S der vollständigen Pyramide in Abhängigkeit von der Höhe z des Pyramidenstumpfs die Koordinaten $S(1 \mid 0 \mid 3z)$ hat und	Es gilt $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$ und $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ z \end{pmatrix}$. Das Gleichsetzen führt zum linearen Gleichungssystem I: $4 - r = -2 + t$ II: $-6 + 2r = 6 - 2t$ III: $r \cdot z = t \cdot z$ Umformungen ergeben, dass I und II linear abhängig sind und aus III folgt $r = t$: I: $6 - r = t$ II: $-12 + 2r = -2t$ III: $r = t$, denn $z \neq 0$ *Fortsetzung nächste Seite*	

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 1h		Somit ist $r = t = 3$ und damit sowohl für g_1 als auch für g_2 $S(1\,\vert 0\,\vert 3z)$, denn $\begin{pmatrix}4\\-6\\0\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\3z\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-2\\6\\0\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\3z\end{pmatrix}$	
	zeigt, dass unabhängig von der Höhe z des Pyramidenstumpfs die Flächeninhalte der Quadrate ABCD und EFGH im Verhältnis 9 : 4 stehen.	Zu zeigen ist: $\left(\left\vert\overrightarrow{AB}\right\vert\right)^2 : \left(\left\vert\overrightarrow{EF}\right\vert\right)^2 = 9:4$ Mit den Punkten A und B kann die quadratische Grundfläche mit dem Flächeninhalt $Q_1 = \left(\left\vert\overrightarrow{AB}\right\vert\right)^2$ berechnet werden: $\left\vert\overrightarrow{AB}\right\vert = \sqrt{3^2+9^2}$ $= \sqrt{9+81}$ $= \sqrt{90}$ Mit den Punkten F und H kann zunächst die Länge der Diagonale d_2 der oberen Quadratfläche mit dem Flächeninhalt $Q_2 = \left(\left\vert\overrightarrow{EF}\right\vert\right)^2$ berechnet werden. $d_2 = \left\vert\overrightarrow{FH}\right\vert$ $= \sqrt{4^2+8^2}$ $= \sqrt{16+64}$ $= \sqrt{80}$ Aus $(d_2)^2 = 2\cdot\left(\left\vert\overrightarrow{EF}\right\vert\right)^2$ folgt $\left\vert\overrightarrow{EF}\right\vert = \sqrt{40}$ und somit $\left(\left\vert\overrightarrow{AB}\right\vert\right)^2 : \left(\left\vert\overrightarrow{EF}\right\vert\right)^2 = 90:40$ $= 9:4$	
			40

Aufgabe 2: Miniatur-Autorennen

	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
2a	weist nach, dass die Gleichung $x_2 + 2x_3 = 17$ die Ebene durch die drei Punkte A, B und C festlegt.	Die Koordinaten der drei Punkte A, B und C erfüllen die gegebene Gleichung: Punkt A: $0 \cdot (-45) + 1 \cdot 17 + 2 \cdot 0 = 17$. Punkt B: $0 \cdot (35) + 1 \cdot 17 + 2 \cdot 0 = 17$. Punkt C: $0 \cdot (10) + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 7 = 17$. Da die drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen, legen sie eine Ebene fest. Also beschreibt die Gleichung $x_2 + 2x_3 = 17$ die Ebene, die durch die Punkte A, B und C festgelegt wird.	4
2b	bestimmt die Koordinaten des Punkts D, der das Dreieck durch die Punkte A, B und C zu einem gleichschenkligen Trapez ABCD ergänzt.	Da $\overrightarrow{BA}$ parallel zu $\overrightarrow{CD}$ ist, ist $D(d_1 \mid 3 \mid 7)$. Die Koordinate d_1 ergibt sich aus dem Abstand von B zu C. Berechnung: $\lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \lvert\overrightarrow{AD}\rvert$ $\Leftrightarrow \sqrt{25^2 + 14^2 + 7^2} = \sqrt{(-45 - d_1)^2 + 14^2 + 7^2}$ $\Leftrightarrow 25^2 = (-45 - d_1)^2$ $\Leftrightarrow -45 - d_1 = 25 \lor -45 - d_1 = -25$ $\Leftrightarrow d_1 = -70 \lor d_1 = -20$ Die Lösung $d_1 = -70$ führt zu einem Parallelogramm und nur der Wert $d_1 = -20$ führt zum abgebildeten Trapez. Also ist $D(-20 \mid 3 \mid 7)$.	4
2c	ergänzt begründet die fehlenden Skalierungen der Achsen in Abbildung 2.1 durch jeweils drei Zahlenwerte auf der x_1-Achse und der x_2-Achse.	Da sowohl $A(-45 \mid 17 \mid 0)$ als auch $B(35 \mid 17 \mid 0)$ mit $x_2 = 17$ in der x_1-x_2-Ebene liegt, kann der Schnitt der Strecke von A nach B mit der x_2-Achse als 17 ermittelt werden. Da dies etwa nach 8,5 Kästchen der x_2-Achse liegt, kann auf der x_2-Achse nach zwei Kästchen der Skalierungswert 4 festgelegt werden. Vom Schnitt der Strecke von A nach B mit der x_2-Achse sind es etwa neun Kästchendiagonalen zu B und etwa elf Kästchendiagonalen zu A. Das bedeutet, dass auf der x_1-Achse nach einer Kästchendiagonale der Skalierungswert 4 festgelegt werden muss. 	4

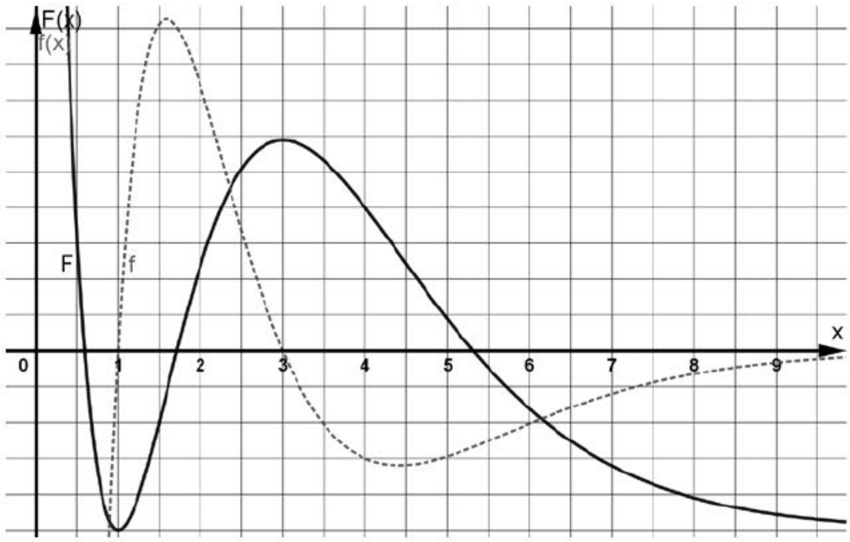
	Anforderungen	Modelllösungen	
2d	erstellt für die Fahrbahn des Miniatur-Autos „Tiger“ auf der schiefen Ebene eine Geradengleichung und	Die Mitte des unteren Randes ist der Punkt $M(m_1\,|\,17\,|0)$. Dabei ist die Koordinate m_1 bestimmt durch $m_1 = 0{,}5 \cdot (-45 + 35) = -5$. Als Geradengleichung ergibt sich mit $S(-5\,|\;3\,|\,7)$ z. B.: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ -7 \end{pmatrix}$	6
	gibt das Intervall an, in dem der Parameter r liegen muss, und	In Abhängigkeit von der gewählten Darstellung in g kann das Intervall für den Parameter r angegeben werden. Hier ist für $r = 0$ der Startpunkt S und für $r = 1$ der Punkt M erreicht. Also ist das Intervall $0 \leq r \leq 1$.	
	zeichnet den Verlauf der Geraden g in das Koordinatensystem in Abbildung 2.1 ein.	Die Gerade kann als Verbindungslinie der Mittelpunkte zwischen C und D, dem Punkt S, sowie zwischen A und B, dem Punkt M, gezeichnet werden:  	
2e	berechnet die Länge des Richtungsvektors von f und	Die Länge des Richtungsvektors ist $\left\lvert \begin{pmatrix} 10 \\ 34 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rvert = \sqrt{10^2 + 34^2 + 0^2}$ $= \sqrt{1256}$ $\approx 35{,}44$	4
	interpretiert diesen Wert im Sachzusammenhang.	Der Richtungsvektor hat eine Länge von etwa 35,4 cm. Tiger legt also in einer Sekunde 35,4 cm zurück. Das kann als Geschwindigkeit von $0{,}354\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ interpretiert werden.	
2f	leitet den Term auf der rechten Seite der angegebenen Ungleichung her und	Der rechte Term der Ungleichung kann mit dem minimalen Abstand zwischen einem Punkt und einer Geraden hergeleitet werden: Mit dem Punkt $R(r_1\,|\,r_2\,|\,0)$ und der Geradengleichung $f: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 23{,}8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 34 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich: $\lvert\overrightarrow{XP}\rvert = \left\lvert \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 + 10t \\ 23{,}8 + 34t \\ 0 \end{pmatrix} \right\rvert$ $= \sqrt{(r_1 + 3 - 10t)^2 + (r_2 - 23{,}8 - 34t)^2}$ *Fortsetzung nächste Seite*	6*

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2f	interpretiert den Wert 3,0.	Mit der halben Breite des Miniatur-Autos von 2 cm und dem halben Durchmesser des Pfostens von 10 mm (= 1 cm) ergibt sich der Wert 3,0. Der Abstand zwischen dem Hindernis und der Fahrbahn, die als Gerade ohne Ausdehnung beschrieben wird, muss dann größer als 3,0 (Zentimeter) sein, so dass sich die Ungleichung $3{,}0 < \sqrt{(r_1 + 3 - 10t)^2 + (r_2 - 23{,}8 - 34t)^2}$ ergibt.	
2g	untersucht, ob „Tiger" an dem Pfosten im Punkt P vorbeifahren kann.	Für die Untersuchung kann der gegebene Term durch das Einsetzen der Koordinaten des Punktes P(4,3 |39 |0) zur Abstandsbestimmung genutzt werden: $\lvert\overrightarrow{XP}\rvert = \sqrt{(4{,}3 + 3 - 10t)^2 + (39 - 23{,}8 - 34t)^2}$ $= \sqrt{(7{,}3 - 10t)^2 + (15{,}2 - 34t)^2}$ $= \sqrt{7{,}3^2 - 146t + 100t^2 + 15{,}2^2 - 1033{,}6t + 1156t^2}$ $= \sqrt{1256t^2 - 1179{,}6t + 284{,}33}$ Der Betrag ist minimal, falls $1256t^2 - 1179{,}6t + 284{,}33$ minimal ist, also für den Wert t, der sich aus der Gleichung $2512\,t - 1179{,}6 = 0$ ergibt. Daraus folgt $t = \frac{1179{,}6}{2512} = \frac{2949}{6280}$ Dann ist $\lvert\overrightarrow{XP}\rvert = \sqrt{1256 \cdot \left(\frac{2949}{6280}\right)^2 - 1179{,}6 \cdot \left(\frac{2949}{6280}\right) + 284{,}33}$ Also: $\lvert\overrightarrow{XP}\rvert \approx 2{,}71$ [cm] Der Abstand zwischen der Geraden f und dem Punkt P beträgt etwa 2,71 cm. Er ist somit größer als die halbe Wagenbreite von 2,0 cm. Doch die Differenz ist kleiner als der halbe Durchmesser des Pfostens von 10 mm und somit schafft „Tiger" es nicht an dem Pfosten im Punkt P vorbei zu fahren.	6*
2h	ermittelt näherungsweise die Höhe h, die die obere Kante der Startrampe haben sollte, damit eine Neigung von 15° erreicht wird.	Durch das Kippen der Startrampe kann die Höhe und damit auch die Neigung verändert werden, ohne dass die Rampe an den Punkten A und B verändert werden muss. Die gesuchte Höhe ist dann die Gegenkathete in einem rechtwinkligen Dreieck. Für ein solches rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse c kann z. B. die Mitte des unveränderten unteren Randes M(−5| 17 |0) und der durch das Kippen veränderte „Startpunkt" $S_{neu}(-5\mid x_2 \mid h)$ genutzt werden, der identisch in der ersten Koordinate mit M ist. Als dritter Punkt im rechtwinkligen Dreieck ergibt sich der Punkt $Q(-5\mid x_2 \mid 0)$, der in der x_1-x_2-Ebene unterhalb von S_{neu} liegt. Für die Höhe h soll in diesem Dreieck gelten: $h = c \cdot \sin(15°)$. Die Hypotenuse c kann in dem rechtwinkligen Dreieck vor dem Kippen mit den Punkten M(−5| 17| 0) und S(−5| 3 |7) sowie Q(−5| 3 |0) berechnet werden. Somit ist die gesuchte Höhe $h = \sqrt{14^2 + 7^2} \cdot \sin(15°)$ $\approx 4{,}05$ Die gesuchte Höhe sollte also etwa 4 cm betragen.	6*
			40

Aufgabe 1 B mit Analytischer Geometrie:

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>A1</td><td>Der Prüfling</td><td>Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:
Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.
<u>Bemerkung</u>:
Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.</td><td>BE</td></tr>
<tr><td>1a</td><td>skizziert den Graphen einer möglichen Stammfunktion F von f in das obere Koordinatensystem (Abbildung 1.1) und

entscheidet begründet, ob die Aussage wahr oder falsch ist.</td><td>



<table>
<tr><th>Aussage</th><th>Entscheidung und Begründung</th></tr>
<tr><td>Der Funktionsgraph von f′ besitzt zwei Wendepunkte.</td><td>Die Aussage ist wahr.
Der Graph von $f'(x)$ wechselt zweimal sein Krümmungsverhalten, also besitzt der Graph von $f'(x)$ zwei Wendepunkte.</td></tr>
</table>

</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>zeigt, dass der Graph der Funktion f_b im Schnittpunkt mit der Ordinatenachse die Steigung $m = -b$ hat und

berechnet den Wert für den Parameter b so, dass der Graph mit der Abszissenachse eine Fläche von 4 FE einschließt.</td><td>Es gilt: $f_b'(x) = 1{,}5x^2 - b$
Damit gilt $m = f_b'(0) = -b$.

Bestimmen der Nullstellen als Integrationsgrenzen:
$0 = 0{,}5 \cdot x^3 - b \cdot x$
$\Leftrightarrow 0 = x \cdot (0{,}5 \cdot x^2 - b)$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee 0{,}5 \cdot x^2 - b = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 2b$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt{2b} \vee x = -\sqrt{2b}$

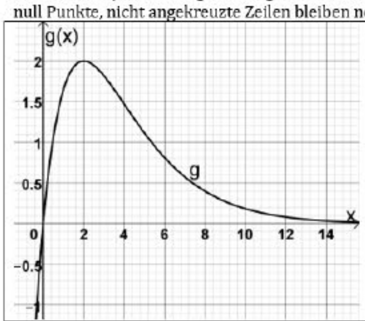
Fortsetzung nächste Seite</td><td>5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>zu 1b</td><td></td><td>Eine mögliche Stammfunktion ist $F_b(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2} \cdot b \cdot x^2$

Wegen der Punktsymmetrie zum Ursprung genügt es, den Flächeninhalt im II. Quadranten zu betrachten. Dieser ist 2 FE groß.

Für den Inhalt der gesuchten Fläche gilt:

$2 \cdot \int_{-\sqrt{2b}}^{0} f_b(x)\,dx = 4$
$\Leftrightarrow 2 \cdot [F_b(x)]_{-\sqrt{2b}}^{0} = 4$
$\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{8} \cdot \left(-\sqrt{2b}\right)^4 - \frac{1}{2}b \cdot \left(-\sqrt{2b}\right)^2\right) = 2$
$\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{8} \cdot 4b^2 - \frac{1}{2}b \cdot 2b\right) = 2$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}b^2 = 2$
$\Leftrightarrow b^2 = 4$
$\Leftrightarrow b = 2 \;\lor\; b = -2$
Aufgrund der Einschränkung $b > 0$ gibt es nur die Lösung $b = 2$.</td><td></td></tr>
<tr><td>1c</td><td>weist rechnerisch nach, dass der Graph der Funktion f_k im Punkt $E\left(\frac{1}{k} \middle| \frac{2}{e \cdot k}\right)$ eine waagerechte Tangente besitzt und

entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>In einem Punkt mit waagerechter Tangente gilt $f_k'(x) = 0$
$f_k'(x) = 2 \cdot e^{-k \cdot x} - k \cdot 2 \cdot x \cdot e^{-k \cdot x}$
$0 = 2 \cdot e^{-k \cdot x} - k \cdot 2 \cdot x \cdot e^{-k \cdot x}$
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{k}$
$f_k\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{2}{k \cdot e}$
Also besitzt der Graph der Funktion f_k im Punkt $E\left(\frac{1}{k} \middle| \frac{2}{e \cdot k}\right)$ eine waagerechte Tangente.
<table>
<tr><th><u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).</th><th>wahr</th><th>falsch</th></tr>
<tr><td>

Der nebenstehende Graph g stellt die Funktion f_k mit $k = 0{,}5$ dar.</td><td></td><td>x</td></tr>
<tr><td>Es gilt: $f_k''(x) = e^{-k \cdot x} \cdot 2 \cdot k^2 \cdot \left(x - \frac{2}{k}\right)$.
Also gilt $f_k''(x) > 0$ für alle $x > \frac{2}{k}$.</td><td>x</td><td></td></tr>
</table></td><td>5</td></tr>
<tr><td>1d</td><td>erläutert, warum zwischen dem Graphen von f und der Abszisse zwei Flächen eingeschlossen werden und</td><td>Mit dem Satz vom Nullprodukt lassen sich mithilfe der Linearfaktordarstellung drei Nullstellen ermitteln. Somit werden zwei Flächen zwischen Graph und Abszisse eingeschlossen.

Fortsetzung nächste Seite</td><td>5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>zu 1d</td><td>begründet ohne Rechnung, dass $f'(4) = 0$ gilt und

ermittelt die Gleichung der Ableitungsfunktion f'.</td><td>Durch die doppelte Nullstelle an der Stelle $x = 4$ hat f im Punkt $P(4|0)$ eine waagerechte Tangente. Somit gilt: $f'(4) = 0$.

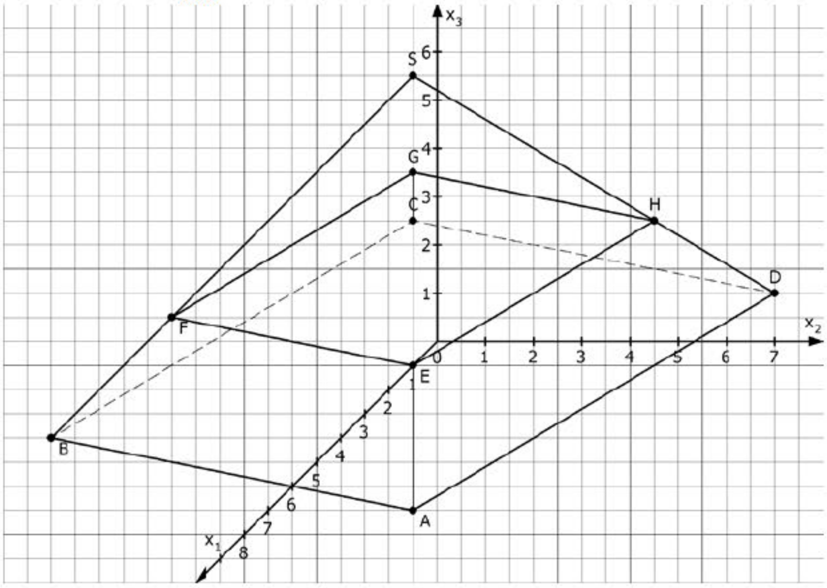
Anwendung des Distributivgesetzes:
$f(x) = (x^2 + x) \cdot (x - 4)^2$
Anwendung der Produkt- und Kettenregel:
$f'(x) = (2x + 1) \cdot (x - 4)^2 + (x^2 + x) \cdot 2 \cdot (x - 4)$</td><td></td></tr>
<tr><td>1e</td><td>zeigt, dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht orthogonal zueinander sind und

berechnet den Betrag von $\vec{c}$ und

gibt die geometrische Interpretation sowohl für das Kreuzprodukt $\vec{c}$ als auch für den Betrag von $\vec{c}$ an.</td><td>Es gilt:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 - 6 + 4 = 1 \neq 0$
Also sind die Vektoren nicht orthogonal zueinander.

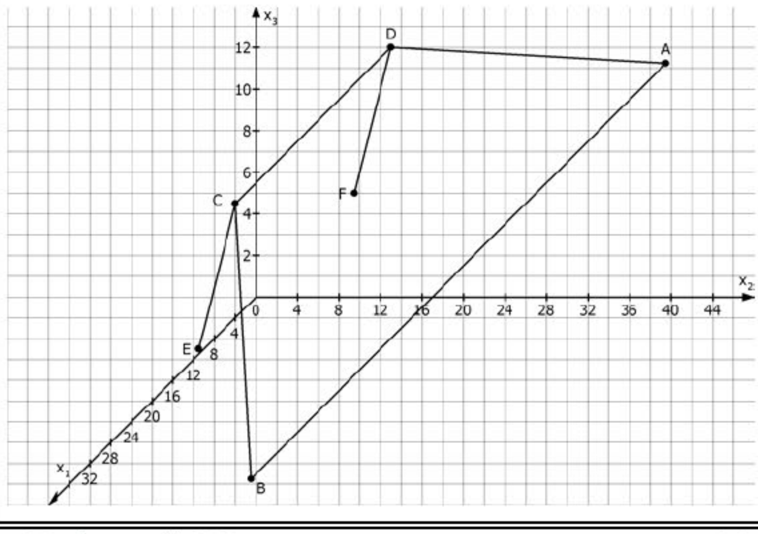
$|\vec{c}\,| = \left| \begin{pmatrix} -10 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{100 + 16 + 121} = \sqrt{237}$

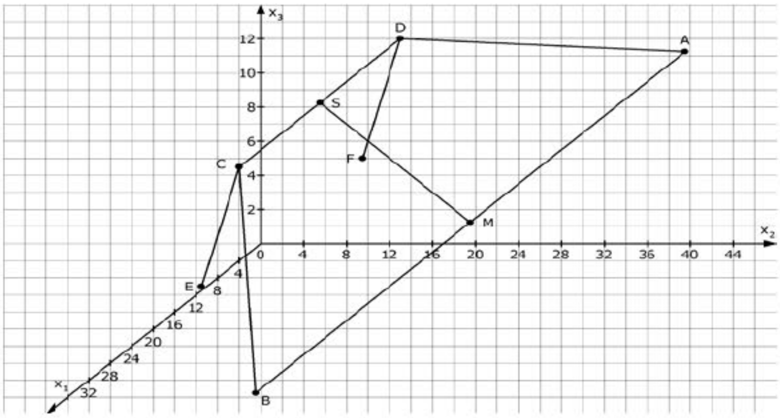
Das Kreuzprodukt $\vec{c}$ ist senkrecht zu den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, also ein Normalenvektor des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.
Dabei gibt der Betrag von $\vec{c}$ einerseits die Länge des Vektors an und ist andererseits der Wert für die Fläche des aufgespannten Parallelogramms.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1f</td><td>entscheidet begründet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind und</td><td>
<table>
<tr><th>Aussage</th><th>Entscheidung und Begründung</th></tr>
<tr><td>Für $b = 4$ liegt der Punkt C auf der Geraden durch A und B.</td><td>Die Aussage ist wahr.
Mit $b = 4$ kann die Gerade durch A und B dargestellt werden durch
$g_{AB}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$
und mit $r = 2$ gilt dann:
$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OC}$</td></tr>
<tr><td>Die Gerade durch A und C ist orthogonal zur Ebene E.</td><td>Die Aussage ist wahr, denn der Normalenvektor der Ebene ist ein Vielfaches des Richtungsvektors der Geraden durch A und C.</td></tr>
</table>
Fortsetzung nächste Seite</td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 1f	bestimmt den Parameter b so, dass der Punkt B in der Ebene E liegt.	Die Koordinaten des Punktes $B(3 \mid b \mid -1)$ in die Ebenengleichung E einsetzen: $5 \cdot 3 + 3 \cdot b - 5 \cdot (-1) = 5$ $\Leftrightarrow b = -5$	
1g	berechnet den Schnittpunkt S der Geraden g mit der Ebene E_1 und	Das Einsetzen der Koordinaten x_1, x_2, x_3 in die Ebenengleichung von E_1 führt zu einer linearen Gleichung für den Parameter t: $15 \cdot (-2t) + 10 \cdot (1 + t) + 6 \cdot (2 + 3t) = 30$ $\Leftrightarrow t = -4.$ Das Einsetzen von t in g ergibt die Koordinaten des Schnittpunkts $S(8 \mid -3 \mid -10)$.	5
	beschreibt ein rechnerisches Verfahren, das angewendet werden kann, um zu zeigen, dass die Gerade g in der Ebene E_2 liegt.	Das Gleichsetzen der Geradengleichung mit der Ebenengleichung führt zu einem linearen Gleichungssystem (LGS) mit drei Gleichungen und den drei Parametern als unbekannten Größen. Wenn das LGS unendlich viele Lösungen besitzt, die Parameter also linear abhängig sind, dann liegt die Gerade g in der Ebene E_2.	
1h	zeichnet die Spitze S der vollständigen Pyramide in Abbildung 1.3 ein und	Die Spitze S kann als Schnittpunkt der Geraden g_1 durch B und F sowie g_2 durch D und H für die konkrete Abbildung gezeichnet und auch in Abhängigkeit von z bestimmt werden.  	5
	weist nach, dass die Spitze S der vollständigen Pyramide in Abhängigkeit von der Höhe z des Pyramidenstumpfs die Koordinaten $S(1 \mid 0 \mid 3z)$ hat und	Es gilt $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$ und $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ z \end{pmatrix}$. Das Gleichsetzen führt zum linearen Gleichungssystem I: $4 - r = -2 + t$ II: $-6 + 2r = 6 - 2t$ III: $r \cdot z = t \cdot z$ *Fortsetzung nächste Seite*	

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 1h		Umformungen ergeben, dass I und II linear abhängig sind und aus III folgt $r = t$: I: $6 - r = t$ II: $-12 + 2r = -2t$ III: $r = t$, denn $z \neq 0$ Somit ist $r = t = 3$ und damit sowohl für g_1 als auch für g_2 $S(1 \mid 0 \mid 3z)$, denn $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3z \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3z \end{pmatrix}$	
	zeigt, dass unabhängig von der Höhe z des Pyramidenstumpfs die Flächeninhalte der Quadrate ABCD und EFGH im Verhältnis 9 : 4 stehen.	Zu zeigen ist: $\left(\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert\right)^2 : \left(\left\lvert\overrightarrow{EF}\right\rvert\right)^2 = 9 : 4$ Mit den Punkten A und B kann die quadratische Grundfläche mit dem Flächeninhalt $Q_1 = \left(\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert\right)^2$ berechnet werden: $\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert = \sqrt{3^2 + 9^2}$ $= \sqrt{9 + 81}$ $= \sqrt{90}$ Mit den Punkten F und H kann zunächst die Länge der Diagonale d_2 der oberen Quadratfläche mit dem Flächeninhalt $Q_2 = \left(\left\lvert\overrightarrow{EF}\right\rvert\right)^2$ berechnet werden. $d_2 = \left\lvert\overrightarrow{FH}\right\rvert$ $= \sqrt{4^2 + 8^2}$ $= \sqrt{16 + 64}$ $= \sqrt{80}$ Aus $(d_2)^2 = 2 \cdot \left(\left\lvert\overrightarrow{EF}\right\rvert\right)^2$ folgt $\left\lvert\overrightarrow{EF}\right\rvert = \sqrt{40}$ und somit $\left(\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert\right)^2 : \left(\left\lvert\overrightarrow{EF}\right\rvert\right)^2 = 90 : 40$ $= 9 : 4$	
			40

Aufgabe 2: Miniatur-Autorennen

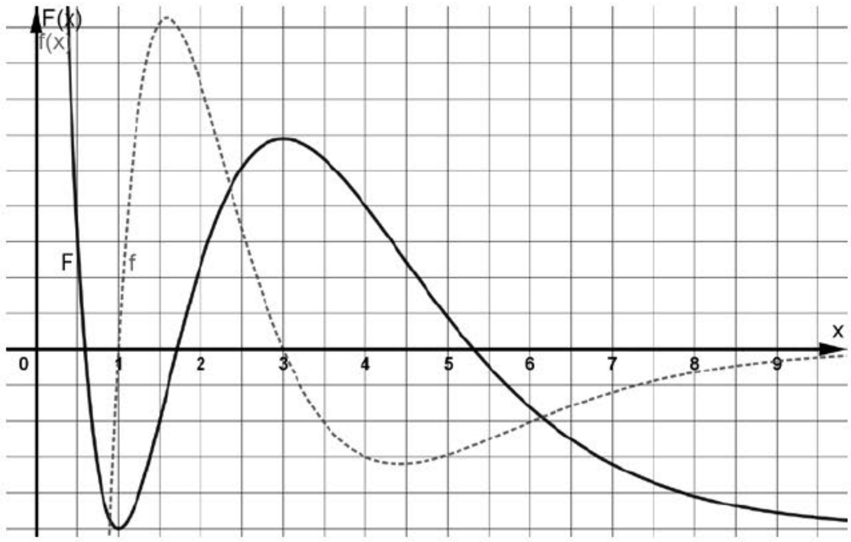
	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
2a	weist nach, dass die Gleichung $x_2 + 2x_3 = 17$ die Ebene durch die drei Punkte A, B und C festlegt.	Die Koordinaten der drei Punkte A, B und C erfüllen die gegebene Gleichung: Punkt A: $0 \cdot (-45) + 1 \cdot 17 + 2 \cdot 0 = 17.$ Punkt B: $0 \cdot (35) + 1 \cdot 17 + 2 \cdot 0 = 17.$ Punkt C: $0 \cdot (10) + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 7 = 17.$ Da die drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen, legen sie eine Ebene fest. Also beschreibt die Gleichung $x_2 + 2x_3 = 17$ die Ebene, die durch die Punkte A, B und C festgelegt wird.	4
2b	bestimmt die Koordinaten des Punkts D, der das Dreieck durch die Punkte A, B und C zu einem gleichschenkligen Trapez ABCD ergänzt.	Da $\overrightarrow{BA}$ parallel zu $\overrightarrow{CD}$ ist, ist $D(d_1 \mid 3 \mid 7)$. Die Koordinate d_1 ergibt sich aus dem Abstand von B zu C. Berechnung: $\lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \lvert\overrightarrow{AD}\rvert$ $\Leftrightarrow \sqrt{25^2 + 14^2 + 7^2} = \sqrt{(-45 - d_1)^2 + 14^2 + 7^2}$ $\Leftrightarrow 25^2 = (-45 - d_1)^2$ $\Leftrightarrow -45 - d_1 = 25 \vee -45 - d_1 = -25$ $\Leftrightarrow d_1 = -70 \vee d_1 = -20$ Die Lösung $d_1 = -70$ führt zu einem Parallelogramm und nur der Wert $d_1 = -20$ führt zum abgebildeten Trapez. Also ist $D(-20 \mid 3 \mid 7)$.	4
2c	ergänzt begründet die fehlenden Skalierungen der Achsen in Abbildung 2.1 durch jeweils drei Zahlenwerte auf der x_1-Achse und der x_2-Achse.	Da sowohl $A(-45 \mid 17 \mid 0)$ als auch $B(35 \mid 17 \mid 0)$ mit $x_2 = 17$ in der x_1-x_2-Ebene liegt, kann der Schnitt der Strecke von A nach B mit der x_2-Achse als 17 ermittelt werden. Da dies etwa nach 8,5 Kästchen der x_2-Achse liegt, kann auf der x_2-Achse nach zwei Kästchen der Skalierungswert 4 festgelegt werden. Vom Schnitt der Strecke von A nach B mit der x_2-Achse sind es etwa neun Kästchendiagonalen zu B und etwa elf Kästchendiagonalen zu A. Das bedeutet, dass auf der x_1-Achse nach einer Kästchendiagonale der Skalierungswert 4 festgelegt werden muss. 	4

	Anforderungen	Modelllösungen	
2d	erstellt für die Fahrbahn des Miniatur-Autos „Tiger“ auf der schiefen Ebene eine Geradengleichung und gibt das Intervall an, in dem der Parameter r liegen muss, und zeichnet den Verlauf der Geraden g in das Koordinatensystem in Abbildung 2.1 ein.	Die Mitte des unteren Randes ist der Punkt $M(m_1 \mid 17 \mid 0)$. Dabei ist die Koordinate m_1 bestimmt durch $m_1 = 0{,}5 \cdot (-45 + 35) = -5$. Als Geradengleichung ergibt sich mit $S(-5 \mid 3 \mid 7)$ z. B.: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ -7 \end{pmatrix}$ In Abhängigkeit von der gewählten Darstellung in g kann das Intervall für den Parameter r angegeben werden. Hier ist für $r = 0$ der Startpunkt S und für $r = 1$ der Punkt M erreicht. Also ist das Intervall $0 \leq r \leq 1$. Die Gerade kann als Verbindungslinie der Mittelpunkte zwischen C und D, dem Punkt S, sowie zwischen A und B, dem Punkt M, gezeichnet werden: 	6
2e	berechnet die Länge des Richtungsvektors von f und interpretiert diesen Wert im Sachzusammenhang.	Die Länge des Richtungsvektors ist $\left\lvert \begin{pmatrix} 10 \\ 34 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rvert = \sqrt{10^2 + 34^2 + 0^2}$ $= \sqrt{1256}$ $\approx 35{,}44$ Der Richtungsvektor hat eine Länge von etwa 35,4 cm. Tiger legt also in einer Sekunde 35,4 cm zurück. Das kann als Geschwindigkeit von $0{,}354\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ interpretiert werden.	4
2f	leitet den Term auf der rechten Seite der angegebenen Ungleichung her und	Der rechte Term der Ungleichung kann mit dem minimalen Abstand zwischen einem Punkt und einer Geraden hergeleitet werden: Mit dem Punkt $R(r_1 \mid r_2 \mid 0)$ und der Geradengleichung $f: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 23{,}8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 34 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich: $\lvert\overrightarrow{XP}\rvert = \left\lvert \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 + 10t \\ 23{,}8 + 34t \\ 0 \end{pmatrix} \right\rvert$ $= \sqrt{(r_1 + 3 - 10t)^2 + (r_2 - 23{,}8 - 34t)^2}$ *Fortsetzung nächste Seite*	6*

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2f	interpretiert den Wert 3,0.	Mit der halben Breite des Miniatur-Autos von 2 cm und dem halben Durchmesser des Pfostens von 10 mm (= 1 cm) ergibt sich der Wert 3,0. Der Abstand zwischen dem Hindernis und der Fahrbahn, die als Gerade ohne Ausdehnung beschrieben wird, muss dann größer als 3,0 (Zentimeter) sein, so dass sich die Ungleichung $3{,}0 < \sqrt{(r_1 + 3 - 10t)^2 + (r_2 - 23{,}8 - 34t)^2}$ ergibt.	
2g	untersucht, ob „Tiger" an dem Pfosten im Punkt P vorbeifahren kann.	Für die Untersuchung kann der gegebene Term durch das Einsetzen der Koordinaten des Punktes P(4,3 |39 |0) zur Abstandsbestimmung genutzt werden: $\lvert\overrightarrow{XP}\rvert = \sqrt{(4{,}3 + 3 - 10t)^2 + (39 - 23{,}8 - 34t)^2}$ $= \sqrt{(7{,}3 - 10t)^2 + (15{,}2 - 34t)^2}$ $= \sqrt{7{,}3^2 - 146t + 100t^2 + 15{,}2^2 - 1033{,}6t + 1156t^2}$ $= \sqrt{1256t^2 - 1179{,}6t + 284{,}33}$ Der Betrag ist minimal, falls $1256t^2 - 1179{,}6t + 284{,}33$ minimal ist, also für den Wert t, der sich aus der Gleichung $2512\,t - 1179{,}6 = 0$ ergibt. Daraus folgt $t = \frac{1179{,}6}{2512} = \frac{2949}{6280}$ Dann ist $\lvert\overrightarrow{XP}\rvert = \sqrt{1256 \cdot \left(\frac{2949}{6280}\right)^2 - 1179{,}6 \cdot \left(\frac{2949}{6280}\right) + 284{,}33}$ Also: $\lvert\overrightarrow{XP}\rvert \approx 2{,}71$ [cm] Der Abstand zwischen der Geraden f und dem Punkt P beträgt etwa 2,71 cm. Er ist somit größer als die halbe Wagenbreite von 2,0 cm. Doch die Differenz ist kleiner als der halbe Durchmesser des Pfostens von 10 mm und somit schafft „Tiger" es nicht an dem Pfosten im Punkt P vorbei zu fahren.	6*
2h	ermittelt näherungsweise die Höhe h, die die obere Kante der Startrampe haben sollte, damit eine Neigung von 15° erreicht wird.	Durch das Kippen der Startrampe kann die Höhe und damit auch die Neigung verändert werden, ohne dass die Rampe an den Punkten A und B verändert werden muss. Die gesuchte Höhe ist dann die Gegenkathete in einem rechtwinkligen Dreieck. Für ein solches rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse c kann z. B. die Mitte des unveränderten unteren Randes $M(-5\|\,17\,\|0)$ und der durch das Kippen veränderte „Startpunkt" $S_{neu}(-5\|\,x_2\,\|h)$ genutzt werden, der identisch in der ersten Koordinate mit M ist. Als dritter Punkt im rechtwinkligen Dreieck ergibt sich der Punkt $Q(-5\|\,x_2\|\,0)$, der in der x_1-x_2-Ebene unterhalb von S_{neu} liegt. Für die Höhe h soll in diesem Dreieck gelten: $h = c \cdot \sin(15°)$. Die Hypotenuse c kann in dem rechtwinkligen Dreieck vor dem Kippen mit den Punkten $M(-5\|\,17\|\,0)$ und $S(-5\|\,3\,\|7)$ sowie $Q(-5\|\,3\,\|0)$ berechnet werden. Somit ist die gesuchte Höhe $h = \sqrt{14^2 + 7^2} \cdot \sin(15°)$ $\approx 4{,}05$ Die gesuchte Höhe sollte also etwa 4 cm betragen.	6*
			40

Aufgabe 1 A: mit Linearer Algebra

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>A2</td><td>Der Prüfling ...</td><td>Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:
Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.
<u>Bemerkung</u>:
Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.</td><td>BE</td></tr>
<tr><td>1a</td><td>skizziert den Graphen einer möglichen Stammfunktion F von f in das obere Koordinatensystem (Abbildung 1.1) und

entscheidet begründet, ob die Aussage wahr oder falsch ist.</td><td>

<table>
<tr><th>Aussage</th><th>Entscheidung und Begründung</th></tr>
<tr><td>Der Funktionsgraph von f' besitzt zwei Wendepunkte.</td><td>Die Aussage ist wahr.
Der Graph von $f'(x)$ wechselt zweimal sein Krümmungsverhalten, also besitzt der Graph von $f'(x)$ zwei Wendepunkte.</td></tr>
</table></td><td>5</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>zeigt, dass der Graph der Funktion f_b im Schnittpunkt mit der Ordinatenachse die Steigung $m = -b$ hat und

berechnet den Wert für den Parameter b so, dass der Graph mit der Abszissenachse eine Fläche von 4 FE einschließt.</td><td>Es gilt: $f_b'(x) = 1{,}5x^2 - b$
Damit gilt $m = f_b'(0) = -b$.

Bestimmen der Nullstellen als Integrationsgrenzen:
$0 = 0{,}5 \cdot x^3 - b \cdot x$
$\Leftrightarrow 0 = x \cdot (0{,}5 \cdot x^2 - b)$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee 0{,}5 \cdot x^2 - b = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 2b$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt{2b} \vee x = -\sqrt{2b}$

Fortsetzung nächste Seite</td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 1b		Eine mögliche Stammfunktion ist $F_b(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2} \cdot b \cdot x^2$ Wegen der Punktsymmetrie zum Ursprung genügt es, den Flächeninhalt im II. Quadranten zu betrachten. Dieser ist 2 FE groß. Für den Inhalt der gesuchten Fläche gilt: $2 \cdot \int_{-\sqrt{2b}}^{0} f_b(x)\,dx = 4$ $\Leftrightarrow 2 \cdot [F_b(x)]_{-\sqrt{2b}}^{0} = 4$ $\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{8} \cdot \left(-\sqrt{2b}\right)^4 - \frac{1}{2}b \cdot \left(-\sqrt{2b}\right)^2\right) = 2$ $\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{8} \cdot 4b^2 - \frac{1}{2}b \cdot 2b\right) = 2$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2}b^2 = 2$ $\Leftrightarrow b^2 = 4$ $\Leftrightarrow b = 2 \;\vee\; b = -2$ Aufgrund der Einschränkung $b > 0$ gibt es nur die Lösung $b = 2$.	
1c	bestimmt einen Term für alle Nullstellen von $f_{a;b}$ und entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.	Für Nullstellen gilt: $f_{a;b}(x) = 0$ $\Leftrightarrow 0 = a \cdot \cos(b \cdot x) + a$ $\Leftrightarrow -1 = \cos(b \cdot x)$ Damit liegt eine Nullstelle bei $x = \frac{\pi}{b}$ Durch die Periodenlänge $p = \frac{2\pi}{b}$ ergibt sich der Term für alle Nullstellen: $\frac{\pi}{b} + n \cdot \frac{2\pi}{b}$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte). — wahr / falsch Für alle x gilt: Wenn $a < 0$, dann gilt $f_{a;b}(x) < 0$. — falsch: x Es gilt: $g_{a;b}(x) = f_{a;b}(x)$ für alle x. — wahr: x	5
1d	erläutert, warum zwischen dem Graphen von f und der Abszisse zwei Flächen eingeschlossen werden und begründet ohne Rechnung, dass $f'(4) = 0$ gilt und	Mit dem Satz vom Nullprodukt lassen sich mithilfe der Linearfaktordarstellung drei Nullstellen ermitteln. Somit werden zwei Flächen zwischen Graph und Abszisse eingeschlossen. Durch die doppelte Nullstelle an der Stelle $x = 4$ hat f im Punkt $P(4\|0)$ eine waagerechte Tangente. Somit gilt: $f'(4) = 0$. *Fortsetzung nächste Seite*	5

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 1d	ermittelt die Gleichung der Ableitungs-funktion f'.	Anwendung des Distributivgesetzes: $f(x) = (x^2 + x) \cdot (x - 4)^2$ Anwendung der Produkt- und Kettenregel: $f'(x) = (2x + 1) \cdot (x - 4)^2 + (x^2 + x) \cdot 2 \cdot (x - 4)$	
1e	entscheidet begründet, welches der Diagramme in Abbildung 1.4 den Zusammenhang für den gegebenen Übergangsgraphen korrekt widerspiegelt und erläutert, warum sich langfristig alle Objekte in Zustand C befinden werden.	Durch Berechnen der Übergänge kann die Entscheidung getroffen werden: $\begin{pmatrix} 0 & 0{,}8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow n = 1\text{: } 0 \text{ Objekte in Zustand A}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0{,}8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} \Rightarrow n = 2\text{: } 80 \text{ Objekte in Zustand A}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0{,}8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 80 \\ 20 \end{pmatrix} \Rightarrow n = 3\text{: } 0 \text{ Objekte in Zustand A}$ Das Diagramm 2 spiegelt den Zusammenhang korrekt wider. Ein Objekt in Zustand C kann diesen Zustand aufgrund der Übergangswahrscheinlichkeit von 100 % von C zu C nicht wieder verlassen. Der Knoten C ist eine Senke, die von allen anderen Knoten des Übergangsgraphen erreicht wird. Daraus folgt die Aussage.	5
1f	weist nach, dass für die gegebenen Matrizen $A^T \cdot D^T = (D \cdot A)^T$ gilt und	Es gilt: $A^T \cdot D^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 & a & b \\ 0{,}3 & c - 0{,}2 & 1 \\ 0{,}5 & c & 0 \end{pmatrix}^T$ $= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ a & c - 0{,}2 & c \\ b & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} a + 0{,}4 & c + 0{,}4 & c + 1 \\ b & 1 & 0 \\ a + 0{,}2 & c + 0{,}1 & c + 0{,}5 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} a + 0{,}4 & b & a + 0{,}2 \\ c + 0{,}4 & 1 & c + 0{,}1 \\ c + 1 & 0 & c + 0{,}5 \end{pmatrix}^T$ $= \left(\begin{pmatrix} 0{,}2 & a & b \\ 0{,}3 & c - 0{,}2 & 1 \\ 0{,}5 & c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)^T$ $= (D \cdot A)^T$	5
	bestimmt den Wert des Parameters b und die Intervalle für die Werte der Parameter a und c so, dass die Matrix D stochastisch ist.	Gegeben: $D = \begin{pmatrix} 0{,}2 & a & b \\ 0{,}3 & c - 0{,}2 & 1 \\ 0{,}5 & c & 0 \end{pmatrix}$ Aus der ersten Spalte ist ersichtlich, dass die Spaltensumme 1 ergibt (Zeilensumme 1 ist wegen der zweiten Zeile nicht möglich). Dies muss ebenso für die zweite und die dritte Spalte gelten: $b + 1 + 0 = 1 \Leftrightarrow b = 0$ $a + c - 0{,}2 + c = 1 \Leftrightarrow a = 1{,}2 - 2 \cdot c$ *Fortsetzung nächste Seite*	

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 1f		Die Elemente einer stochastischen Matrix entstammen dem Intervall $[0; 1]$. Aus $d_{22} = c - 0{,}2$ folgt somit $c \geq 0{,}2$ Aus $a = 1{,}2 - 2 \cdot c$ folgt somit $a \leq 0{,}8$ und $c \leq 0{,}6$. Für die Parameter a und c ergibt sich somit: $0 \leq a \leq 0{,}8$ und $0{,}2 \leq c \leq 0{,}6$.	
1g	bestimmt alle Wertetripel $(a;\ b;\ c)$ so, dass die Matrizen K und L zueinander invers sind.	Die Multiplikation zueinander inverser Matrizen ergibt als Produkt die Einheitsmatrix: $\begin{pmatrix} a^2 & b \\ a & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 \\ -0{,}25 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Daraus lassen sich vier Gleichungen erstellen: I $\quad 0{,}25 \cdot a^2 - 0{,}25 \cdot b = 1$ II $\quad b \cdot c = 0$ III $\quad 0{,}25 \cdot a - 0{,}25 \cdot a = 0$ (Aussage ist wahr.) IV $\quad a \cdot c = 1$ Aus Gleichung II ergeben sich mit dem Satz vom Nullprodukt zwei Fälle: 1. Fall: $c = 0$ Dies führt zum Widerspruch mit Gleichung IV. 2. Fall: $b = 0$ Mit der Gleichung I ergibt sich durch Einsetzen und Äquivalenzumformungen: $0{,}25 \cdot a^2 - 0{,}25 \cdot 0 = 1$ $\Leftrightarrow 0{,}25 \cdot a^2 = 1$ $\Leftrightarrow a^2 = 4$ $\Leftrightarrow a = 2 \vee a = -2$ Durch Einsetzen in IV kann jeweils c berechnet werden: 1. Fall: $a = 2$: $2 \cdot c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$ 2. Fall: $a = -2$: $-2 \cdot c = 1 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{2}$ Die Tripel lauten: $\left(2; 0; \frac{1}{2}\right)$ und $\left(-2; 0; -\frac{1}{2}\right)$.	5
1h	gibt jeweils den Typ der Matrizen A und D an und erläutert, warum der Typ der Matrizen B und C nicht eindeutig bestimmt werden kann und löst die Matrizengleichung nach X auf.	Die Matrix A ist vom Typ 2×4, die Matrix D vom Typ 2×2. Damit die Multiplikation $A \cdot B$ definiert ist, muss die Matrix B 4 Zeilen besitzen. Die Matrix C besitzt 4 Spalten, da M 4 Spalten hat. Die Anzahl der Spalten der Matrix B muss genauso groß sein wie die Anzahl der Zeilen der Matrix C, jedoch kann keine eindeutige Zahlenangabe aus dem Typ der Produktmatrix hergeleitet werden. $(B + X) \cdot A = X \cdot C + B \cdot C$ $\Leftrightarrow B \cdot A + X \cdot A = X \cdot C + B \cdot C$ $\Leftrightarrow B \cdot A - B \cdot C = X \cdot C - X \cdot A$ $\Leftrightarrow B \cdot (A - C) = X \cdot (C - A)$ $\Leftrightarrow -B \cdot (C - A) = X \cdot (C - A)$ $\Leftrightarrow -B \cdot (C - A) \cdot (C - A)^{-1} = X$ $\Leftrightarrow -B = X$ (Vereinfachung nicht gefordert)	5
			40

Aufgabe 2: Digitale Spiele

	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling …	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
2a	erläutert die Matrizenelemente a_{13}, a_{43} und a_{44} im Sachzusammenhang und vergleicht diese Werte mit denen aus dem Übergangsgraphen.	$a_{13} = 2\,000$ Eine Jungkröte legt durchschnittlich 2 000 Eier pro Periode (6 Monate) sowohl in Australien als auch in Südamerika. $a_{43} = 0{,}04$ Die Wahrscheinlichkeit der Jungkröte in die Entwicklungsstufe der adulten Kröte zu gelangen, beträgt in Australien 4 % und ist in Südamerika mit 0,5 % sehr viel geringer. (Die Entwicklungsstufe „adulte Kröte" wird nach einer Periode erreicht.) $a_{44} = 0{,}6$ Auch die erwachsenen Kröten haben in Australien mit 60 % eine höhere Überlebenswahrscheinlichkeit als in Südamerika, dort beträgt diese 50 %.	6
2b	berechnet ausgehend von der ursprünglichen Anfangspopulation $\vec{v}_0$ der zehn adulten Aga-Kröten und der für Australien angegebenen Matrix A die Anzahl der Jungkröten und adulten Kröten nach einem Jahr und nach zehn Jahren.	Anfangspopulation: $\vec{v}_0 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 10)^T$ Ein Jahr entspricht zwei Perioden, 10 Jahre entsprechen 20 Perioden. Für die Population nach einem Jahr ist zu rechnen: $A^2 \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2000 & 10000 \\ 0{,}05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}04 & 0{,}6 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60\,000 \\ 5\,000 \\ 0 \\ 3{,}6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 60\,000 \\ 5\,000 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ Nach 10 Jahren: $A^{20} \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2000 & 10000 \\ 0{,}05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}04 & 0{,}6 \end{pmatrix}^{20} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 188\,530\,051{,}58 \\ 6\,645\,950{,}47 \\ 87\,902{,}88 \\ 5\,111{,}96 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 188\,530\,052 \\ 6\,645\,950 \\ 87\,903 \\ 5\,112 \end{pmatrix}$ *Fortsetzung nächste Seite*	5

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2b		Nach einem Jahr ist die Zahl der erwachsenen Kröten auf ca. vier Exemplare gesunken und es hat sich noch keine Jungkröte in dieser Zeit entwickeln können. Nach 10 Jahren gibt es ca. 5 112 adulte Kröten und ca. 87 903 Jungkröten.	
2c	zeigt, dass die Behauptung des Schülers richtig ist und	Mit der inversen Matrix kann der Bestand der Vorperiode ($\vec{v}_{S20}$) bestimmt werden: $\vec{v}_{S20} = A^{-1} \cdot \vec{v}_{M21}$ $= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2000 & 10000 \\ 0{,}05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}04 & 0{,}6 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2\,200\,000 \\ 100\,000 \\ 900 \\ 68 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 2\,000\,000 \\ 30\,000 \\ 800 \\ 60 \end{pmatrix}$	4
	gibt die Anzahl der Jungkröten im September 2020 an.	Die Behauptung des Schülers ist somit richtig und es gab 800 Jungkröten.	
2d	begründet, warum die neue Populationsmatrix A_{neu} gilt und	$A_{neu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & k \\ 0{,}05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}02 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ Jungkröten legten vor dieser Maßname 2 000 Eier, mit der Maßnahme 95 % weniger, also legen sie noch 5 % bzw. 100 Eier. Der Parameter k steht für die Anzahl der Eier, die eine adulte Kröte nach dieser Maßnahme durchschnittlich legt. Da die Übergangswahrscheinlichkeiten für die Entwicklung der Eier in Kaulquappen und der Kaulquappen in Jungkröten von dieser Maßnahme nicht betroffen sind, wurden diese Werte aus der vorigen Populatonsmatrix A übernommen. Durch das Entnehmen der an den Zäunen eingesammelten Kröten, ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Jungkröte sich zur adulten Kröte weiterentwickelt, um 50 % gesunken und somit mit 0,02 nur noch halb so groß wie in Matrix A. Bei den adulten Kröten sinkt die Überlebenswahrscheinlichkeit – bzw. die Wahrscheinlichkeit auch in der nächsten Periode Teil des Ökosystems zu sein – auf 50 %, dies entspricht dem Wert 0,5 in der Matrix A_{neu}.	7*
	bestimmt die durchschnittlich gelegten Eier einer adulten Kröte und	Mit der neuen Populationsmatrix und den Vektoren ergibt sich: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & k \\ 0{,}05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}02 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1\,500\,000 \\ 50\,000 \\ 1\,000 \\ 360 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,000\,000 \\ 75\,000 \\ 1\,500 \\ y \end{pmatrix}$ Aus der Matrizengleichung ergeben sich zwei lineare Gleichungen, aus der einen kann die durchschnittlich gelegte Eieranzahl k und aus der anderen die Anzahl der adulten Kröten y ermittelt werden: *Fortsetzung nächste Seite*	

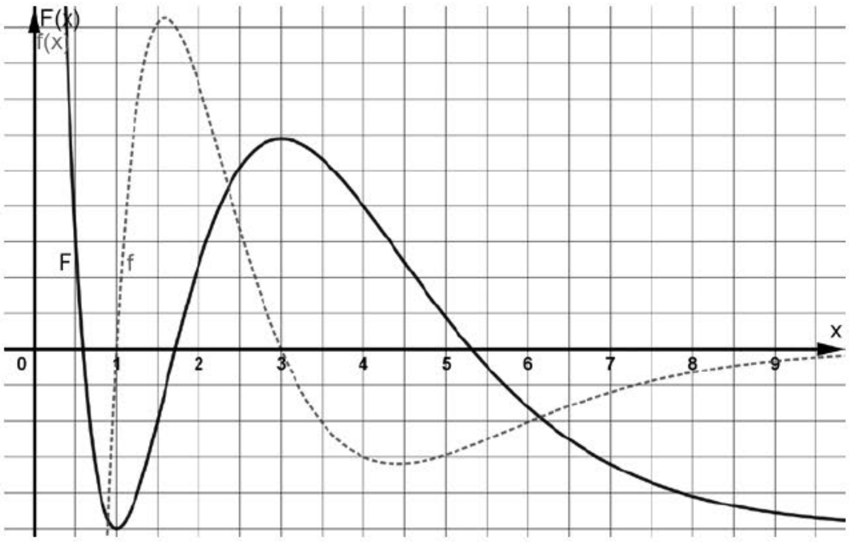
	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2d	bestimmt die Anzahl der adulten Kröten in der Folgeperiode und bestimmt die Anzahl der eingesammelten adulten Kröten.	I $100\,000 + 360 \cdot k = 1\,000\,000 \Leftrightarrow k = 2\,500$ Eine adulte Kröte legt somit durchschnittlich nur noch 2 500 Eier. II $20 + 180 = y \Leftrightarrow y = 200$ In der Folgeperiode gibt es nur noch 200 adulte Kröten. Da die Überlebenswahrscheinlichkeit durch das Einsammeln um 10 Prozentpunkte sinkt, werden 10 % der 360 adulten Kröten also 36 adulte Kröten eingesammelt und dem Ökosystem für immer entnommen.	
2e	untersucht, für welche Werte der Parameter a,b,c,d,e und f die vierte Potenz der Populationsmatrix die Einheitsmatrix ergibt und interpretiert die Ergebnisse im Sachzusammenhang.	Soll sich als vierte Potenz der Matrix die Einheitsmatrix ergeben, so müssen die Elemente dieser Matrix P auf der Hauptdiagonalen den Wert 1 annehmen und alle anderen Elemente den Wert null: Aus $p_{11} = p_{22} = p_{33} = 1$ folgt $a \cdot b \cdot d \cdot e = 1$ Die Parameter c und f müssen den Wert null annehmen, damit einerseits $p_{44} = 1$ erfüllt ist und damit alle Elemente, die nicht auf der Hauptdiagonalen liegen, den Wert null annehmen, denn diese sind Produkte oder Summen aus Produkten mit den Faktoren c und f. Die Jungkröten dürfen für ein zyklisches Wachstum keine Eier legen ($c = 0$) und die adulten Kröten dürfen nur eine Periode für eine Eiablage leben ($f = 0$). Dabei legen sie gerade soviele Eier, dass sie sich unter Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeiten, in die nächste Entwicklungsstufe zu gelangen, reproduzieren ($a \cdot b \cdot d \cdot e = 1$).	7
2f	erläutert die Zahlenwerte der ersten Spalte der Matrix S im Sachzusammenhang und berechnet, wie viele Spieler der anderen Plattformen im Jahr 2020 insgesamt zur Konsole gewechselt haben.	72 % der Spieler, die die PC-Plattform nutzen, bleiben der PC-Plattform treu, 20 % wechseln zur Konsolen-Plattform und 8 % zu Mobile-Plattformen. Es gilt: $0{,}2 \cdot 0{,}5$ Mrd. $+ 0{,}04 \cdot 1{,}1$ Mrd. $= 0{,}144$ Mrd. Insgesamt 144 Millionen Spieler wechselten zur Konsole.	4
2g	interpretiert die Lösungsmenge und	Mit der Lösungsmenge $\mathbb{L}$ wird eine (überabzählbar) unendliche Lösungsmenge beschrieben. Die Übergangswahrscheinlichkeit a ist abhängig von der Übergangswahrscheinlichkeit b. Außerdem gilt $x = \frac{6}{10}$, das bedeutet, dass die Anzahl der Spieler, die PC-Plattformen nutzen, unabhängig von der Übergangswahrscheinlichkeit b ist und 0,6 Milliarden beträgt. *Fortsetzung nächste Seite*	7*

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2g	gibt jeweils das Intervall für die Anzahl der Konsolen-Spieler y und die Anzahl der Mobile-Spieler z sowie für die Übergangswahrscheinlichkeit a an.	Aus $y = -\frac{1}{2} \cdot t + \frac{7}{10}$ und $z = \frac{1}{2} \cdot t + 1$ ist ersichtlich, dass die Anzahl der Spieler, die Konsolen nutzen sowie die Anzahl der Mobile-Spieler, abhängig von der Übergangswahrscheinlichkeit $b = t$ ist. Die Anzahl der Konsolen-Spieler verringert sich und die Anzahl der Mobile-Spieler erhöht sich, je höher die Übergangswahrscheinlichkeit b ist. Intervall für die Konsolen-Spieler y: $0{,}55 \leq y \leq 0{,}7$ Intervall für die Mobile-Spieler z: $1 \leq z \leq 1{,}15$ Intervall für die Übergangswahrscheinlichkeit a: $0 \leq a \leq \frac{3}{10}$	
			40

Aufgabe 1 B: mit Linearer Algebra

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>A2</td><td>Der Prüfling ...</td><td>Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:
Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.
<u>Bemerkung</u>:
Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.</td><td>BE</td></tr>
<tr><td>1a</td><td>skizziert den Graphen einer möglichen Stammfunktion F von f in das obere Koordinatensystem (Abbildung 1.1) und

entscheidet begründet, ob die Aussage wahr oder falsch ist.</td><td>



<table>
<tr><th>Aussage</th><th>Entscheidung und Begründung</th></tr>
<tr><td>Der Funktionsgraph von f' besitzt zwei Wendepunkte.</td><td>Die Aussage ist wahr.
Der Graph von $f'(x)$ wechselt zweimal sein Krümmungsverhalten, also besitzt der Graph von $f'(x)$ zwei Wendepunkte.</td></tr>
</table>

</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>zeigt, dass der Graph der Funktion f_b im Schnittpunkt mit der Ordinatenachse die Steigung $m = -b$ hat und

berechnet den Wert für den Parameter b so, dass der Graph mit der Abszissenachse eine Fläche von 4 FE einschließt.</td><td>Es gilt: $f_b'(x) = 1{,}5x^2 - b$
Damit gilt $m = f_b'(0) = -b$.

Bestimmen der Nullstellen als Integrationsgrenzen:
$0 = 0{,}5 \cdot x^3 - b \cdot x$
$\Leftrightarrow 0 = x \cdot (0{,}5 \cdot x^2 - b)$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee 0{,}5 \cdot x^2 - b = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 2b$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt{2b} \vee x = -\sqrt{2b}$

Fortsetzung nächste Seite</td><td>5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>zu 1b</td><td></td><td>Eine mögliche Stammfunktion ist $F_b(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2} \cdot b \cdot x^2$

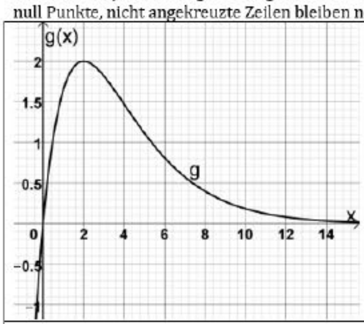
Wegen der Punktsymmetrie zum Ursprung genügt es, den Flächeninhalt im II. Quadranten zu betrachten. Dieser ist 2 FE groß.

Für den Inhalt der gesuchten Fläche gilt:

$2 \cdot \int_{-\sqrt{2b}}^{0} f_b(x)\,dx = 4$
$\Leftrightarrow 2 \cdot [F_b(x)]_{-\sqrt{2b}}^{0} = 4$
$\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{8} \cdot \left(-\sqrt{2b}\right)^4 - \frac{1}{2}b \cdot \left(-\sqrt{2b}\right)^2\right) = 2$
$\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{8} \cdot 4b^2 - \frac{1}{2}b \cdot 2b\right) = 2$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}b^2 = 2$
$\Leftrightarrow b^2 = 4$
$\Leftrightarrow b = 2 \;\vee\; b = -2$

Aufgrund der Einschränkung $b > 0$ gibt es nur die Lösung $b = 2$.</td><td></td></tr>
<tr><td>1c</td><td>weist rechnerisch nach, dass der Graph der Funktion f_k im Punkt $E\left(\frac{1}{k} \middle| \frac{2}{e \cdot k}\right)$ eine waagerechte Tangente besitzt und

entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>In einem Punkt mit waagerechter Tangente gilt $f_k'(x) = 0$
$f_k'(x) = 2 \cdot e^{-k \cdot x} - k \cdot 2 \cdot x \cdot e^{-k \cdot x}$
$0 = 2 \cdot e^{-k \cdot x} - k \cdot 2 \cdot x \cdot e^{-k \cdot x}$
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{k}$
$f_k\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{2}{k \cdot e}$
Also besitzt der Graph der Funktion f_k im Punkt $E\left(\frac{1}{k} \middle| \frac{2}{e \cdot k}\right)$ eine waagerechte Tangente.

<table>
<tr><th><u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).</th><th>wahr</th><th>falsch</th></tr>
<tr><td>

Der nebenstehende Graph g stellt die Funktion f_k mit $k = 0{,}5$ dar.</td><td></td><td>x</td></tr>
<tr><td>Es gilt: $f_k''(x) = e^{-k \cdot x} \cdot 2 \cdot k^2 \cdot (x - \frac{2}{k})$.
Also gilt $f_k''(x) > 0$ für alle $x > \frac{2}{k}$.</td><td>x</td><td></td></tr>
</table></td><td>5</td></tr>
<tr><td>1d</td><td>erläutert, warum zwischen dem Graphen von f und der Abszisse zwei Flächen einge-schlossen werden und</td><td>Mit dem Satz vom Nullprodukt lassen sich mithilfe der Linearfaktordarstellung drei Nullstellen ermitteln. Somit werden zwei Flächen zwischen Graph und Abszisse eingeschlossen.

Fortsetzung nächste Seite</td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 1d	begründet ohne Rechnung, dass $f'(4) = 0$ gilt und ermittelt die Gleichung der Ableitungsfunktion f'.	Durch die doppelte Nullstelle an der Stelle $x = 4$ hat f im Punkt $P(4\|0)$ eine waagerechte Tangente. Somit gilt: $f'(4) = 0$. Anwendung des Distributivgesetzes: $f(x) = (x^2 + x) \cdot (x-4)^2$ Anwendung der Produkt- und Kettenregel: $f'(x) = (2x+1) \cdot (x-4)^2 + (x^2+x) \cdot 2 \cdot (x-4)$	
1e	entscheidet begründet, welches der Diagramme in Abbildung 1.4 den Zusammenhang für den gegebenen Übergangsgraphen korrekt widerspiegelt und erläutert, warum sich langfristig alle Objekte in Zustand C befinden werden.	Durch Berechnen der Übergänge kann die Entscheidung getroffen werden: $\begin{pmatrix} 0 & 0{,}8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow n = 1\text{: } 0 \text{ Objekte in Zustand A}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0{,}8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} \Rightarrow n = 2\text{: } 80 \text{ Objekte in Zustand A}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0{,}8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 80 \\ 20 \end{pmatrix} \Rightarrow n = 3\text{: } 0 \text{ Objekte in Zustand A}$ Das Diagramm 2 spiegelt den Zusammenhang korrekt wider. Ein Objekt in Zustand C kann diesen Zustand aufgrund der Übergangswahrscheinlichkeit von 100 % von C zu C nicht wieder verlassen. Der Knoten C ist eine Senke, die von allen anderen Knoten des Übergangsgraphen erreicht wird. Daraus folgt die Aussage.	5
1f	weist nach, dass für die gegebenen Matrizen $A^T \cdot D^T = (D \cdot A)^T$ gilt und bestimmt den Wert des Parameters b und die Intervalle für die Werte der	Es gilt: $A^T \cdot D^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 & a & b \\ 0{,}3 & c-0{,}2 & 1 \\ 0{,}5 & c & 0 \end{pmatrix}^T$ $= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \\ a & c-0{,}2 & c \\ b & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} a+0{,}4 & c+0{,}4 & c+1 \\ b & 1 & 0 \\ a+0{,}2 & c+0{,}1 & c+0{,}5 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} a+0{,}4 & b & a+0{,}2 \\ c+0{,}4 & 1 & c+0{,}1 \\ c+1 & 0 & c+0{,}5 \end{pmatrix}^T$ $= \left(\begin{pmatrix} 0{,}2 & a & b \\ 0{,}3 & c-0{,}2 & 1 \\ 0{,}5 & c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)^T$ $= (D \cdot A)^T$ Gegeben: $D = \begin{pmatrix} 0{,}2 & a & b \\ 0{,}3 & c-0{,}2 & 1 \\ 0{,}5 & c & 0 \end{pmatrix}$ *Fortsetzung nächste Seite*	5

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 1f	Parameter a und c so, dass die Matrix D stochastisch ist.	Aus der ersten Spalte ist ersichtlich, dass die Spaltensumme 1 ergibt (Zeilensumme 1 ist wegen der zweiten Zeile nicht möglich). Dies muss ebenso für die zweite und die dritte Spalte gelten: $b + 1 + 0 = 1 \Leftrightarrow b = 0$ $a + c - 0{,}2 + c = 1 \Leftrightarrow a = 1{,}2 - 2 \cdot c$ Die Elemente einer stochastischen Matrix entstammen dem Intervall $[0; 1]$. Aus $d_{22} = c - 0{,}2$ folgt somit $c \geq 0{,}2$ Aus $a = 1{,}2 - 2 \cdot c$ folgt somit $a \leq 0{,}8$ und $c \leq 0{,}6$. Für die Parameter a und c ergibt sich somit: $0 \leq a \leq 0{,}8$ und $0{,}2 \leq c \leq 0{,}6$.	
1g	bestimmt alle Wertetripel (a; b; c) so, dass die Matrizen K und L zueinander invers sind.	Die Multiplikation zueinander inverser Matrizen ergibt als Produkt die Einheitsmatrix: $\begin{pmatrix} a^2 & b \\ a & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 \\ -0{,}25 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Daraus lassen sich vier Gleichungen erstellen: I $\quad 0{,}25 \cdot a^2 - 0{,}25 \cdot b = 1$ II $\quad b \cdot c = 0$ III $\quad 0{,}25 \cdot a - 0{,}25 \cdot a = 0$ (Aussage ist wahr.) IV $\quad a \cdot c = 1$ Aus Gleichung II ergeben sich mit dem Satz vom Nullprodukt zwei Fälle: 1. Fall: $c = 0$ Dies führt zum Widerspruch mit Gleichung IV. 2. Fall: $b = 0$ Mit der Gleichung I ergibt sich durch Einsetzen und Äquivalenzumformungen: $0{,}25 \cdot a^2 - 0{,}25 \cdot 0 = 1$ $\Leftrightarrow 0{,}25 \cdot a^2 = 1$ $\Leftrightarrow a^2 = 4$ $\Leftrightarrow a = 2 \vee a = -2$ Durch Einsetzen in IV kann jeweils c berechnet werden: 1. Fall: $a = 2$ $2 \cdot c = 1$ $\Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$ 2. Fall: $a = -2$ $-2 \cdot c = 1$ $\Leftrightarrow c = -\frac{1}{2}$ Die Tripel lauten: $\left(2; 0; \frac{1}{2}\right)$ und $\left(-2; 0; -\frac{1}{2}\right)$.	5
1h	gibt jeweils den Typ der Matrizen A und D an und erläutert, warum der Typ der Matrizen B und C nicht eindeutig bestimmt werden kann und	Die Matrix A ist vom Typ 2×4, die Matrix D vom Typ 2×2. Damit die Multiplikation $A \cdot B$ definiert ist, muss die Matrix B 4 Zeilen besitzen. Die Matrix C besitzt 4 Spalten, da M 4 Spalten hat. Die Anzahl der Spalten der Matrix B muss genauso groß sein wie die Anzahl der Zeilen der Matrix C, jedoch kann keine eindeutige Zahlenangabe aus dem Typ der Produktmatrix hergeleitet werden. *Fortsetzung nächste Seite*	5

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 1h	löst die Matrizengleichung nach X auf.	$(B+X)\cdot A = X\cdot C + B\cdot C$ $\Leftrightarrow B\cdot A + X\cdot A = X\cdot C + B\cdot C$ $\Leftrightarrow B\cdot A - B\cdot C = X\cdot C - X\cdot A$ $\Leftrightarrow B\cdot(A-C) = X\cdot(C-A)$ $\Leftrightarrow -B\cdot(C-A) = X\cdot(C-A)$ $\Leftrightarrow -B\cdot(C-A)\cdot(C-A)^{-1} = X$ $\Leftrightarrow -B = X$ (Vereinfachung nicht gefordert)	
			40

Aufgabe 2: Digitale Spiele

	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling ...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
2a	erläutert die Matrizenelemente a_{13}, a_{43} und a_{44} im Sachzusammenhang und vergleicht diese Werte mit denen aus dem Übergangsgraphen.	$a_{13} = 2\,000$ Eine Jungkröte legt durchschnittlich 2 000 Eier pro Periode (6 Monate) sowohl in Australien als auch in Südamerika. $a_{43} = 0{,}04$ Die Wahrscheinlichkeit der Jungkröte in die Entwicklungsstufe der adulten Kröte zu gelangen, beträgt in Australien 4 % und ist in Südamerika mit 0,5 % sehr viel geringer. (Die Entwicklungsstufe „adulte Kröte" wird nach einer Periode erreicht.) $a_{44} = 0{,}6$ Auch die erwachsenen Kröten haben in Australien mit 60 % eine höhere Überlebenswahrscheinlichkeit als in Südamerika, dort beträgt diese 50 %.	6
2b	berechnet ausgehend von der ursprünglichen Anfangspopulation $\vec{v}_0$ der zehn adulten Aga-Kröten und der für Australien angegebenen Matrix A die Anzahl der Jungkröten und adulten Kröten nach einem Jahr und nach zehn Jahren.	Anfangspopulation: $\vec{v}_0 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 10)^T$ Ein Jahr entspricht zwei Perioden, 10 Jahre entsprechen 20 Perioden. Für die Population nach einem Jahr ist zu rechnen: $A^2 \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2000 & 10000 \\ 0{,}05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}04 & 0{,}6 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60\,000 \\ 5\,000 \\ 0 \\ 3{,}6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 60\,000 \\ 5\,000 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ Nach 10 Jahren: $A^{20} \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2000 & 10000 \\ 0{,}05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}04 & 0{,}6 \end{pmatrix}^{20} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 188\,530\,051{,}58 \\ 6\,645\,950{,}47 \\ 87\,902{,}88 \\ 5\,111{,}96 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 188\,530\,052 \\ 6\,645\,950 \\ 87\,903 \\ 5\,112 \end{pmatrix}$ *Fortsetzung nächste Seite*	5

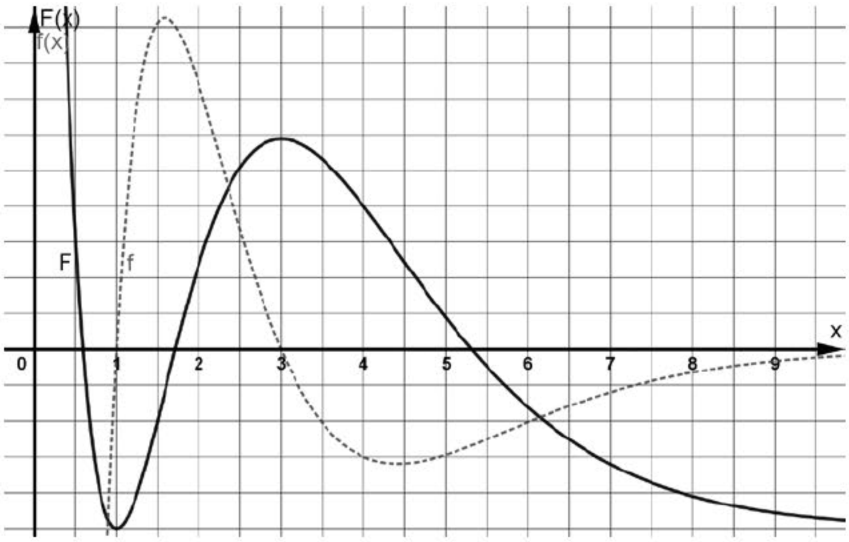
	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2b		Nach einem Jahr ist die Zahl der erwachsenen Kröten auf ca. vier Exemplare gesunken und es hat sich noch keine Jungkröte in dieser Zeit entwickeln können. Nach 10 Jahren gibt es ca. 5 112 adulte Kröten und ca. 87 903 Jungkröten.	
2c	zeigt, dass die Behauptung des Schülers richtig ist und	Mit der inversen Matrix kann der Bestand der Vorperiode ($\vec{v}_{S20}$) bestimmt werden: $\vec{v}_{S20} = A^{-1} \cdot \vec{v}_{M21}$ $= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2000 & 10000 \\ 0{,}05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}04 & 0{,}6 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2\,200\,000 \\ 100\,000 \\ 900 \\ 68 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 2\,000\,000 \\ 30\,000 \\ 800 \\ 60 \end{pmatrix}$	4
	gibt die Anzahl der Jungkröten im September 2020 an.	Die Behauptung des Schülers ist somit richtig und es gab 800 Jungkröten.	
2d	begründet, warum die neue Populationsmatrix A_{neu} gilt und	$A_{neu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & k \\ 0{,}05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}02 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ Jungkröten legten vor dieser Maßname 2 000 Eier, mit der Maßnahme 95 % weniger, also legen sie noch 5 % bzw. 100 Eier. Der Parameter k steht für die Anzahl der Eier, die eine adulte Kröte nach dieser Maßnahme durchschnittlich legt. Da die Übergangswahrscheinlichkeiten für die Entwicklung der Eier in Kaulquappen und der Kaulquappen in Jungkröten von dieser Maßnahme nicht betroffen sind, wurden diese Werte aus der vorigen Populatonsmatrix A übernommen. Durch das Entnehmen der an den Zäunen eingesammelten Kröten, ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Jungkröte sich zur adulten Kröte weiterentwickelt, um 50 % gesunken und somit mit 0,02 nur noch halb so groß wie in Matrix A. Bei den adulten Kröten sinkt die Überlebenswahrscheinlichkeit – bzw. die Wahrscheinlichkeit auch in der nächsten Periode Teil des Ökosystems zu sein – auf 50 %, dies entspricht dem Wert 0,5 in der Matrix A_{neu}.	7*
	bestimmt die durchschnittlich gelegten Eier einer adulten Kröte und	Mit der neuen Populationsmatrix und den Vektoren ergibt sich: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & k \\ 0{,}05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}02 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1\,500\,000 \\ 50\,000 \\ 1\,000 \\ 360 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,000\,000 \\ 75\,000 \\ 1\,500 \\ y \end{pmatrix}$ Aus der Matrizengleichung ergeben sich zwei lineare Gleichungen, aus der einen kann die durchschnittlich gelegte Eieranzahl k und aus der anderen die Anzahl der adulten Kröten y ermittelt werden: *Fortsetzung nächste Seite*	

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2d	bestimmt die Anzahl der adulten Kröten in der Folgeperiode und bestimmt die Anzahl der eingesammelten adulten Kröten.	I $100\,000 + 360 \cdot k = 1\,000\,000 \Leftrightarrow k = 2\,500$ Eine adulte Kröte legt somit durchschnittlich nur noch 2 500 Eier. II $20 + 180 = y \Leftrightarrow y = 200$ In der Folgeperiode gibt es nur noch 200 adulte Kröten. Da die Überlebenswahrscheinlichkeit durch das Einsammeln um 10 Prozentpunkte sinkt, werden 10 % der 360 adulten Kröten also 36 adulte Kröten eingesammelt und dem Ökosystem für immer entnommen.	
2e	untersucht, für welche Werte der Parameter a,b,c,d,e und f die vierte Potenz der Populationsmatrix die Einheitsmatrix ergibt und interpretiert die Ergebnisse im Sachzusammen-hang.	Soll sich als vierte Potenz der Matrix die Einheitsmatrix ergeben, so müssen die Elemente dieser Matrix P auf der Hauptdiagonalen den Wert 1 annehmen und alle anderen Elemente den Wert null: Aus $p_{11} = p_{22} = p_{33} = 1$ folgt $a \cdot b \cdot d \cdot e = 1$ Die Parameter c und f müssen den Wert null annehmen, damit einerseits $p_{44} = 1$ erfüllt ist und damit alle Elemente, die nicht auf der Hauptdiagonalen liegen, den Wert null annehmen, denn diese sind Produkte oder Summen aus Produkten mit den Faktoren c und f. Die Jungkröten dürfen für ein zyklisches Wachstum keine Eier legen $(c = 0)$ und die adulten Kröten dürfen nur eine Periode für eine Eiablage leben $(f = 0)$. Dabei legen sie gerade soviele Eier, dass sie sich unter Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeiten, in die nächste Entwicklungsstufe zu gelangen, reproduzieren $(a \cdot b \cdot d \cdot e = 1)$.	7
2f	erläutert die Zahlenwerte der ersten Spalte der Matrix S im Sachzusammen-hang und berechnet, wie viele Spieler der anderen Plattformen im Jahr 2020 insgesamt zur Konsole gewechselt haben.	72 % der Spieler, die die PC-Plattform nutzen, bleiben der PC-Plattform treu, 20 % wechseln zur Konsolen-Plattform und 8 % zu Mobile-Plattformen. Es gilt: $0{,}2 \cdot 0{,}5$ Mrd. $+ 0{,}04 \cdot 1{,}1$ Mrd. $= 0{,}144$ Mrd. Insgesamt 144 Millionen Spieler wechselten zur Konsole.	4
2g	interpretiert die Lösungsmenge und	Mit der Lösungsmenge $\mathbb{L}$ wird eine (überabzählbar) unendliche Lösungsmenge beschrieben. Die Übergangswahrscheinlichkeit a ist abhängig von der Übergangswahrscheinlichkeit b. Außerdem gilt $x = \frac{6}{10}$, das bedeutet, dass die Anzahl der Spieler, die PC-Plattformen nutzen, unabhängig von der Übergangswahrscheinlichkeit b ist und 0,6 Milliarden beträgt. *Fortsetzung nächste Seite*	7*

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2g	gibt jeweils das Intervall für die Anzahl der Konsolen-Spieler y und die Anzahl der Mobile-Spieler z sowie für die Übergangswahr-scheinlichkeit a an.	Aus $y = -\frac{1}{2} \cdot t + \frac{7}{10}$ und $z = \frac{1}{2} \cdot t + 1$ ist ersichtlich, dass die Anzahl der Spieler, die Konsolen nutzen sowie die Anzahl der Mobile-Spieler, abhängig von der Übergangswahrscheinlichkeit $b = t$ ist. Die Anzahl der Konsolen-Spieler verringert sich und die Anzahl der Mobile-Spieler erhöht sich, je höher die Übergangswahrscheinlichkeit b ist. Intervall für die Konsolen-Spieler y: $0{,}55 \leq y \leq 0{,}7$ Intervall für die Mobile-Spieler z : $1 \leq z \leq 1{,}15$ Intervall für die Übergangswahrscheinlichkeit a: $0 \leq a \leq \frac{3}{10}$	
			40

Aufgabe 1 A: mit Stochastik

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>A2</td><td>Der Prüfling ...</td><td>Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:
Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.
<u>Bemerkung</u>:
Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.</td><td>BE</td></tr>
<tr><td>1a</td><td>skizziert den Graphen einer möglichen Stammfunktion F von f in das obere Koordinatensystem (Abbildung 1.1) und

entscheidet begründet, ob die Aussage wahr oder falsch ist.</td><td>

<table>
<tr><th>Aussage</th><th>Entscheidung und Begründung</th></tr>
<tr><td>Der Funktionsgraph von f′ besitzt zwei Wendepunkte.</td><td>Die Aussage ist wahr.
Der Graph von $f'(x)$ wechselt zweimal sein Krümmungsverhalten, also besitzt der Graph von $f'(x)$ zwei Wendepunkte.</td></tr>
</table></td><td>5</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>zeigt, dass der Graph der Funktion f_b im Schnittpunkt mit der Ordinatenachse die Steigung $m = -b$ hat und

berechnet den Wert für den Parameter b so, dass der Graph mit der Abszissenachse eine Fläche von 4 FE einschließt.</td><td>Es gilt: $f_b'(x) = 1{,}5x^2 - b$
Damit gilt $m = f_b'(0) = -b$.

Bestimmen der Nullstellen als Integrationsgrenzen:
$0 = 0{,}5 \cdot x^3 - b \cdot x$
$\Leftrightarrow 0 = x \cdot (0{,}5 \cdot x^2 - b)$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee 0{,}5 \cdot x^2 - b = 0$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 2b$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt{2b} \vee x = -\sqrt{2b}$

Fortsetzung nächste Seite</td><td>5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>zu 1b</td><td></td><td>

Eine mögliche Stammfunktion ist $F_b(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2} \cdot b \cdot x^2$

Wegen der Punktsymmetrie zum Ursprung genügt es, den Flächeninhalt im II. Quadranten zu betrachten. Dieser ist 2 FE groß.

Für den Inhalt der gesuchten Fläche gilt:

$$2 \cdot \int_{-\sqrt{2b}}^{0} f_b(x)\,dx = 4$$
$$\Leftrightarrow 2 \cdot [F_b(x)]_{-\sqrt{2b}}^{0} = 4$$
$$\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{8} \cdot \left(-\sqrt{2b}\right)^4 - \frac{1}{2}b \cdot \left(-\sqrt{2b}\right)^2\right) = 2$$
$$\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{8} \cdot 4b^2 - \frac{1}{2}b \cdot 2b\right) = 2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}b^2 = 2$$
$$\Leftrightarrow b^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow b = 2 \;\vee\; b = -2$$

Aufgrund der Einschränkung $b > 0$ gibt es nur die Lösung $b = 2$.

</td><td></td></tr>
<tr><td>1c</td><td>

bestimmt einen Term für alle Nullstellen von $f_{a;b}$ und

entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.

</td><td>

Für Nullstellen gilt: $f_{a;b}(x) = 0$
$\Leftrightarrow 0 = a \cdot \cos(b \cdot x) + a$
$\Leftrightarrow -1 = \cos(b \cdot x)$

Damit liegt eine Nullstelle bei $x = \frac{\pi}{b}$

Durch die Periodenlänge $p = \frac{2\pi}{b}$ ergibt sich der Term für alle Nullstellen:

$\frac{\pi}{b} + n \cdot \frac{2\pi}{b}$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

<table>
<tr><th><u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).</th><th>wahr</th><th>falsch</th></tr>
<tr><td>Für alle x gilt: Wenn $a < 0$, dann gilt $f_{a;b}(x) < 0$.</td><td></td><td>x</td></tr>
<tr><td>Es gilt: $g_{a;b}(x) = f_{a;b}(x)$ für alle x.</td><td>x</td><td></td></tr>
</table>

</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1d</td><td>

erläutert, warum zwischen dem Graphen von f und der Abszisse zwei Flächen eingeschlossen werden und

begründet ohne Rechnung, dass $f'(4) = 0$ gilt und

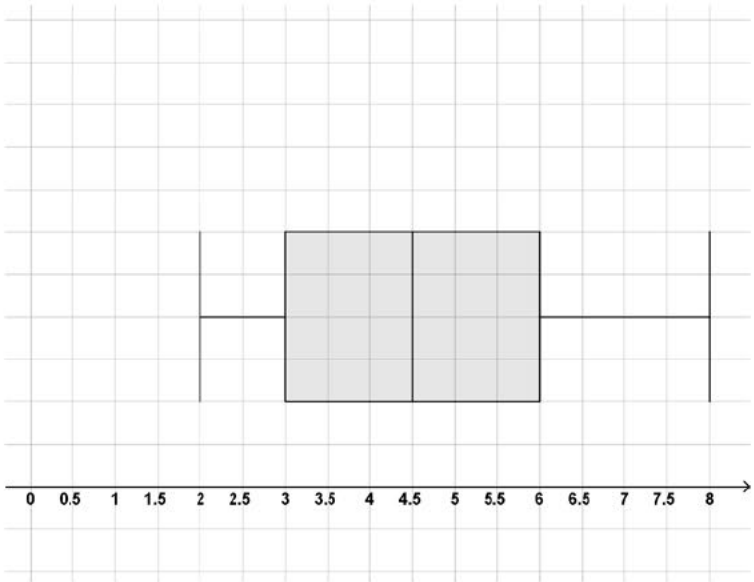
</td><td>

Mit dem Satz vom Nullprodukt lassen sich mithilfe der Linearfaktordarstellung drei Nullstellen ermitteln. Somit werden zwei Flächen zwischen Graph und Abszisse eingeschlossen.

Durch die doppelte Nullstelle an der Stelle $x = 4$ hat f im Punkt $P(4|0)$ eine waagerechte Tangente. Somit gilt: $f'(4) = 0$.

Fortsetzung nächste Seite

</td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 1d	ermittelt die Gleichung der Ableitungsfunktion f'.	Anwendung des Distributivgesetzes: $f(x) = (x^2 + x) \cdot (x - 4)^2$ Anwendung der Produkt- und Kettenregel: $f'(x) = (2x + 1) \cdot (x - 4)^2 + (x^2 + x) \cdot 2 \cdot (x - 4)$	
1e	zeichnet in Abbildung 1.3 einen Boxplot, dem die Urliste in Tabelle 1.1 zugrunde liegt und erläutert, wie sich die zweite Datenreihe in Bezug auf den Median und den (Inter-) Quartilsabstand von der ersten Datenreihe unterscheidet.	 Durch die Multiplikation aller Elemente einer Datenreihe mit einem konstanten Faktor werden auch die Quartile mit diesem Faktor skaliert. Also nehmen der Median (Quartil Q_2) und der (Inter-) Quartilsabstand $(Q_3 - Q_1)$ der zweiten Datenreihe das k-fache der Werte der ersten Datenreihe an.	5
1f	gibt die Wahrscheinlichkeit P(S) an und	Es gilt $P(S) = \frac{2}{10} = 0{,}2$. *Fortsetzung nächste Seite*	5

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>zu 1f</td><td>entscheidet begründet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>

Aussage	Entscheidung und Begründung
Es gilt: $P(R) < \left(P(G)\right)^2$.	Die Aussage ist falsch. Es gilt: $P(R) = 0{,}3$ $> 0{,}25$ $= 0{,}5^2$ $= \left(P(G)\right)^2$
Bei einem Einsatz des Spielers von $y = 1$ € ist das Spiel stochastisch fair.	Die Aussage ist wahr. Das Spiel ist fair, wenn der Erwartungswert E(X) (der erwartete Gewinn) genau 0 € beträgt. Es gilt: $E(X) = 0$ $\Leftrightarrow y \cdot P(R) + y \cdot P(G) + 4 \cdot P(S) = 0$ $\Leftrightarrow -0{,}3y - 0{,}5y + 4 \cdot 0{,}2 = 0$ $\Leftrightarrow 0{,}8 = 0{,}8y$ $\Leftrightarrow y = 1$

</td><td></td></tr>
<tr><td>1g</td><td>vervollständigt die in Abbildung 1.4 gegebene Vierfeldertafel und

weist nach, dass die Ereignisse A und B stochastisch abhängig sind.</td><td>

Nach Voraussetzung gilt $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{11}$ und

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}9$.

Lösen der Gleichungen liefert $P(B) = 0{,}88$ und $P(A \cap B) = 0{,}08$.

	B	$\overline{B}$	Σ
A	**0,08**	**0,02**	0,1
$\overline{A}$	**0,8**	**0,1**	**0,9**
Σ	**0,88**	**0,12**	1

Es gilt:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{11} \neq 0{,}1 = P(A)$$

Also sind A und B stochastisch abhängig.

</td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	
1h	bestimmt die Trefferwahrscheinlichkeit p für die binomialverteilte Zufallsvariable Y und zeigt, dass für den Erwartungswert der Zufallsvariablen X $\mu_X = 2$ gilt und vergleicht die Standardabweichung der Zufallsvariablen X mit der Standardabweichung der Zufallsvariablen Y.	Da die Zufallsvariable Y binomialverteilt mit der Kettenlänge $n = 3$ ist, folgt mit $\mu_Y = n \cdot p = 2$ sofort $p = \frac{2}{3}$. Für den Erwartungswert μ_X gilt: $\mu_X = \sum_{k=0}^{3} k \cdot P(X = k)$ $= 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}3$ $= 2$ Für die Standardabweichung σ_Y gilt: $\sigma_Y = \sqrt{\mu_Y \cdot (1 - p)}$ $= \sqrt{2 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right)}$ $= \sqrt{\frac{2}{3}}$ Nach Voraussetzung ist $\sigma_X = \sqrt{\frac{4}{5}}$. Es folgt $\sigma_X > \sigma_Y$. Die Standardabweichung der Zufallsvariablen X ist also größer als die Standardabweichung der Zufallsvariablen Y.	5
			40

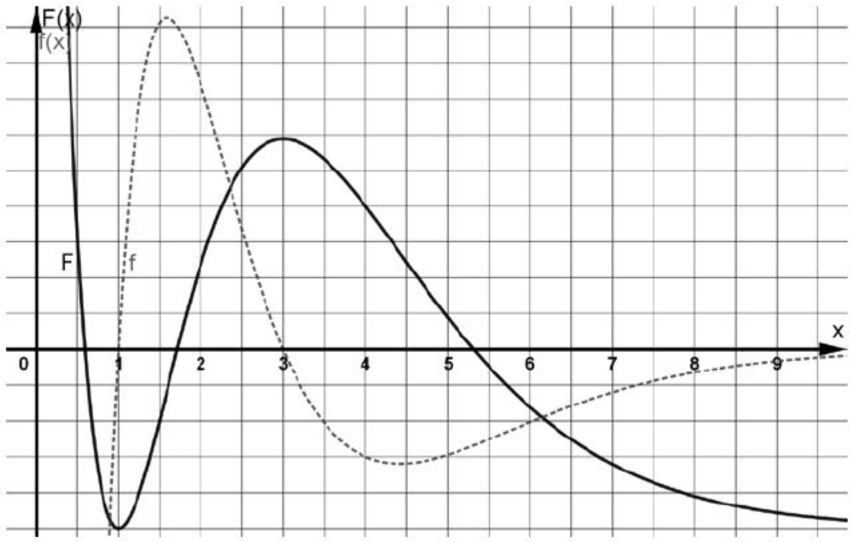
Aufgabe 2: Tabakkonsum

	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling ...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
2a	beschreibt die Grafiken in Abbildung 2.1 und 2.2 aus der Anlage anhand von jeweils zwei selbst gewählten Aspekten.	**Abbildung 2.1:** Anteil der Raucherinnen und Raucher in verschiedenen Altersgruppen. • In allen Altersgruppen ist der Anteil der männlichen Raucher stets größer. • Zwischen 21 und 24 Jahren ist der Anteil an Rauchern insgesamt am größten, ab einem Alter von 30 Jahren sinkt dieser Anteil kontinuierlich. *Weitere Aspekte sind möglich.* **Abbildung 2.2:** Zeitliche Entwicklung des Anteils der Raucherinnen und Raucher. • Anteil männlicher Raucher ist nach einem Anstieg von 1995 bis 1997 insgesamt rückläufig von 42,8 % im Jahr 1995 bzw. 43,4 % im Jahr 1997 auf 24,2 % im Jahr 2018 • Anteil weiblicher Raucher ist ebenfalls rückläufig. Rückgang setzte aber erst deutlich später ein: von 2003 mit 30,5% auf 18,5 % im Jahr 2018. • Rückgang bei männlichen Rauchern deutlich stärker, Anteil männlicher Raucher jedoch noch immer höher *Weitere Aspekte sind möglich.*	6
2b	prüft die beiden Behauptungen des Schülers.	Sowohl bei den Rauchern als auch bei den Raucherinnen war von 1995 bis 1997 in der Altersgruppe von 18 bis 59 Jahre ein Zuwachs zu verzeichnen. Die jeweiligen Anteile sind also nicht stetig zurückgegangen. Die erste Behauptung ist somit falsch. Im Jahre 1995 betrug der Anteil der Raucher 42,8 %, 2015 waren es nur noch 28,1 %. Dies entspricht einem Rückgang von ca. 34,35 %. Die zweite Behauptung ist also wahr.	6
2c	berechnet die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.	(Die Zufallsvariable X mit „X ist die Anzahl der Nichtraucherinnen und Nichtraucher" ist binomialverteilt mit der Kettenlänge $n = 350$ und der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}82$.) $P(X \geq 290) = 1 - P(X \leq 289)$ $= 1 - F_{350;0,82}(289)$ $\approx 0{,}3690$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 290 Schülerinnen und Schüler nicht rauchen, beträgt also ca. 36,90 %. $P(X = 287) = B_{350;0,82}(287)$ $\approx 0{,}0554$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau 287 Schülerinnen und Schüler nicht rauchen, beträgt also ca. 5,54 %. *Fortsetzung nächste Seite*	6

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2c		$P(62 < \overline{X} \leq 70) = P(280 \leq X \leq 287)$ $= F_{350;0,82}(287) - F_{350;0,82}(280)$ $\approx 0,3733$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 62, aber höchstens 70 Schülerinnen und Schüler rauchen, beträgt also ca. 37,33 %.	
2d	erläutert die Bedeutung der Gleichung im Sachzusammenhang und prüft die Behauptung des Schülers und weist nach, dass für die Zufallsvariable X die Ungleichung $P(X < \mu) < P(X > \mu)$ gilt.	Die Gleichung sagt aus, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau 94 Schülerinnen und Schüler rauchen, exakt 0 beträgt. Jedes Ereignis, das nicht unmöglich ist, hat eine Eintrittswahrscheinlichkeit, die größer als null ist. Somit gilt $P(\overline{X} = 94) > 0$ und die Behauptung ist falsch. Für den Erwartungswert μ gilt: $\mu = n \cdot p$ $= 350 \cdot 0,82$ $= 287$ Es gilt: $P(X < 287) = P(X \leq 286)$ $= F_{350;0,82}(286)$ $\approx 0,4664$ und $P(X > 287) = 1 - P(X \leq 287)$ $= 1 - F_{350;0,82}(287)$ $\approx 0,4782$ Also gilt $P(X < 287) < P(X > 287)$.	7
2e	erläutert die Bedeutung der Ungleichung im Sachzusammenhang und ermittelt den kleinstmöglichen Wert k, für den die Ungleichung erfüllt ist.	Die Ungleichung sagt aus, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % höchstens k Schülerinnen und Schüler Nichtraucher sind. Gesucht ist der minimale Wert k so, dass $P(X \leq k) \geq 0,9$ gilt. Mit CAS findet man $P(X \leq 295) = F_{350;0,82}(295) \approx 0,8828$ und $P(X \leq 296) = F_{350;0,82}(296) \approx 0,9089$. Der gesuchte Wert ist also $k = 296$.	5*
2f	begründet, dass $H_0\colon p_0 = 0,18$ die Nullhypothese aus Sicht der Schulleitung ist und	Die Nullhypothese spiegelt die Annahme wider, dass der Anteil der Raucherinnen und Raucher immer noch (mindestens) 18 % beträgt und sich nicht verändert hat. Sie entspricht also genau der Aussage, die die Schulleitung mit dem Signifikanztest falsifizieren möchte. *Fortsetzung nächste Seite*	4

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2f	gibt die Gegenhypothese H_1 aus Sicht der Schulleitung an.	Die Gegenhypothese H_1 aus Sicht der Schulleitung ist: „Der Anteil der Raucherinnen und Raucher ist geringer als 18 %."	
2g	beurteilt die Wirksamkeit der getroffenen Maßnahmen der Schulleitung mithilfe eines geeigneten Signifikanztests bei einem Signifikanzniveau α von fünf Prozent (α = 5 %).	Die Zufallsvariable X mit „X ist die Anzahl der Raucherinnen und Raucher" ist binomialverteilt mit $n = 500$. Da die Prognose für eine Abweichung nach unten vorliegt, wird ein linksseitiger Hypothesentest mit einem Signifikanzniveau von 5 % und der Trefferwahrscheinlichkeit $p = p_0 = 0{,}18$ durchgeführt. Zur Bestimmung des Ablehnungsbereiches ist das größtmögliche k gesucht so, dass $P(X \le k) \le 0{,}05$ gilt. Mit CAS findet man $P(X \le 75) \approx 0{,}0433$ und $P(X \le 76) \approx 0{,}0557$. Für den Ablehnungsbereich $\overline{A}$ gilt also: $\overline{A} = \{0{,}1, \dots ,75\}$. Da lediglich 74 der befragten Personen rauchen, und $74 \in \overline{A}$ gilt, folgt, dass die Schulleitung die Nullhypothese verwerfen sollte. Das Testergebnis spricht also dafür, dass die Maßnahmen der Schulleitung erfolgreich waren und der Anteil der Raucherinnen und Raucher gesunken ist.	6*
			40

Aufgabe 1 B: mit Stochastik

	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling …	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. Bemerkung: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	BE
1a	skizziert den Graphen einer möglichen Stammfunktion F von f in das obere Koordinatensystem (Abbildung 1.1) und entscheidet begründet, ob die Aussage wahr oder falsch ist.	 <table><tr><th>Aussage</th><th>Entscheidung und Begründung</th></tr><tr><td>Der Funktionsgraph von f′ besitzt zwei Wendepunkte.</td><td>Die Aussage ist wahr. Der Graph von $f'(x)$ wechselt zweimal sein Krümmungsverhalten, also besitzt der Graph von $f'(x)$ zwei Wendepunkte.</td></tr></table>	5
1b	zeigt, dass der Graph der Funktion f_b im Schnittpunkt mit der Ordinatenachse die Steigung $m = -b$ hat und berechnet den Wert für den Parameter b so, dass der Graph mit der Abszissenachse eine Fläche von 4 FE einschließt.	Es gilt: $f_b'(x) = 1{,}5x^2 - b$ Damit gilt $m = f_b'(0) = -b$. Bestimmen der Nullstellen als Integrationsgrenzen: $0 = 0{,}5 \cdot x^3 - b \cdot x$ $\Leftrightarrow 0 = x \cdot (0{,}5 \cdot x^2 - b)$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee 0{,}5 \cdot x^2 - b = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 = 2b$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \sqrt{2b} \vee x = -\sqrt{2b}$ *Fortsetzung nächste Seite*	5

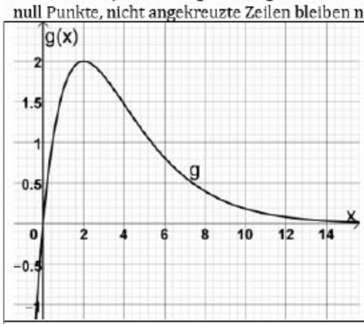
<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>zu 1b</td><td></td><td>
Eine mögliche Stammfunktion ist $F_b(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2} \cdot b \cdot x^2$

Wegen der Punktsymmetrie zum Ursprung genügt es, den Flächeninhalt im II. Quadranten zu betrachten. Dieser ist 2 FE groß.

Für den Inhalt der gesuchten Fläche gilt:

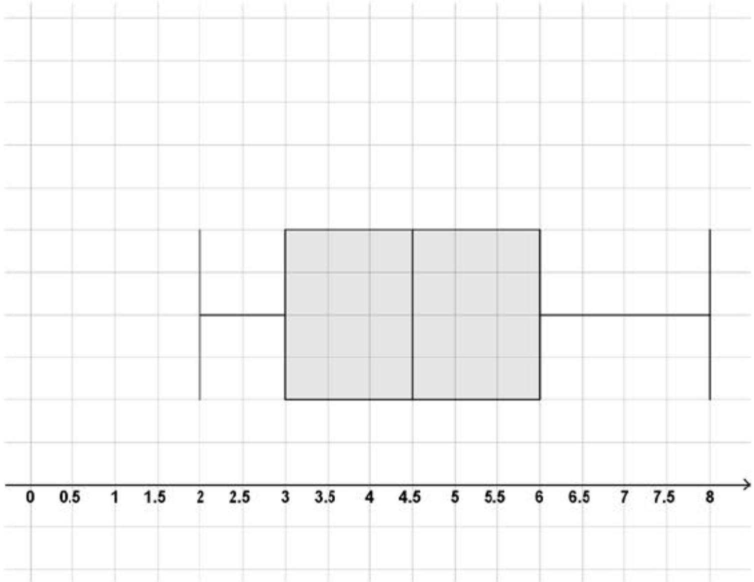
$2 \cdot \int_{-\sqrt{2b}}^{0} f_b(x)\,dx = 4$
$\Leftrightarrow 2 \cdot [F_b(x)]_{-\sqrt{2b}}^{0} = 4$
$\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{8} \cdot \left(-\sqrt{2b}\right)^4 - \frac{1}{2}b \cdot \left(-\sqrt{2b}\right)^2\right) = 2$
$\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{8} \cdot 4b^2 - \frac{1}{2}b \cdot 2b\right) = 2$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}b^2 = 2$
$\Leftrightarrow b^2 = 4$
$\Leftrightarrow b = 2 \ \vee \ b = -2$
Aufgrund der Einschränkung $b > 0$ gibt es nur die Lösung $b = 2$.
</td><td></td></tr>
<tr><td>1c</td><td>weist rechnerisch nach, dass der Graph der Funktion f_k im Punkt $E\left(\frac{1}{k} \middle| \frac{2}{e \cdot k}\right)$ eine waagerechte Tangente besitzt und

entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>
In einem Punkt mit waagerechter Tangente gilt $f_k'(x) = 0$
$f_k'(x) = 2 \cdot e^{-k \cdot x} - k \cdot 2 \cdot x \cdot e^{-k \cdot x}$
$0 = 2 \cdot e^{-k \cdot x} - k \cdot 2 \cdot x \cdot e^{-k \cdot x}$
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{k}$
$f_k\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{2}{k \cdot e}$
Also besitzt der Graph der Funktion f_k im Punkt $E\left(\frac{1}{k} \middle| \frac{2}{e \cdot k}\right)$ eine waagerechte Tangente.

<table>
<tr><th>Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).</th><th>wahr</th><th>falsch</th></tr>
<tr><td>

Der nebenstehende Graph g stellt die Funktion f_k mit $k = 0{,}5$ dar.</td><td></td><td>x</td></tr>
<tr><td>Es gilt: $f_k''(x) = e^{-k \cdot x} \cdot 2 \cdot k^2 \cdot (x - \frac{2}{k})$.
Also gilt $f_k''(x) > 0$ für alle $x > \frac{2}{k}$.</td><td>x</td><td></td></tr>
</table>
</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1d</td><td>erläutert, warum zwischen dem Graphen von f und der Abszisse zwei Flächen eingeschlossen werden und</td><td>
Mit dem Satz vom Nullprodukt lassen sich mithilfe der Linearfaktordarstellung drei Nullstellen ermitteln. Somit werden zwei Flächen zwischen Graph und Abszisse eingeschlossen.

Fortsetzung nächste Seite
</td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 1d	begründet ohne Rechnung, dass $f'(4) = 0$ gilt und ermittelt die Gleichung der Ableitungs-funktion f'.	Durch die doppelte Nullstelle an der Stelle $x = 4$ hat f im Punkt $P(4\|0)$ eine waagerechte Tangente. Somit gilt: $f'(4) = 0$. Anwendung des Distributivgesetzes: $f(x) = (x^2 + x) \cdot (x - 4)^2$ Anwendung der Produkt- und Kettenregel: $f'(x) = (2x + 1) \cdot (x - 4)^2 + (x^2 + x) \cdot 2 \cdot (x - 4)$	
1e	zeichnet in Abbildung 1.3 einen Boxplot, dem die Urliste in Tabelle 1.1 zugrunde liegt und erläutert, wie sich die zweite Datenreihe in Bezug auf den Median und den (Inter-) Quartilsabstand von der ersten Datenreihe unterscheidet.	 Durch die Multiplikation aller Elemente einer Datenreihe mit einem konstanten Faktor werden auch die Quartile mit diesem Faktor skaliert. Also nehmen der Median (Quartil Q_2) und der (Inter-) Quartilsabstand $(Q_3 - Q_1)$ der zweiten Datenreihe das k-fache der Werte der ersten Datenreihe an.	5
1f	gibt die Wahrscheinlichkeit $P(S)$ an und	Es gilt $P(S) = \frac{2}{10} = 0{,}2$. *Fortsetzung nächste Seite*	5

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>zu 1f</td><td>entscheidet begründet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>
<table>
<tr><th>Aussage</th><th>Entscheidung und Begründung</th></tr>
<tr><td>Es gilt:
$\mathrm{P(R)} < \left(\mathrm{P(G)}\right)^2$.</td><td>Die Aussage ist falsch. Es gilt:
$\mathrm{P(R)} = 0{,}3$
$> 0{,}25$
$= 0{,}5^2$
$= \left(\mathrm{P(G)}\right)^2$</td></tr>
<tr><td>Bei einem Einsatz des Spielers von $y = 1$ € ist das Spiel stochastisch fair.</td><td>Die Aussage ist wahr. Das Spiel ist fair, wenn der Erwartungswert E(X) (der erwartete Gewinn) genau 0 € beträgt. Es gilt:
$\mathrm{E(X)} = 0$
$\Leftrightarrow y \cdot \mathrm{P(R)} + y \cdot \mathrm{P(G)} + 4 \cdot \mathrm{P(S)} = 0$
$\Leftrightarrow -0{,}3y - 0{,}5y + 4 \cdot 0{,}2 = 0$
$\Leftrightarrow 0{,}8 = 0{,}8y$
$\Leftrightarrow y = 1$</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
<tr><td>1g</td><td>vervollständigt die in Abbildung 1.4 gegebene Vierfeldertafel und

weist nach, dass die Ereignisse A und B stochastisch abhängig sind.</td><td>
Nach Voraussetzung gilt $\mathrm{P_B(A)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(B)}} = \frac{1}{11}$ und
$\mathrm{P(A \cup B)} = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)} - \mathrm{P(A \cap B)} = 0{,}9$.
Lösen der Gleichungen liefert $\mathrm{P(B)} = 0{,}88$ und $\mathrm{P(A \cap B)} = 0{,}08$.
<table>
<tr><th></th><th>B</th><th>$\overline{\mathrm{B}}$</th><th>Σ</th></tr>
<tr><td>A</td><td>0,08</td><td>0,02</td><td>0,1</td></tr>
<tr><td>$\overline{\mathrm{A}}$</td><td>0,8</td><td>0,1</td><td>0,9</td></tr>
<tr><td>Σ</td><td>0,88</td><td>0,12</td><td>1</td></tr>
</table>
Es gilt:
$\mathrm{P_B(A)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{\mathrm{P(B)}}$
$= \frac{1}{11}$
$\neq 0{,}1$
$= \mathrm{P(A)}$
Also sind A und B stochastisch abhängig.
</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1h</td><td>bestimmt die Trefferwahrscheinlichkeit p für die binomialverteilte Zufallsvariable Y und</td><td>Da die Zufallsvariable Y binomialverteilt mit der Kettenlänge $n = 3$ ist, folgt mit $\mu_Y = n \cdot p = 2$ sofort $p = \frac{2}{3}$.

Fortsetzung nächste Seite</td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 1h	zeigt, dass für den Erwartungswert der Zufallsvariablen X $\mu_X = 2$ gilt und	Für den Erwartungswert μ_X gilt: $\mu_X = \sum_{k=0}^{3} k \cdot P(X = k) = 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}3 = 2$	
	vergleicht die Standardabweichung der Zufallsvariablen X mit der Standardabweichung der Zufallsvariablen Y.	Für die Standardabweichung σ_Y gilt: $\sigma_Y = \sqrt{\mu_Y \cdot (1 - p)} = \sqrt{2 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right)} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ Nach Voraussetzung ist $\sigma_X = \sqrt{\frac{4}{5}}$. Es folgt $\sigma_X > \sigma_Y$. Die Standardabweichung der Zufallsvariablen X ist also größer als die Standardabweichung der Zufallsvariablen Y.	
			40

Aufgabe 2: Tabakkonsum

	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling ...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
2a	beschreibt die Grafiken in Abbildung 2.1 und 2.2 aus der Anlage anhand von jeweils zwei selbst gewählten Aspekten.	**Abbildung 2.1:** Anteil der Raucherinnen und Raucher in verschiedenen Altersgruppen. • In allen Altersgruppen ist der Anteil der männlichen Raucher stets größer. • Zwischen 21 und 24 Jahren ist der Anteil an Rauchern insgesamt am größten, ab einem Alter von 30 Jahren sinkt dieser Anteil kontinuierlich. *Weitere Aspekte sind möglich.* **Abbildung 2.2:** Zeitliche Entwicklung des Anteils der Raucherinnen und Raucher. • Anteil männlicher Raucher ist nach einem Anstieg von 1995 bis 1997 insgesamt rückläufig von 42,8 % im Jahr 1995 bzw. 43,4 % im Jahr 1997 auf 24,2 % im Jahr 2018 • Anteil weiblicher Raucher ist ebenfalls rückläufig. Rückgang setzte aber erst deutlich später ein: von 2003 mit 30,5% auf 18,5 % im Jahr 2018. • Rückgang bei männlichen Rauchern deutlich stärker, Anteil männlicher Raucher jedoch noch immer höher *Weitere Aspekte sind möglich.*	6
2b	prüft die beiden Behauptungen des Schülers.	Sowohl bei den Rauchern als auch bei den Raucherinnen war von 1995 bis 1997 in der Altersgruppe von 18 bis 59 Jahre ein Zuwachs zu verzeichnen. Die jeweiligen Anteile sind also nicht stetig zurückgegangen. Die erste Behauptung ist somit falsch. Im Jahre 1995 betrug der Anteil der Raucher 42,8 %, 2015 waren es nur noch 28,1 %. Dies entspricht einem Rückgang von ca. 34,35 %. Die zweite Behauptung ist also wahr.	6
2c	berechnet die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.	(Die Zufallsvariable X mit „X ist die Anzahl der Nichtraucherinnen und Nichtraucher“ ist binomialverteilt mit der Kettenlänge $n = 350$ und der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}82$.) $P(X \geq 290) = 1 - P(X \leq 289) = 1 - F_{350;0,82}(289) \approx 0{,}3690$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 290 Schülerinnen und Schüler nicht rauchen, beträgt also ca. 36,90 %. $P(X = 287) = B_{350;0,82}(287) \approx 0{,}0554$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau 287 Schülerinnen und Schüler nicht rauchen, beträgt also ca. 5,54 %. *Fortsetzung nächste Seite*	6

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2c		$P(62 < \overline{X} \le 70) = P(280 \le X \le 287)$ $= F_{350;0,82}(287) - F_{350;0,82}(280)$ $\approx 0,3733$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 62, aber höchstens 70 Schülerinnen und Schüler rauchen, beträgt also ca. 37,33 %.	
2d	erläutert die Bedeutung der Gleichung im Sachzusammenhang und prüft die Behauptung des Schülers und weist nach, dass für die Zufallsvariable X die Ungleichung $P(X < \mu) < P(X > \mu)$ gilt.	Die Gleichung sagt aus, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau 94 Schülerinnen und Schüler rauchen, exakt 0 beträgt. Jedes Ereignis, das nicht unmöglich ist, hat eine Eintrittswahrscheinlichkeit, die größer als null ist. Somit gilt $P(\overline{X} = 94) > 0$ und die Behauptung ist falsch. Für den Erwartungswert μ gilt: $\mu = n \cdot p$ $= 350 \cdot 0,82$ $= 287$ Es gilt: $P(X < 287) = P(X \le 286)$ $= F_{350;0,82}(286)$ $\approx 0,4664$ und $P(X > 287) = 1 - P(X \le 287)$ $= 1 - F_{350;0,82}(287)$ $\approx 0,4782$ Also gilt $P(X < 287) < P(X > 287)$.	7
2e	erläutert die Bedeutung der Ungleichung im Sachzusammenhang und ermittelt den kleinstmöglichen Wert k, für den die Ungleichung erfüllt ist.	Die Ungleichung sagt aus, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % höchstens k Schülerinnen und Schüler Nichtraucher sind. Gesucht ist der minimale Wert k so, dass $P(X \le k) \ge 0,9$ gilt. Mit CAS findet man $P(X \le 295) = F_{350;0,82}(295) \approx 0,8828$ und $P(X \le 296) = F_{350;0,82}(296) \approx 0,9089$. Der gesuchte Wert ist also $k = 296$.	5*
2f	begründet, dass H_0: $p_0 = 0,18$ die Nullhypothese aus Sicht der Schulleitung ist und	Die Nullhypothese spiegelt die Annahme wider, dass der Anteil der Raucherinnen und Raucher immer noch (mindestens) 18 % beträgt und sich nicht verändert hat. Sie entspricht also genau der Aussage, die die Schulleitung mit dem Signifikanztest falsifizieren möchte. *Fortsetzung zu nächste Seite*	4

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2f	gibt die Gegenhypothese H_1 aus Sicht der Schulleitung an.	Die Gegenhypothese H_1 aus Sicht der Schulleitung ist: „Der Anteil der Raucherinnen und Raucher ist geringer als 18 %.“	
2g	beurteilt die Wirksamkeit der getroffenen Maßnahmen der Schulleitung mithilfe eines geeigneten Signifikanztests bei einem Signifikanzniveau α von fünf Prozent ($\alpha = 5\ \%$).	Die Zufallsvariable X mit „X ist die Anzahl der Raucherinnen und Raucher“ ist binomialverteilt mit $n = 500$. Da die Prognose für eine Abweichung nach unten vorliegt, wird ein linksseitiger Hypothesentest mit einem Signifikanzniveau von 5 % und der Trefferwahrscheinlichkeit $p = p_0 = 0{,}18$ durchgeführt. Zur Bestimmung des Ablehnungsbereiches ist das größtmögliche k gesucht so, dass $P(X \leq k) \leq 0{,}05$ gilt. Mit CAS findet man $P(X \leq 75) \approx 0{,}0433$ und $P(X \leq 76) \approx 0{,}0557$. Für den Ablehnungsbereich $\overline{A}$ gilt also: $\overline{A} = \{0,1,\ldots,75\}$. Da lediglich 74 der befragten Personen rauchen, und $74 \in \overline{A}$ gilt, folgt, dass die Schulleitung die Nullhypothese verwerfen sollte. Das Testergebnis spricht also dafür, dass die Maßnahmen der Schulleitung erfolgreich waren und der Anteil der Raucherinnen und Raucher gesunken ist.	6*
			40

Aufgabe 3: Lungenfunktionsanalyse

	Anforderungen	Modelllösungen	
A3	Der Prüfling ...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
3a	beschreibt die Grafik in der Abbildung 3.1 anhand dreier Aspekte im Sachzusammenhang.	• Der Patient atmet während der ersten drei Sekunden zunächst normal. Von der dritten bis zur dreizehnten Sekunde atmet er tief ein und aus. • Das Lungenvolumen während der normalen Atmung bewegt sich zwischen 3 und 3,5 Litern. • Das Lungenvolumen beim tiefen Atemzug liegt zwischen 2,5 und 4 Litern. *Weitere Aspekte sind möglich.*	6
3b	leitet die Zahlenwerte der Funktion v_1 her und	Gesucht sind die Werte der Parameter der Funktion. $v_1(t) = a \cdot \cos(b \cdot t + c) + d.$ Laut Abbildung 3.1 beträgt das minimale und das maximale Lungenvolumen 3 bzw. 3,5 Liter. Also gilt: $a = 0{,}5 \cdot (3{,}5 - 3) = 0{,}25$ Der Mittelwert des Lungenvolumens beträgt 3,25 Liter, da gilt: $d = 0{,}5 \cdot (3 + 3{,}5) = 3{,}25$ Die Periodendauer beträgt vier Sekunden. Daraus ergibt sich die Gleichung $4b = 2\pi \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}\pi.$ Der Graph von v_1 ist um eine Viertel Periode $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ auf der Abszisse nach rechts verschoben, d.h. $c = -\frac{\pi}{2}$.	7
	weist rechnerisch nach, dass das lokale Maximum von v_1 bei M(1|3,5) liegt und	Für ein lokales Maximum an der Stelle t gilt: $v_1'(t) = 0 \ \wedge v_1''(t) < 0$ $v_1'(t) = -\frac{1}{8}\pi \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$ Notwendige Bedingung: $v_1'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = 3$ $v_1''(t) = -\frac{1}{16}\pi^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$ Hinreichende Bedingung: $v_1''(1) = -\frac{1}{16}\pi^2 < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum $v_1''(3) = \frac{1}{16}\pi^2 > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum $v(1) = 3{,}5.$	
	begründet, warum M nicht das globale Maximum von v ist.	M kann nicht das globale Maximum sein, da die Funktion v an der Stelle $x = 7$ noch einen höheren Wert annimmt.	
3c	gibt eine alternative Gleichung für v_1 in der Form $v_1(t) = a \cdot \sin(b \cdot t) + d$ an.	$v_1(t) = \frac{1}{4} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot t\right) + \frac{13}{4}$	2

	Anforderungen	Modelllösungen	
3d	widerlegt die Vermutung des Praktikanten.	Die Vermutung kann mit einem Gegenbeispiel widerlegt werden: Setze: $f'(x) = g'(x) = \cos(x)$ Dann sind $f(x) = \sin(x) + 1$ und $g(x) = \sin(x)$ Stammfunktionen von $f'(x)$ und $g'(x)$ mit $f(x) \neq g(x)$. Somit gilt: $f'(x) = g'(x) \nRightarrow f(x) = g(x)$ Die Vermutung $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f'(x) = g'(x)$ ist damit widerlegt.	3
3e	bestimmt den Wert des Integrals und erläutert die Ungleichung im Sachzusammenhang.	$\int_0^3 v_1'(t)\,dt = \int_0^3 \left(-\frac{1}{8}\pi \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot t - \frac{\pi}{2}\right)\right) dt$ $= -0{,}25$ $v_1'(t)$ gibt die Atmungsgeschwindigkeit in $\frac{\text{Liter}}{\text{Sekunde}}$ an. Somit entspricht $\int_0^3 v_1'(t)\,dt$ der ein- beziehungsweise ausgeatmeten Luftmenge innerhalb der ersten drei Sekunden. Da nur eine Sekunde ein-, jedoch zwei Sekunden ausgeatmet wird, ist der Integralwert negativ.	5
3f	erläutert, dass ein ganzrationaler Ansatz für v_2 mindestens vom Grad 5 sein muss und gibt die Bedingungsgleichungen für die Funktion v_2 an.	v_2 muss folgende 6 Bedingungen erfüllen: • Sprung- und Knickfreiheit im Übergang zu v_1, d.h. es müssen 2 Bedingungen erfüllt werden: $v_1(3) = v_2(3)$ und $v_1'(3) = v_2'(3)$. • Hochpunkt in $(7\|4)$, d.h. es müssen 2 Bedingungen erfüllt werden: $v_2(7) = 4$ und $v_2'(7) = 0$ • Tiefpunkt in $(13\|2{,}5)$, d.h. es müssen 2 Bedingungen erfüllt werden: $v_2(13) = 2{,}5$ und $v_2'(13) = 0$. Aus den 6 Bedingungen können 6 Parameter bestimmt werden. Somit muss ein ganzrationaler Ansatz für v_2 mindestens vom Grad 5 sein. Es ergeben sich folgende Bedingungsgleichungen: $v_2(3) = 3$ $v_2'(3) = 0$ $v_2(7) = 4$ $v_2'(7) = 0$ $v_2(13) = 2{,}5$ $v_2'(13) = 0$	6
3g	berechnet den Zeitpunkt t der maximalen Ausatmungsgeschwindigkeit und	Zum Zeitpunkt der maximalen Ausatmungsgeschwindigkeit ist $a_k'(t)$ maximal. Für diesen Zeitpunkt gilt: $a_k''(t) = 0 \wedge a_k'''(t) \neq 0$ $a_k''(t) = -\frac{1}{48}\pi^2 \cdot k^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{6}\pi\cdot(k\cdot t + 7) - \frac{2}{3}\pi\right)$ Notwendige Bedingung: $0 = -\frac{1}{48}\pi^2 \cdot k^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{6}\pi\cdot(k\cdot t + 7) - \frac{2}{3}\pi\right)$ $\Leftrightarrow 0 = \sin\left(\frac{1}{6}\pi\cdot(k\cdot t + 7) - \frac{2}{3}\pi\right)$ *Fortsetzung nächste Seite*	6

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 3g	gibt die maximale Ausatmungsgeschwindigkeit in der Einheit Liter pro Sekunde $\left[\frac{l}{s}\right]$ in Abhängigkeit von k an.	Es gilt: $\sin(\pi) = 0$ $\Rightarrow \pi = \frac{1}{6}\pi \cdot (k \cdot t + 7) - \frac{2}{3}\pi$ $\Leftrightarrow t = \frac{3}{k}$ Hinreichende Bedingung: $a_k''(t) = -\frac{1}{288}\pi^3 \cdot k^3 \cdot \cos\left(\frac{1}{6}\pi \cdot (k \cdot t + 7) - \frac{2}{3}\pi\right)$ $a_k'''\left(\frac{3}{k}\right) = -\frac{1}{288}\pi^3 \cdot k^3$ Da $1 \leq k \leq 3$ gilt, ist $a_k'''\left(\frac{3}{k}\right) \neq 0$ Die maximale Ausatmungsgeschwindigkeit erreicht der Patient nach $t = \frac{3}{k}$ Sekunden. Es gilt: $a_k'\left(\frac{3}{k}\right) = -\frac{1}{8}\pi \cdot k.$ Die maximale Ausatmungsgeschwindigkeit beträgt $\frac{1}{8}\pi \cdot k \left[\frac{l}{s}\right]$.	
3h	ermittelt näherungsweise den größtmöglichen Wert k so, dass die Ausatmungsfunktion a_k auf einen mutmaßlich erkrankten Patienten hindeutet.	Gesucht ist der größte Wert von k für den gilt, dass 60 % der Ausatmungszeit mindestens mit $0{,}3\frac{l}{s}$ ausgeatmet wird. Aufgrund des typischen periodischen Verlaufes des Graphen der gegebenen Sinusfunktion, liegen der Beginn und das Ende des Zeitraums der gesuchten Ausatmung im gleichen Abstand von dem Beginn der Ausatmung $(t = 0)$ und dem Ende der Ausatmung $\left(t = \frac{6}{k}\right)$. Somit beginnt die gesuchte Ausatmungsgeschwindigkeit bei $t_A = 0{,}2 \cdot \frac{6}{k} = \frac{6}{5 \cdot k}$ und endet bei $t_E = 0{,}8 \cdot \frac{6}{k} = \frac{24}{5 \cdot k}$ Es genügt einen der beiden Werte in die erste Ableitung der Funktionsgleichung $a_k(t)$ einzusetzen, um k zu berechnen. Da es sich um eine Ausatmung handelt, ist der Funktionswert negativ: $a_k'\left(\frac{6}{5 \cdot k}\right) = -0{,}3$ $\Leftrightarrow \frac{1}{8}\pi \cdot k \cdot \cos\left(\frac{1}{6}\pi \cdot \left(k \cdot \frac{6}{5 \cdot k} + 7\right) - \frac{2}{3}\pi\right) = -0{,}3$ $\Leftrightarrow \frac{1}{8}\pi \cdot k \cdot \cos\left(\frac{7}{10}\pi\right) = -0{,}3$ $\Leftrightarrow k = -\frac{24}{10 \cdot \pi \cdot \cos\left(\frac{7}{10}\pi\right)}$ $\Leftrightarrow k \approx 1{,}2997 \approx 1{,}3$ Also gilt $k < 1{,}3$.	5
			40

Aufgabe 3: Wasserkraft

	Anforderungen	Modelllösungen	
A3	Der Prüfling ...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
3a	beschreibt die Grafik in der Abbildung 3.1 anhand dreier Aspekte im Sachzusammenhang.	• Der Wasserfluss beträgt zu Jahresbeginn ca. 1 300 $\frac{m^3}{s}$, fällt dann bis Anfang Februar auf ein Minimum von ca. 500 $\frac{m^3}{s}$ ab. • Ab Februar steigt der Wasserfluss über 4 Monate bis zum Maximum Ende Juni auf ca. 2 500 $\frac{m^3}{s}$. • Danach nimmt der Wasserflusses knapp fünf Monate ab, bis er Anfang November wieder ein Minimum von knapp über 500 $\frac{m^3}{s}$ erreicht. *Weitere Aspekte sind möglich.*	6
3b	berechnet, zu welchem Zeitpunkt t der Wasserfluss nach diesem Modell am größten war und gibt das zugehörige Datum und die Höhe des Wasserflusses in $\frac{m^3}{s}$ an.	Es gilt: $w'(t) = 19{,}6t^3 - 338{,}04t^2 + 1\,548t - 1\,447{,}5$ $w''(t) = 58{,}8t^2 - 676{,}08t + 1\,548.$ Notwendige Bedingung: $w'(t) = 0$: $0 = 19{,}6t^3 - 338{,}04t^2 + 1\,548t - 1\,447{,}5$ $\Leftrightarrow t \approx 1{,}253 \vee t \approx 5{,}758 \vee t \approx 10{,}236$ Hinreichende Bedingung: $w''(t) < 0 \wedge w'(t) = 0$: $w''(1{,}253) \approx 793{,}19 > 0$ $w''(5{,}758) \approx -395{,}38 < 0$ $w''(10{,}236) \approx 788{,}46 > 0$ Somit liegt ein Maximum bei $t \approx 5{,}758$ vor. $\left(\begin{array}{c} w(5{,}758) \approx 2\,512{,}07 \\ t = 5 \text{ entspricht dem 1. Juni} \\ 30 \cdot 0{,}758 = 22{,}74 \end{array}\right)$ *Lösungsweg nicht gefordert* Nach 5 Monaten und 22,74 Tagen, also am 23. Juni, ist der Wasserfluss mit ca. 2 512 $\frac{m^3}{s}$ am größten.	6
3c	prüft die beiden Behauptungen.	• Gesucht ist der Wendepunkt mit der größten positiven Steigung der Funktion w. Wendestelle ermitteln: $t \approx 3{,}1559 \vee t \approx 8{,}3421$ Steigung prüfen: $w'(3{,}16) \approx 687$ und $w'(8{,}34) \approx -680$ Damit liegt die stärkste Zunahme bei $t \approx 3{,}16$ ($\approx$ 5. April) Die Behauptung ist richtig. • Gesucht sind die Zeitabschnitte für die gilt: $w(t) \geq 750 \left[\frac{m^3}{s}\right]$. Lösen von $w(t) = 750$ führt zu: $t \approx 0{,}5215 \vee t \approx 2{,}1293 \vee t \approx 9{,}4221 \vee t \approx 10{,}923$ Zeitspanne in Monaten berechnen: $12 - (2{,}1293 - 0{,}5215) - (10{,}923 - 9{,}4221) \approx 8{,}89$ *Fortsetzung nächste Seite*	7

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>zu 3c</td><td></td><td>Das Wasserkraftwerk kann für fast neun Monate (ca. für 74 % des Jahres) vollständig zur Energieerzeugung genutzt werden.
Die Behauptung ist also falsch.</td><td></td></tr>
<tr><td>3d</td><td>begründet im Sachzusammenhang, warum die beiden Abschnitte sprung- und knickfrei ineinander übergehen müssen und

bestimmt den Parameter a so, dass dies näherungsweise erfüllt ist.</td><td>Der Graph der Funktion s stellt dieselben Daten zum Wasserfluss in $\frac{m^3}{s}$ dar wie der Graph der Funktion w, nur in einer anderen Reihenfolge. Die Änderungen des Wasserflusses gehen in der Natur stetig ineinander über. Eine Knickstelle ist somit unrealistisch.

Der Wert des Wasserflusses in $\frac{m^3}{s}$ kann sich in der Natur auch nicht abrupt ändern. Es können daher ebenso ein sprunghafter Anstieg wie auch eine sprunghafte Abnahme des Wasserflusses in diesem Sachzusammenhang ausgeschlossen werden.

Die beiden Abschnitte $s_1(t) = 2{,}5298t^3 - 48{,}6667t^2 + 2\,512$ und $s_2(t) = f_a(t)$ sollen sprung- und knickfrei ineinander übergehen.

Sprungfrei bedeutet, dass die Funktion an der Stelle $t = 6$ stetig ist, also gilt: $s_1(6) = f_a(6) \approx 1\,306{,}44$.
Knickfrei bedeutet, dass beide Teilabschnitte an der Stelle $t = 6$ die gleiche Steigung besitzen, also $s_1'(6) = f'_a(6) \approx -310{,}78$ gilt.
Aus diesen Bedingungen ergeben sich folgende Gleichungen:
I: $1\,306{,}44 = 6\,890 \cdot \left(e^{-1{,}575 \cdot 6 \frac{1}{a}} - e^{-10{,}036 \cdot 6 \frac{1}{a}}\right) + 374$
II: $-310{,}78 = 6\,890 \cdot \left(\frac{-1{,}575}{a} \cdot e^{-1{,}575 \cdot 6 \frac{1}{a}} + \frac{-10{,}036}{a} \cdot e^{-10{,}036 \cdot 6 \frac{1}{a}}\right)$
Lösen der Gleichung I oder Gleichung II mit CAS liefert $a \approx 4{,}725$.

Für $a \approx 4{,}725$ sind beide Gleichungen näherungsweise erfüllt.</td><td>7</td></tr>
<tr><td>3e</td><td>vervollständigt den Term zur Berechnung des durchschnittlichen Wasserflusses für das Jahr 2019 und

erläutert, warum der Wert des Auszubildenden vom Wert des Ingenieurs abweicht.</td><td>$\frac{\boxed{1}}{\boxed{12}} \cdot \int_0^{\boxed{12}} w(t)dt$

Die Abweichung lässt sich zum einen über die Modellierung des Sachzusammenhanges mit den unterschiedlichen Funktionstypen erklären. Da es sich bei s(t) um eine Modellierung aus den Daten von w(t) handelt, gibt s(t) den Wasserfluss von w(t) nur näherungsweise wieder, was dann zu der ermittelten Abweichung führt.

Zum anderen werden in beiden Modellierungen gerundete Werte für die Koeffizienten verwendet, wodurch eine Abweichung in der Nachkommastelle erklärbar ist.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>3f</td><td>ergänzt den fehlenden Wert für das Jahr 2000 in der Tabelle 3.1 und</td><td><table><tr><th>Jahr</th><th>1990</th><th>2000</th><th>2010</th><th>2020</th></tr><tr><td>Leistung in MW</td><td>3 990</td><td>4 885</td><td>5 400</td><td>5 697</td></tr></table>
Fortsetzung nächste Seite</td><td>6</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 3f	leitet die Gleichung der Funktion p her.	$p(t) = b + a \cdot e^{k \cdot t}$ b beschreibt dabei die obere Schranke und ist aus dem Text entnehmbar: $b = 6\,100$ Aus $p(0) = 3\,990$ und $p(20) = 5\,400$ lassen sich durch Einsetzen zuerst a und dann k herleiten: $\mathrm{I}\ : 3990 = 6\,100 + a \cdot e^{k \cdot 0}$ $\mathrm{II}: 5\,400 = 6\,100 + a \cdot e^{k \cdot 20}$ Das Lösen der Gleichungen liefert: $a = -2\,110 \ \wedge \ k \approx -0{,}0552$	
3g	beurteilt, ob das Ziel nach diesem Modell erreicht werden kann.	Das Jahr 2050 entspricht $t = 60$ $p(60) \approx 6\,023$ Die Leistung von 6 023 MW entspricht ca. 98,74 % der nach diesem Modell höchstmöglichen installierbaren Wasserkraftleistung von 6 100 MW. Das Ziel von mind. 99 % bis zum Jahr 2050 wird also nur knapp verpasst.	3
			40

[redacted]