HMF 1 - Analytische Geometrie (Pool 1)

Gegeben ist die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.1 Geben Sie jeweils eine Gleichung einer Geraden an, die
a) parallel zur Ebene E durch den Punkt $P(0\,|\,1\,|\,5)$ verläuft,
b) senkrecht zur Ebene E verläuft.

(3 P)

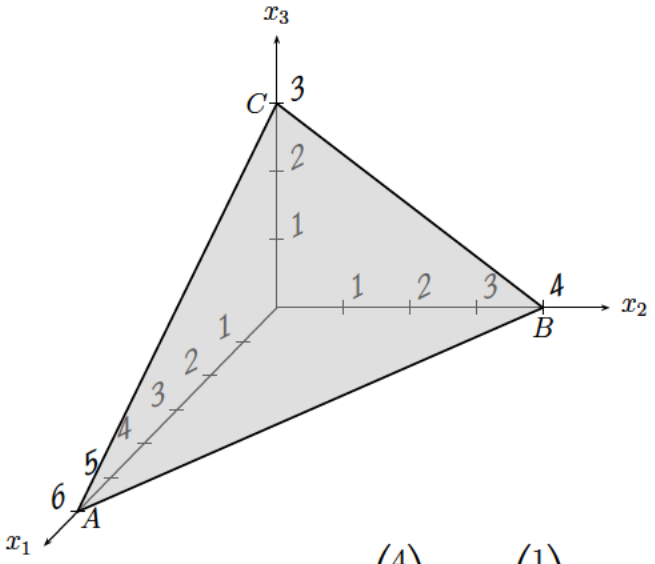
1.2 Bestimmen Sie den Abstand der Ebene E zum Ursprung.

(2 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 1 - Analytische Geometrie (Pool 1)
1.1	a) $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $g_2: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 3 P
1.2	Da die Ebene E parallel zur x_1x_2-Ebene verläuft und den Punkt $(1\,|\,2\,|\,3)$ enthält, beträgt ihr Abstand zum Ursprung 3. 2 P

HMF 2 - Analytische Geometrie (Pool 1)

2.1 Bestimmen Sie einen Normalenvektor der Ebene E, die das dargestellte Dreieck ABC enthält.



(2 P)

2.2 Die Gerade g mit der Gleichung $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ schneidet die Ebene F mit der Gleichung $F: 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts P.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 2 - Analytische Geometrie (Pool 1)
2.1	Die Ebene E, die das Dreieck enthält, wird beschrieben durch die Gleichungen $E: \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{3} = 1$ bzw. $E: 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12$. Damit ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E. 2 P
2.2	$F \cap g$: $\begin{array}{rrcl} & 2 \cdot (4 + 1r) - 1 \cdot (1 + 3r) + 3 \cdot (3 + 2r) & = & 1 \\ \Leftrightarrow & 8 + 2r - 1 - 3r + 9 + 6r & = & 1 \\ \Leftrightarrow & 5r & = & -15 \\ \Leftrightarrow & r & = & -3 \end{array}$ Wegen $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}$ hat P die Koordinaten $(1 \mid -8 \mid -3)$. 3 P

HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 1)

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem (LGS):

$$\left|\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & 2y & + & 6z & = & 8 \end{array}\right|$$

3.1 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS.

(3 P)

3.2 Verändern Sie das LGS jeweils an genau einer Stelle so, dass es

- keine Lösung besitzt:

$$\left|\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & 2y & + & 6z & = & 8 \end{array}\right|$$

- unendlich viele Lösungen besitzt:

$$\left|\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & 2y & + & 6z & = & 8 \end{array}\right|$$

(2 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 1)
3.1	$\left\|\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & 2y & + & 6z & = & 8 \end{array}\right\| \Leftrightarrow \left\|\begin{array}{rcrcrcr} & & & & 2z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & 2y & + & 6z & = & 8 \end{array}\right\|$ $\Leftrightarrow \left\|\begin{array}{rcrcrcr} & & & & z & = & 1 \\ x & + & 2y & & & = & 1 \\ 2x & + & 2y & & & = & 2 \end{array}\right\| \Leftrightarrow \left\|\begin{array}{rcrcrcr} & & & & z & = & 1 \\ x & & & & & = & 1 \\ & & y & & & = & 0 \end{array}\right\|$ $\mathbb{L} = \{(1\|0\|1)\}$ 3 P
3.2	Keine Lösung: z.B. $\left\|\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & 2y & + & \boxed{3z} & = & 2 \\ 2x & + & 2y & + & 6z & = & 8 \end{array}\right\|$ Unendlich viele Lösungen: z.B. $\left\|\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & \boxed{4y} & + & 6z & = & 8 \end{array}\right\|$ 2 P

HMF 4 - Analysis (Pool 1)

4.1 Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung $x^3 - 2x^2 = 0$.

(2 P)

4.2 Es ist jeweils genau eine Lösung richtig. Kreuzen Sie diese an.

Die Anzahl der Lösungen der Gleichung $x \cdot (x^2 + 1) \cdot \mathrm{e}^x = 0$ mit $x \in \mathbb{R}$ beträgt

☐ 1. ☐ 2. ☐ 3.

Die Lösung der Gleichung $2 \cdot x^{-3} = \frac{1}{4}$ ist

☐ -2. ☐ 2. ☐ 4.

Die Anzahl der Lösungen der Gleichung $\sin(x) = \cos(x)$ mit $0 \leq x \leq 2\pi$ beträgt

☐ 0. ☐ 1. ☐ 2.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 4 - Analysis (Pool 1)
4.1	Es ist $x^3 - 2x^2 = 0$ $\Leftrightarrow\ x^2 \cdot (x-2) = 0$ $\Leftrightarrow\ x = 0 \vee x = 2.$ 2 P
4.2	Die Anzahl der Lösungen der Gleichung $x \cdot (x^2 + 1) \cdot \mathrm{e}^x = 0$ mit $x \in \mathbb{R}$ beträgt ☒ 1. ☐ 2. ☐ 3. Die Lösung der Gleichung $2 \cdot x^{-3} = \frac{1}{4}$ ist ☐ -2. ☒ 2. ☐ 4. Die Anzahl der Lösungen der Gleichung $\sin(x) = \cos(x)$ mit $0 \leq x \leq 2\pi$ beträgt ☐ 0. ☐ 1. ☒ 2. 3 P

HMF 5 - Analysis (Pool 1)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2x^4 - 12x^2 + 3$ und $x \in \mathbb{R}$.

5.1 Ein Wendepunkt W des Graphen von f hat die Koordinaten $(1\,|\,-7)$.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Wendetangente t in W.

(3 P)

5.2 Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass der Graph von f genau zwei Wendepunkte hat.

(2 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 5 - Analysis (Pool 1)
5.1	Es ist $f'(x) = 8x^3 - 24x$ und somit $f'(1) = 8 - 24 = -16$. Damit ergibt sich als mögliche Gleichung für die Wendetangente $t(x) = f'(1) \cdot (x-1) + (-7) = -16 \cdot (x-1) - 7 = -16x + 9$. 3 P
5.2	Aufgrund der Achsensymmetrie zur y-Achse hat der Graph von f mindestens einen weiteren Wendepunkt. Graphen ganzrationaler Funktionen vierten Grades haben höchstens zwei Wendepunkte. Somit hat der Graph von f genau zwei Wendepunkte. 2 P

HMF 6 - Analysis (Pool 2)

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = x \cdot \ln(x)$.

6.1 Geben Sie den maximalen Definitionsbereich und die Nullstelle von f an.

(2 P)

6.2 Es gilt $f'(x) = \ln(x) + 1$.
Zeigen Sie, dass der Graph von f genau ein lokales Minimum hat.

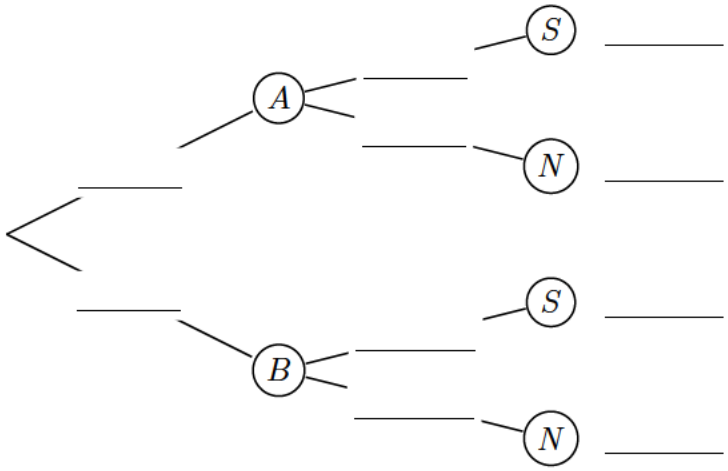
(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 6 - Analysis (Pool 2)
6.1	$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+$ Die Nullstelle ist 1. 2 P
6.2	Notwendig für eine Extremstelle x ist $f'(x) = 0$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$ $f''(x) = \frac{1}{x}$ Da zusätzlich $f''(\frac{1}{\mathrm{e}}) = \mathrm{e} > 0$ gilt, hat der Graph von f genau ein lokales Minimum. 3 P

HMF 7 - Stochastik (Pool 1)

Ein Müslihersteller lässt an zwei Standorten A und B produzieren. Am Standort A werden $60\,\%$ aller Müslipackungen produziert. $30\,\%$ der Packungen von Standort A und $55\,\%$ der Packungen von Standort B werden an Supermarktketten (S) geliefert. Die restlichen Packungen werden über das Internet (N) vertrieben.

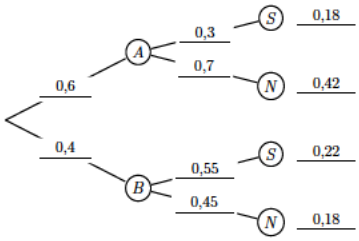
7.1 Ergänzen Sie zu diesem Sachverhalt das Baumdiagramm.



(2 P)

7.2 Zeigen Sie, dass der Anteil der Müslipackungen des Herstellers, der über das Internet vertrieben wird, $60\,\%$ beträgt. (1 P)

7.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine im Internet bestellte Müslipackung des Herstellers am Standort A produziert wurde. (2 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 7 - Stochastik (Pool 1)
7.1	 2 P
7.2	$0{,}42 + 0{,}18 = 0{,}6$ 1 P
7.3	$P_N(A) = \frac{P(A \cap N)}{P(N)} = \frac{0{,}42}{0{,}6} = \frac{42}{60} = 0{,}7$ 2 P

HMF 8 - Stochastik (Pool 2)

Bei einem rechtsseitigen Hypothesentest wird die Hypothese $H_0 : p \leq 0{,}3$ mit dem Verwerfungsbereich $V = \{6; \ldots; 10\}$ getestet.

8.1 Beschreiben Sie allgemein, was unter dem Fehler erster Art und dem Fehler zweiter Art zu verstehen ist.

(2 P)

8.2 Die Abbildungen zeigen die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der binomialverteilten Zufallsgrößen X_p mit den Parametern $n = 10$ und $p = 0{,}3$ beziehungsweise $p = 0{,}6$.

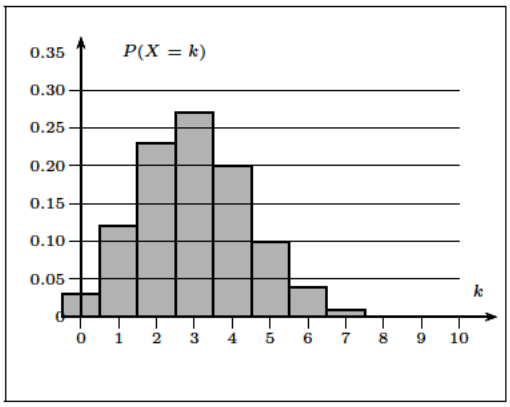


Abb. 1

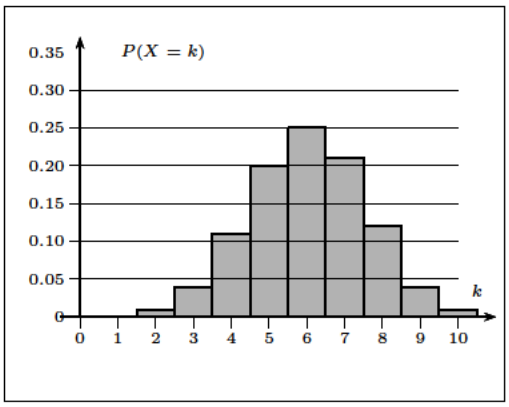


Abb. 2

Ermitteln Sie anhand der Abbildungen näherungsweise

- die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art,
- die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art unter der Annahme, dass die tatsächlich vorliegende Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}6$ beträgt.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 8 - Stochastik (Pool 2)
8.1	Der Fehler 1. Art tritt auf, wenn das Testergebnis im Verwerfungsbereich V liegt, obwohl die Hypothese H_0 wahr ist. Der Fehler 2. Art tritt auf, wenn das Testergebnis nicht im Verwerfungsbereich V liegt, obwohl die Hypothese H_0 falsch ist. 2 P
8.2	Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art kann anhand Abbildung 1 bestimmt werden. Sie beträgt ca. $0{,}04 + 0{,}01 = 0{,}05$. Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art kann anhand der Abbildung 2 bestimmt werden. Sie beträgt ca. $0{,}01 + 0{,}04 + 0{,}11 + 0{,}2 = 0{,}36$. 3 P

HMF-Bewertungsbogen für: _____

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 1 - Analytische Geometrie (Pool 1)
1.1	a) $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $g_2 : \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 3 P
1.2	Da die Ebene E parallel zur x_1x_2-Ebene verläuft und den Punkt $(1\,\vert\,2\,\vert\,3)$ enthält, beträgt ihr Abstand zum Ursprung 3. 2 P

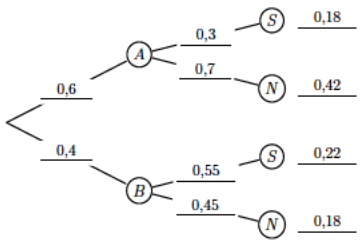
	Vorgaben für die Bewertung von HMF 2 - Analytische Geometrie (Pool 1)
2.1	Die Ebene E, die das Dreieck enthält, wird beschrieben durch die Gleichungen $E : \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{3} = 1$ bzw. $E : 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12$. Damit ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E. 2 P
2.2	$F \cap g$: $\begin{array}{rrcl} & 2 \cdot (4 + 1r) - 1 \cdot (1 + 3r) + 3 \cdot (3 + 2r) & = & 1 \\ \Leftrightarrow & 8 + 2r - 1 - 3r + 9 + 6r & = & 1 \\ \Leftrightarrow & 5r & = & -15 \\ \Leftrightarrow & r & = & -3 \end{array}$ Wegen $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}$ hat P die Koordinaten $(1\,\vert\,-8\,\vert\,-3)$. 3 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 1)
3.1	$\left\vert\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & 2y & + & 6z & = & 8 \end{array}\right\vert \Leftrightarrow \left\vert\begin{array}{rcrcrcr} & & & & 2z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & 2y & + & 6z & = & 8 \end{array}\right\vert$ $\Leftrightarrow \left\vert\begin{array}{rcrcrcr} & & & & z & = & 1 \\ x & + & 2y & & & = & 1 \\ 2x & + & 2y & & & = & 2 \end{array}\right\vert \Leftrightarrow \left\vert\begin{array}{rcrcrcr} & & & & z & = & 1 \\ x & & & & & = & 1 \\ & & y & & & = & 0 \end{array}\right\vert$ $\mathbb{L} = \{(1\vert 0\vert 1)\}$ 3 P
3.2	Keine Lösung: z.B. $\left\vert\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & 2y & + & \boxed{\mathbf{3z}} & = & 2 \\ 2x & + & 2y & + & 6z & = & 8 \end{array}\right\vert$ Unendlich viele Lösungen: z.B. $\left\vert\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & \boxed{\mathbf{4y}} & + & 6z & = & 8 \end{array}\right\vert$ 2 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 4 - Analysis (Pool 1)
4.1	Es ist $x^3 - 2x^2 = 0$ $\Leftrightarrow\ x^2 \cdot (x-2) = 0$ $\Leftrightarrow\ x = 0 \vee x = 2.$ 2 P
4.2	Die Anzahl der Lösungen der Gleichung $x \cdot (x^2+1) \cdot e^x = 0$ mit $x \in \mathbb{R}$ beträgt [X] 1. [ ] 2. [ ] 3. Die Lösung der Gleichung $2 \cdot x^{-3} = \frac{1}{4}$ ist [ ] -2. [X] 2. [ ] 4. Die Anzahl der Lösungen der Gleichung $\sin(x) = \cos(x)$ mit $0 \leq x \leq 2\pi$ beträgt [ ] 0. [ ] 1. [X] 2. 3 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 5 - Analysis (Pool 1)
5.1	Es ist $f'(x) = 8x^3 - 24x$ und somit $f'(1) = 8 - 24 = -16$. Damit ergibt sich als mögliche Gleichung für die Wendetangente $t(x) = f'(1) \cdot (x-1) + (-7) = -16 \cdot (x-1) - 7 = -16x + 9$. 3 P
5.2	Aufgrund der Achsensymmetrie zur y-Achse hat der Graph von f mindestens einen weiteren Wendepunkt. Graphen ganzrationaler Funktionen vierten Grades haben höchstens zwei Wendepunkte. Somit hat der Graph von f genau zwei Wendepunkte. 2 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 6 - Analysis (Pool 2)
6.1	$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+$ Die Nullstelle ist 1. 2 P
6.2	Notwendig für eine Extremstelle x ist $f'(x) = 0$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$ $f''(x) = \frac{1}{x}$ Da zusätzlich $f''(\frac{1}{\mathrm{e}}) = \mathrm{e} > 0$ gilt, hat der Graph von f genau ein lokales Minimum. 3 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 7 - Stochastik (Pool 1)
7.1	 2 P
7.2	$0{,}42 + 0{,}18 = 0{,}6$ 1 P
7.3	$P_N(A) = \dfrac{P(A \cap N)}{P(N)} = \dfrac{0{,}42}{0{,}6} = \dfrac{42}{60} = 0{,}7$ 2 P

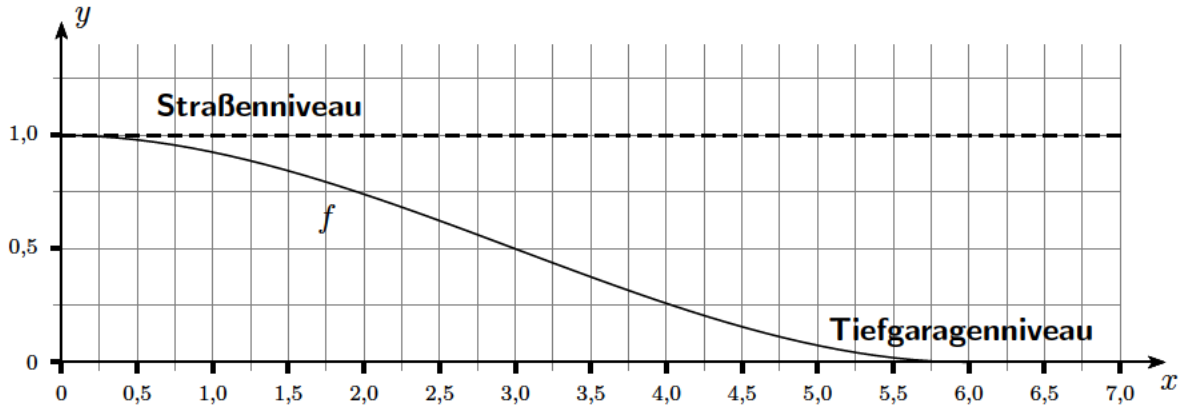
	Vorgaben für die Bewertung von HMF 8 - Stochastik (Pool 2)
8.1	Der Fehler 1. Art tritt auf, wenn das Testergebnis im Verwerfungsbereich V liegt, obwohl die Hypothese H_0 wahr ist. Der Fehler 2. Art tritt auf, wenn das Testergebnis nicht im Verwerfungsbereich V liegt, obwohl die Hypothese H_0 falsch ist. 2 P
8.2	Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art kann anhand Abbildung 1 bestimmt werden. Sie beträgt ca. $0{,}04 + 0{,}01 = 0{,}05$. Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art kann anhand der Abbildung 2 bestimmt werden. Sie beträgt ca. $0{,}01 + 0{,}04 + 0{,}11 + 0{,}2 = 0{,}36$. 3 P

Erstkorrektor: Von 40 Punkten wurden erreicht: _____

Zweitkorrektor: Von 40 Punkten wurden erreicht: _____

Aufgabe 1: Analysis

Für eine Tiefgarage wird eine Rampe geplant. Die Rampe muss auf einer horizontalen Länge von $6\,\mathrm{m}$ einen Höhenunterschied von $1\,\mathrm{m}$ ausgleichen und waagerecht sowohl in das Straßenniveau als auch in das Tiefgaragenniveau übergehen.
Das Profil der Rampe soll im Intervall $[0;6]$ durch eine ganzrationale Funktion f dritten Grades beschrieben werden. Die Lage des Profils im Koordinatensystem ist der Abbildung zu entnehmen. Eine Einheit entspricht dabei $1\,\mathrm{m}$ in der Wirklichkeit.



a) a1) Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion f.

[Kontrolle: $f(x) = \frac{1}{108} \cdot x^3 - \frac{1}{12} \cdot x^2 + 1$] (5 P)

a2) Berechnen Sie an der Stelle $1\,\mathrm{m}$ sowohl die Höhe über dem Tiefgaragenniveau als auch die Steigung der Rampe. (2 P)

a3) Laut einer Verordnung darf die Steigung von derartigen Rampen an keiner Stelle einen Wert von $25\,\%$ überschreiten.
Untersuchen Sie rechnerisch, ob die geplante Rampe die Verordnung erfüllt. (6 P)

b) Im Erdreich unterhalb der Rampe verläuft eine feste Gesteinsschicht, deren obere Begrenzung im Intervall $[0;4]$ durch die Gerade g mit

$$g(x) = -\frac{7}{40} \cdot x + \frac{7}{10}$$

beschrieben wird und die beim Bau der Rampe erhalten bleiben soll.

b1) Zeichnen Sie die Gerade g im Intervall $[0;4]$ in das Koordinatensystem ein. (1 P)

b2) Berechnen Sie den größten Höhenunterschied zwischen dem Profil der Rampe und der Gesteinsschicht im Bereich von 0 bis 4 Metern. (7 P)

b3) Die Rampe soll eine Breite von $2{,}75\,\mathrm{m}$ haben und aus Beton hergestellt werden, der direkt auf die Gesteinsschicht bzw. auf den horizontalen Boden auf Tiefgaragenniveau aufgetragen werden soll. Berechnen Sie das Volumen des Betons, den man für den Bau der Rampe benötigt. (4 P)

c) Vom Punkt $P(3\,|\,0{,}5)$ ausgehend soll ein Loch entlang einer Geraden gebohrt werden, die senkrecht zur Gesteinsschicht verläuft. Für jedes $b \in \mathbb{R}$ wird die Gerade h_b mit

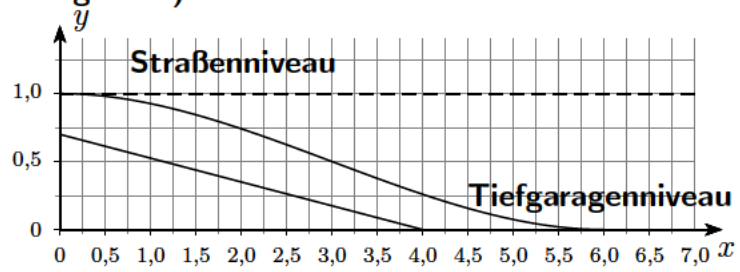
$$h_b(x) = \frac{40}{7} \cdot x + b$$

betrachtet.

c1) Zeigen Sie, dass jede Gerade h_b senkrecht zur Geraden g verläuft. (3 P)

c2) Berechnen Sie, wie weit gebohrt werden muss, bis man auf die Gesteinsschicht trifft. (6 P)

d) Ein anderer Entwurf sieht vor, dass das Profil einer neuen Rampe vom Punkt $(0|1)$ zunächst entlang einer Geraden t verläuft und erst im weiteren Verlauf in das ursprünglich geplante Modell der Rampe ohne Knick übergeht. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S, in dem die Gerade t ohne Knick in den Graphen von f übergeht. (6 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe a) Eine Gleichung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades lautet $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Mit $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ folgt	1		
$\left\vert \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \\ f(6) = 0 \\ f'(6) = 0 \end{array} \right\vert \Leftrightarrow \left\vert \begin{array}{c} d = 1 \\ c = 0 \\ 216a + 36b + 6c + d = 0 \\ 108a + 12b + c = 0 \end{array} \right\vert \Leftrightarrow \left\vert \begin{array}{c} d = 1 \\ c = 0 \\ a = \frac{1}{108} \\ b = -\frac{1}{12} \end{array} \right\vert .$ Eine Gleichung der Funktion f lautet $f(x) = \frac{1}{108}\,x^3 - \frac{1}{12}\,x^2 + 1$.	4		
Wegen $f(1) = \frac{25}{27} \approx 0{,}93$ beträgt die Höhe über dem Tiefgaragenniveau an der Stelle $1\,\mathrm{m}$ ungefähr $0{,}93\,\mathrm{m}$. Wegen $f'(1) = -\frac{5}{36} \approx -0{,}14$ beträgt die Steigung der Rampe an der Stelle $1\,\mathrm{m}$ ungefähr $14\,\%$.	2		
Zu ermitteln ist zunächst das globale Minimum bzw. Maximum von f'. Es gilt $f'(x) = \frac{1}{36}\,x^2 - \frac{1}{6}\,x$ und $f''(x) = \frac{1}{18}\,x - \frac{1}{6}$.	1		
Notwendig für eine lokale Extremstelle x von f' ist $f''(x) = 0$. $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{18}\,x - \frac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow x = 3$	2		
Da die Ableitung an den Rändern gleich null ist und $f'(3) = -\frac{1}{4}$ gilt, wird das globale Minimum von f' an der Stelle 3 angenommen.	1		
Die größte Steigung der Rampe wird also an der Stelle $3\,\mathrm{m}$ angenommen und beträgt dort 25%. Die Verordnung ist damit erfüllt.		2	
Teilaufgabe b)  	1		

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Zu ermitteln ist das globale Maximum der Funktion d mit $d(x) = f(x) - g(x)$ im Intervall $[0; 4]$. Es gilt $d(x) = \frac{1}{108}x^3 - \frac{1}{12}x^2 + 1 - (-\frac{7}{40}x + \frac{7}{10}) = \frac{1}{108}x^3 - \frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{40}x + \frac{3}{10}$.		2	
Notwendig für eine lokale Extremstelle x von d ist $d'(x) = 0$. $d'(x) = \frac{1}{36}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{7}{40}$ $d'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{36}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{7}{40} = 0$ $\Leftrightarrow x = \frac{30-3\sqrt{30}}{10} \approx 1{,}36 \vee x = \frac{30+3\sqrt{30}}{10} \approx 4{,}64$ Die zweite Lösung liegt nicht im Intervall $[0; 4]$.		3	
Da zusätzlich $d(0) = 0{,}3$, $d(1{,}36) \approx 0{,}41$ und $d(4) \approx 0{,}26$ gilt, beträgt der größte Höhenunterschied zwischen dem Profil der Rampe und der Gesteinsschicht im Bereich von 0 bis 4 Metern ungefähr $0{,}41\,\mathrm{m}$.		2	
Die Gerade g schneidet die x-Achse im Punkt $(4 \mid 0)$. $\int_0^4 f(x) - g(x)\,dx + \int_4^6 f(x)\,dx$ $= \int_0^4 \frac{1}{108}x^3 - \frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{40}x + \frac{3}{10}\,dx + \int_4^6 \frac{1}{108}x^3 - \frac{1}{12}x^2 + 1\,dx$ $= \frac{191}{135} + \frac{5}{27} = 1{,}6$		3	
Somit beträgt der Inhalt der Querschnittsfläche der Betonschicht $1{,}6\,\mathrm{m}^2$. Da diese eine Breite von $2{,}75\,\mathrm{m}$ hat, wird wegen $1{,}6 \cdot 2{,}75 = 4{,}4$ ein Betonvolumen von $4{,}4\,\mathrm{m}^3$ für den Bau der Rampe benötigt.		1	
Teilaufgabe c) Die Gerade g hat die Steigung $-\frac{7}{40}$, die Geraden h_b haben für alle b die Steigung $\frac{40}{7}$. Da $-\frac{7}{40} \cdot \frac{40}{7} = -1$ gilt, stehen die Geraden g und h_b senkrecht aufeinander.		3	

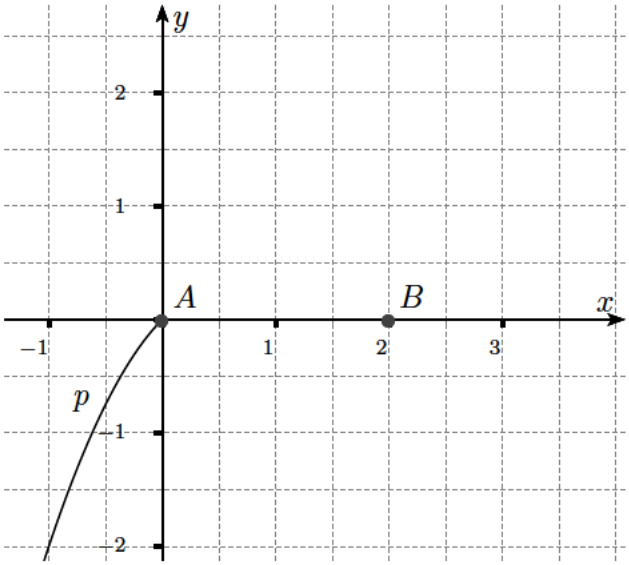
Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
$h_b(3) = 0{,}5 \Leftrightarrow \frac{40}{7} \cdot 3 + b = 0{,}5 \Leftrightarrow b = -\frac{233}{14}$ Wenn die Bohrung im Punkt Q auf die Gesteinsschicht trifft, ist Q der Schnittpunkt der Geraden g mit der durch die Funktion $h_{-\frac{233}{14}}$ beschriebenen Geraden.		2	
$g(x) = h_{-\frac{233}{14}}(x) \Leftrightarrow -\frac{7}{40} \cdot x + \frac{7}{10} = \frac{40}{7} \cdot x - \frac{233}{14} \Leftrightarrow x = \frac{4856}{1649} \approx 2{,}9448$			2
Wegen $g\left(\frac{4856}{1649}\right) \approx 0{,}1847$ und $\lvert\overline{PQ}\rvert \approx \sqrt{(3-2{,}9448)^2 + (0{,}5-0{,}1847)^2} \approx 0{,}3201$ muss man ca. $0{,}32\,\mathrm{m}$ weit bohren, damit man auf die Gesteinsschicht trifft.			2
Teilaufgabe d) Die Gleichung einer Tangente t an den Graphen von f im Punkt $S(s\,\vert\,f(s))$ hat die Form $t(x) = f'(s) \cdot (x-s) + f(s) = f'(s) \cdot x - f'(s) \cdot s + f(s)$. Da die Tangente t zusätzlich durch den Punkt $(0\,\vert\,1)$ verläuft, muss $t(0) = 1$ gelten. Es folgt			2
$t(0) = 1$ $\Leftrightarrow f'(s) \cdot 0 - f'(s) \cdot s + f(s) = 1$ $\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{36}\,s^2 - \frac{1}{6}\,s\right) \cdot s + \frac{1}{108} \cdot s^3 - \frac{1}{12} \cdot s^2 + 1 = 1$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{54}\,s^3 + \frac{1}{12} \cdot s^2 = 0$ $\Leftrightarrow s = 0 \quad \vee \quad s = 4{,}5.$ Wegen $s > 0$ und $f(4{,}5) = \frac{5}{32} = 0{,}15625$ geht die Gerade t im Punkt $(4{,}5\,\vert\,0{,}15625)$ ohne Knick in den Graphen von f über.			4
Punktsummen	12	18	10

Aufgabe 2: Analysis

In der Abbildung ist ein Koordinatensystem so gelegt worden, dass die x-Achse die West-Ost-Richtung, die y-Achse in Süd-Nord-Richtung darstellt. Eine Einheit entspricht 1 km in der Wirklichkeit.

Im Punkt A, der mit dem Ursprung zusammenfällt, endet eine Pipeline.
Der Graph der Funktion p mit $p(x) = -x^2 + x$ beschreibt für $x \leq 0$ im III. Quadranten den Verlauf der Pipeline.

Im Punkt $B(2 \mid 0)$ soll ein Tanklager an die Pipeline angeschlossen werden. Dazu soll nun eine Rohrleitung von A nach B gebaut werden.



a) a1) Weisen Sie nach, dass die erste Ableitung der Funktion p an der Stelle 0 den Wert 1 und die zweite Ableitung von p an dieser Stelle den Wert -2 hat. (2 P)

a2) Der Verlauf der Rohrleitung zwischen A und B soll durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion f vierten Grades beschrieben werden. Die Funktion f soll an der Stelle 0 in den ersten beiden Ableitungen mit denen der Funktion p übereinstimmen, und der Graph von f soll im Punkt B eine Steigung von -1 besitzen.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Funktion f.

[Kontrolle: $f(x) = -\frac{1}{8}\,x^4 + \frac{1}{2}\,x^3 - x^2 + x$] (7 P)

a3) Zeigen Sie, dass der Graph von f an jeder Stelle des Intervalls $[0; 2]$ rechtsgekrümmt ist. (4 P)

b) Von A nach B verläuft geradlinig eine Straße.

b1) Berechnen Sie den Abstand des nördlichsten Punktes der gemäß der Funktion f geplanten Rohrleitung von der Straße. (4 P)

b2) Begründen Sie mit den bisherigen Informationen und ohne weitere Rechnungen durchzuführen, dass die so geplante Rohrleitung zwischen den Punkten A und B immer nördlich der Straße verläuft. (3 P)

b3) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche G, die von der so geplanten Rohrleitung und der Straße begrenzt wird. (3 P)

Es soll nun untersucht werden, inwieweit auch Graphen der Funktionenschar h_k mit

$$h_k(x) = (1 - k \cdot x) \cdot \ln(x+1) \quad ; \quad x \geq 0 \quad ; \quad k > 0$$

zur Beschreibung einer Rohrleitung geeignet sind.

Es ist $h_k''(x) = -\dfrac{k \cdot x + 2\,k + 1}{(x+1)^2}$.

c) c1) Leiten Sie her, dass $h_k'(x) = \dfrac{1 - k \cdot x - (k \cdot x + k) \cdot \ln(x+1)}{x+1}$ gilt. (3 P)

c2) Weisen Sie nach, dass keiner der Graphen der Funktionen h_k einen Wendepunkt besitzt. (3 P)

c3) Untersuchen Sie jeweils, für welche k

- die Graphen der Funktionen h_k durch den Punkt A verlaufen,
- die Funktionen h_k zusätzlich an der Stelle 0 in den ersten beiden Ableitungen mit denen der Funktion p übereinstimmen,
- die Graphen der Funktionen h_k durch den Punkt B verlaufen.

(5 P)

d) d1) Zeigen Sie, dass jeder Graph der Schar h_k die x-Achse genau zweimal schneidet. (2 P)

d2) Weisen Sie rechnerisch nach, dass es einen Graphen der Schar h_k gibt, der an der Stelle $\dfrac{1}{k}$ die Steigung $-\ln(2)$ hat. (4 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe a) $p'(x) = -2x + 1$ $p''(x) = -2$ Damit folgt $p'(0) = 1$ und $p''(0) = -2$.	2		
Eine ganzrationale Funktion vierten Grades hat die Form $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Es gilt $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ und $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$. $\left\vert\begin{array}{c} f(0)=0 \\ f'(0)=1 \\ f''(0)=-2 \\ f(2)=0 \\ f'(2)=-1 \end{array}\right\vert \Leftrightarrow \left\vert\begin{array}{c} e=0 \\ d=1 \\ 2c=-2 \\ 16a+8b+4c+2d=0 \\ 32a+12b+4c+d=-1 \end{array}\right\vert \Leftrightarrow \left\vert\begin{array}{c} e=0 \\ d=1 \\ c=-1 \\ 16a+8b=2 \\ 32a+12b=2 \end{array}\right\vert \Leftrightarrow \left\vert\begin{array}{c} e=0 \\ d=1 \\ c=-1 \\ a=-\frac{1}{8} \\ b=\frac{1}{2} \end{array}\right\vert$ Eine Gleichung der Funktion f lautet $f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - x^2 + x$.	2 5		
Der Graph der Funktion f ist genau dann an jeder Stelle x aus dem Intervall $[0;2]$ rechtsgekrümmt, wenn $f''(x) < 0$ für alle $x \in [0;2]$ gilt. Es gilt $f'(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1$ und $f''(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x - 2$. $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x^2 + 3x - 2 = 0$ Diese Gleichung hat keine reellen Lösungen. Da zusätzlich $f''(0) = -2$ gilt, folgt $f''(x) < 0$ für alle $x \in [0;2]$. Damit ist der Graph der Funktion f über dem Intervall $[0;2]$ an jeder Stelle rechtsgekrümmt.		4	
Teilaufgabe b) Notwendig für eine lokale Extremstelle x von f ist $f'(x) = 0$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ Es ist $f(1) = 0{,}375$. Da der Graph von f an jeder Stelle des Intervalls rechtsgekrümmt ist, wird das globale Maximum $0{,}375$ der Funktion f über dem Intervall $[0;2]$ an der Stelle 1 angenommen. Der nördlichste Punkt der geplanten Rohrleitung ist also $375\,\mathrm{m}$ von der Straße entfernt.		2 2	
Weil die Steigung des Graphen von f an der Stelle 0 positiv ist, verläuft der Graph für $x > 0$ zunächst oberhalb der x-Achse. Wenn der Graph von f auch unterhalb der x-Achse verlaufen würde, so müsste er mindestens einen Tiefpunkt haben. Dort wäre aber der Graph im Widerspruch zu a3) linksgekrümmt.			3
Es gilt $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - x^2 + x\,dx = \frac{8}{15}$. Damit beträgt der Inhalt der eingeschlossenen Fläche ungefähr $0{,}53\,\mathrm{km}^2$.	3		

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe c) $h_k'(x) = \frac{1-kx}{x+1} - k \cdot \ln(x+1)$ $= \frac{1-kx}{x+1} - k \cdot \ln(x+1) \cdot \frac{x+1}{x+1} = \frac{1-kx-(kx+k)\ln(x+1)}{x+1}$			3
Notwendig für eine Wendestelle x von h_k ist $h_k''(x) = 0$. $h_k''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{k \cdot x + 2k + 1}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow k \cdot x + 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -2 - \frac{1}{k}$ Wegen $k > 0$ ist $-2 - \frac{1}{k}$ negativ und liegt daher nicht im Definitionsbereich von h_k. Damit besitzt keiner der Graphen einen Wendepunkt.		2 1	
Da $h_k(0) = \ln(1) = 0$ für alle $k > 0$ gilt, liegt der Punkt $A(0 \mid 0)$ auf allen Graphen von h_k.		1	
Es ist $h_k'(0) = 1 = p'(0)$, also stimmen für alle $k > 0$ die ersten Ableitungen der Funktionen h_k und p an der Stelle 0 überein. Da $h_k''(0) = p''(0) = -2 \Leftrightarrow -2k - 1 = -2 \Leftrightarrow k = 0{,}5$ gilt, stimmen nur für $k = 0{,}5$ die zweiten Ableitungen von h_k und p im Punkt A überein.		3	
Wegen $h_k(2) = 0 \Leftrightarrow (1-2k) \cdot \ln(3) = 0 \Leftrightarrow k = 0{,}5$ verläuft nur der Graph von $h_{0,5}$ durch den Punkt B.		1	
Teilaufgabe d) $h_k(x) = 0 \Leftrightarrow (1 - k \cdot x) \cdot \ln(x+1) = 0$ $\Leftrightarrow 1 - k \cdot x = 0 \vee \ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{k} \vee x = 0$ Somit schneidet jeder Graph der Schar h_k die x-Achse genau zweimal.		2	
Die Steigung an der Stelle $\frac{1}{k}$ ist $h_k'\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1 - k \cdot \frac{1}{k} - (k \cdot \frac{1}{k} + k) \cdot \ln(\frac{1}{k}+1)}{\frac{1}{k}+1}$ $= -\frac{1+k}{\frac{1}{k}+1} \cdot \ln(\frac{1}{k}+1) = -k \cdot \ln(\frac{1}{k}+1)$ Die Gleichung $h_k'\left(\frac{1}{k}\right) = -\ln(2) \Leftrightarrow -k \cdot \ln(\frac{1}{k}+1) = -\ln(2)$ hat die Lösung 1. Der Graph von h_1 hat also an der positiven Schnittstelle mit der x-Achse die Steigung $-\ln(2)$.			2 2
Punktsummen	12	18	10

Aufgabe 3: Analytische Geometrie

Ein Dreieck ABC ist gegeben durch die Punkte $A(5\,|\,1\,|\,10)$, $B(5\,|\,6\,|\,10)$ und $C(8\,|\,6\,|\,14)$.

a) a1) Zeigen Sie, dass ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist, und berechnen Sie seinen Flächeninhalt. (4 P)

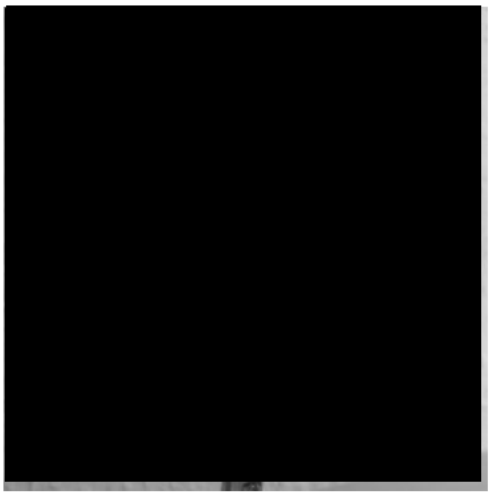
a2) Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes Q der Strecke $\overline{AC}$. (2 P)

a3) Es gibt einen Punkt D, so dass das Viereck $ABCD$ ein Quadrat ist. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D. (2 P)

a4) Bestimmen Sie eine Koordinatenform der Ebene E, in der dieses Quadrat liegt.

[Zur Kontrolle: $E: 4\,x_1 - 3\,x_3 = -10$] (3 P)

Im Folgenden repräsentiert $ABCD$ die Spiegelfläche eines der quadratischen Spiegel auf der abgebildeten Discokugel.
Ein im Punkt $P(45{,}9|-17|-28{,}8)$ erzeugter Laserstrahl fällt in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf die Discokugel.



b) b1) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S, an dem der Laserstrahl auf die Ebene E trifft.

[Zur Kontrolle: $S(5{,}9\,|\,3\,|\,11{,}2)$] (4 P)

b2) Zeigen Sie, dass der Strahl dabei die Spiegelfläche $ABCD$ trifft. (4 P)

b3) Berechnen Sie die Größe des Winkels φ, den der Laserstrahl mit dieser Spiegelfläche einschließt. (3 P)

c) Die abgebildete Discokugel besteht in ihrem Inneren aus einer Styroporkugel K mit dem Mittelpunkt $M(-21{,}5 \mid 3{,}5 \mid 33)$ und dem Radius $r = 35$.
Auf K sind quadratische Spiegelflächen angebracht, deren Dicke im Folgenden vernachlässigt werden kann.

c1) Zeigen Sie, dass die Spiegelfläche $ABCD$ die Kugel K tatsächlich tangential in $Q(6{,}5 \mid 3{,}5 \mid 12)$ aus Aufgabenteil a2) berührt. (4 P)

c2) Es gibt genau eine weitere an K befestigte Spiegelfläche, die zu $ABCD$ parallel ist. Bestimmen Sie eine Gleichung der zur Ebene E parallelen Tangentialebene, in der diese Spiegelfäche liegt. (4 P)

Im Folgenden betrachten wir die Styroporkugel ohne angeklebte Spiegelflächen. Von einem Punkt L aus strahlt eine Lichtquelle die Kugel an. Es ist $|\overrightarrow{LM}| = \frac{175}{3}$. Von einem Punkt X ist bekannt, dass er auf K liegt und $|\overrightarrow{LX}| = \frac{140}{3}$ ist.

c3) Zeigen Sie, dass der Lichtstrahl von L durch X die Kugel in X tangential trifft. (3 P)

c4) Die Menge aller Punkte X auf K, für die $|\overrightarrow{LX}| = \frac{140}{3}$ ist, bildet einen Kreis mit dem Mittelpunkt $M'(-7{,}5 \mid 10{,}5 \mid 47)$ und dem Radius $r' = 28$. Bestimmen Sie die Koordinaten eines solchen Punktes X. (3 P)

d) Ein Lichtstrahl, der von einem Punkt T ausgeht und im Punkt R nicht-senkrecht auf eine beliebige ebene Spiegelfläche trifft, wird reflektiert. Beschreiben Sie unter Zuhilfenahme einer geeigneten Skizze ein Vorgehen, mit dem sich eine vektorielle Darstellung des reflektierten Lichtstrahls ermitteln lässt. (4 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe a) Es ist $\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}\right\rvert = 5$ und $\left\lvert\overrightarrow{BC}\right\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}\right\rvert = 5$, also ist ABC gleichschenklig. Da $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = 0$ gilt, ist ABC rechtwinklig. Es ist $A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = 12{,}5$.	3 1		
Es ist $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}5\\1\\10\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\6\\14\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}6{,}5\\3{,}5\\12\end{pmatrix}$. Somit ist $Q(6{,}5 \mid 3{,}5 \mid 12)$ der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$.	2		
$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}5\\1\\10\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\1\\14\end{pmatrix}$ Somit hat D die Koordinaten $D(8 \mid 1 \mid 14)$.	2		
Wegen $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}20\\0\\-15\end{pmatrix}$ ist $\vec{n}_E = \begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene E. Eine Koordinatenform der Ebene E lautet $E: 4\,x_1 - 3\,x_3 = 4 \cdot 5 - 3 \cdot 10 = -10$.		3	
Teilaufgabe b) Der Laserstrahl wird beschrieben durch die Gerade $g: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix}45{,}9\\-17\\-28{,}8\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$.	1		
$g \cap E:$ $4 \cdot (45{,}9 - 2r) - 3 \cdot (-28{,}8 + 2r) = -10$ $\Leftrightarrow \quad r = 20$ Damit ergibt sich der Schnittpunkt $S(5{,}9 \mid 3 \mid 11{,}2)$.	3		
$\overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OS}$ $\Leftrightarrow \left\lvert\begin{array}{rcr} 5 + 3 \cdot s & = & 5{,}9 \\ 1 + 5 \cdot r & = & 3 \\ 10 + 4 \cdot s & = & 11{,}2 \end{array}\right\rvert \Leftrightarrow \left\lvert\begin{array}{rcr} r & = & 0{,}4 \\ s & = & 0{,}3 \end{array}\right\rvert$ Wegen $0 < r < 1$ und $0 < s < 1$ liegt S innerhalb der Spiegelfläche $ABCD$.		1 3	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Aus $\sin(\varphi) = \dfrac{\left\lvert \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} \right\rvert}{\left\lvert \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} \right\rvert \cdot \left\lvert \begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix} \right\rvert} = \dfrac{14}{15} \approx 0{,}9333$ folgt $\varphi \approx 68{,}96°$.		3	
Teilaufgabe c) Der Punkt Q liegt innerhalb des Quadrats $ABCD$. Wegen $\lvert\overrightarrow{MQ}\rvert = \sqrt{28^2+21^2} = 35$ liegt Q auf der Kugel K.		2	
Weiter ist $\overrightarrow{MQ} = \begin{pmatrix}28\\0\\-21\end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}$. Damit sind $\overrightarrow{MQ}$ und $\vec{n}_E$ linear abhängig und es gilt $\overrightarrow{MQ} \perp E$. Damit berührt die Spiegelfläche $ABCD$ die Kugel K im Punkt Q tangential.		2	
Den Berührpunkt Q' der gesuchten Tangentialebene E_T erhält man durch Spiegeln von Q an M: Es ist $\overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OQ} + 2 \cdot \overrightarrow{QM} = \begin{pmatrix}-49{,}5\\3{,}5\\54\end{pmatrix}$. Also ist $Q'(-49{,}5 \mid 3{,}5 \mid 54)$.		2	
Da E parallel zu E_T verläuft, ist $\vec{n}_E = \begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}$ auch ein Normalenvektor von E_T. Es ist $E_T : 4\,x_1 - 3\,x_3 = 4 \cdot (-49{,}5) - 3 \cdot 54 = -360$.		2	
„Die Gerade durch L und X ist eine Tangente an K." $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{LX} \perp \overrightarrow{MX}$ $\Leftrightarrow$ $\lvert\overrightarrow{LX}\rvert^2 + \lvert\overrightarrow{MX}\rvert^2 = \lvert\overrightarrow{LM}\rvert^2 \Leftrightarrow \left(\frac{140}{3}\right)^2 + 35^2 = \left(\frac{175}{3}\right)^2$ Die letzte Aussage ist wahr und somit ist die Gerade durch L und X eine Tangente an K.			3
Es ist $\overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix}14\\7\\14\end{pmatrix}$. Zu ermitteln ist zunächst ein Vektor $\vec{u}$ so, dass $\vec{u} \perp \overrightarrow{MM'}$ ist, zum Beispiel $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$.			
Mit $\lvert\vec{u}\rvert = 3$ gilt $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OM'} + \frac{28}{\lvert\vec{u}\rvert} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix}-7{,}5\\10{,}5\\47\end{pmatrix} + \frac{28}{3} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{11}{6}\\\frac{175}{6}\\\frac{85}{3}\end{pmatrix}$. Somit ist $X(\frac{11}{6} \mid \frac{175}{6} \mid \frac{85}{3})$ ein Punkt auf dem beschriebenen Kreis.			3

Aufgabe 4: Stochastik

Alle in Ihren Lösungen verwendeten Zufallsgrößen müssen explizit eingeführt werden. Machen Sie auch Angaben über die Verteilung der jeweiligen Zufallsgrößen.

Um Alkohol am Steuer nachzuweisen, führt die Polizei im Verdachtsfall einen Alkoholtest durch. Dabei wird der Alkoholgehalt in der Atemluft gemessen. Wenn der Fahrer eines Fahrzeugs eine Atemalkoholkonzentration von mindestens $0{,}25$ Milligramm Alkohol pro Liter Atemluft hat, liegt eine Ordnungswidrigkeit vor.

a) Das neue mobile Testgerät „Alco-No“ zur Bestimmung der Atemalkoholkonzentration wurde auf seine Zuverlässigkeit bei der Feststellung von alkoholbedingten Ordnungswidrigkeiten geprüft.
Bei Verkehrskontrollen wurde dazu im Verdachtsfall der „Alco-No“ eingesetzt und außerdem die tatsächliche Atemalkoholkonzentration präzise bestimmt.
Dabei wurden die folgenden Ereignisse betrachtet und die nachstehenden Daten erhoben:

A: Der „Alco-No“ zeigt eine alkoholbedingte Ordnungswidrigkeit an.
B: Es liegt eine alkoholbedingte Ordnungswidrigkeit vor.

	B	$\overline{B}$	
A	$0{,}3152$		$0{,}32$
$\overline{A}$			
		$0{,}5998$	

a1) Vervollständigen Sie die Vierfeldertafel. (3 P)

a2) Aus der Menge der getesteten Fahrer wird zufällig ein Fahrer ausgewählt.
Geben Sie die Bedeutung der Wahrscheinlichkeit $P_B(\overline{A})$ im Sachzusammenhang an und berechnen Sie deren Wert. (4 P)

a3) Bestimmen Sie den Anteil der Autofahrer an allen zum Test herangezogenen Fahrern, bei denen der „Alco-No“ eine falsche Aussage bezüglich einer alkoholbedingten Ordnungswidrigkeit geliefert hat. (2 P)

Einer Verkehrsstatistik zufolge sind $3{,}6\,\%$ aller festgestellten Ordnungswidrigkeiten Alkohol- oder Drogenverstöße.

b) Von allen in der Verkehrsstatistik festgestellten Ordnungswidrigkeiten werden 200 zufällig ausgewählt.

b1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als zehn Ordnungswidrigkeiten auf den Konsum von Alkohol oder Drogen zurückzuführen sind. (3 P)

b2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens so viele Ordnungswidrigkeiten auf den Konsum von Alkohol oder Drogen zurückzuführen sind, wie es zu erwarten ist. (3 P)

Bei einer Verkehrskontrolle kann auch ein Drogen-Schnelltest mit Hilfe von Teststreifen gemacht werden.

c) Die Polizei kontrolliert Fahrzeuge in der Nähe einer Diskothek. Von den mitgenommenen 60 Teststreifen sind sechs unbrauchbar, da das Haltbarkeitsdatum überschritten ist, was niemand bemerkt hat. Es werden zwölf Fahrer auf Drogenkonsum getestet, wobei jeweils ein Teststreifen pro Fahrer verbraucht wird.

c1) Begründen Sie, dass die Anzahl der unbrauchbaren Teststreifen unter den bei der Kontrolle von den Polizisten verwendeten nicht binomialverteilt ist. (2 P)

c2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens einer der eingesetzten Teststreifen unbrauchbar ist. (4 P)

c3) Bestimmen Sie durch systematisches Probieren, wie viele unbrauchbare Teststreifen höchstens vorhanden sein dürfen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass bei zwölf Drogenkontrollen kein unbrauchbarer Teststreifen eingesetzt wird, über $50\,\%$ liegt. (5 P)

d) Nach diversen Präventivmaßnahmen behaupten die Polizisten einer Dienststelle, dass der Anteil der nicht fahrtüchtigen Fahrer unter $7{,}3\,\%$ gesunken ist. Sie möchten ihre Hypothese durch eine Stichprobe stützen und planen, 600 Fahrer zu kontrollieren.

d1) Entwickeln Sie einen Hypothesentest auf einem Signifikanzniveau von $5\,\%$, um die Hypothese der Polizisten zu stützen, und formulieren Sie eine geeignete Entscheidungsregel. (9 P)

d2) Bei der Kontrolle der 600 Fahrer zeigt sich, dass 31 nicht fahrtüchtig waren. Auf der Basis dieses Ergebnisses soll der Anteil nicht fahrtüchtiger Fahrer neu abgeschätzt werden. Ermitteln Sie die kleinste Wahrscheinlichkeit p, damit die Hypothese, dass der Anteil nicht fahrtüchtiger Fahrer größer oder gleich p ist, bei diesem Testergebnis auf einem Signifikanzniveau von $5\,\%$ verworfen werden kann. (5 P)

Aufgabe 4: Stochastik

Alle in Ihren Lösungen verwendeten Zufallsgrößen müssen explizit eingeführt werden. Machen Sie auch Angaben über die Verteilung der jeweiligen Zufallsgrößen.

Um Alkohol am Steuer nachzuweisen, führt die Polizei im Verdachtsfall einen Alkoholtest durch. Dabei wird der Alkoholgehalt in der Atemluft gemessen. Wenn der Fahrer eines Fahrzeugs eine Atemalkoholkonzentration von mindestens $0{,}25$ Milligramm Alkohol pro Liter Atemluft hat, liegt eine Ordnungswidrigkeit vor.

a) Das neue mobile Testgerät „Alco-No“ zur Bestimmung der Atemalkoholkonzentration wurde auf seine Zuverlässigkeit bei der Feststellung von alkoholbedingten Ordnungswidrigkeiten geprüft.
Bei Verkehrskontrollen wurde dazu im Verdachtsfall der „Alco-No“ eingesetzt und außerdem die tatsächliche Atemalkoholkonzentration präzise bestimmt.
Dabei wurden die folgenden Ereignisse betrachtet und die nachstehenden Daten erhoben:

A: Der „Alco-No“ zeigt eine alkoholbedingte Ordnungswidrigkeit an.
B: Es liegt eine alkoholbedingte Ordnungswidrigkeit vor.

	B	$\overline{B}$	
A	$0{,}3152$		$0{,}32$
$\overline{A}$			
		$0{,}5998$	

a1) Vervollständigen Sie die Vierfeldertafel. (3 P)

a2) Aus der Menge der getesteten Fahrer wird zufällig ein Fahrer ausgewählt.
Geben Sie die Bedeutung der Wahrscheinlichkeit $P_B(\overline{A})$ im Sachzusammenhang an und berechnen Sie deren Wert. (4 P)

a3) Bestimmen Sie den Anteil der Autofahrer an allen zum Test herangezogenen Fahrern, bei denen der „Alco-No“ eine falsche Aussage bezüglich einer alkoholbedingten Ordnungswidrigkeit geliefert hat. (2 P)

Einer Verkehrsstatistik zufolge sind $3{,}6\,\%$ aller festgestellten Ordnungswidrigkeiten Alkohol- oder Drogenverstöße.

b) Von allen in der Verkehrsstatistik festgestellten Ordnungswidrigkeiten werden 200 zufällig ausgewählt.

b1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als zehn Ordnungswidrigkeiten auf den Konsum von Alkohol oder Drogen zurückzuführen sind. (3 P)

b2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens so viele Ordnungswidrigkeiten auf den Konsum von Alkohol oder Drogen zurückzuführen sind, wie es zu erwarten ist. (3 P)

Bei einer Verkehrskontrolle kann auch ein Drogen-Schnelltest mit Hilfe von Teststreifen gemacht werden.

c) Die Polizei kontrolliert Fahrzeuge in der Nähe einer Diskothek. Von den mitgenommenen 60 Teststreifen sind sechs unbrauchbar, da das Haltbarkeitsdatum überschritten ist, was niemand bemerkt hat. Es werden zwölf Fahrer auf Drogenkonsum getestet, wobei jeweils ein Teststreifen pro Fahrer verbraucht wird.

c1) Begründen Sie, dass die Anzahl der unbrauchbaren Teststreifen unter den bei der Kontrolle von den Polizisten verwendeten nicht binomialverteilt ist. (2 P)

c2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens einer der eingesetzten Teststreifen unbrauchbar ist. (4 P)

c3) Bestimmen Sie durch systematisches Probieren, wie viele unbrauchbare Teststreifen höchstens vorhanden sein dürfen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass bei zwölf Drogenkontrollen kein unbrauchbarer Teststreifen eingesetzt wird, über $50\,\%$ liegt. (5 P)

d) Nach diversen Präventivmaßnahmen behaupten die Polizisten einer Dienststelle, dass der Anteil der nicht fahrtüchtigen Fahrer unter $7{,}3\,\%$ gesunken ist. Sie möchten ihre Hypothese durch eine Stichprobe stützen und planen, 600 Fahrer zu kontrollieren.

d1) Entwickeln Sie einen Hypothesentest auf einem Signifikanzniveau von $5\,\%$, um die Hypothese der Polizisten zu stützen, und formulieren Sie eine geeignete Entscheidungsregel. (9 P)

d2) Bei der Kontrolle der 600 Fahrer zeigt sich, dass 31 nicht fahrtüchtig waren. Auf der Basis dieses Ergebnisses soll der Anteil nicht fahrtüchtiger Fahrer neu abgeschätzt werden. Ermitteln Sie die kleinste Wahrscheinlichkeit p, damit die Hypothese, dass der Anteil nicht fahrtüchtiger Fahrer größer oder gleich p ist, bei diesem Testergebnis auf einem Signifikanzniveau von $5\,\%$ verworfen werden kann. (5 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe a)			

	B	$\overline{B}$	
A	0,3152	0,0048	0,32
$\overline{A}$	0,0850	0,5950	0,68
	0,4002	0,5998	1

	I	II	III
	3		
$P_B(\overline{A})$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass der „Alco-No“ keine alkoholbedingte Ordnungswidrigkeit anzeigt, obwohl der ausgewählte Fahrer eine solche begangen hat.		2	
$P_B(\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(B)} \approx 0{,}2124 = 21{,}24\,\%$	2		
$0{,}085 + 0{,}0048 = 0{,}0898$ Der Anteil der Autofahrer, bei denen falsche Aussagen aufgetreten sind, beträgt ca. $9\,\%$.		2	
Teilaufgabe b) Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Drogen- oder Alkoholverstöße unter 200 festgestellten Ordnungswidrigkeiten an. Sie ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 200$ und $p = 0{,}036$.	1		
$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) \approx 0{,}1094$	2		
Es ist $E(X) = n \cdot p = 200 \cdot 0{,}036 = 7{,}2$. $P(X \leq 7) \approx 0{,}5684$		3	
Teilaufgabe c) Bei der Auswahl der zwölf Teststreifen liegt ein „Ziehen ohne Zurücklegen“ vor, daher verändert sich bei jedem Zug die Wahrscheinlichkeit dafür, einen unbrauchbaren Teststreifen zu ziehen.	2		
Die Zufallsgröße Z beschreibt die Anzahl der unbrauchbaren Teststreifen unter den bei der Kontrolle verwendeten. Z ist hypergeometrisch verteilt.		1	
$P(Z \geq 1) = 1 - P(Z = 0) = 1 - \frac{\binom{6}{0} \cdot \binom{54}{12}}{\binom{60}{12}} \approx 1 - 0{,}2451 = 0{,}7549$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens ein Teststreifen nicht zu gebrauchen ist, beträgt etwa $75\,\%$.		3	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Wenn M die Anzahl unbrauchbarer Teststreifen ist, dann ist $P(Z=0)=\frac{\binom{M}{0}\cdot\binom{60-M}{12}}{\binom{60}{12}}=\frac{1\cdot\binom{60-M}{12}}{\binom{60}{12}}$.			
Für $M=6$ ist $P(Z=0)\approx 24{,}51\,\%$.			2
Die Wahrscheinlichkeit dafür, keinen unbrauchbaren Teststreifen zu verwenden, wird umso größer, je weniger unbrauchbare Teststreifen vorhanden sind. Durch systematisches Probieren ergibt sich:			
M: 5; $P(Z=0)$: 0,3135			
M: 4; $P(Z=0)$: 0,3990			
M: 3; $P(Z=0)$: 0,5054			
Damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei zwölf Drogenkontrollen kein unbrauchbarer Teststreifen verwendet wird, über $50\,\%$ liegt, dürften höchstens drei unbrauchbare Teststreifen vorhanden sein.			3
Teilaufgabe d)			
Die Zufallsgröße X_p gibt die Anzahl der nicht fahrtüchtigen Fahrer unter 600 kontrollierten Fahrern an. Sie ist binomialverteilt mit den Parametern $n=600$ und p.	1		
Weil die Hypothese $H_1: p<0{,}073$ gestützt werden soll, wird $H_0: p\geq 0{,}073$ als Nullhypothese gewählt.	1		
Wenn relativ wenige nicht fahrtüchtige Fahrer angetroffen werden, so wird H_0 verworfen. Es wird also ein linksseitiger Test durchgeführt.			
Der Verwerfungsbereich ist $V=\{0;1;\ldots;k\}$, wobei k die größte natürliche Zahl ist, so dass für alle $p\geq 0{,}073$ die Ungleichung $P(X_p\leq k)\leq 0{,}05$ erfüllt ist.		3	
Wegen $P(X_p\leq k)\leq P(X_{0{,}073}\leq k)$ für $p\geq 0{,}073$ reicht es, das größte natürliche k so zu bestimmen, dass $P(X_{0{,}073}\leq k)\leq 0{,}05$ erfüllt ist.		1	
Aus $P(X_{0{,}073}\leq 33)\approx 0{,}0487$ und $P(X_{0{,}073}\leq 34)\approx 0{,}0683$ ergibt sich $k=33$.		2	
Sollten bei der Kontrolle von 600 Fahrern höchstens 33 nicht fahrtüchtig sein, so kann davon ausgegangen werden, dass der Prozentsatz der nicht fahrtüchtigen Fahrer gesunken ist.		1	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Für die kleinste Wahrscheinlichkeit p_{min}, für die die Hypothese H_2:"Der Anteil nicht fahrtüchtiger Fahrer ist größer oder gleich p_{min}." auf dem Signifikanzniveau von $5\,\%$ noch verworfen werden kann, muss gelten: $P(X_{p_{min}} \leq 31) = 0{,}05$ Berechnung nach Näherung von $X_{p_{min}}$ durch die Normalverteilung: $\Phi(\frac{31{,}5-\mu}{\sigma}) = 0{,}05$ $\frac{31{,}5-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(0{,}05) \approx -1{,}64$ $31{,}5 \approx 600 \cdot p_{min} - 1{,}64 \cdot \sqrt{600 \cdot p_{min} \cdot (1-p_{min})}$ $p_{min} \approx 0{,}0695$			2
Für dieses p_{min} ist die Laplace-Bedingung wegen $\sigma = \sqrt{600 \cdot 0{,}0695 \cdot (1-0{,}0695)} \approx 6{,}2 > 3$ erfüllt, so dass die Näherung durch die Normalverteilung gerechtfertigt ist. *Dabei kann die Lösung der Gleichung auch durch systematisches Probieren ermittelt werden. Dadurch kann ein genaueres Ergebnis erzielt werden.*			3
Punktsummen	12	18	10