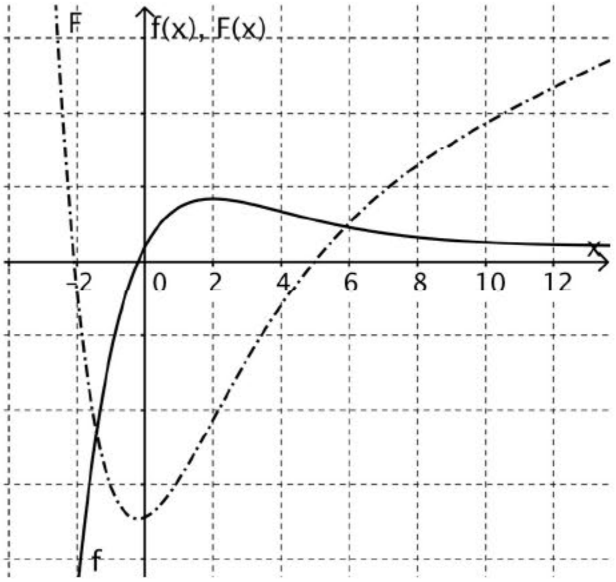
[redacted]

Aufgabe 1 mit Analytischer Geometrie:

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>A1</td><td>Der Prüfling ...</td><td>Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:
Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.
<u>Bemerkung</u>:
Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.</td><td></td></tr>
<tr><td>1a</td><td>entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>wahr</th><th>falsch</th></tr>
<tr><td>$f(-0{,}4) = f(0{,}4)$</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Für den Grad n der ganzrationalen Funktion f gilt: $n \geq 4$.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>$f''(x) < 0$ für $x \in [-0{,}3; -0{,}1]$</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>$\int_{0}^{0{,}3} f(x)dx \approx 0{,}6$ [FE]</td><td></td><td>X</td></tr>
</table>
</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>b1)
ergänzt die fehlenden Angaben und
b2)
skizziert den Verlauf einer möglichen Stammfunktion F.</td><td>b1)
$\int_{2}^{5} (\mathbf{f(x)})\mathbf{dx} = F(5) - F(\mathbf{2})$
b2)
 </td><td>5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>1c</td><td>bestimmt den Parameter k so, dass die Fläche $\frac{2}{3}$ Flächeneinheiten groß ist.</td><td>$f_k(x) = -4x^2 + 2k \cdot x$
$-4x^2 + 2kx = 0$

Nullstellen liegen bei $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}k$

$\int_0^{\frac{1}{2}k} (-4x^2 + 2k \cdot x)dx = \left[-\frac{4}{3}x^3 + k \cdot x^2\right]_0^{\frac{1}{2}k}$
$= -\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8} k^3 + k \cdot \frac{1}{4}k^2 = \frac{1}{12}k^3$
$\frac{1}{12}k^3 = \frac{2}{3}$
$\Leftrightarrow k = 2$</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1d</td><td>d1)
gibt die Gleichung der ersten Ableitung von f an,

d2)
entscheidet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründet die Entscheidung.</td><td>d1)
$f'(x) = 2x \cdot \cos(x) - x^2 \cdot \sin(x)$

d2)
<table>
<tr><th>Aussage</th><th>Entscheidung und Begründung</th></tr>
<tr><td>Der Graph der Funktion g mit $g(x) = 2 \cdot \cos(\pi \cdot x)$ ist identisch mit dem Graphen der Funktion h mit $h(x) = -2 \cdot \cos\big(\pi(x-1)\big)$.</td><td>Die Aussage ist wahr.
Das negative Vorzeichen der Amplitude bei h führt zur Spiegelung des Graphen an der Abszissenachse (im Vergleich zum Graphen von g). Wird der gespiegelte Graph jetzt noch um eine halbe Periodenlänge (hier $p = 2$) nach links verschoben, so entstehen zwei identische Graphen.</td></tr>
<tr><td>Graph der Funktion k mit $k(x) = 1{,}5 \cdot \cos(2x) + 1{,}5$ hat im Intervall $I = [0; \pi]$
genau eine Nullstelle.</td><td>Die Aussage ist wahr.
Die Periodenlänge von k beträgt $p = \pi$.
Betragen die Amplitude $a = 1{,}5$ und die Verschiebung in Ordinatenrichtung $d = 1{,}5$, so verläuft der Graph von k oberhalb der Abszissenachse und die Tiefpunkte sind dabei Berührpunkte. Die beiden Hochpunkte liegen im vorgegebenen Intervall an den Stellen $x_1 = 0$ sowie $x_2 = \pi$. Somit liegt der einzige Tiefpunkt (der gleichzeitig Nullstelle ist) genau in der Mitte beider Werte.</td></tr>
</table>
</td><td>5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>1e</td><td>e1)
entscheidet, ob die Aussage wahr oder falsch ist, und

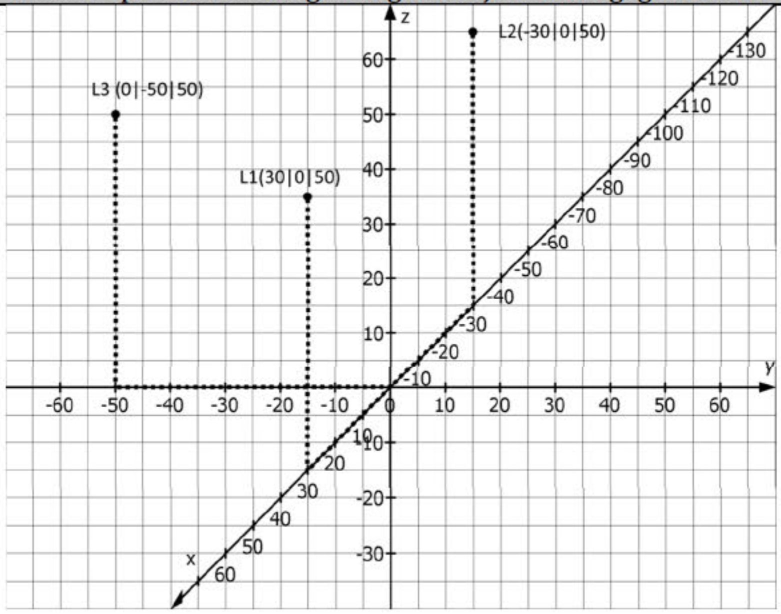
e2)
entscheidet und begründet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>
<table>
<tr><th>e1)</th><th>wahr</th><th>falsch</th></tr>
<tr><td>Für jeden Wert des Parameters a liegt der Punkt P(1|b|3) auf der Ebene E_1.</td><td></td><td>X</td></tr>
</table>
e2)
<table>
<tr><th>Aussage</th><th>Entscheidung und Begründung</th></tr>
<tr><td>Für keinen Wert des Parameters b liegen die Richtungsvektoren der Ebene orthogonal zueinander.</td><td>Orthogonalität zweier Vektoren ist gegeben, wenn das Skalarprodukt der beiden Vektoren Null ergibt. In diesem Fall würde sich ergeben:
$1 \cdot 0 + 0 \cdot b + 0 \cdot 1 = 0$
Da b mit Null multipliziert werden muss, liegen die Richtungsvektoren unabhängig von b immer orthogonal zueinander. Damit ist die Aussage falsch.</td></tr>
<tr><td>Es gibt einen Wert des Parameters b, so dass die Gleichung E_1 eine Gerade beschreibt.</td><td>Da der Parameter b nur die y-Richtung des zweiten Richtungsvektors beeinflusst, und die x- bzw. z-Richtungen der Richtungsvektoren sich unterscheiden, kann es keinen Wert für b geben, so dass die Gleichung eine Gerade beschreibt. Damit ist die Aussage falsch.</td></tr>
</table>
</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1f</td><td>f1)
prüft, ob der Punkt P auf der Geraden g_1 liegt.

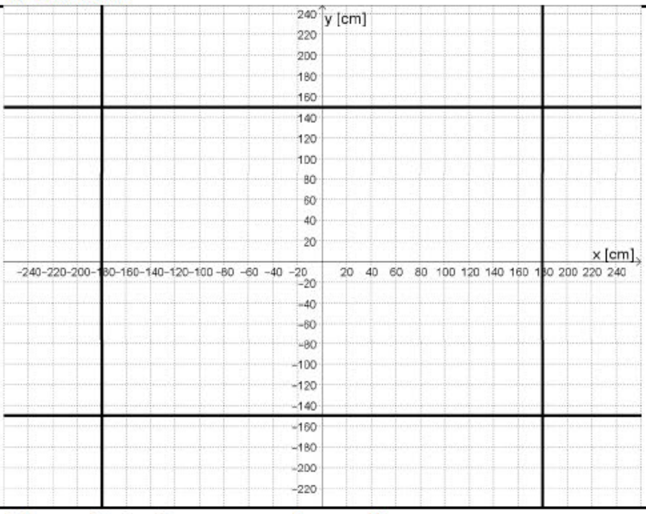
f2)
berechnet den Abstand des Punktes P zu der Geraden g_1 und erläutert sein Vorgehen.</td><td>f1)
$\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$
Aus der letzten Zeile ergibt sich: $3 = 1$. Aus diesem Widerspruch folgt, dass der Punkt nicht auf der Geraden liegt.

f2)
Zur Bestimmung des minimalen Abstandes zwischen einem Punkt und einer Geraden muss der Richtungsvektor der Geraden einen rechten Winkel mit der Strecke vom Punkt P zur Geraden g_1 bilden. Somit ergibt sich für das Skalarprodukt:
$0 = \left(\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right)\right) \bullet \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$
Durch Umformen und Vereinfachen ergibt sich daraus dann:
$0 = \left(\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right) \bullet \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow$
$0 = (-3 - 2t) \cdot 2 + (1 - t) \cdot 1$
$0 = -6 - 4t + 1 - t$
$t = -1$
<i>Fortsetzung nächste Seite</i></td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
zu 1f		Der minimale Abstand zwischen dem Punkt und der Geraden ist also für $t=-1$ gegeben. Wie folgt ergibt sich der Vektor des minimalen Abstandes: $\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}-\left(\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$ Über die Berechnung des Betrages des Vektors kann die minimale Länge des Abstandes zwischen dem Punkt P und der Geraden g_1 mit einer Länge von 3 LE berechnet werden. $\left\lvert\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}\right\rvert=\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}=3$	
1g	g1) zeigt, dass es sich bei dem von den drei Punkten aufgespannten Dreieck nicht um ein gleichseitiges Dreieck handelt. g2) bestimmt eine Gleichung der Geraden.	g1) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\lvert\overrightarrow{AC}\rvert\neq\lvert\overrightarrow{BC}\rvert$ kein gleichseitiges Dreieck $3=3\neq\sqrt{6}$ g2) $\overrightarrow{0P}_{\text{Mitte}}=\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}+0{,}5\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3{,}5\\2\\1{,}5\end{pmatrix}$ $g_2\colon\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1-3{,}5\\1-2\\1-1{,}5\end{pmatrix}$ $g_2\colon\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2{,}5\\-1\\-0{,}5\end{pmatrix}$	5
1h	bestimmt die Parameter a, b und c.	$a\cdot 0+b\cdot 0+c\cdot 3{,}33=10$ $c\approx 3$ $a\cdot 5+b\cdot 0+c\cdot 0=10$ $a=2$ $a\cdot 0+b\cdot 2{,}5+c\cdot 0=10$ $b=4$	5
			40

Aufgabe 2: Radiotherapie

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A2	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. Bemerkung: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	
2a	zeichnet die Punkte ein und erläutert die Schwierigkeit, Koordinaten aus einem dreidimensionalen, kartesischen Koordinatensystem abzulesen.	 Durch die Darstellung in 3D auf einem 2D Medium werden Punkte mit unterschiedlichen 3D-Koordinaten in der 2D-Darstellung an der gleichen Position dargestellt. Folglich ist der Rückgriff von der 2D-Darstellung auf die Koordinaten in der 3D-Darstellung nicht eindeutig möglich.	5
2b	ordnet den Behandlungsstrahl einem der Linearbeschleuniger zu und prüft, ob der Behandlungsstrahl durch diese Geradengleichung beschrieben werden kann.	Der Ortsvektor des Ausgangs von Linearbeschleunigers 2 lautet $\overrightarrow{OL_2} = \begin{pmatrix} -30 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix}$. Folglich muss es der Linearbeschleuniger 2 sein. Der Richtungsvektor des Behandlungsstrahles ergibt sich aus der Differenz der Ortsvektoren des Behandlungszieles und des Ausgangs von Linearbeschleuniger 2: $\overrightarrow{L_2B} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -30 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 5 \\ -25 \end{pmatrix}$ Der Richtungsvektor der Geraden g entspricht genau einem Fünftel des Vektors $\overrightarrow{BL_2}$. $\frac{\overrightarrow{L_2B}}{5} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 5 \\ -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ Folglich kann der Behandlungsstrahl von Linearbeschleuniger 2 durch die Geradengleichung beschrieben werden.	4

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
2c	berechnet die Länge des Behandlungsstrahls bis zum Bestrahlungsziel.	Betrag des Vektors $\overrightarrow{L_2B}$ des Behandlungsstrahls des Linearbeschleunigers 2: $\left\lvert\overrightarrow{L_2B}\right\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}10\\5\\25\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-30\\0\\50\end{pmatrix}\right\rvert \approx 47{,}43\ [\text{cm}]$	3
2d	beurteilt, ob die Therapie als erfolgsversprechend eingeschätzt werden kann.	Entnommen aus der Grafik: Der Fokussierungsgrad liegt bei einem Abstand von 32 cm bei ca. 61 %. Da der Fokussierungsgrad des Behandlungsstrahls mit ca. 61 % deutlich über dem Grenzwert von 50 % liegt, kann mit einem erfolgreichen Therapieverlauf gerechnet werden. (61 % > 50 %)	3
2e	prüft, ob diese Voraussetzung für den Linearbeschleuniger 1 und den Linearbeschleuniger 3 gegeben ist.	Bestimmung der Vektoren$\overrightarrow{L_1B}$ und $\overrightarrow{L_3B}$ der Behandlungsstrahlen der Linearbeschleuniger: $\overrightarrow{L_1B} = \begin{pmatrix}10\\5\\25\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}30\\0\\50\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-20\\5\\-25\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{L_3B} = \begin{pmatrix}10\\5\\25\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\-50\\50\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\55\\-25\end{pmatrix}$ Berechnung des Winkels $\measuredangle(L_3BL_1)$ zwischen den Vektoren der Behandlungsstrahlen: $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix}-20\\5\\-25\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\55\\-25\end{pmatrix}}{\left\lvert\begin{pmatrix}-20\\5\\-25\end{pmatrix}\right\rvert\cdot\left\lvert\begin{pmatrix}10\\55\\-25\end{pmatrix}\right\rvert}$ $\alpha \approx 69{,}34° > 30°$ Da der Schnittwinkel größer als 30° ist, ist keine Schädigung zu erwarten.	4
2f	skizziert die Grenzen des Gefahrenbereiches in der Abbildung.		4
2g	zeigt, dass die Ebene E_1 durch die Ebenengleichung beschrieben werden kann.	Ebene E_1 in Parameterdarstellung: $E_1\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}180\\0\\0\end{pmatrix} + t_1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t_2\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ Ebene E_1 in Koordinatendarstellung: $x + 0\cdot y + 0\cdot z = 180$ *Fortsetzung nächste Seite*	4

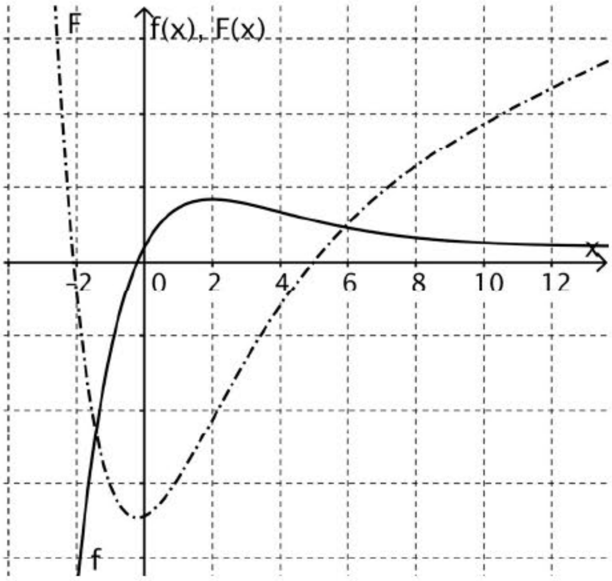
	Anforderungen	Modelllösungen	BE
zu 2g		Einsetzen der Parameterdarstellung in die Koordinatendarstellung: $(180 + t_1 \cdot 0 + t_2 \cdot 0) + 0 \cdot (0 + t_1 \cdot 1 + t_2 \cdot 0) + 0 \cdot (0 + t_1 \cdot 0 + t_2 \cdot 1) = 180$ $180 = 180$ Folglich sind die Ebenen identisch.	
2h	ermittelt den Schnittpunkt des Behandlungsstrahls des Linearbeschleunigers 1 mit dem Fußboden und prüft, ob eine Gefährdung gegeben ist.	Gleichung der Geraden des Behandlungsstrahls (Linearbeschleuniger 1): $g_{L_1}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 5 \\ -25 \end{pmatrix}$ Schnittpunkt P des Behandlungsstrahls (Linearbeschleuniger 1) mit dem Fußboden: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ -60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 5 \\ -25 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \quad u = \frac{22}{5}$ $\Rightarrow x = -58 \quad y = 22$ Die Koordinaten des Schnittpunktes lauten also: $P(-58\vert 22\vert -60)$ Da die Koordinaten innerhalb des Gefahrenbereichs liegen, ist eine Gefährdung ausgeschlossen. $(-180 < x < 180; \ -150 < \ y < 150)$	5
2i	berechnet den Abstand von der Ebene E_7 (Dachschräge) zu dem Ausgang des Linearbeschleunigers 3.	Ortsvektor des Linearbeschleunigers 3: $\overrightarrow{OL_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -50 \\ 50 \end{pmatrix}$ Normalenvektor der Ebene E_7: $\begin{pmatrix} 360 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 190 \\ 190 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -68\,400 \\ 68\,400 \end{pmatrix}$ Geradengleichung der Gerade $g_{L_3-\text{Ebene}}$ vom Punkt L_3 in Richtung des Normalenvktors der Ebene E_7: $g_{L_3-\text{Ebene}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -50 \\ 50 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -68\,400 \\ 68\,400 \end{pmatrix}$ Schnittpunktberechnung der Ebene E_7 mit der der Gerade $g_{L_3-\text{Ebene}}$: $\begin{pmatrix} 0 \\ -50 \\ 50 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -68\,400 \\ 68\,400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -180 \\ -150 \\ 50 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 360 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 190 \\ 190 \end{pmatrix}$ $v = \frac{1}{1\,368} \quad r = \frac{1}{2} \quad s = \frac{5}{19}$ Einsetzen von $v = \frac{1}{1\,368}$ in die Gerade $g_{L_3-\text{Ebene}}$ ergibt den Schnittpunkt der Geraden $g_{L_3-\text{Ebene}}$ mit der Ebene E_7: $\begin{pmatrix} 0 \\ -50 \\ 50 \end{pmatrix} + \frac{1}{1\,368} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -68\,400 \\ 68\,400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -100 \\ 100 \end{pmatrix}$ *Fortsetzung nächste Seite*	8

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
zu 2i		Der Betrag der Differenz zwischen Ortsvektor des Linearbeschleunigers 3 $(\overrightarrow{OL_3})$ und dem Schnittpunkt der Geraden $g_{L_3-\text{Ebene}}$ mit der Ebene E_7 ergibt den minimalen Abstand der von $\overrightarrow{OL_3}$ zu der Ebene $\left\lvert\begin{pmatrix} 0 \\ -50 \\ 50 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -100 \\ 100 \end{pmatrix}\right\rvert \approx 70{,}71\ [\text{cm}]$	
			40

Aufgabe 1 mit Linearer Algebra:

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>A1</td><td>Der Prüfling ...</td><td>Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:
Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.
<u>Bemerkung</u>:
Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.</td><td></td></tr>
<tr><td>1a</td><td>entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>wahr</th><th>falsch</th></tr>
<tr><td>$f(-0,4) = f(0,4)$</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Für den Grad n der ganzrationalen Funktion f gilt: $n \geq 4$.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>$f''(x) < 0$ für $x \in [-0,3; -0,1]$</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>$\int_{0}^{0,3} f(x)dx \approx 0,6$ [FE]</td><td></td><td>X</td></tr>
</table>
</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>b1)
ergänzt die fehlenden Angaben und

b2)
skizziert den Verlauf einer möglichen Stammfunktion F.</td><td>b1)
$\int_{2}^{5} (\mathbf{f(x)})d\mathbf{x} = F(5) - F(\mathbf{2})$

b2)
 </td><td>5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>1c</td><td>bestimmt den Parameter k so, dass die Fläche $\frac{2}{3}$ Flächeneinheiten groß ist.</td><td>$f_k(x) = -4x^2 + 2k \cdot x$
$-4x^2 + 2k \cdot x = 0$
Nullstellen liegen bei $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}k$
$\int_0^{\frac{1}{2}k} (-4x^2 + 2k \cdot x)dx = \left[-\frac{4}{3}x^3 + k \cdot x^2\right]_0^{\frac{1}{2}k}$
$= -\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8} k^3 + k \cdot \frac{1}{4}k^2 = \frac{1}{12}k^3$
$\frac{1}{12}k^3 = \frac{2}{3}$
$\Leftrightarrow k = 2$</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1d</td><td>d1)
gibt die Gleichung der ersten Ableitung von f an,
d2)
entscheidet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründet die Entscheidung.</td><td>d1)
$f'(x) = 2x \cdot \cos(x) - x^2 \cdot \sin(x)$
d2)
<table>
<tr><th>Aussage</th><th>Entscheidung und Begründung</th></tr>
<tr><td>Der Graph der Funktion g mit $g(x) = 2 \cdot \cos(\pi \cdot x)$ ist identisch mit dem Graphen der Funktion h mit $h(x) = -2 \cdot \cos(\pi(x-1))$.</td><td>Die Aussage ist wahr.
Das negative Vorzeichen der Amplitude bei h führt zur Spiegelung des Graphen an der Abszissenachse (im Vergleich zum Graphen von g). Wird der gespiegelte Graph jetzt noch um eine halbe Periodenlänge (hier $p = 2$) nach links verschoben, so entstehen zwei identische Graphen.</td></tr>
<tr><td>Der Graph der Funktion k mit $k(x) = 1{,}5 \cdot \cos(2x) + 1{,}5$ hat im Intervall $I = [0; \pi]$ genau eine Nullstelle.</td><td>Die Aussage ist wahr.
Die Periodenlänge von k beträgt $p = \pi$.
Betragen die Amplitude $a = 1{,}5$ und die Verschiebung in Ordinatenrichtung $d = 1{,}5$, so verläuft der Graph von k oberhalb der Abszissenachse und die Tiefpunkte sind dabei Berührpunkte. Die beiden Hochpunkte liegen im vorgegebenen Intervall an den Stellen $x_1 = 0$ sowie $x_2 = \pi$. Somit liegt der einzige Tiefpunkt (der gleichzeitig Nullstelle ist) genau in der Mitte beider Werte.</td></tr>
</table></td><td>5</td></tr>
</table>

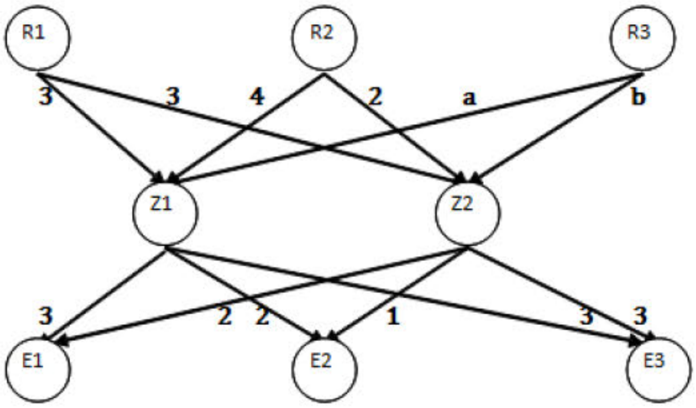
<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th></th></tr>
<tr><td>1e</td><td>entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>wahr</th><th>falsch</th></tr>
<tr><td>Es gilt: $\begin{pmatrix} a & b \\ 0,5 & -0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b-a \\ 0,5 & -1 \end{pmatrix}$</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Es gilt:
$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0,5 & -0,5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}$</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Ist A eine Matrix vom Typ 2x3 und B eine Matrix vom Typ 2x4, so ist $A^T \cdot B$ eine Matrix vom Typ 3x4.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Zu einem Übergangsprozess mit der Grenzmatrix $G = \begin{pmatrix} 0.4 & 0,4 \\ 0,6 & 0,6 \end{pmatrix}$ ist der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$ ein Fixvektor.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Wenn die Matrix A die Inverse zur Matrix B ist, gilt: $A^2 \cdot B^2 = E$.</td><td>X</td><td></td></tr>
</table>
</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1f</td><td>f1)
stellt die Matrizengleichung nach der Matrix X um und

f2)
begründet, warum die beiden Aussagen
$A \cdot B \cdot A \neq A^2 \cdot B$
und
$3 \cdot A \cdot 3 = 9 \cdot A$
im Allgemeinen gelten.</td><td>f1)
$A \cdot X = 3X + C \quad \vert -3X$
$A \cdot X - 3X = C \quad \vert$ X nach rechts ausklammern
$(A - 3E) \cdot X = C \quad \vert$ von links mit $(A - 3E)^{-1}$ multiplizieren
$X = (A - 3E)^{-1} \cdot C$

f2)
$A \cdot B \cdot A \neq A^2 \cdot B$
Die Ungleichheit stimmt, da Matrizenmultiplikation im Allgemeinen nicht kommutativ ist.

$3 \cdot A \cdot 3 = 9 \cdot A$
Das Multiplizieren mit Skalaren dagegen ist kommutativ, deshalb gilt die zweite Gleichung.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1g</td><td>g1)
untersucht, ob es reelle Zahlen für x und y gibt, so dass B die zu A inverse Matrix ist und</td><td>g1)
Es muss gelten: $A \cdot B = E$
also: $\begin{pmatrix} x & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,8 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Es folgt das Gleichungssystem:
I. $0,2x + 1,6 = 1$
II. $0,8 - 0,8 = 0$
III. $0,4x + 2y = 0$
IV. $1,6 - y = 1$
mit den Lösungen $x = -3$ und $y = 0,6$.
Für diese Zahlen ist B die inverse Matrix zu A.

Fortsetzung nächste Seite</td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu g	g2) weist nach, dass für $x = -8$ keine inverse Matrix zur Matrix A existiert.	g2) Aus der Gleichung $\begin{pmatrix}-8 & 2\\ 4 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = E$ ergeben sich folgende Gleichungssysteme: I. $-8a + 2c = 1 \Leftrightarrow 4a - c = 0{,}5$ II. $4a - c = 0$ III. $-8b + 2d = 0$ IV. $4b - d = 1$ Diese Gleichungssysteme haben keine Lösung, denn die ersten beiden Gleichungen (und auch die Gleichungen III und IV) stehen im Widerspruch zueinander.	
1h	h1) zeichnet das zugehörige Materialverflechtungsdiagramm und	h1) 	5
	h2) bestimmt die Elemente a und b so, dass für die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C gilt: $C = \begin{pmatrix}15 & 9 & 18\\ 16 & 10 & 18\\ 5 & 3 & 6\end{pmatrix}$,	h2) Es muss gelten: $A \cdot B = C$, also $\begin{pmatrix}3 & 3\\ 4 & 2\\ a & b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15 & 9 & 18\\ 16 & 10 & 18\\ 7 & 4 & 9\end{pmatrix}$. Es folgt das Gleichungssystem: I. $3a + 2b = 7$ II. $2a + b = 4$ III. $3a + 3b = 9$ mit den Lösungen: $a = 1$ und $b = 2$.	
	h3) erläutert die Aussage des Elementes c_{23}.	h3) Das Element $c_{23} = 18$ besagt, dass 18 ME des Rohstoffes R2 für die Produktion einer ME des Endproduktes E3 benötigt werden.	
			40

Aufgabe 2: Gelbverzwergungsvirus

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A2	Der Prüfling …	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	
2a	erläutert die Bedeutung der Elemente b_{13} und b_{44} im Sachzusammenhang und	Das Element $b_{13} = 0$ besagt, dass (innerhalb einer Woche) keine erkrankten Pflanzen wieder gesund werden, das Element $b_{44} = 1$ beschreibt den Übergang von den toten Pflanzen zu den toten Pflanzen. 100 % der Toten bleiben auch nach einer Woche tot.	6
	entscheidet begründet, welche der Matrizen keine geeigneten Übergangsmatrizen darstellen können.	Es müsste $a_{44} = 1$ gelten, da dies bei A nicht der Fall ist, ist A keine geeignete Übergangsmatrix. B ist nicht geeignet, da die Spaltensumme der 1. und 3. Spalte nicht 1 beträgt und sie somit nicht stochastisch ist. (Nur C erfüllt beide Bedingungen und ist geeignet.)	
2b	bestimmt die Zusammensetzung des Pflanzenbestandes auf Feld II eine Woche nach Untersuchungsbeginn und	Gegeben ist $\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 18\,000 \\ 2\,000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es gilt: $\overrightarrow{v_1} = M \cdot \overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 14\,400 \\ 3\,000 \\ 2\,500 \\ 100 \end{pmatrix}$. Nach einer Woche gibt es nach dem Modell 14 400 gesunde Pflanzen, 3 000 infizierte, 2 500 erkrankte und 100 abgestorbene.	5
	untersucht, ob die Aussage richtig ist.	Nach 4 Wochen gilt: $\overrightarrow{v_4} = M^4 \cdot \overrightarrow{v_0} \approx \begin{pmatrix} 7\,373 \\ 5\,357 \\ 5\,990 \\ 1\,280 \end{pmatrix}$ Also sind insgesamt 1280 Pflanzen abgestorben. Das sind weniger als $\frac{1}{10}$ von 20 000. Es sind also mehr als $\frac{9}{10}$ der Pflanzen noch lebendig. Die Aussage ist wahr.	
2c	erläutert den Zusammenhang zwischen den Vektoren $\vec{w}$ und $\vec{v}$ und	Durch Multiplikation der Matrix M^{-1} mit dem Bestandsvektor $\vec{w}$ wird der Bestandsvektor $\vec{v}$ der Vorwoche berechnet.	4
	berechnet den Vektor $\vec{w}$ für $\vec{v} = \begin{pmatrix} 11\,520 \\ 3\,990 \\ 4\,115 \\ 375 \end{pmatrix}$.	Aus der Gleichung folgt: $\vec{w} = M \cdot \vec{v}$. Aus $\vec{w} = M \cdot \begin{pmatrix} 11\,520 \\ 3\,990 \\ 4\,115 \\ 375 \end{pmatrix}$ folgt $\vec{w} = \begin{pmatrix} 9\,216 \\ 4\,780{,}5 \\ 5\,223{,}25 \\ 780{,}25 \end{pmatrix}$.	

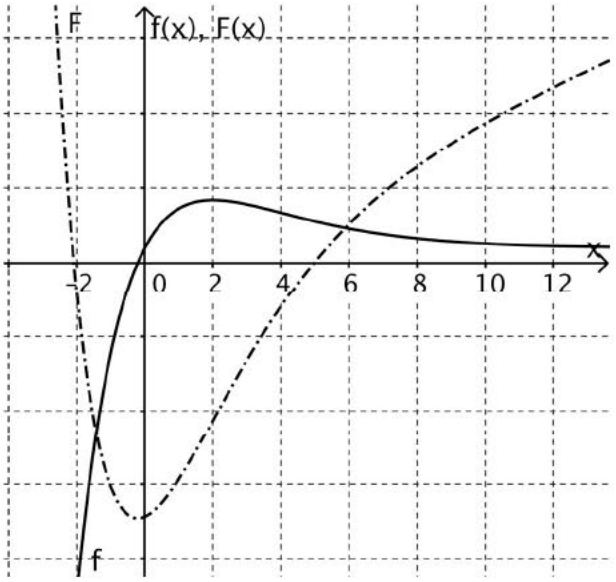
	Anforderungen	Modelllösungen	BE
2d	beschreibt die langfristige Entwicklung, die durch die Matrix M vorgegeben wird, und	Die langfristige Entwicklung kann durch Potenzierung der Matrix M angenähert werden. Es gilt $M^{100} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Diese Matrix besagt, dass langfristig alle Pflanzen absterben werden.	5
	beurteilt die Behauptung des Schülers.	Der Schüler hat recht mit seiner Behauptung, da der durch das Modell beschriebene Prozess relativ langsam erfolgt. In der Realität wird der Prozess durch das Reifen des Getreides und die Ernte beendet.	
2e	bestimmt die fehlenden Werte in der Matrix N.	Es muss gelten: $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0{,}6 & 0 \\ 0 & d & 0{,}4 & 0 \\ 0 & e & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16\,000 \\ 2\,000 \\ 2\,000 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15\,200 \\ 3\,600 \\ 1\,200 \\ 0 \end{pmatrix}$ Es folgt das Gleichungssystem: I. $a \cdot 16\,000 = 15\,200$ II. $b \cdot 16\,000 + c \cdot 2\,000 + 0{,}6 \cdot 2\,000 = 3\,600$ III. $d \cdot 2\,000 + 0{,}4 \cdot 2\,000 = 1\,200$ IV. $e \cdot 2\,000 = 0$ V. $a + b = 1$ mit den Lösungen: $a = 0{,}95$; $b = 0{,}05$; $c = 0{,}8$; $d = 0{,}2$ und $e = 0$. Es gilt also: $N = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.	5
2f	erläutert die Aussage der Gleichung im Sachzusammenhang.	Alle Vektoren $\vec{v}$, für die die Gleichung $N \cdot \vec{v} = \vec{v}$ erfüllt ist, sind Fixvektoren, d. h. die Verteilungen der gesunden, infizierten, kranken und toten Pflanzen, die sich bei weiteren Übergängen nicht mehr verändern.	3
2g	bestimmt eine allgemeine Lösung für den Vektor $\vec{v}$	Eine allgemeine Lösung kann durch das Lösen des folgenden Gleichungssystems gefunden werden: $\begin{pmatrix} 0{,}92 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}08 & 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g \\ i \\ e \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ i \\ e \\ t \end{pmatrix}$. I. $0{,}92 \cdot g = g$ II. $0{,}08 \cdot g + 0{,}8 \cdot i + 0{,}6 \cdot e = i$ III. $0{,}2 \cdot i + 0{,}4 \cdot e = e$ IV. $t = t$ *Fortsetzung nächste Seite*	5

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
zu 2g	und die Lösung für $t = 0$.	Das Gleichungssystem hat folgende Lösungen: $g = 0;\ 3 \cdot e = i; e = e$ und $t = t$. Eine allgemeine Lösung für den Vektor $\vec{v}$ ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \cdot e \\ e \\ t \end{pmatrix}$ Die Lösung für $\vec{v}$ mit $g + e + i + t = 20\,000$ und $t = 0$ lautet $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15\,000 \\ 5\,000 \\ 0 \end{pmatrix}$.	
2h	begründet, warum dieser Zusammenhang gilt.	$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 80 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$. Eine Begründung ist mit Hilfe der Übergangsmatrix möglich: Es gilt $P^3 = \begin{pmatrix} 80 \cdot a \cdot b & 0 & 0 \\ 0 & 80 \cdot a \cdot b & 0 \\ 0 & 0 & 80 \cdot a \cdot b \end{pmatrix}$ und für $a \cdot b \cdot 80 = 1$ ist P^3 die Einheitsmatrix, d. h. nach drei Perioden wiederholt sich die Anfangsverteilung. Eine Begründung ist auch sachbezogen möglich: Das Produkt $80 \cdot a \cdot b$ gibt die Anzahl der überlebenden Nachkommen eines Insektes an: Das Insekt legt 80 Eier, daraus entwickeln sich $80 \cdot a$ Larven und daraus $80 \cdot a \cdot b$ Insekten. Die Gleichung $80 \cdot a \cdot b = 1$ besagt also, dass ein Insekt nach drei Übergängen genau einen überlebenden Nachkommen hat, so dass die Gesamtpopulation konstant bleibt.	3
2i	gibt an, wie groß a mindestens sein muss, damit dieser Prozess möglich ist, und nennt ein Beispiel für mögliche Werte von a und b.	Damit die Matrix einen zyklisch periodischen Prozess beschreibt, muss gelten: $a \cdot b \cdot 80 = 1$, Es gilt also $a = \frac{1}{80 \cdot b}$ oder auch $b = \frac{1}{80 \cdot a}$ Sowohl a als auch b können keine Werte annehmen, die größer als 1 sind, aus $\frac{1}{80 \cdot a} \leq 1$ und $a > 0$ folgt $a \geq \frac{1}{80} = 0{,}0125$. Der Wert für a muss also mindestens 0,0125 betragen. Mögliche Werte wären z. B.: $a = 0{,}02$ und $b = 0{,}625$.	4
			40

Aufgabe 1 mit Stochastik:

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>A1</td><td>Der Prüfling …</td><td>Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:
Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.
<u>Bemerkung</u>:
Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.</td><td></td></tr>
<tr><td>1a</td><td>entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>wahr</th><th>falsch</th></tr>
<tr><td>$f(-0{,}4) = f(0{,}4)$</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Für den Grad n der ganzrationalen Funktion f gilt: $n \geq 4$.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>$f''(x) < 0$ für $x \in [-0{,}3; -0{,}1]$</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>$\int_{0}^{0{,}3} f(x)dx \approx 0{,}6$ [FE]</td><td></td><td>X</td></tr>
</table>
</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>b1)
ergänzt die fehlenden Angaben und

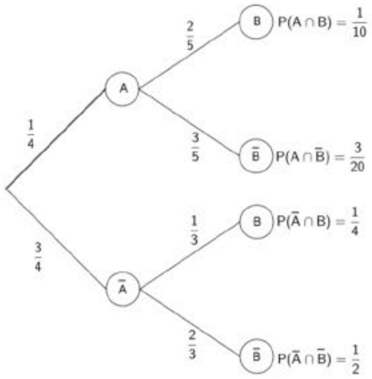
b2)
skizziert den Verlauf einer möglichen Stammfunktion F.</td><td>b1)
$\int_{2}^{5} (\mathbf{f(x)})d\mathbf{x} = F(5) - F(\mathbf{2})$

b2)

</td><td>5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>1c</td><td>bestimmt den Parameter k so, dass die Fläche $\frac{2}{3}$ Flächeneinheiten groß ist.</td><td>$f_k(x) = -4x^2 + 2k \cdot x$
$-4x^2 + 2k \cdot x = 0$
Nullstellen liegen bei $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}k$
$\int_0^{\frac{1}{2}k} (-4x^2 + 2k \cdot x)dx = \left[-\frac{4}{3}x^3 + k \cdot x^2\right]_0^{\frac{1}{2}k}$
$= -\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8} k^3 + k \cdot \frac{1}{4}k^2 = \frac{1}{12}k^3$
$\frac{1}{12}k^3 = \frac{2}{3}$
$\Leftrightarrow k = 2$</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1d</td><td>d1)
gibt die Gleichung der ersten Ableitung von f an,
d2)
entscheidet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründet die Entscheidung.</td><td>d1)
$f'(x) = 2x \cdot \cos(x) - x^2 \cdot \sin(x)$
d2)
<table>
<tr><th>Aussage</th><th>Entscheidung und Begründung</th></tr>
<tr><td>Der Graph der Funktion g mit $g(x) = 2 \cdot \cos(\pi \cdot x)$ ist identisch mit dem Graphen der Funktion h mit $h(x) = -2 \cdot \cos(\pi(x-1))$.</td><td>Die Aussage ist wahr.
Das negative Vorzeichen der Amplitude bei h führt zur Spiegelung des Graphen an der Abszissenachse (im Vergleich zum Graphen von g). Wird der gespiegelte Graph jetzt noch um eine halbe Periodenlänge (hier $p = 2$) nach links verschoben, so entstehen zwei identische Graphen.</td></tr>
<tr><td>Graph der Funktion k mit $k(x) = 1{,}5 \cdot \cos(2x) + 1{,}5$ hat im Intervall $I = [0; \pi]$ genau eine Nullstelle.</td><td>Die Aussage ist wahr.
Die Periodenlänge von k beträgt $p = \pi$.
Betragen die Amplitude $a = 1{,}5$ und die Verschiebung in Ordinatenrichtung $d = 1{,}5$, so verläuft der Graph von k oberhalb der Abszissenachse und die Tiefpunkte sind dabei Berührpunkte. Die beiden Hochpunkte liegen im vorgegebenen Intervall an den Stellen $x_1 = 0$ sowie $x_2 = \pi$. Somit liegt der einzige Tiefpunkt (der gleichzeitig Nullstelle ist) genau in der Mitte beider Werte.</td></tr>
</table></td><td>5</td></tr>
</table>

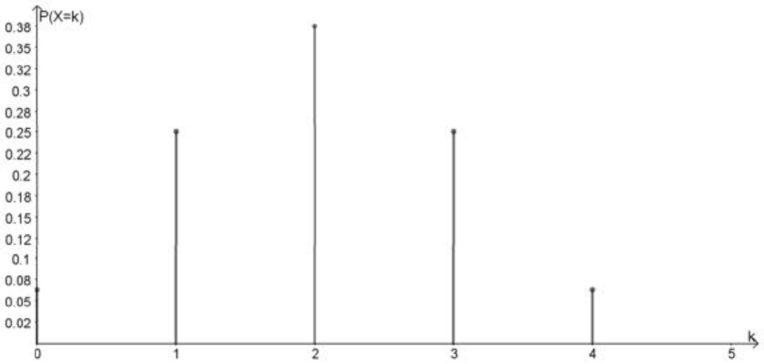
<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr>
<td>1e</td>
<td>e1)
ergänzt die die fehlenden Wahrscheinlichkeiten.

e2)
berechnet die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $P_B(A)$.

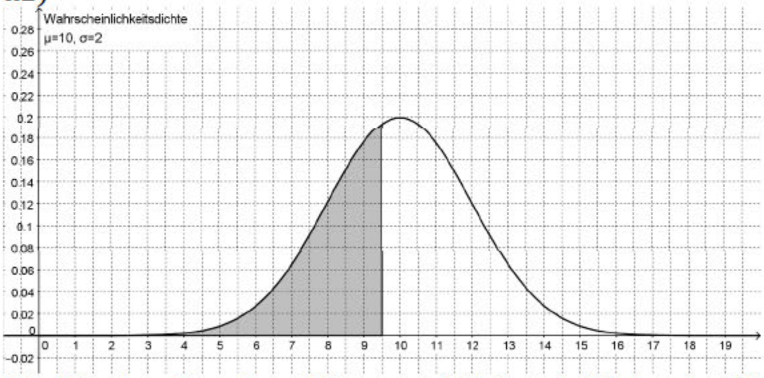
e3)
zeigt, dass die Ereignisse A und B voneinander abhängig sind.</td>
<td>e1)


<table>
<tr><th>P</th><th>A</th><th>$\bar{A}$</th><th>Summen</th></tr>
<tr><td>B</td><td>0,1</td><td>0,25</td><td>0,35</td></tr>
<tr><td>$\bar{B}$</td><td>0,15</td><td>0,5</td><td>0,65</td></tr>
<tr><td>Summen</td><td>0,25</td><td>0,75</td><td>1</td></tr>
</table>
e2)
$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{7}{20}} = \frac{2}{7}$$
e3)
$P(A) = \frac{1}{4}$
$P_B(A) \neq P(A)$
Die Ereignisse A und B sind voneinander abhängig.</td>
<td>5</td>
</tr>
<tr>
<td>1f</td>
<td>f1)
berechnet die Höhe der Standardabweichung σ,

f2)
ergänzt die fehlenden Wahrscheinlichkeiten in Tabelle 1.2 und

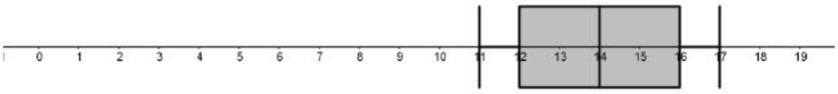
f3)
zeichnet ein Diagramm dieser Binomialverteilung.</td>
<td>f1)
$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 1$
f2)
<table>
<tr><th>$P(X = 0)$</th><th>$P(X = 1)$</th><th>$P(X = 2)$</th><th>$P(X = 3)$</th><th>$P(X = 4)$</th></tr>
<tr><td>6,25 %</td><td>25 %</td><td>37,5 %</td><td>25 %</td><td>6,25 %</td></tr>
</table>
f3)


</td>
<td>5</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>1g</td><td>g1)
gibt den Definitionsbereich der Wahrscheinlichkeit p_B an.
g2)
ermittelt den langfristig zu erwartenden Gewinn und
g3)
bestimmt die Größe der Winkel der Sektoren B und C.</td><td>g1)
$0 < p_B < 0{,}75$
g2)
$\mu = 0{,}25 \cdot 2 + 0{,}25 \cdot 3 + 0{,}5 \cdot 4 = 3{,}25$ [Euro]
Der Spieler muss kann somit langfristig einen durchschnittlichen Gewinn in Höhe von 3,25 Euro − 2,00 Euro = 1,25 Euro erwarten.
g3)
$0{,}25 \cdot 2 + p_B \cdot 3 + (0{,}75 - p_B) \cdot 4 = 3$
$\Leftrightarrow p_B = 0{,}5$
Die Wahrscheinlichkeit p_B beträgt 50 %, somit müssen die Winkel der Kreissektoren B 180° und C 90° betragen.</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1h</td><td>h1)
entscheidet, ob die Aussagen richtig oder falsch sind,
h2)
ermittelt den Wert von k und erläutert die Vorgehensweise.</td><td>h1)
<table>
<tr><th></th><th>wahr</th><th>falsch</th></tr>
<tr><td>Es gilt $P(X \geq 11) > 50\ \%$.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Es gilt $P(X \leq 5) = P(X \geq 15)$.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Es gilt $P(X \geq 12) \approx 30\ \%$.</td><td></td><td>X</td></tr>
</table>
h2)


Ein Kästchen hat einen Wert von 1 %. Durch Zählen der Kästchen kann k = 9,5 ermittelt werden (die graue Fläche in der obigen Abbildung besteht aus ca. 40 Kästchen).</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>40</td></tr>
</table>

Aufgabe 2: Essstörungen

	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
2a	zeichnet ein Boxplot zur Altersstruktur der LES ein und vergleicht zwei Kennzahlen miteinander.	 Die Spannweite beider Boxplot-Diagramme beträgt $x_{min} - x_{max} = 17 - 11 = 6$. Da Schüler gleicher Altersgruppen befragt worden sind, beträgt der maximale Altersunterschied bei allen befragten Schülern an beiden Schulen sechs Jahre. Der Median, also der Wert, der die Stichprobe in zwei gleich große Gruppen teilt, beträgt bei der LES 13 Jahre und bei der CFGS 14 Jahre. Des Weiteren können alternativ auch die Interquartilsabstände sowie die oberen und die unteren Quartile beider Schulen miteinander verglichen werden.	6
2b	berechnet, wie hoch der durchschnittliche Anteil der Jungen mit Verdacht auf eine Essstörung an allen Jungen der LES ist.	Wenn $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}$ und x_{17} aus Tabelle 2.1 die Anzahlen der 11- jährigen, 12-jährigen usw. Jungen darstellt, dann berechnet sich der durchschnittliche Anteil an essgestörten Jungen durch: $\frac{0{,}1875\, x_{11} + 0{,}05\, x_{12} + 0{,}25\, x_{13} + 0{,}2143\, x_{14} + 0{,}1765\, x_{15} + 0{,}1667\, x_{16} + 0{,}2174\, x_{17}}{x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17}}$ $\approx 18{,}3\ \%$ Der durchschnittliche Anteil der Jungen mit Verdacht auf eine Essstörung an allen Jungen der LES beträgt ca. 18,3 %.	4
2c	ermittelt die absolute Häufigkeit eines Verdachts auf eine Essstörung bei den 13-jährigen Jungen an der CFGS.	Bei beiden Schulen existieren insgesamt $80 \cdot 16{,}25\ \% = 13$ Jungen mit einem Verdacht auf eine Essstörung. An der LES gibt es $20 \cdot 5\ \% + 24 \cdot 25\ \% = 7$ Jungen mit einem Essstörungsverdacht. Somit beträgt die absolute Häufigkeit eines Essstörungsverdachts an der CFGS $13 - 7 - 4 = 2$ Schüler.	3
2d	erläutert, unter welchen Annahmen die Anzahl der Jugendlichen mit einem Verdacht auf eine Esstörung als binomialverteilte Zufallsvariable betrachtet werden kann.	Die Verteilung der Zufallsvariablen X: „Anzahl der Jugendlichen mit Verdacht auf eine Essstörung" kann als binomialverteilt angenommen werden, wenn bei einer Stichprobe nur zwei mögliche Ergebnisse zugelassen sind (Erfolg: Verdacht auf eine Essstörung und Misserfolg: kein Verdacht auf eine Essstörung). Des Weiteren müssten die Jugendlichen unabhängig voneinander sein und die Eintrittswahrscheinlichkeit von $p = 0{,}2$ müsste somit von Stufe zu Stufe konstant bleiben. Außerdem ist die Anzahl der Jugendlichen mit einem Verdacht auf eine Essstörung diskret verteilt.	3

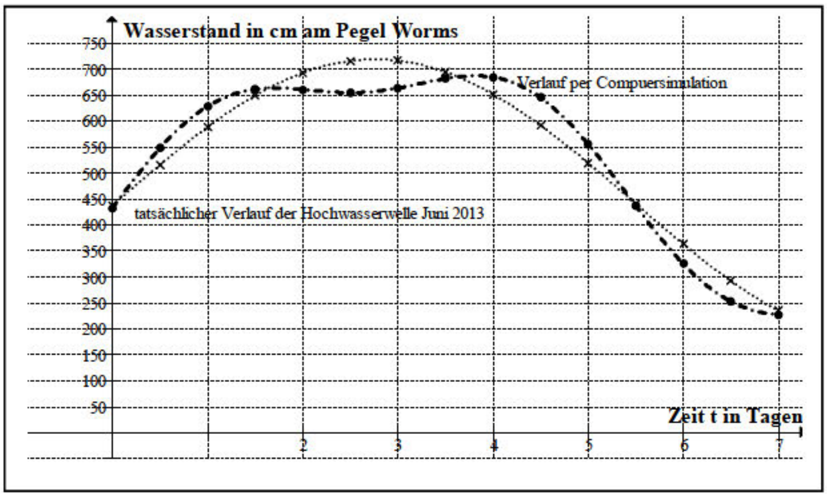
	Anforderungen	Modelllösungen	
2e	ermittelt die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.	Die Zufallsvariable X mit $X \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 95\}$ ist die Anzahl der Jugendlichen mit einem Verdacht auf eine Essstörung. X ist binomialverteilt mit der Kettenlänge $n = 95$ und die Eintrittswahrscheinlichkeit beträgt $p = 0{,}2$. Der Erwartungswert liegt bei $\mu = n \cdot p = 95 \cdot 0{,}2 = 19$ Jugendlichen. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Befragung … • bei genau 21 Jugendlichen ein Verdacht auf eine Essstörung vorliegt, beträgt $P(X = 21) \approx 8{,}64\ \%$. • bei mindestens zwei Jugendlichen mehr als der Erwartungswert μ ein Verdacht auf eine Essstörung vorliegt, beträgt $P(X \geq 19 + 2) = P(X \geq 21) \approx 34{,}23\ \%$. • bei mehr als 10, aber weniger als 24 Jugendlichen ein Verdacht auf eine Essstörung vorliegt, beträgt $P(10 < X < 24) \approx 86{,}39\ \%$.	6
2f	bestimmt, wie viele Jugendliche mindestens befragt werden müssen.	Um die Anzahl der Jugendlichen zu berechnen, die mindestens befragt werden müssen, wird die Kettenlänge n Binomialverteilung ermittelt. $P(X \geq 2) \geq 0{,}95$ $\Leftrightarrow P(X \leq 1) \leq 0{,}05$ $\Leftrightarrow P(X = 0) + P(X = 1) \leq 0{,}05$ $\Leftrightarrow \binom{n}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^{n-0} + \binom{n}{1} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^{n-1} \leq 0{,}05$ $\Leftrightarrow 0{,}8^n + n \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^{n-1} \leq 0{,}05$ $\Rightarrow n \approx 21{,}77$ Es müssen mindestens 22 Jugendliche befragt werden, damit mit 95%iger Sicherheit bei mindestens zwei Jugendlichen ein Verdacht auf eine Essstörung vorliegt.	4
2g	gibt die Nullhypothese H_0 sowie die Gegenhypothese H_1 an, begründet mithilfe des Annahme- und des Ablehnungsbereiches, für welchen Bereich die Nullhypothese H_0 beibehalten werden kann,	Es wird die binomialverteilte Zufallsvariable Y: „Anzahl der Mädchen mit Verdacht auf eine Essstörung“, $Y \in \{0; 1; 2; 3; \dots; 730\}$, $n = 730$ und $p = 0{,}289$ betrachtet. Da die Prognose für eine Abweichung nach oben vorliegt, wird ein rechtsseitiger Hypothesentest durchgeführt. Nullhypothese $H_0\colon p \leq 0{,}289$, Gegenhypothese $H_1\colon p > 0{,}289$, Irrtumswahrscheinlichkeit: $\alpha = 0{,}05$. Ermittlung des Ablehnungs- und des Annahmebereiches: $P(Y \geq g_r) \leq 0{,}05 \Rightarrow P(Y \leq g_r - 1) \geq 0{,}95 \Rightarrow g_r = 232$ Damit lautet der Ablehnungsbereich von H_0: $\overline{A} = \{232; \dots; 730\}$ und der Annahmebereich von H_0 lautet: $A = \{0; 1; \dots; 231\}$. *Fortsetzung nächste Seite*	8

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2g		Die Nullhypothese H_0 kann verworfen werden, wenn mehr als 231 Mädchen einen Verdacht auf Essstörungen aufweisen.	
	ermittelt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	Da der wirkliche Anteil an Mädchen mit Verdacht auf eine Essstörung bei 35 % liegt, wird von einer Binomialverteilung mit $n = 730$ und $p = 0{,}35$ ausgegangen. Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit die Nullhypothese H_0 fälschlicherweise anzunehmen (Fehler 2. Art) $P(Y \leq 231) \approx 3{,}06\ \%$.	
2h	zeigt, dass die Standardabweichung $\sigma \approx 6{,}38$ beträgt und	Die Zufallsgröße Z: „Körpergröße eines Jugendlichen in cm“ ist normalverteilt mit $\mu = 166{,}3$ cm und unbekannter Standardabweichung σ. $\Phi\left(\frac{176{,}8 - 166{,}3}{\sigma}\right) \approx 0{,}95 \ \Rightarrow\ \sigma \approx 6{,}38$ Die Standardabweichung beträgt ca. 6,38 cm. Mit $\mu = 166{,}3$ und $\sigma = 6{,}38$ können die folgenden Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden: $P(151 < Z < 165) \approx 41{,}1\ \%$ und $P(Z < 140) \approx 0{,}0019\ \%$.	6
	prüft die Behauptungen.	Die erste Behauptung ist wahr, da ca. 41,1 % der Jugendlichen größer als 1,51 m und kleiner als 1,65 m sind. Die zweite Behauptung ist falsch, da die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Jugendlicher eine Körpergröße von höchstens 1,40 m hat, ca. 0,0019 % beträgt. Die Wahrscheinlichkeit ist zwar gering, das Auftreten des Ereignisses ist aber möglich.	
			40

Aufgabe 3: Hochwasserschutzmaßnahmen im Rheingebiet

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>A3</td><td>Der Prüfling…</td><td>Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:
Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.</td><td></td></tr>
<tr><td>3a</td><td>zeichnet den Graphen der Funktion h in das gegebene KS in Abbildung 3.1 und</td><td>Erstellt gegebenenfalls Tabelle und nutzt noch weitere markante Punkte

<table>
<tr><th>t</th><th>h(t)</th></tr>
<tr><td>0</td><td>≈433</td></tr>
<tr><td>1</td><td>≈629</td></tr>
<tr><td>2</td><td>≈661</td></tr>
<tr><td>3</td><td>≈664</td></tr>
<tr><td>4</td><td>≈685</td></tr>
<tr><td>5</td><td>≈556</td></tr>
<tr><td>6</td><td>≈325</td></tr>
<tr><td>7</td><td>≈227</td></tr>
</table>



</td><td>7</td></tr>
<tr><td></td><td>vergleicht die beiden Verläufe des Pegelstandes anhand zweier Aspekten.</td><td>Zu Beginn der Messung sind die Wasserstände nahezu identisch und in der Computersimulation verläuft der Hochwasserpegel in den ersten 1,5 Tagen zunächst höher. Das Hochwasser erreicht im Laufe des zweiten Tages bereits einen ersten Hochwasserscheitel anders als im tatsächlichen Verlauf, dort wird der höchste Stand im Laufe des dritten Tages erreicht. Das maximale Hochwasser beträgt in der Computersimulation ca. 6,90 m und wird erst am Ende des dritten Tages erreicht, es ist also deutlich niedriger.</td><td></td></tr>
<tr><td>3b</td><td>prüft, ob sich in der Simulation die Dauer der Sperrung durch die Schutzmaßnahmen voraussichtlich verkürzt.</td><td>$h(t) = 665$
für $0 \leq t \leq 7$ gilt:
$\Rightarrow t_1 \approx 3{,}0 \vee t_2 \approx 4{,}3$ (auch graphische und tabellarische Lösungswege sind zulässig)
Berechnung der Dauer der Sperrung s:
$s = t_2 - t_1 \approx 1{,}3$ [Tage] Umrechnung in h: $s \cdot 24 \approx 30{,}84$
Die Dauer der Sperrung würde von ca. 42 Stunden auf ca. 31 Stunden verkürzt.</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3c</td><td>zeigt, dass in der Simulation h_a zwei Maximalstellen bei t_{e1} und t_{e2} liegen,</td><td>Notwendige Bed.
$h'_a(t) = 0$
$h_a'(t) = -1{,}74 \cdot a \cdot \cos(1{,}74 \cdot t + 3{,}2) - 2{,}9 \cdot a \cdot \cos(0{,}58 \cdot t - 3{,}2)$
$h'_a(1{,}70758) \approx -0{,}000008 \cdot a \approx 0$
$h'_a(3{,}81337) \approx 0{,}0000009 \cdot a \approx 0$
Fortsetzung nächste Seite</td><td>6</td></tr>
</table>

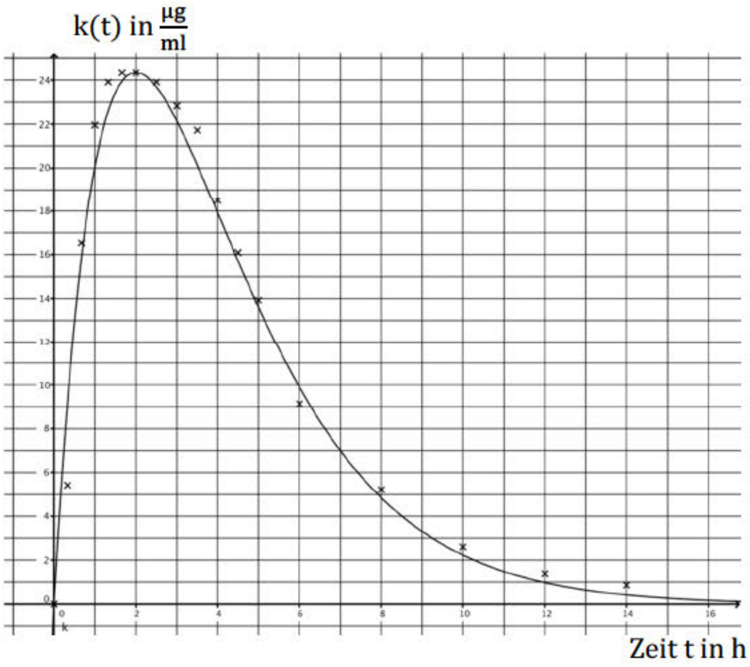
	Anforderungen	Modelllösungen	BE
zu 3c		Auf einen Nachweis des Maximums kann verzichtet werden, wenn Bezug zur Zeichnung genommen wird.	
	gibt den Tag, die Uhrzeit und den maximalen Pegelstand an und	Berechnung der zugehörigen Funktionswerte: $h_a(t_{e1}) \approx 4{,}1258 \cdot a + 445$ $h_a(t_{e2}) \approx 4{,}5744 \cdot a + 445 \Rightarrow$ das absolute Maximum liegt bei ca. $H_2(3{,}81 \vert 4{,}57 \cdot a + 445)$ Der maximale Pegelstand von ca. $(4{,}57 \cdot a + 445)$ m würde am 05.06. um 19: 31 Uhr erreicht werden.	
	berechnet, um wie viel cm der maximale Pegelstand durch die Schutzmaßnahmen abgesenkt würde.	Berechnung von $h_{53}(t_{e2}) \approx 687{,}4$ $720 - 687{,}4 = 32{,}6$ [cm] Der maximale Pegelstand würde durch diese Schutzmaßnahmen um ca. 32,6 cm gesenkt.	
3d	berechnet für die Zeit vor dem 03.06. in der Computersimulation h_a die maximale Steigung und	Aufgrund der gegebenen zusätzlichen Informationen über den Verlauf des Graphen bis vor dem 03.06. muss die Stelle mit der maximalen Steigung im relevanten Intervall $I = [0; 1]$ der linken Intervallgrenze entsprechen. Berechnung von $h_a'(0) \approx 4{,}63 \cdot a$.	4
	interpretiert den Wert der Steigung im Sachzusammenhang.	$h_{53}'(0) \approx 245{,}50 \left[\frac{\text{cm}}{\text{d}}\right]$ Die Steigung von ca. $245{,}50 \frac{\text{cm}}{\text{d}}$ gibt die maximale Geschwindigkeit innerhalb der ersten beiden Simulationstage an, mit der der Wasserspiegel steigt.	
3e	erläutert, warum der Verlauf des dritten Deichabschnitts durch eine ganzrationale Funktion mindestens 3. Grades beschrieben werden kann, und	Aufgrund des Hochpunktes in C_1 und des Tiefpunktes in D muss ein Wendepunkt existieren, und die Funktion dritten Grades ist die ganzrationale Funktion niedrigsten Grades, die einen Wendepunkt besitzt.	5
	leitet die Bedingungsgleichungen her, die für die ganzrationale Funktion f_3 gelten müssen.	Allgemeine Gleichung einer Funktion 3. Grades sowie deren Ableitung: $f_3(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ $f_3'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$ Herleitung der Bedingungsgleichungen: Sprungfreiheit in $C_1 \Rightarrow f_3(1\,250) = 600$ Knickfreiheit in $C_1 \Rightarrow f_3'(1\,250) = 0$	

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
3f	prüft, ob sich der im äußeren Verlauf des wasserführenden Altrheins befindliche Punkt E (1 750$\vert$170) im eingedeichten Gebiet befindet, und begründet, dass der Verlauf des dritten Deichabschnittes f_3 nicht wie geplant umgesetzt werden kann.	$f_3(x)=\frac{2}{703\,125}x^3-\frac{26}{1\,875}x^2+\frac{64}{3}x-\frac{89\,600}{9}$ E (1 750$\vert$170) ⇒ $f_3(1\,750)\approx 156$ Da $170 > f_3(1\,750)$ gilt, befindet sich der Punkt E außerhalb des eingedeichten Gebietes. Der Verlauf des Deichs wäre so nicht möglich, da sich der Punkt E und damit eine Teil des Altrheins außerhalb des eingedeichten Gebietes befinden würde.	4
3g	prüft, ob der Polder ungefähr 6 000 000 m³ Wasser aufnehmen kann.	Berechnung der Summe beider Integrale und der Rechteckfläche. $A_1=\int_{-625}^{0}(0{,}000864x^2+1{,}5x+600)dx\approx 152\,344\,[\mathrm{m}^2]$ Berechnung der Rechteckfläche $A_2=1\,500\cdot 600=900\,000\,[\mathrm{m}^2]$ $A_3=\int_{1\,500}^{2\,000}\left(300\cdot\cos\left(\frac{\pi}{500}x-3\pi\right)+300\right)dx=150\,000\,[\mathrm{m}^2]$ $152\,344+900\,000+150\,000=1\,202\,344\,[\mathrm{m}^2]$ Berücksichtigung der Höhe von 5 m: $V=1\,202\,344\cdot 5=6\,011\,720\,[\mathrm{m}^3]$ Ja, das Rückhaltebecken kann ungefähr 6 000 000 m³ Wasser fassen. Der Polder kann die angegebene Wassermenge laut Modell aufnehmen.	5
3h	erläutert eine mögliche Vorgehensweise und	Zunächst muss die Querschnittsfläche des Deiches bestimmt werden. Dazu wird die Kathetenlänge (= Breite) der wasserseitigen Böschung ermittelt Die Kathetenlänge kann z. B. mithilfe des Tangens bestimmt werden: $x=\frac{5}{\tan(30°)}$ Dann kann die Dreiecksfläche A bestimmt werden: $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{\tan(30°)}\cdot 5$	5

Fortsetzung nächste Seite

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
zu 3h	 begründet im Sachzusammenhang, warum der Wert die tatsächliche maximale Wassermenge nur ungefähr wiedergibt.	Mit Hilfe der Gesamtlänge der begrenzenden Deiche von 5 800 m kann dann das überschüssige Deichvolumen bestimmt werden: Gesamtlänge · Dreiecksfläche A ergibt die Wassermenge, die vom Ergebnis der Aufgabe c) noch subtrahiert werden müsste. Da die Bodenbeschaffenheit (Hügel, Senken etc.) des Naturschutzgebietes nicht bekannt ist, bleibt der neue Wert ungenau.	
			40

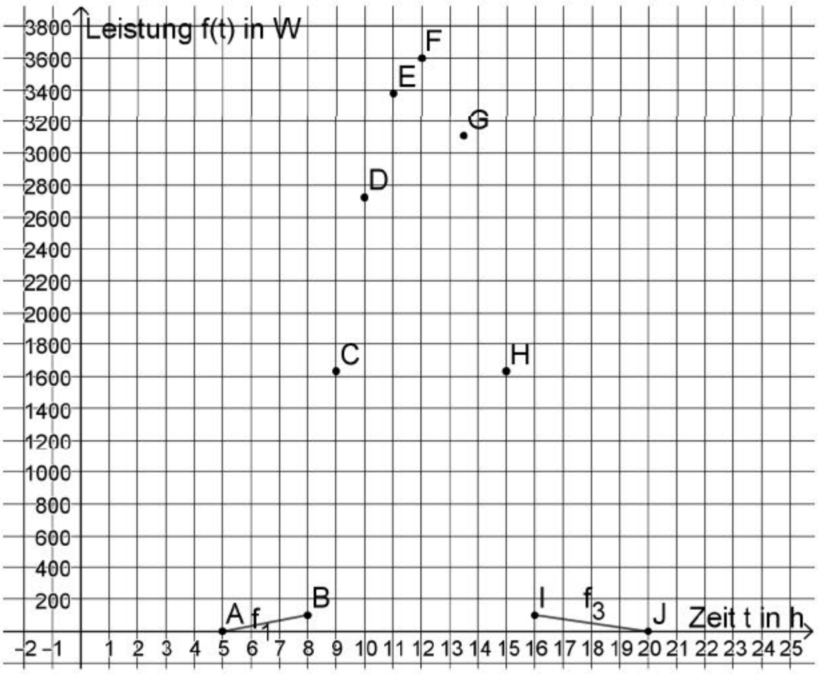
Aufgabe 3: Medikation

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A3	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	
3a	beschreibt die Entwicklung der Konzentration (drei Aspekte).	Mögliche Aspekte der Entwicklung • Nach Beginn der Messung $(t = 0)$ steigen die Werte der Medikamentenkonzentration auf das Maximum bei $t_e = 2\ [h]$ und $C = 24{,}35\ \left[\frac{\mu g}{ml}\right]$. • Nach der in der Tabelle erkennbaren höchsten Konzentration fallen die Werte der Medikamentenkonzentration C langsamer ab, als sie angestiegen sind. • Nach 14 Stunden gibt es nur noch sehr geringe Konzentrationen.	3
3b	zeichnet k ins Koordinatensystem (Abb. 3.1),		7
	erläutert eine Möglichkeit, die Güte der Modellierung anhand der Grafik oder der Tabelle zu beurteilen und	Die Güte der Modellierung kann ermittelt werden, indem man die relative Abweichung der Messwerte (in der Tabelle oder im Schaubild) zu den Werten der Modellfunktion betrachtet.	
	beurteilt die Güte der Modellierung (zwei Aspekte).	Mögliche Aspekte der Güte: • Es handelt sich um eine passende Modellierung im Bereich $0 \leq t \leq 8$, da die Punkte aus der Tabelle 3.1 relativ gesehen nur minimal vom Graphen der Funktion k abweichen. • Für $t > 8$ sind die relativen Abweichungen zwischen den Wertepaaren aus der Tabelle 3.1 und dem Graphen von k zunehmend größer. • Hoch – und Wendepunkt werden gut abgebildet.	

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
3c	berechnet den Zeitpunkt der maximalen Konzentration, gibt die maximale Medikamentenkonzentration an.	$k'(t) = (33{,}1 - 16{,}55t)e^{-0{,}5 \cdot t}$ $k''(t) = (-33{,}1 + 8{,}275t)e^{-0{,}5 \cdot t}$ Notwendige Bedingung: $k'(t) = 0 \;\Leftrightarrow t_e = 2$ Hinreichende Bedingung: $k''(2) = -16{,}55e^{-1} < 0$, also liegt ein Maximum bei t_e vor. $k(2) = 33{,}1 \cdot 2e^{-1} = \frac{66{,}2}{e} \approx 24{,}35$ Die maximale Konzentration liegt zwei Stunden nach der Einnahme bei ca. $24{,}35\,\frac{\mu g}{ml}$.	4
3d	interpretiert den Ausdruck im Sachzusammenhang und gibt die Einheit an.	Der Ausdruck gibt an, dass die mittlere Konzentration des Medikaments im Blutplasma der Probanden in den ersten 12 Stunden nach Einnahme der Tablette ca. $10{,}84\,\frac{\mu g}{ml}$ beträgt.	2
3e	leitet den Funktionsterm für den linearen Abschnitt her, bestimmt, nach welcher Zeit das Medikament vollständig abgebaut wäre.	I. $k(10) \approx 2{,}23$ II. $k'(10) \approx -0{,}89$ $a_2(t) = m \cdot t + n$ $m \approx -0{,}89$ $k(10) = m \cdot 10 + n$ $n \approx 11{,}15$ $a_2(t) \approx -0{,}89t + 11{,}15$ $a_2(t) = 0$ $t = 12{,}5$ Nach 12 Stunden und 30 Minuten wäre das Medikament vollständig abgebaut.	5
3f	prüft, ob ein Wendepunkt existiert, der unabhängig von a ist, erläutert die Bedeutung dieser Stelle im Sachzusammenhang.	$k_{a,b}''(t) = a \cdot b \cdot e^{-b \cdot t} \cdot (b \cdot t - 2)$ Notwendige Bedingung: $k_{a,b}''(t) = 0 \;\Leftrightarrow b \cdot t - 2 = 0 \Leftrightarrow t_w = \frac{2}{b}$ $k_{a,b}\left(\frac{2}{b}\right) = 2\frac{a}{b \cdot e^2}$ Die Wendestelle t_w ist unabhängig von a, da nur b als Parameter auftaucht. Jedoch ist der Funktionswert $k_{a,b}(t_w)$ abhängig von a. Der Wendepunkt ist somit nicht unabhängig von a. $\frac{2}{b}$ Stunden nach Einnahme der Tablette erfolgt die größtmögliche Abbau der Medikamentenkonzentration im Blutplasma des Probanden.	6
3g	zeigt, dass f die Medikamentenkonzentration im Blutplasma beschreibt und	I. $k_{ab}\left(\frac{10}{3}\right) = a\frac{10}{3}e^{-b\frac{10}{3}} \approx 19{,}63$ II. $k_{ab}'\left(\frac{10}{3}\right) = a \cdot e^{-\frac{10}{3} \cdot b} \cdot \left(1 - b \cdot \frac{10}{3}\right) = 0$ $\Leftrightarrow b = 0{,}3$ eingesetzt in I. folgt: $a \approx 16$ *Fortsetzung nächste Seite*	7

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
zu 3g	beurteilt, ob das Konkurrenzprodukt weniger Nebenwirkungen haben könnte und länger wirkt.	Nebenwirkungen: Der Hochpunkt von f liegt unter dem Hochpunkt von k, somit ist weniger Wirkstoff im Blutplasma vorhanden, was evtl. zu weniger Nebenwirkungen führt. (Allerdings verläuft der Graph von f für $t > 3{,}63$ oberhalb von k, was wiederum dagegen spricht.) Wirkungsdauer: $f(t) = 10 \Rightarrow t_1 \approx 0{,}79 \vee t_2 \approx 8{,}83$ Somit beträgt die Zeitspanne, in der die Wirtstoffkonzentration größer als $10\,\frac{\mu g}{ml}$ ist, ca. 8 h. Diese Zeitspanne ist fast 2,5 Stunden länger als bei Medikament A. Die Wirkungsdauer ist tatsächlich länger.	
3h	erläutert, warum eine trigonometrische Funktion geeignet sein kann, leitet die Zahlenwerte her, berechnet die Anzahl der Neuerkrankungen innerhalb von 10 Jahren.	Die Werte der Hoch- und Tiefpunkte der Zahlen aller Neuerkrankungen kehren in gleichen Zeitabständen in derselben Höhe wieder, somit kann eine periodisch verlaufende trigonometrische Funktion geeignet sein. $\frac{y_{max} - y_{min}}{2} = \frac{25\,000 - 5\,000}{2} = 10\,000$ $p = 10 \Rightarrow \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$ $-\frac{1}{4} \cdot p = -2{,}5$ $\frac{y_{max} + y_{min}}{2} = \frac{25\,000 + 5\,000}{2} = 15\,000$ $\int_0^{10} n(x)dx = 150\,000$ Nach diesem Modell kommt es in zehn Jahren insgesamt zu 150 000 Neuerkrankungen.	6
			40

Aufgabe 3: Solaranlage

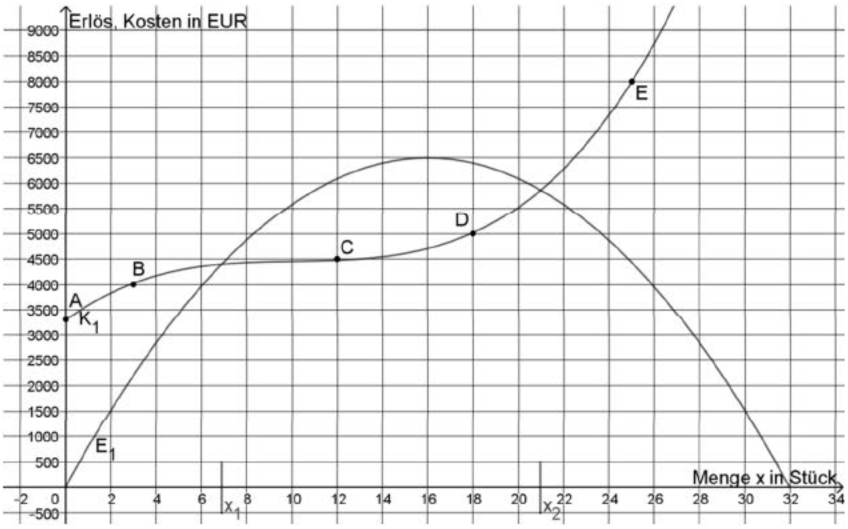
	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A3	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	
3a	ergänzt die fehlenden Wertepaare aus der Tabelle 3.1 in der Abbildung 3.1 und erläutert den Leistungsverlauf.	 Es ist zu erkennen, dass die ersten Leistungswerte sehr niedrig sind, die Anlage ist eingeschaltet, erzeugt aber noch kaum Leistung. In den Mittagsstunden, wenn die Sonneneinstrahlung am höchsten ist, erreicht die Anlage ihre maximalen Leistungswerte für den Tag. Ab 16:00 Uhr ist die Leistung wieder niedrig, bis sich die Anlage um 20:00 Uhr abschaltet.	4
3b	prüft, ob der Graph am Übergang vom ersten Abschnitt f_1 in den zweiten Abschnitt f_2 sprung- und knickfrei ist.	$f_1(8) = \frac{100}{3} \cdot 8 - \frac{500}{3} = 100$ $f_2(8) = -\frac{875}{4} \cdot (8-8) \cdot (8-16) + 100 = 100$ Somit gilt: $f_1(8) = f_2(8)$ Der Übergang ist sprungfrei. $f_1'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{100}{3} \cdot t - \frac{500}{3}\right)$ $f_1'(8) = \frac{100}{3}$ $f_2'(t) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{875}{4} \cdot (t-8) \cdot (t-16) + 100\right)$ $f_2'(8) = 1\,750$ Somit gilt: $f_1'(8) \neq f_2'(8)$ Der Übergang ist nicht knickfrei.	4

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
3c	zeigt, dass die maximale, momentane Änderungsrate der Leistung um 08:00 Uhr morgens $1\,750\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{h}}$ beträgt.	Der zweite Abschnitt f_2 ist eine nach unten geöffnete Parabel. Die Ableitung ist eine fallende lineare Funktion. Sie hat entsprechend am linken Rand (08:00 Uhr) ein Randextremum und nimmt dort den höchsten Wert an. $f_2'(8) = 1\,750$ Der Anstieg beträgt $1\,750\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{h}}$.	4
3d	ermittelt die Uhrzeit, zu der die Schule eine Kostenersparnis in Höhe von 5,00 Euro hat.	$\frac{1}{1000} \cdot 0{,}28 \cdot \int_8^k f_2(t)\,dt = 5$ $k \approx 14{,}62$ $0{,}62 \cdot 60 = 37{,}2$ Um 14:37 Uhr lag die Kostenersparnis bei einer Höhe von 5,00 EUR.	4
3e	zeigt, dass der Zeitpunkt der maximalen Leistung unabhängig von p ist und	Notwendige Bedingung: $g_p'(t) = 0$ $t_e = 12{,}4$ Hinreichende Bedingung: $g''_p(t_e) < 0$ $g_p''(12{,}4) \approx -\sin(\frac{45}{17} \cdot p)$ Da $0 < p < 1$ gilt, ist $-\sin\left(\frac{45}{17} \cdot p\right) < 0$, somit liegt eine Maximalstelle bei $t_e = 12{,}4$ vor. Die maximale Leistung ist bei $t_e = 12{,}4$ erreicht. Da hier kein p enthalten ist, ist der Zeitpunkt der maximalen Leistung unabhängig von p.	7
	ermittelt den Neigungswinkel α in Grad.	Da der Ausdruck $\sin\left(\frac{45}{17} \cdot p\right)$ als Faktor in der Funktionsgleichung enthalten ist und nur Werte zwischen minus eins und eins annehmen kann, wird der Neigungswinkel erreicht, wenn $\sin\left(\frac{45}{17} \cdot p\right) = 1$ und $0 < p < 1$ ist. $\sin\left(\frac{45}{17} \cdot p\right) = 1$ $p = \frac{17}{90} \cdot \pi \approx 0{,}5934$ Umrechnung in Grad: $\alpha = \frac{360°}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{17}{90} \cdot \pi = 34°$ Der gesuchte Neigungswinkel α liegt bei 34°.	

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
3f	erläutert anhand von zwei Aspekten, inwiefern zur Beschreibung eine trigonometrische Funktion näherungsweise geeignet scheint, und ermittelt die Werte der Parameter a, b, c und d.	- Wellenform erkennbar; - Der Abstand der ersten Minimalstelle zur Maximalstelle ist annähernd gleich dem Abstand der Maximalstelle zur zweiten Minimalstelle (Periodizität); - Der Abstand des ersten Minimums zum Maximum ist annähernd gleich dem Abstand des Maximums zum zweiten Minimum; - Der Vorgang wird sich jedes Jahr wiederholen (Periodizität). $a \approx \frac{16{,}03-8{,}3}{2}$ $a \approx 3{,}87$ $b = \frac{2\cdot\pi}{p}$ mit $p = 366$ $b = \frac{2\cdot\pi}{366}$ c ist ablesbar aus der Verschiebung der Maximalstelle: $c = 172$ $d \approx \frac{16{,}03+8{,}3}{2}$ $d \approx 12{,}17$	6
3g	vergleicht im Sachzusammenhang die mittleren Änderungsraten aus München und Kiel.	Die mittlere Änderungsrate in München beträgt $\frac{14{,}5-11{,}07}{121-61} \approx 0{,}057 \left[\frac{\text{h}}{\text{Tag}}\right]$, die mittlere Änderungsrate in Kiel beträgt $\frac{k(121)-k(61)}{121-61} \approx 0{,}081 \left[\frac{\text{h}}{\text{Tag}}\right]$. Im Sachkontext der Aufgabe bedeutet das, dass im betrachteten Zeitraum die Tageslänge in München durchschnittlich um ca. 3 Minuten und 26 Sekunden pro Tag zunimmt, in Kiel im gleichen Zeitraum um ca. 4 Minuten und 50 Sekunden pro Tag. Die Zeit zwischen dem Sonnenaufgang und dem Sonnenuntergang nimmt zwischen dem 61. Tag und dem 121. Tag in Kiel deutlicher zu als in München.	5
3h	berechnet den Ausdruck, begründet die Wahl der Integrationsgrenzen und	$\int_{122}^{244} k(x)\,dx \approx 1\,958{,}67$ Es sind nach dieser Näherung ca. 1 958,67 Tageslichtstunden. 122 ist der 122. Tag im Jahr 2016, was dem 01. Mai entspricht, 244 ist der 244. Tag im Jahr, was dem 31. August entspricht. *Fortsetzung nächste Seite*	6

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
zu 3h	nimmt zum Ansatz kritisch Stellung.	Der Definitionsbereich von k ist diskret, weil x nur ganzzahlige Werte annehmen kann. Zur Berechnung der gesamten Tageslichtstunden müssten alle einzelnen Funktionswerte des entsprechenden Zeitraums summiert werden, eine infinitesimale Berechnung über das Integral ist mathematisch unzulässig und gibt nur einen Näherungswert an.	
			40

Aufgabe 3: Schülerfirma

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A3	Der Prüfling…	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	
3a	gibt die erlösmaximale Absatzmenge und den maximalen Erlös an, skizziert den Graphen der Kostenfunktion und kennzeichnet die Gewinnzone.	Ablesen aus dem Graph: $x_{max} = 16$ und $E(x_{max}) = 6\,500$ Das Erlösmaximum in Höhe von 6 500 EUR wird bei einer Menge von 16 Stück erreicht.  Die Gewinnzone beginnt bei x_1 (Gewinnschwelle) und endet bei x_2 (Gewinngrenze).	6
3b	stellt die Bedingungsgleichungen auf.	$K_1(0) = 450$ $K_1(100) = 950$ $K_1'(700) = 0{,}2$ $K_1''(700) = 0$	4
3c	bestimmt die Menge x_s, ab der erstmals Gewinn erwirtschaftet wird, berechnet $G_1'(x_s)$ und interpretiert das Ergebnis im Sachzusammenhang.	$G_1(x)=0$ $x_1 \approx -186{,}29;\ x_2 \approx 326{,}05;\ x_3 \approx 1\,960{,}24$ $\Rightarrow x_S = 327$ Die Menge x_S, ab der erstmals Gewinn erwirtschaftet wird, liegt bei 327 Stück. $G_1'(327) \approx 3{,}17$ Der berechnete Wert ist der momentane Gewinnzuwachs bei der Menge, ab der das erste Mal Gewinn erwirtschaftet wird. Der Wert $3{,}17\ \frac{\text{EUR}}{\text{Stück}}$ bedeutet, dass bei theoretisch gleichbleibendem linearen Verlauf mit dem Verkauf der nächsten zusätzlichen Einheit ein zusätzlicher Gewinn von 3,17 EUR erzielt wird.	5

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
3d	berechnet die gewinnmaximale Menge und den maximalen Gewinn.	$G_1'(x) = -\frac{9}{793\,750}\cdot x^2 + \frac{252}{15\,875}\cdot x - \frac{2\,047}{2\,540}$ $G_1''(x) = -\frac{9}{396\,875}\cdot x + \frac{252}{15\,875}$ Notwendige Bedingung: $G_1'(x_e) = 0$ $x_{e1} \approx 52{,}76;\ x_{e2} \approx 1\,347{,}24$ Hinreichende Bedingung: $G_1''(x_e) \neq 0 \land G_1'(x_e) = 0$ $G_1''(52{,}76) \approx 0{,}015 > 0$ Somit ist x_{e1} Stelle eines Tiefpunktes. $G_1''(1\,347{,}24) \approx -0{,}015 < 0$ Somit ist x_{e2} Stelle eines Hochpunktes. Da nur ganze Schutzhüllen verkauft werden, wird eine Fallunterscheidung durchgeführt: $G_1(1\,347) \approx 3\,628{,}22$ $G_1(1\,348) \approx 3\,628{,}22$ Die gewinnmaximale Absatzmenge liegt bei 1 347 Stück bzw. 1 348 Stück und der maximale Gewinn beträgt 3 628,22 EUR.	4
3e	beurteilt die Aussage.	$G_f(x) = -\frac{3}{793\,750}\cdot x^3 + \frac{126}{15\,875}\cdot x^2 - \frac{2\,047}{2\,540}\cdot x - f$ Notwendige Bedingung: $G_f'(x) = 0$ $x_{e1} \approx 52{,}76;\ x_{e2} \approx 1\,347{,}24$ Da in den Ergebnissen x_1 und x_2 die Fixkosten f nicht mehr enthalten sind, haben sie keinen Einfluss auf die Lage der Extremstellen. $G_f(1\,347) \approx 4\,078{,}22 - f$ $G_f(1\,348) \approx 4\,078{,}22 - f$ Bei der Berechnung des Gewinns sind die Fixkosten f im Ergebnis enthalten, daher haben die Fixkosten Einfluss auf das Gewinnmaximum. Die Mitschülerin hat also nur zum Teil Recht.	2
3f	stellt die abschnittsweise definierte Funktion auf und begründet, dass die Gewinnfunktion G_2 nicht knickfrei sein kann.	Allgemein gilt: $E(x) = p(x)\cdot x$. Für den ersten Term gilt: $4{,}95\cdot x$. Beim zweiten Term muss die Verschiebung in Ordinatenrichtung beachtet werden, damit der Graph sprungfrei ist: $(400\cdot(4{,}95 - 7{,}95) = -1\,200)$. Mit dem veränderten Preis ergibt sich: $E_2(x) = \begin{cases} 4{,}95\cdot x & \text{für } 0 \le x \le 400 \\ 7{,}95\cdot x - 1\,200 & \text{für } x > 400 \end{cases}$ Die Erlösfunktion ist an der Stelle $x = 400$ nicht differenzierbar, da die Steigung „von links" einen anderen Wert hat als die Steigung „von rechts". Da die Gewinnfunktion aus der Erlösfunktion resultiert, ist auch die Gewinnfunktion an der Stelle $x = 400$ nicht differenzierbar. Somit weist auch der Graph der Funktion G_2 an der Stelle $x = 400$ einen Knick auf.	6

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
3g	bestimmt den Wertebereich für den Parameter a.	Die geringste Steigung soll im Wendepunkt vorliegen. Notwendige Bedingung: $K_a''(x) = 0$ $x_w = 700$ Hinreichende Bedingung: $K_a'''(700) \approx 0{,}00002 \neq 0$ Somit ist x_w Stelle eines Wendepunktes. Die Steigung im Wendepunkt ist abhängig vom Parameter a und beträgt: $K_a'(700) = a - \frac{245}{44}$ und soll nicht negativ werden. $a - \frac{245}{44} \geq 0$ Daraus ergibt sich $a \geq \frac{245}{44}$ Der Parameter a muss also mindestens $\frac{245}{44}$ sein, damit die Kostenfunktion monoton steigend ist.	5
3h	berechnet den Ausdruck und interpretiert den Wert im Sachzusammenhang.	$\frac{1}{20} \cdot \int_0^{20} f(t)\,dt \approx 67{,}37$ Es wurden in den ersten 20 Tagen durchschnittlich ca. 67,4 Schutzhüllen pro Tag verkauft.	4
3i	begründet, dass $S = 2\,000$ gilt und ermittelt den Tag, an dem der Preis angehoben werden muss.	Da zum Verkaufsstart noch keine Schutzhüllen verkauft wurden, muss $F(0) = 0$ gelten. Daraus folgt, dass $S = 2\,000$ gelten muss. $F(t) = 400$ $t \approx 3{,}985$ Am Ende des vierten Tages muss der Preis auf 7,95 EUR angehoben werden.	4
			40