Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1 A:** (hilfsmittelfreier Teil mit analytischer Geometrie)

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	30
Erstkorrektur							
Zweitkorrektur							

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: a, b, c, ... $\in \mathbb{R}$ und die Variablen: x, t, ... $\in \mathbb{R}$.

a) In der Abbildung 1.1 ist der Graph der Funktion f dargestellt.

a1) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion von f in das untere Koordinatensystem (Abbildung 1.2).

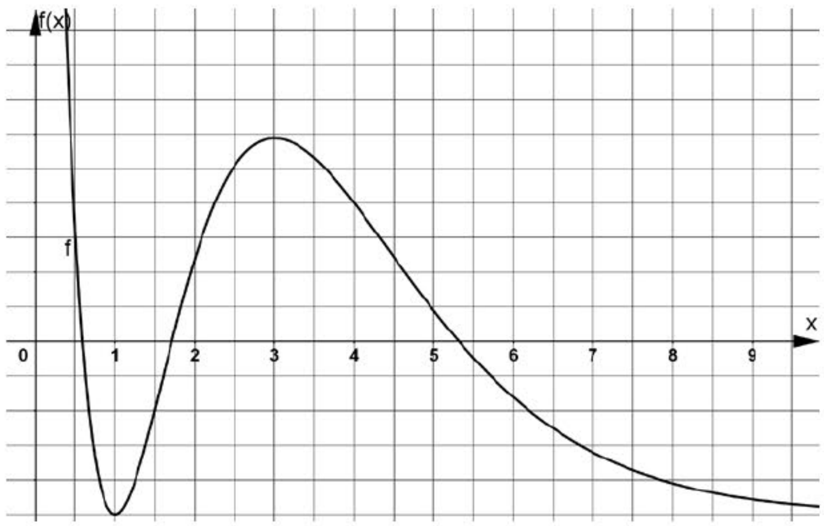


Abbildung 1.1

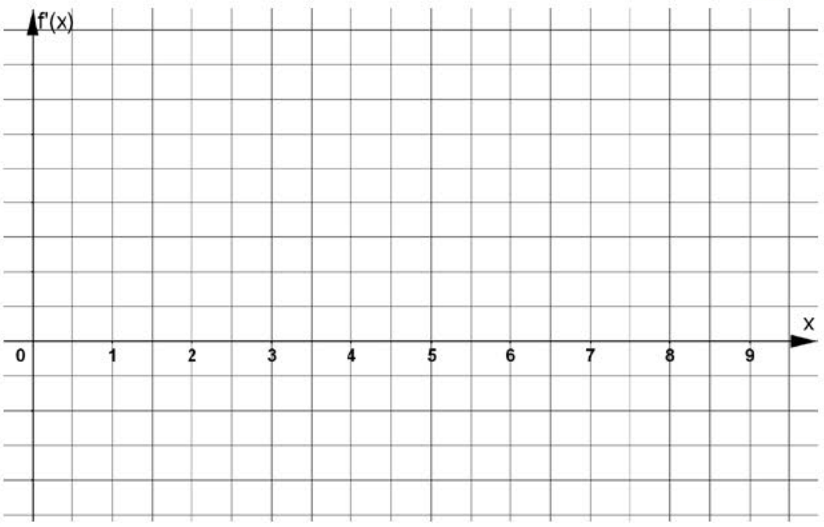


Abbildung 1.2

a2) Entscheiden Sie begründet, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Jeder Graph einer Stammfunktion F von f in Abbildung 1.1 besitzt zwei Wendepunkte.	

b) Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = 0{,}5 \cdot x^3 - 2 \cdot x$$

b1) Bestimmen Sie die Steigung von f im Schnittpunkt mit der Ordinatenachse.

b2) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f insgesamt eine Fläche von 4 Flächeneinheiten (FE) mit der x-Achse einschließt.

c) Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \cos(2\pi \cdot x) + 1$$

c1) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f im Intervall $0 \leq x \leq 3$.

c2) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Im Intervall $0 \leq x \leq 3$ hat die Funktion h mit der Gleichung $h(x) = 2 \cdot f(x) - 1$ doppelt so viele Nullstellen wie die Funktion f.		
Der Graph der Funktion g mit der Gleichung $g(x) = \cos(2\pi \cdot (x - \pi)) + 1$ ist gegenüber dem Graphen der Funktion f um π Einheiten nach rechts verschoben.		

d) Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ x \\ 4 \end{pmatrix}$.

d1) Berechnen Sie den Betrag von $\vec{a}$.

d2) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht orthogonal zueinander sind.

d3) Bestimmen Sie den Wert x so, dass die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig sind.

e) Gegeben sind die drei Punkte $A(-2|\ 1\ |\ 4)$, $B(3\ |\ b\ |-1)$ und $C(8\ |\ 7\ |-6)$ sowie die Ebene E: $5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - 5 \cdot x_3 = 5$

e1) Entscheiden Sie begründet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Für $b = 4$ liegt der Punkt C auf der Geraden durch A und B.	

e2) Bestimmen Sie den Parameter b so, dass der Punkt B in der Ebene E liegt.

f) Gegeben ist ein Pyramidenstumpf quadratischer Grundfläche ABCD mit den Punkten $A(3 \mid 6 \mid 0)$, $B(6 \mid -3 \mid 0)$, $D(-6 \mid 3 \mid 0)$, $F(4 \mid -2 \mid 2)$ und $H(-4 \mid 2 \mid 2)$ (vgl. Abbildung 1.3).

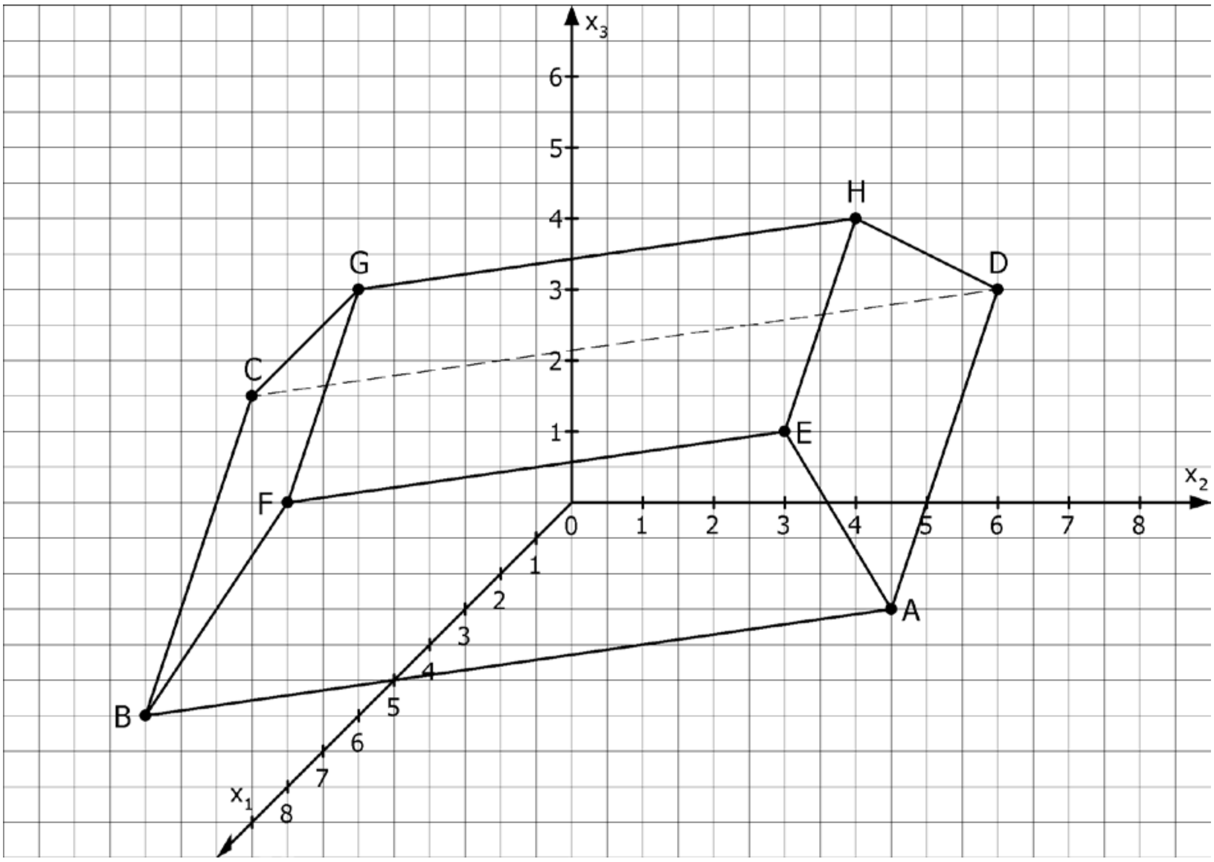


Abbildung 1.3

f1) Ergänzen Sie in der Abbildung 1.3 den Pyramidenstumpf zu einer Pyramide und geben Sie die Koordinaten der Spitze S an.

f2) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Quadrats EFGH.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 2** (Analytische Geometrie): **Miniatur-Autorennen**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	gesamt
Erreichbar	4	5	5	5*	6*	5*	30
Erstkorrektur							
Zweitkorrektur							

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Der Veranstalter eines Miniatur-Autorennens feiert 20-jähriges Jubiläum. Seit 20 Jahren wird zum Start der Autos dieselbe Startrampe in Form eines Trapezes genutzt, die als schiefe Ebene auf Stützpfeilern aufgestellt wird. Neu im Team des Veranstalters ist eine Ingenieurin, die angeboten hat, sich das Rennen unter mathematischen Aspekten anzusehen und zu prüfen, ob es Verbesserungsmöglichkeiten für die Startanlage gibt.
Dazu legt sie das Trapez in ein dreidimensionales Koordinatensystem, so dass drei Ecken wie folgt festgelegt werden: $A(-45|\,17|\,0)$, $B(35|\,17|\,0)$ und $C(10|\,3\,|\,7)$ (vgl. Abb. 2.1).

Alle Längen sind in Zentimeter angegeben. Die Abbildung ist nicht maßstabsgerecht.

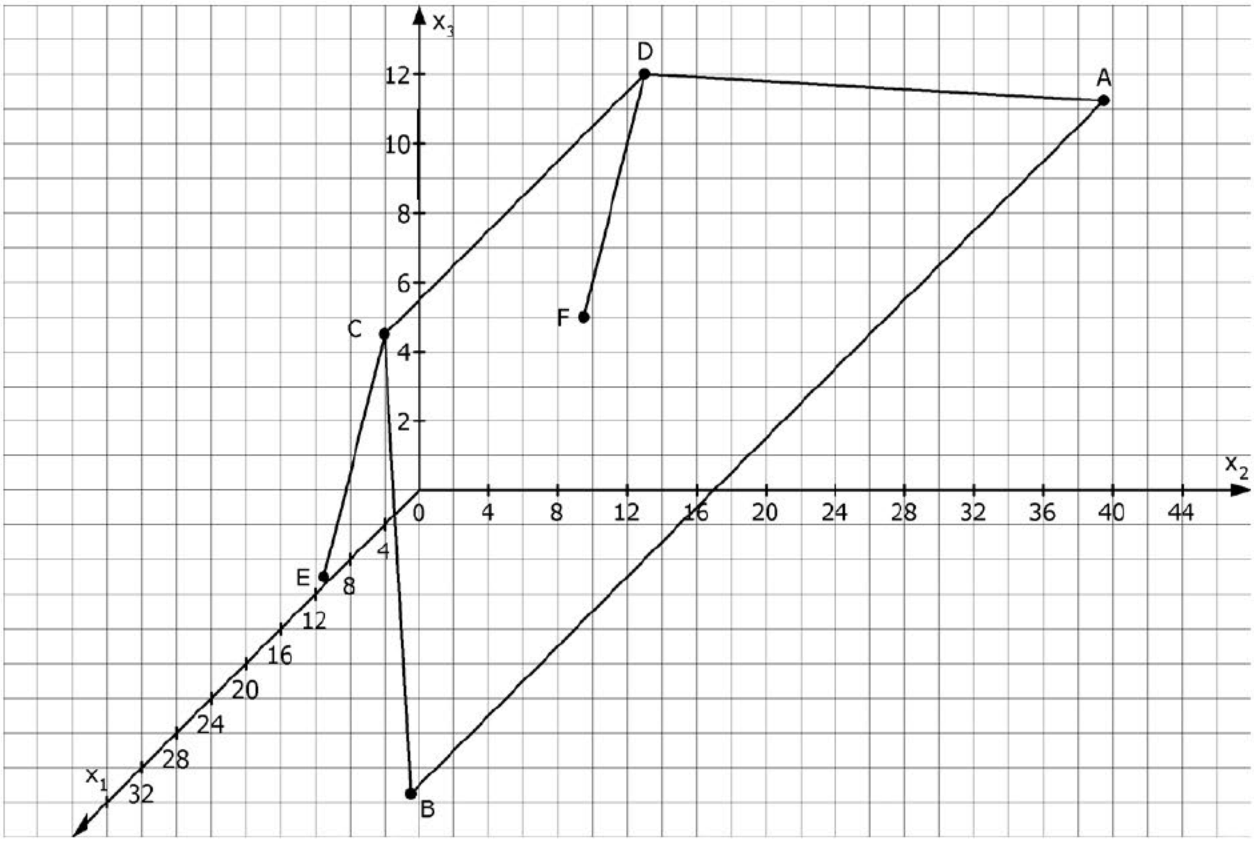


Abbildung 2.1

a) Weisen Sie nach, dass die Gleichung $x_2 + 2x_3 = 17$ die Ebene durch die drei Punkte A, B und C festlegt.

b) Zeigen Sie, dass das Trapez ABCD gleichschenklig ist, wenn der Punkt D die Koordinaten $D(-20|\,3\,|\,7)$ hat.

Die Startrampe wird von Stützpfeilern gehalten, die senkrecht zur Startrampe sind und auf den Punkten E und F der x_1-x_2-Ebene aufgesetzt sind (vgl. Abbildung 2.1).

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Durchstoßpunktes E als Schnittpunkt der Geraden, die den Pfeiler beschreibt, mit der x_1-x_2-Ebene.

Das erste Miniatur-Auto mit dem Namen „Tiger“ startet vom Mittelpunkt des oberen Randes der Startrampe, fährt geradlinig bis zur Mitte des unteren Randes der Startrampe und verlässt die schiefe Ebene dort. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die Bewegung idealisiert als Bewegung des Auto-Mittelpunkts beschrieben werden kann, obwohl ein Miniatur-Auto eine Breite von 4 cm hat.

Beim Verlassen der schiefen Ebene führt ein Ruck zu einer leicht versetzen Fahrt, so dass „Tiger“ den Richtungsvektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 10 \\ 34 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat. Die Fahrbahn von „Tiger“ lässt sich dann beschreiben durch die Geradengleichung f mit

$$f: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 34 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \leq t \leq 5.$$

Dabei gibt der Parameter t die Zeit in Sekunden an und $t = 0$ ist der Zeitpunkt für das Verlassen der Rampe.

d) Geben Sie die Punkte an, an denen sich „Tiger“ zu den Zeitpunkten $t = 1$ und $t = 2$ befindet und

berechnen Sie die Zeit t, die „Tiger“ zum Zurücklegen einer Strecke von einem Meter benötigt.

Nach Verlassen der Rampe sind auf der Fahrbahn zylindrische Pfosten mit einem Radius von 10 mm aufgebaut. Der Mittelpunkt eines Pfostens befindet sich im Punkt P mit $P(4{,}3\,|\,39\,|\,0)$.

Die Ingenieurin behauptet, dass für den notwendigen Abstand zwischen einem beliebigen Pfosten im Punkt $R(r_1\,|\,r_2\,|\,0)$ und der Fahrbahn f des Miniatur-Autos „Tiger“ in Abhängigkeit vom Punkt R und der Zeit t die folgende Ungleichung erfüllt sein muss:

$$3{,}0 < \sqrt{(r_1 + 5 - 10t)^2 + (r_2 - 17 - 34t)^2}$$

e) Erläutern Sie den Wert 3,0 in der Ungleichung,

begründen Sie das Relationszeichen und

untersuchen Sie, ob „Tiger“ an dem Pfosten im Punkt P vorbeifahren kann.

Die mathematikbegeisterte Praktikantin der Ingenieurin behauptet, dass die Ungleichung mit einer anderen Darstellung der Fahrbahngleichung entwickelt werden kann.
Sie erstellt dazu eine Geradengleichung g mit

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und erhält dann

$$3{,}0 < \sqrt{(r_1 + 10 - 5s)^2 + (r_2 - 17s)^2}$$

f) Leiten Sie den Zusammenhang zwischen den Werten der Parameter s und t her.

Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1:** (hilfsmittelfreier Teil mit analytischer Geometrie)

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	30
Erstkorrektur							
Zweitkorrektur							

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

a) In der Abbildung 1.1 ist der Graph der Funktion f dargestellt.

a1) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion von f in das untere Koordinatensystem (Abbildung 1.2).

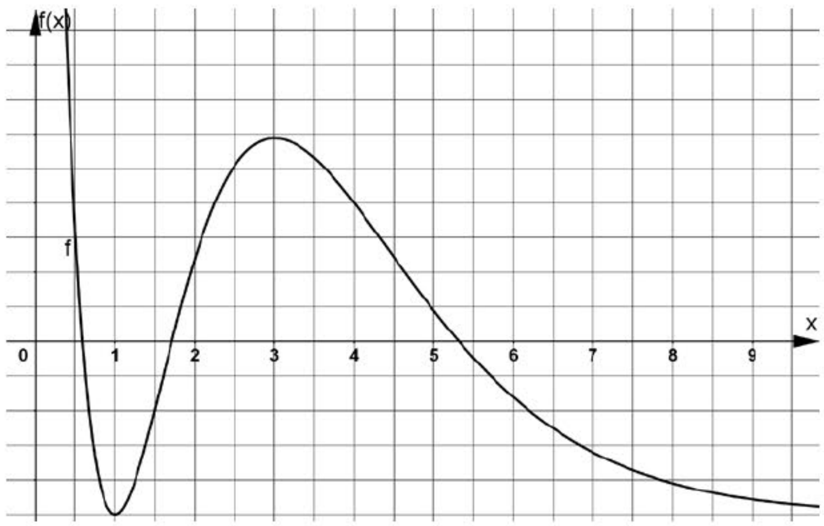


Abbildung 1.1

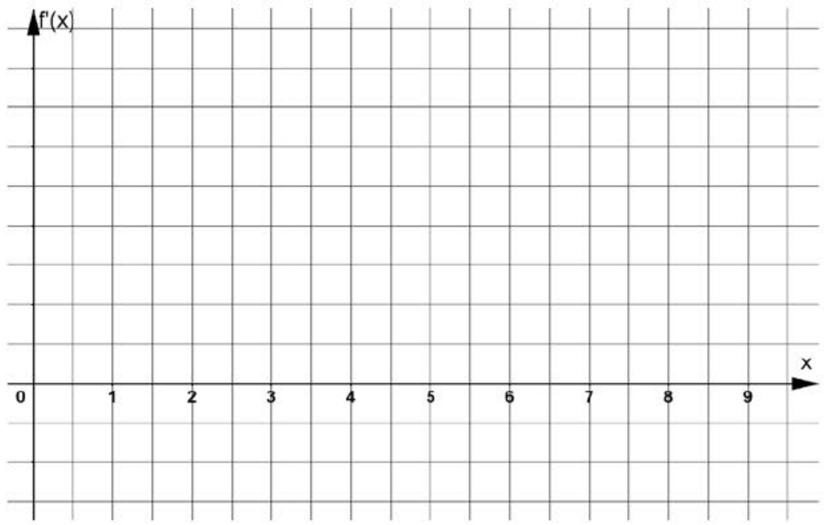


Abbildung 1.2

a2) Entscheiden Sie begründet, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Jeder Graph einer Stammfunktion F von f in Abbildung 1.1 besitzt zwei Wendepunkte.	

b) Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = 0{,}5 \cdot x^3 - 2 \cdot x$$

b1) Bestimmen Sie die Steigung von f im Schnittpunkt mit der Ordinatenachse.

b2) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f insgesamt eine Fläche von 4 Flächeneinheiten (FE) mit der x-Achse einschließt.

c) Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = x \cdot e^x \qquad \text{e ist die Eulersche Zahl.}$$

c1) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph von f im Punkt $E\left(-1 \middle| -\frac{1}{e}\right)$ eine waagerechte Tangente besitzt.

c2) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Der Graph der Funktion f schneidet die Ordinatenachse im Punkt S(0|1).		
Der Graph der Funktion g mit $g(x) = -x \cdot e^x$ entspricht dem an der x-Achse gespiegelten Graphen von f.		

d) Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ x \\ 4 \end{pmatrix}$.

d1) Berechnen Sie den Betrag von $\vec{a}$.

d2) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht orthogonal zueinander sind.

d3) Bestimmen Sie den Wert x so, dass die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig sind.

e) Gegeben sind die drei Punkte $A(-2 | 1 | 4)$, $B(3 | b | -1)$ und $C(8 | 7 | -6)$ sowie die Ebene E: $5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - 5 \cdot x_3 = 5$

e1) Entscheiden Sie begründet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Für $b = 4$ liegt der Punkt C auf der Geraden durch A und B.	

e2) Bestimmen Sie den Parameter b so, dass der Punkt B in der Ebene E liegt.

f) Gegeben ist ein Pyramidenstumpf quadratischer Grundfläche ABCD mit den Punkten $A(3 \mid 6 \mid 0)$, $B(6 \mid -3 \mid 0)$, $D(-6 \mid 3 \mid 0)$, $F(4 \mid -2 \mid 2)$ und $H(-4 \mid 2 \mid 2)$ (vgl. Abbildung 1.3).

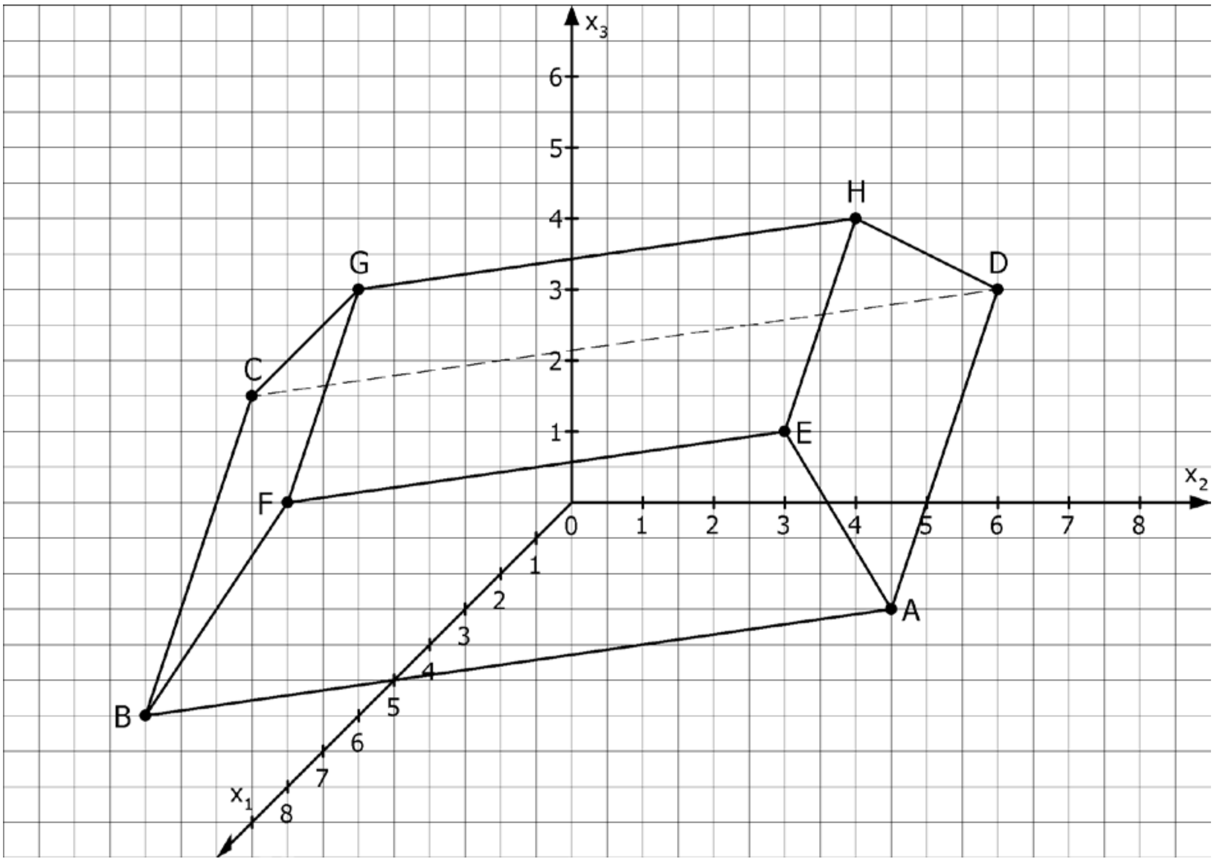


Abbildung 1.3

f1) Ergänzen Sie in der Abbildung 1.3 den Pyramidenstumpf zu einer Pyramide und geben Sie die Koordinaten der Spitze S an.

f2) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Quadrats EFGH.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 2** (Analytische Geometrie): **Miniatur-Autorennen**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	gesamt
Erreichbar	4	5	5	5*	6*	5*	30
Erstkorrektur							
Zweitkorrektur							

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Der Veranstalter eines Miniatur-Autorennens feiert 20-jähriges Jubiläum. Seit 20 Jahren wird zum Start der Autos dieselbe Startrampe in Form eines Trapezes genutzt, die als schiefe Ebene auf Stützpfeilern aufgestellt wird. Neu im Team des Veranstalters ist eine Ingenieurin, die angeboten hat, sich das Rennen unter mathematischen Aspekten anzusehen und zu prüfen, ob es Verbesserungsmöglichkeiten für die Startanlage gibt.
Dazu legt sie das Trapez in ein dreidimensionales Koordinatensystem, so dass drei Ecken wie folgt festgelegt werden: $A(-45|\ 17|\ 0)$, $B(35|\ 17|\ 0)$ und $C(10|\ 3\ |\ 7)$ (vgl. Abb. 2.1).

Alle Längen sind in Zentimeter angegeben. Die Abbildung ist nicht maßstabsgerecht.

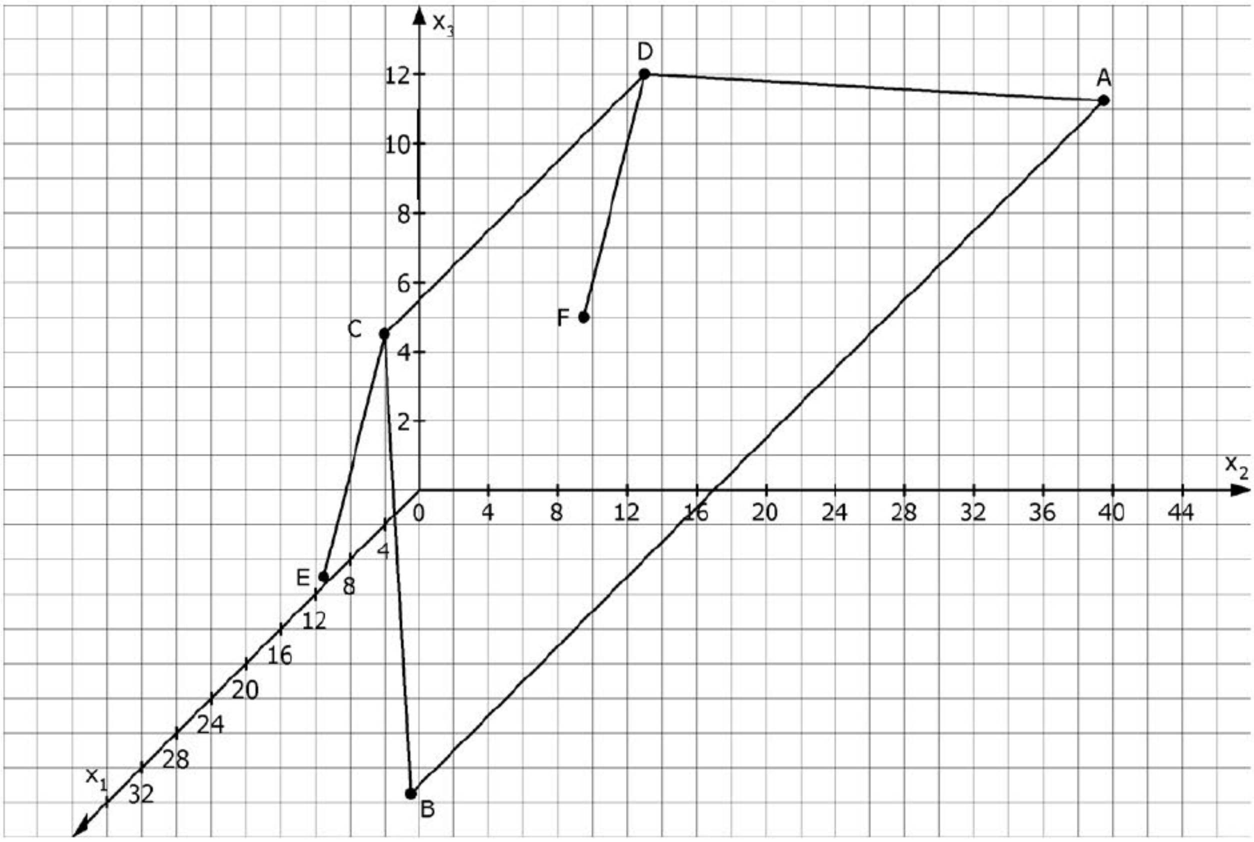


Abbildung 2.1

a) Weisen Sie nach, dass die Gleichung $x_2 + 2x_3 = 17$ die Ebene durch die drei Punkte A, B und C festlegt.

b) Zeigen Sie, dass das Trapez ABCD gleichschenklig ist, wenn der Punkt D die Koordinaten $D(-20|\,3\,|\,7)$ hat.

Die Startrampe wird von Stützpfeilern gehalten, die senkrecht zur Startrampe sind und auf den Punkten E und F der x_1-x_2-Ebene aufgesetzt sind (vgl. Abbildung 2.1).

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Durchstoßpunktes E als Schnittpunkt der Geraden, die den Pfeiler beschreibt, mit der x_1-x_2-Ebene.

Das erste Miniatur-Auto mit dem Namen „Tiger“ startet vom Mittelpunkt des oberen Randes der Startrampe, fährt geradlinig bis zur Mitte des unteren Randes der Startrampe und verlässt die schiefe Ebene dort. Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die Bewegung idealisiert als Bewegung des Auto-Mittelpunkts beschrieben werden kann, obwohl ein Miniatur-Auto eine Breite von 4 cm hat.

Beim Verlassen der schiefen Ebene führt ein Ruck zu einer leicht versetzen Fahrt, so dass „Tiger“ den Richtungsvektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 10 \\ 34 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat. Die Fahrbahn von „Tiger“ lässt sich dann beschreiben durch die Geradengleichung f mit

$$f: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 34 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \leq t \leq 5.$$

Dabei gibt der Parameter t die Zeit in Sekunden an und $t = 0$ ist der Zeitpunkt für das Verlassen der Rampe.

d) Geben Sie die Punkte an, an denen sich „Tiger“ zu den Zeitpunkten $t = 1$ und $t = 2$ befindet und

berechnen Sie die Zeit t, die „Tiger“ zum Zurücklegen einer Strecke von einem Meter benötigt.

Nach Verlassen der Rampe sind auf der Fahrbahn zylindrische Pfosten mit einem Radius von 10 mm aufgebaut. Der Mittelpunkt eines Pfostens befindet sich im Punkt P mit $P(4{,}3\,|\,39\,|\,0)$.

Die Ingenieurin behauptet, dass für den notwendigen Abstand zwischen einem beliebigen Pfosten im Punkt $R(r_1\,|\,r_2\,|\,0)$ und der Fahrbahn f des Miniatur-Autos „Tiger“ in Abhängigkeit vom Punkt R und der Zeit t die folgende Ungleichung erfüllt sein muss:

$$3{,}0 < \sqrt{(r_1 + 5 - 10t)^2 + (r_2 - 17 - 34t)^2}$$

e) Erläutern Sie den Wert 3,0 in der Ungleichung,

begründen Sie das Relationszeichen und

untersuchen Sie, ob „Tiger“ an dem Pfosten im Punkt P vorbeifahren kann.

Die mathematikbegeisterte Praktikantin der Ingenieurin behauptet, dass die Ungleichung mit einer anderen Darstellung der Fahrbahngleichung entwickelt werden kann:
Sie erstellt dazu eine Geradengleichung g mit

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und erhält dann

$$3{,}0 < \sqrt{(r_1 + 10 - 5s)^2 + (r_2 - 17s)^2}$$

f) Leiten Sie den Zusammenhang zwischen den Werten der Parameter s und t her.

Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1 A** (hilfsmittelfreier Teil mit linearer Algebra)**:**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	30
Erstkorrektur							
Zweitkorrektur							

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: a, b, c, ... $\in \mathbb{R}$ und die Variablen: x, t, ... $\in \mathbb{R}$.

a) In der Abbildung 1.1 ist der Graph der Funktion f dargestellt.

a1) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion von f in das untere Koordinatensystem (Abbildung 1.2).

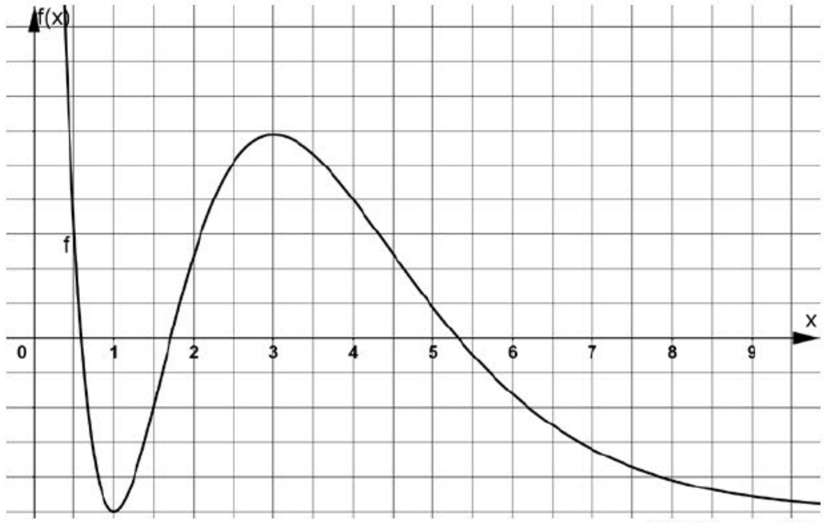


Abbildung 1.1

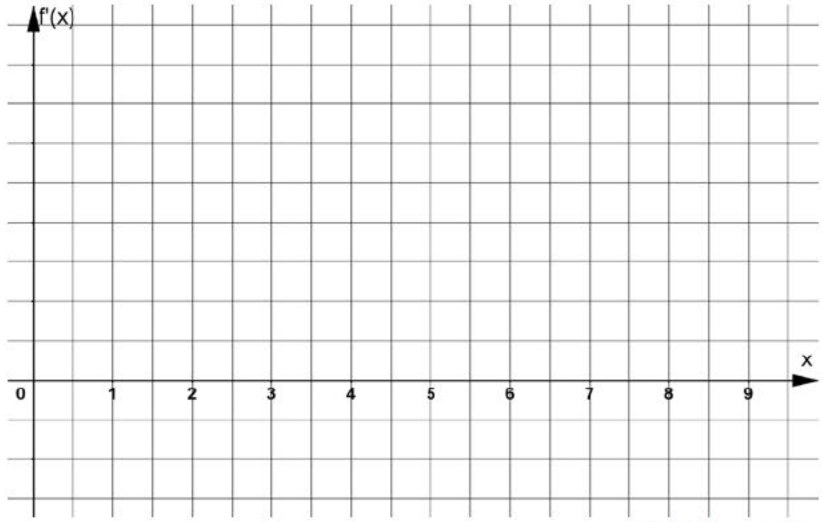


Abbildung 1.2

a2) Entscheiden Sie begründet, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Jeder Graph einer Stammfunktion F von f in Abbildung 1.1 besitzt zwei Wendepunkte.	

b) Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = 0{,}5 \cdot x^3 - 2 \cdot x$$

b1) Bestimmen Sie die Steigung von f im Schnittpunkt mit der Ordinatenachse.

b2) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f insgesamt eine Fläche von 4 Flächeneinheiten (FE) mit der x-Achse einschließt.

c) Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \cos(2\pi \cdot x) + 1$$

c1) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f im Intervall $0 \leq x \leq 3$.

c2) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

<u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Im Intervall $0 \leq x \leq 3$ hat die Funktion h mit der Gleichung $h(x) = 2 \cdot f(x) - 1$ doppelt so viele Nullstellen wie die Funktion f.		
Der Graph der Funktion g mit der Gleichung $g(x) = \cos(2\pi \cdot (x - \pi)) + 1$ ist gegenüber dem Graphen der Funktion f um π Einheiten nach rechts verschoben.		

d) Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und die Matrix $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}$.

d1) Weisen Sie nach, dass für die gegebenen Matrizen $A^T \cdot B^T = (B \cdot A)^T$ gilt.

Gegeben ist die Matrix $C = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 & a \\ 0{,}2 & b - 0{,}2 & 1 \\ 0{,}7 & 0{,}3 & 0 \end{pmatrix}$

d2) Geben Sie Werte für die Parameter a und b so an, dass die Matrix C stochastisch ist.

e) Die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ a & b \end{pmatrix}$ sind zueinander invers.

e1) Berechnen Sie die Parameter a und b.

Es gilt die Matrizengleichung $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 35 \\ 20 \end{pmatrix}$.

e2) Begründen Sie, von welchem Typ die Matrix X sein muss und bestimmen Sie die Matrix X.

f) In einem Übergangsprozess wechseln 100 Objekte entsprechend des Übergangsgraphen in Abbildung 1.3 zwischen den Zuständen A, B und C.

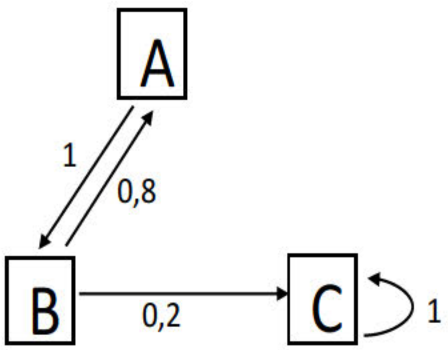


Abbildung 1.3

f1) Geben Sie die Übergangsmatrix M an.

Zu Beginn befinden sich alle 100 Objekte im Zustand A.

In der Abbildung 1.4 sind drei Diagramme gegeben, die die Anzahl der Objekte im Zustand A in Abhängigkeit von der Anzahl der Übergänge anzeigen.

f2) Entscheiden Sie begründet, welches der Diagramme in Abbildung 1.4 den Zusammenhang für den gegebenen Übergangsgraphen korrekt widerspiegelt.

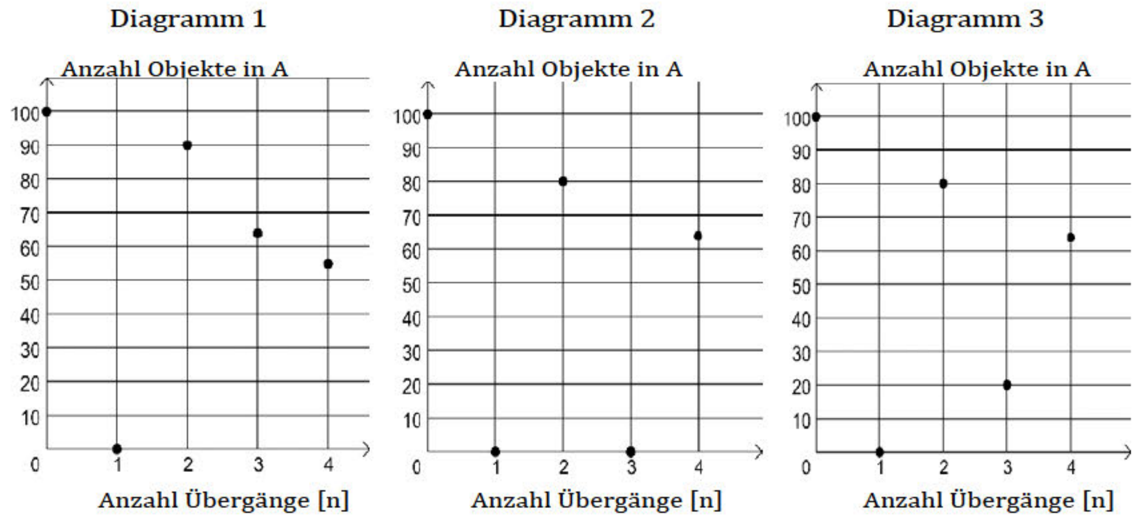


Abbildung 1.4

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 2:** (Lineare Algebra) **Digitale Spiele**

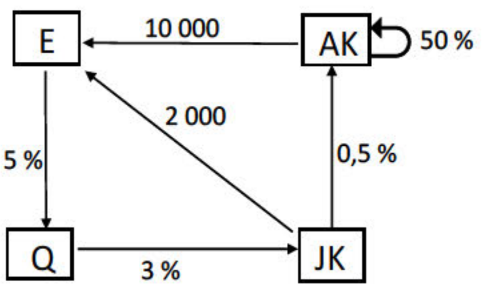
Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	gesamt
Erreichbar	6	4	3	5*	3	3	6*	30
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter:
$a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Im Rahmen eines Projektes zu Videospielen betrachten Schülerinnen und Schüler eines beruflichen Gymnasiums in einem Teil ihrer Arbeit die Marktentwicklung der Plattformen für Videospiele. Im ersten Teil der Arbeit befassen sie sich zunächst exemplarisch mit den mathematischen Grundlagen eines Videospiels, das die invasive Besiedlung der Aga-Kröte in Australien simuliert.

Die Recherche zur Aga-Kröte ergab, dass diese mit nur zehn ausgewachsenen Exemplaren in Australien zur Schädlingsbekämpfung ausgesetzt wurde. Aufgrund fehlender Fressfeinde vermehrte sie sich explosionsartig und bedroht heute die australische Fauna. Die Abbildung 2.1 zeigt die Übergänge zwischen den Entwicklungsstadien der Kröte für den ursprünglichen Lebensraum in Südamerika und für Australien. Eine Periode entspricht einem Zeitraum von sechs Monaten.

Südamerika



Australien

$$\begin{array}{cc} & \text{von} \\ & \begin{array}{cccc} \text{E} & \text{Q} & \text{JK} & \text{AK} \end{array} \\ \text{zu} \begin{array}{c} \text{E} \\ \text{Q} \\ \text{JK} \\ \text{AK} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\,000 & 10\,000 \\ 0{,}05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}04 & 0{,}6 \end{pmatrix} = A \end{array}$$

Legende:
E: Eier/Laich
Q: Kaulquappen
JK: Jungkröten
AK: adulte (ausgewachsene) Kröten

Abbildung 2.1

a) Erläutern Sie die Matrizenelemente a_{13}, a_{43} und a_{44} im Sachzusammenhang und vergleichen Sie diese Werte mit denen aus dem Übergangsgraphen.

b) Berechnen Sie ausgehend von der ursprünglichen Anfangspopulation $\vec{v}_0$ von zehn adulten Aga-Kröten und der für Australien angegebenen Matrix A die Anzahl der Jungkröten und adulten Kröten nach einem Jahr und nach zehn Jahren.

In der Simulation wird für ein von Aga-Kröten befallenes Gebiet in Australien der Populationsvektor zum März 2021 angegeben mit $\vec{v}_{M21} = \begin{pmatrix} 2\,200\,000 \\ 100\,000 \\ 900 \\ 68 \end{pmatrix}$.

c) Ermitteln Sie die Anzahl der Jungkröten und adulten Kröten zum September 2020, wenn die Populationsmatrix A bereits in diesem Zeitraum gegolten hat.

Der Aufbau von Krötenzäunen um Wasserstellen soll den Kröten die Grundlage für die Eiablage entziehen. Durch diese Maßnahme reduziert sich die Anzahl der gelegten Eier bei Jungkröten auf nur noch 5 %, bei den adulten Kröten ist dieser Wert noch nicht bestimmt.

Gleichzeitig werden an den Zäunen die Kröten eingesammelt und dem Ökosystem entnommen. Die Wahrscheinlichkeit, die nächste Entwicklungsstufe zu erreichen, sinkt für die Jungkröten durch diese Maßnahme um 50 % und die Überlebenswahrscheinlichkeit der adulten Kröten bzw. die Wahrscheinlichkeit, Teil des Ökosystems zu bleiben, fällt durch diese Maßnahme auf 50 %.

Für die Eier und Kaulquappen ändert sich die Wahrscheinlichkeit, die nächste Entwicklungsstufe zu erreichen, nicht.

Mit diesen Maßnahmen ergibt sich eine neue Populationsmatrix:

$$A_{neu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & k \\ 0{,}05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}02 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Für die Simulation werden für zwei aufeinanderfolgende Perioden folgende Populationen festgelegt:

Startpopulation $\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 1\,500\,000 \\ 50\,000 \\ 1\,000 \\ 360 \end{pmatrix}$ Folgeperiode $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1\,000\,000 \\ 75\,000 \\ 1\,500 \\ 200 \end{pmatrix}$

d) Begründen Sie, warum für die Entwicklung der Aga-Kröten nach dem Aufstellen der Krötenzäune und dem Einsammeln der Kröten die Populationsmatrix A_{neu} gilt und ermitteln Sie, wie viele Eier eine adulte Kröte nach diesen Maßnahmen noch durchschnittlich legt und wie viele adulte Kröten gefangen wurden.

Im zweiten Teil des Projektes wird die Marktentwicklung von Videospiel-Plattformen untersucht. Videospiele werden für PCs (P) und für Konsolen (K) sowie für Mobile-Plattformen (M), hierzu gehören Smartphones und Tablets, angeboten.

Im Jahr 2019 sind weltweit 0,5 Milliarden Video-Spieler den PC-Plattformen, 0,7 Milliarden den Konsolen-Plattformen und 1,1 Milliarden den Mobile-Plattformen zuzuordnen.

Die Matrix S zeigt das jährlichen Wechselverhalten der Videospieler zwischen den drei Plattformen:

$$\begin{array}{ccc} & \text{von} & \\ \text{P} & \text{K} & \text{M} \end{array}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0{,}72 & 0{,}20 & 0{,}04 \\ 0{,}20 & 0{,}70 & 0{,}04 \\ 0{,}08 & 0{,}10 & 0{,}92 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{P} \\ \text{K} \\ \text{M} \end{array} \quad \text{zu}$$

e) Erläutern Sie die Zahlenwerte der ersten Spalte im Sachzusammenhang und

bestimmen Sie, wie viele Spieler im Jahr 2020 insgesamt von den anderen beiden Plattformen zur Konsole wechselten.

Der Schüler Sören hat die sechste Potenz der Übergangsmatrix S berechnet.

$$S^6 = \begin{pmatrix} 0{,}72 & 0{,}20 & 0{,}04 \\ 0{,}20 & 0{,}70 & 0{,}04 \\ 0{,}08 & 0{,}10 & 0{,}92 \end{pmatrix}^6 \approx \begin{pmatrix} 0{,}34 & 0{,}32 & 0{,}16 \\ 0{,}31 & 0{,}32 & 0{,}16 \\ 0{,}35 & 0{,}36 & 0{,}68 \end{pmatrix}$$

Sören behauptet, dass aus der Ergebnismatrix zu erkennen ist, dass 68 % der Mobile-Plattformen-Nutzer in den sechs Jahren durchgängig die Mobile-Plattformen genutzt haben.

Der Mitschüler Max entgegnet, dies stimme nicht, es seien nur etwa 60,6 %, die nie von den Mobile-Plattformen wechselten.

f) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Mitschüler Max recht hat und

erläutern Sie den Wert 0,68 aus der Potenzmatrix S^6 im Sachzusammenhang.

Die Zahl der Spieler ist vom Jahr 2019 auf 2020 angewachsen: bei PC-Plattformen um 1 %, bei Konsolen-Plattformen um 2 % und bei Mobile-Plattformen um 5 %. Die Klasse hat dazu die Matrix Z sowie vier Lösungsansätze zur Berechnung der Spielerverteilung für das Jahr 2020 in Tabelle 2.1 notiert:

$$Z = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{P} & \text{K} & \text{M} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}01 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}02 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{P} \\ \text{K} \\ \text{M} \end{array}$$

$\vec{a}_{2019}$ gibt die Spielerverteilung für 2019 an,
E gibt die Einheitsmatrix an

Lösungsansatz 1	Lösungsansatz 2	Lösungsansatz 3	Lösungsansatz 4
$S \cdot Z \cdot \vec{a}_{2019}$	$(E+Z) \cdot S \cdot \vec{a}_{2019}$	$(S+Z) \cdot \vec{a}_{2019}$	$S \cdot \vec{a}_{2019} \cdot (E+Z)$

Tabelle 2.1

g) Berechnen Sie mit der Matrix Z die im Jahr 2020 neu hinzukommenden Spieler und

geben Sie die (gesamte) Spielerverteilung für das Jahr 2020 an.

Entscheiden Sie begründet, welcher der vier Lösungsansätze zur Berechnung der Spielerverteilung für das Jahr 2020 richtig ist.

Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1 B** (hilfsmittelfreier Teil mit linearer Algebra):

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	30
Erstkorrektur							
Zweitkorrektur							

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter:
a, b, c, ... $\in \mathbb{R}$ und die Variablen: x, t, ... $\in \mathbb{R}$.

a) In der Abbildung 1.1 ist der Graph der Funktion f dargestellt.

a1) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion von f in das untere Koordinatensystem (Abbildung 1.2).

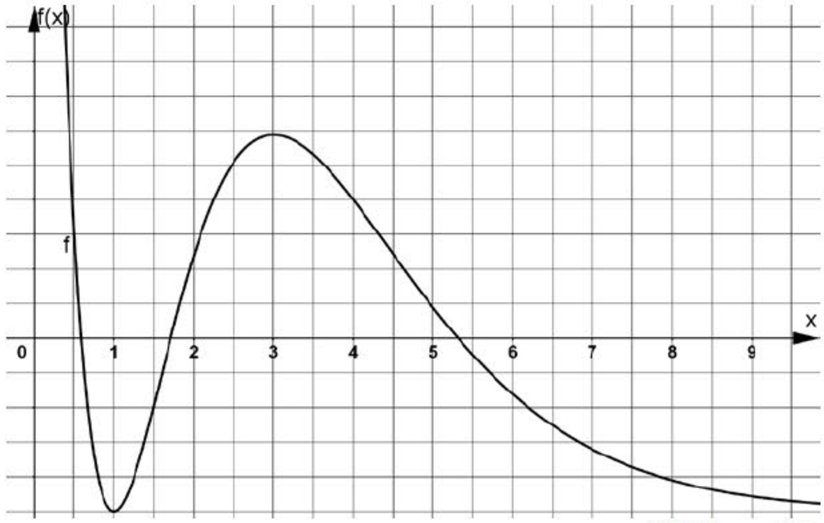


Abbildung 1.1

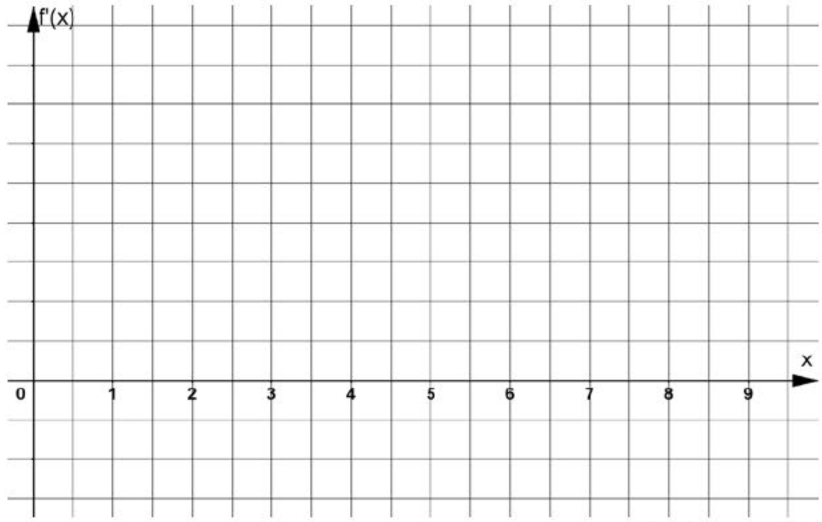


Abbildung 1.2

a2) Entscheiden Sie begründet, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Jeder Graph einer Stammfunktion F von f in Abbildung 1.1 besitzt zwei Wendepunkte.	

b) Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = 0{,}5 \cdot x^3 - 2 \cdot x$$

b1) Bestimmen Sie die Steigung von f im Schnittpunkt mit der Ordinatenachse.

b2) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f insgesamt eine Fläche von 4 Flächeneinheiten (FE) mit der x-Achse einschließt.

c) Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = x \cdot e^x \qquad \text{e ist die Eulersche Zahl.}$$

c1) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph von f im Punkt $E\left(-1 \middle| -\frac{1}{e}\right)$ eine waagerechte Tangente besitzt.

c2) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Der Graph der Funktion f schneidet die Ordinatenachse im Punkt S(0|1).		
Der Graph der Funktion g mit $g(x) = -x \cdot e^x$ entspricht dem an der x-Achse gespiegelten Graphen von f.		

d) Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und die Matrix $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix}$.

d1) Weisen Sie nach, dass für die gegebenen Matrizen $A^T \cdot B^T = (B \cdot A)^T$ gilt.

Gegeben ist die Matrix $C = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 & a \\ 0{,}2 & b - 0{,}2 & 1 \\ 0{,}7 & 0{,}3 & 0 \end{pmatrix}$

d2) Geben Sie Werte für die Parameter a und b so an, dass die Matrix C stochastisch ist.

e) Die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ a & b \end{pmatrix}$ sind zueinander invers.

e1) Berechnen Sie die Parameter a und b.

Es gilt die Matrizengleichung $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 35 \\ 20 \end{pmatrix}$.

e2) Begründen Sie, von welchem Typ die Matrix X sein muss und bestimmen Sie die Matrix X.

f) In einem Übergangsprozess wechseln 100 Objekte entsprechend des Übergangsgraphen in Abbildung 1.3 zwischen den Zuständen A, B und C.

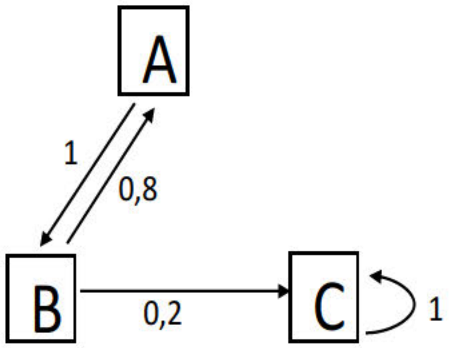


Abbildung 1.3

f1) Geben Sie die Übergangsmatrix M an.

Zu Beginn befinden sich alle 100 Objekte im Zustand A.

In der Abbildung 1.4 sind drei Diagramme gegeben, die die Anzahl der Objekte im Zustand A in Abhängigkeit von der Anzahl der Übergänge anzeigen.

f2) Entscheiden Sie begründet, welches der Diagramme in Abbildung 1.4 den Zusammenhang für den gegebenen Übergangsgraphen korrekt widerspiegelt.

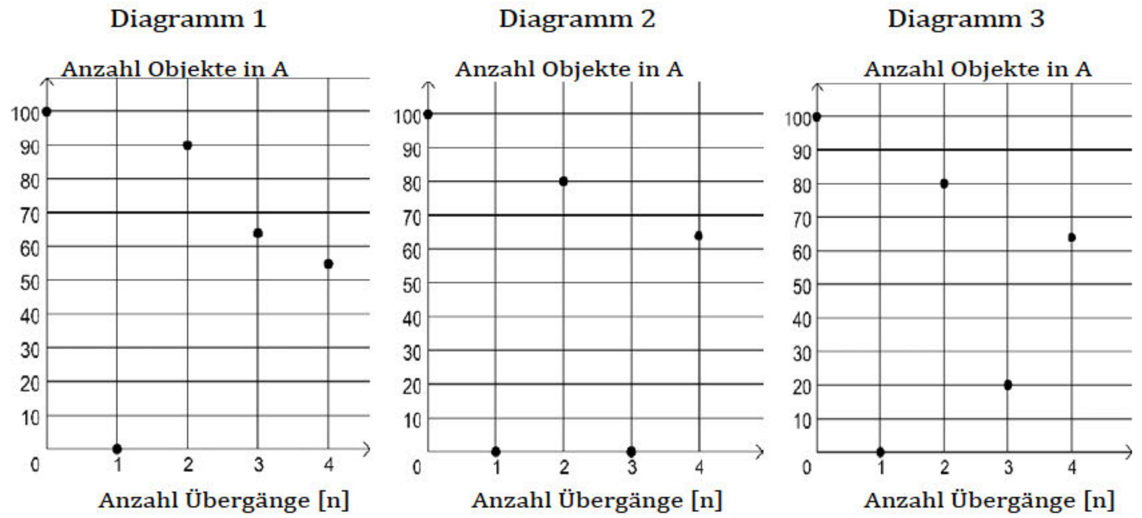


Abbildung 1.4

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 2:** (Lineare Algebra) **Digitale Spiele**

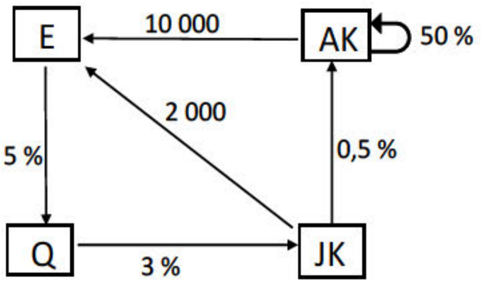
Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	gesamt
Erreichbar	6	4	3	5*	3	3	6*	30
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Im Rahmen eines Projektes zu Videospielen betrachten Schülerinnen und Schüler eines beruflichen Gymnasiums in einem Teil ihrer Arbeit die Marktentwicklung der Plattformen für Videospiele. Im ersten Teil der Arbeit befassen sie sich zunächst exemplarisch mit den mathematischen Grundlagen eines Videospiels, das die invasive Besiedlung der Aga-Kröte in Australien simuliert.

Die Recherche zur Aga-Kröte ergab, dass diese mit nur zehn ausgewachsenen Exemplaren in Australien zur Schädlingsbekämpfung ausgesetzt wurde. Aufgrund fehlender Fressfeinde vermehrte sie sich explosionsartig und bedroht heute die australische Fauna. Die Abbildung 2.1 zeigt die Übergänge zwischen den Entwicklungsstadien der Kröte für den ursprünglichen Lebensraum in Südamerika und für Australien. Eine Periode entspricht einem Zeitraum von sechs Monaten.

Südamerika



Australien

$$\begin{array}{cc} & \text{von} \\ & \begin{array}{cccc} \text{E} & \text{Q} & \text{JK} & \text{AK} \end{array} \\ \text{zu} \begin{array}{c} \text{E} \\ \text{Q} \\ \text{JK} \\ \text{AK} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\,000 & 10\,000 \\ 0{,}05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}04 & 0{,}6 \end{pmatrix} = A \end{array}$$

Legende:
E: Eier/Laich
Q: Kaulquappen
JK: Jungkröten
AK: adulte (ausgewachsene) Kröten

Abbildung 2.1

a) Erläutern Sie die Matrizenelemente a_{13}, a_{43} und a_{44} im Sachzusammenhang und vergleichen Sie diese Werte mit denen aus dem Übergangsgraphen.

b) Berechnen Sie ausgehend von der ursprünglichen Anfangspopulation $\vec{v}_0$ von zehn adulten Aga-Kröten und der für Australien angegebenen Matrix A die Anzahl der Jungkröten und adulten Kröten nach einem Jahr und nach zehn Jahren.

In der Simulation wird für ein von Aga-Kröten befallenes Gebiet in Australien der Populationsvektor zum März 2021 angegeben mit $\vec{v}_{M21} = \begin{pmatrix} 2\,200\,000 \\ 100\,000 \\ 900 \\ 68 \end{pmatrix}$.

c) Ermitteln Sie die Anzahl der Jungkröten und adulten Kröten zum September 2020, wenn die Populationsmatrix A bereits in diesem Zeitraum gegolten hat.

Der Aufbau von Krötenzäunen um Wasserstellen soll den Kröten die Grundlage für die Eiablage entziehen. Durch diese Maßnahme reduziert sich die Anzahl der gelegten Eier bei Jungkröten auf nur noch 5 %, bei den adulten Kröten ist dieser Wert noch nicht bestimmt.

Gleichzeitig werden an den Zäunen die Kröten eingesammelt und dem Ökosystem entnommen. Die Wahrscheinlichkeit, die nächste Entwicklungsstufe zu erreichen, sinkt für die Jungkröten durch diese Maßnahme um 50 % und die Überlebenswahrscheinlichkeit der adulten Kröten bzw. die Wahrscheinlichkeit, Teil des Ökosystems zu bleiben, fällt durch diese Maßnahme auf 50 %.

Für die Eier und Kaulquappen ändert sich die Wahrscheinlichkeit, die nächste Entwicklungsstufe zu erreichen, nicht.

Mit diesen Maßnahmen ergibt sich eine neue Populationsmatrix:

$$A_{neu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & k \\ 0{,}05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}02 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Für die Simulation werden für zwei aufeinanderfolgende Perioden folgende Populationen festgelegt:

$$\text{Startpopulation } \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 1\,500\,000 \\ 50\,000 \\ 1\,000 \\ 360 \end{pmatrix} \qquad \text{Folgeperiode } \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1\,000\,000 \\ 75\,000 \\ 1\,500 \\ 200 \end{pmatrix}$$

d) Begründen Sie, warum für die Entwicklung der Aga-Kröten nach dem Aufstellen der Krötenzäune und dem Einsammeln der Kröten die Populationsmatrix A_{neu} gilt und ermitteln Sie, wie viele Eier eine adulte Kröte nach diesen Maßnahmen noch durchschnittlich legt und wie viele adulte Kröten gefangen wurden.

Im zweiten Teil des Projektes wird die Marktentwicklung von Videospiel-Plattformen untersucht. Videospiele werden für PCs (P) und für Konsolen (K) sowie für Mobile-Plattformen (M), hierzu gehören Smartphones und Tablets, angeboten.

Im Jahr 2019 sind weltweit 0,5 Milliarden Video-Spieler den PC-Plattformen, 0,7 Milliarden den Konsolen-Plattformen und 1,1 Milliarden den Mobile-Plattformen zuzuordnen.

Die Matrix S zeigt das jährlichen Wechselverhalten der Videospieler zwischen den drei Plattformen:

$$\begin{array}{cccc} & & \text{von} & \\ & \text{P} & \text{K} & \text{M} \end{array}$$
$$S = \begin{pmatrix} 0{,}72 & 0{,}20 & 0{,}04 \\ 0{,}20 & 0{,}70 & 0{,}04 \\ 0{,}08 & 0{,}10 & 0{,}92 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{P} \\ \text{K} \\ \text{M} \end{array} \quad \text{zu}$$

e) Erläutern Sie die Zahlenwerte der ersten Spalte im Sachzusammenhang und

bestimmen Sie, wie viele Spieler im Jahr 2020 insgesamt von den anderen beiden Plattformen zur Konsole wechselten.

Der Schüler Sören hat die sechste Potenz der Übergangsmatrix S berechnet.

$$S^6 = \begin{pmatrix} 0{,}72 & 0{,}20 & 0{,}04 \\ 0{,}20 & 0{,}70 & 0{,}04 \\ 0{,}08 & 0{,}10 & 0{,}92 \end{pmatrix}^6 \approx \begin{pmatrix} 0{,}34 & 0{,}32 & 0{,}16 \\ 0{,}31 & 0{,}32 & 0{,}16 \\ 0{,}35 & 0{,}36 & 0{,}68 \end{pmatrix}$$

Sören behauptet, dass aus der Ergebnismatrix zu erkennen ist, dass 68 % der Mobile-Plattformen-Nutzer in den sechs Jahren durchgängig die Mobile-Plattformen genutzt haben.

Der Mitschüler Max entgegnet, dies stimme nicht, es seien nur etwa 60,6 %, die nie von den Mobile-Plattformen wechselten.

f) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Mitschüler Max recht hat und

erläutern Sie den Wert 0,68 aus der Potenzmatrix S^6 im Sachzusammenhang.

Die Zahl der Spieler ist vom Jahr 2019 auf 2020 angewachsen: bei PC-Plattformen um 1 %, bei Konsolen-Plattformen um 2 % und bei Mobile-Plattformen um 5 %. Die Klasse hat dazu die Matrix Z sowie vier Lösungsansätze zur Berechnung der Spielerverteilung für das Jahr 2020 in Tabelle 2.1 notiert:

$$\begin{array}{ccc} \text{P} & \text{K} & \text{M} \end{array}$$
$$Z = \begin{pmatrix} 0{,}01 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}02 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{P} \\ \text{K} \\ \text{M} \end{array}$$

$\vec{a}_{2019}$ gibt die Spielerverteilung für 2019 an,
E gibt die Einheitsmatrix an

Lösungsansatz 1	Lösungsansatz 2	Lösungsansatz 3	Lösungsansatz 4
$S \cdot Z \cdot \vec{a}_{2019}$	$(E + Z) \cdot S \cdot \vec{a}_{2019}$	$(S + Z) \cdot \vec{a}_{2019}$	$S \cdot \vec{a}_{2019} \cdot (E + Z)$

Tabelle 2.1

g) Berechnen Sie mit der Matrix Z die im Jahr 2020 neu hinzukommenden Spieler und

geben Sie die (gesamte) Spielerverteilung für das Jahr 2020 an.

Entscheiden Sie begründet, welcher der vier Lösungsansätze zur Berechnung der Spielerverteilung für das Jahr 2020 richtig ist.

Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1 A:** (hilfsmittelfreier Teil mit Stochastik)

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	30
Erstkorrektur							
Zweitkorrektur							

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: a, b, c, ... $\in \mathbb{R}$ und die Variablen: x, t, ... $\in \mathbb{R}$.

a) In der Abbildung 1.1 ist der Graph der Funktion f dargestellt.

a1) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion von f in das untere Koordinatensystem (Abbildung 1.2).

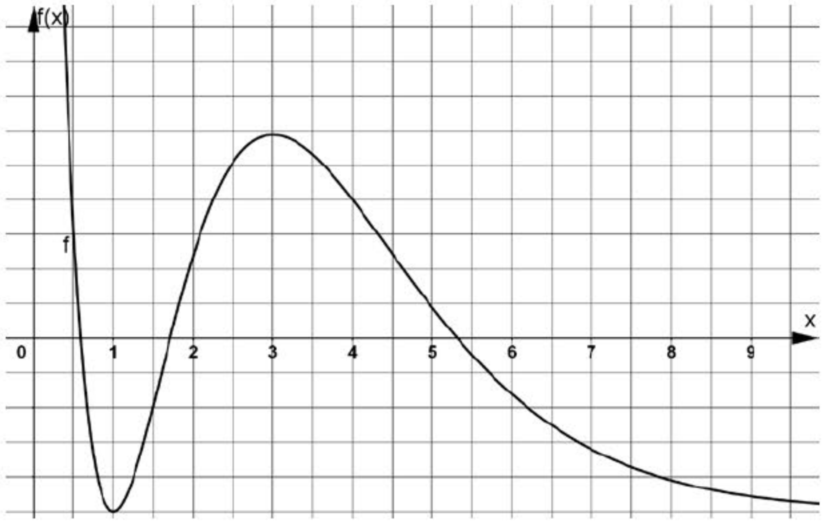


Abbildung 1.1

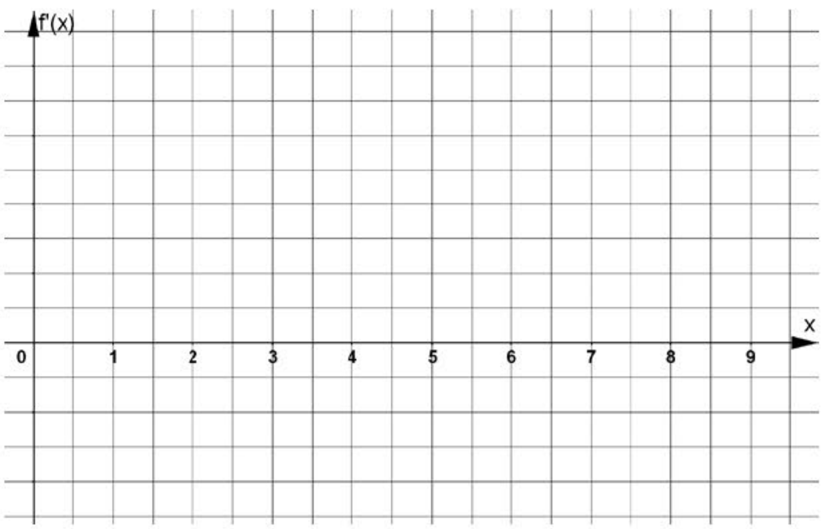


Abbildung 1.2

a2) Entscheiden Sie begründet, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Jeder Graph einer Stammfunktion F von f in Abbildung 1.1 besitzt zwei Wendepunkte.	

b) Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = 0{,}5 \cdot x^3 - 2 \cdot x$$

b1) Bestimmen Sie die Steigung von f im Schnittpunkt mit der Ordinatenachse.

b2) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f insgesamt eine Fläche von 4 Flächeneinheiten (FE) mit der x-Achse einschließt.

c) Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \cos(2\pi \cdot x) + 1$$

c1) Bestimmen Sie alle Nullstellen von f im Intervall $0 \leq x \leq 3$.

c2) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

<u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Im Intervall $0 \leq x \leq 3$ hat die Funktion h mit der Gleichung $h(x) = 2 \cdot f(x) - 1$ doppelt so viele Nullstellen wie die Funktion f.		
Der Graph der Funktion g mit der Gleichung $g(x) = \cos(2\pi \cdot (x - \pi)) + 1$ ist gegenüber dem Graphen der Funktion f um π Einheiten nach rechts verschoben.		

d) Auf Grundlage einer Datenerhebung wurde die in Tabelle 1.1 dargestellte Datenreihe ermittelt.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
2	8	6	4	3	3	5	6

Tabelle 1.1

d1) Zeichnen Sie in Abbildung 1.3 einen Boxplot, dem die Urliste in Tabelle 1.1 zugrunde liegt.

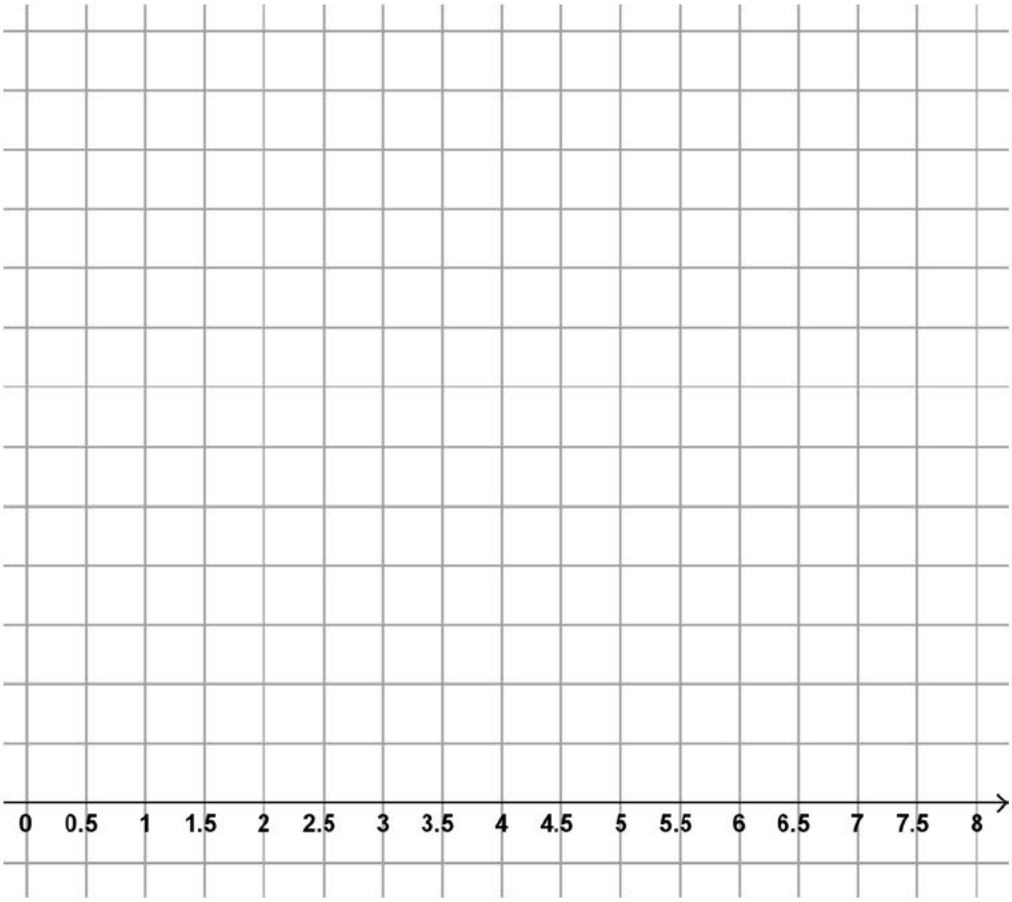


Abbildung 1.3

Es wird eine zweite Datenreihe
$y_1 = 2 \cdot x_1; y_2 = 2 \cdot x_2; \ldots; \ y_8 = 2 \cdot x_8$ gebildet.

d2) Erläutern Sie, wie sich die zweite Datenreihe in Bezug auf den Median und den (Inter-)Quartilsabstand von der ersten Datenreihe unterscheidet.

e) In der Tabelle 1.2 ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariable X mit der Standardabweichung $\sigma_X = \sqrt{\frac{4}{5}}$ dargestellt.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	0,1	0,1	0,5	0,3

Tabelle 1.2

Die Abbildung 1.4 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen Y. Die Zufallsvariable Y ist binomialverteilt mit dem Erwartungswert $\mu_Y = 2$.
Es gilt $X, Y \in \{0,1,2,3\}$.

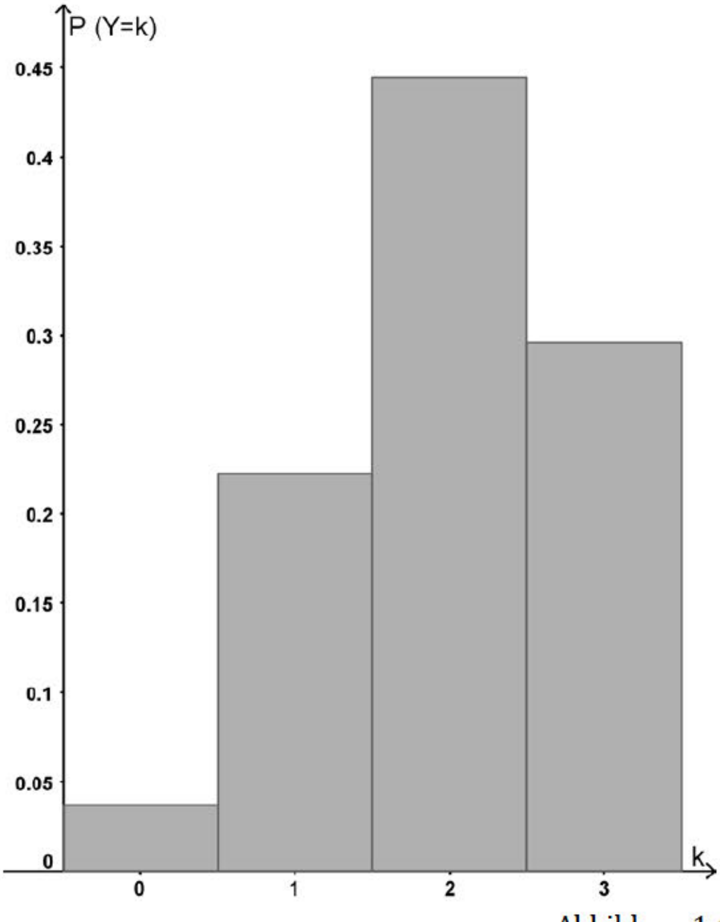


Abbildung 1.4

e1) Bestimmen Sie die Trefferwahrscheinlichkeit p für die binomialverteilte Zufallsvariable Y.

e2) Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert der Zufallsvariablen X $\mu_X = 2$ gilt.

e3) Vergleichen Sie die Standardabweichung der Zufallsvariablen X mit der Standardabweichung der Zufallsvariablen Y.

f) Bei einem Glücksspiel zieht ein Spieler aus einer Urne zufällig eine Kugel. Nach dem Zug wird die Kugel in die Urne zurückgelegt. Es befinden sich fünf grüne (G), drei rote (R) und zwei schwarze (S) Kugeln in der Urne, die sich nur durch ihre Farbe voneinander unterscheiden. Zieht der Spieler eine schwarze Kugel, so macht er einen Gewinn in Höhe von 4 €. In allen anderen Fällen wird nichts ausgezahlt. Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer grünen, roten bzw. schwarzen Kugel wird dabei mit $P(G)$, $P(R)$ bzw. $P(S)$ bezeichnet.

f1) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $P(S)$ an.

f2) Zeigen Sie, dass $P(R) > \left(P(G)\right)^2$ gilt.

f3) Begründen Sie, dass das Spiel bei einem Einsatz des Spielers von 1 € stochastisch fair ist.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 2** (Stochastik): **Tabakkonsum**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	gesamt
Erreichbar	6	6	4	3*	5*	6	30
Erstkorrektur							
Zweitkorrektur							

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Laut Bundesministerium für Gesundheit sterben in Deutschland jährlich ungefähr 120 000 Personen an den Folgen des Tabakkonsums. Die Verringerung des Tabakkonsums ist daher seit einigen Jahren vordringliches gesundheitspolitisches Ziel der Bundesregierung. Ein Berufliches Gymnasium führt deshalb jährlich ein Projekt zur Sensibilisierung zum Thema Tabakkonsum durch.

Den Beginn des Projekts bildet eine Recherchephase, in der die Schülerinnen und Schüler des Kurses im Internet Datenmaterial zum Thema Tabakkonsum in Deutschland sichten. Sie stoßen dabei unter anderem auf die Abbildungen 2.1 und 2.2, die sich in der Anlage zu dieser Aufgabe befinden.

a) Beschreiben Sie die Abbildungen 2.1 und 2.2 aus der Anlage anhand von jeweils zwei selbstgewählten Aspekten.

Ein Schüler des Kurses betrachtet die beiden Grafiken und behauptet, dass sowohl der Anteil an Raucherinnen als auch der Anteil an Rauchern im Alter von 18 bis 59 Jahren seit 1995 stetig zurückgegangen ist und dass der Anteil der Raucher im Jahr 2015 um ca. 34 % im Vergleich zu 1995 gesunken ist.

b) Prüfen Sie die beiden Behauptungen des Schülers.

Der Projektkurs führte eine Umfrage unter den Schülerinnen und Schülern der eigenen Schule durch. Dabei kam heraus, dass der Anteil der Nichtraucherinnen und Nichtraucher unter den Schülerinnen und Schülern der Schule 82 % beträgt.

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die Zufallsvariable X mit „X ist die Anzahl der Nichtraucherinnen und Nichtraucher" binomialverteilt ist.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 350 befragten Schülerinnen und Schülern

   - mindestens 290 Schülerinnen und Schüler nicht rauchen,
   - mehr als 62, aber höchstens 70 Schülerinnen und Schüler rauchen.

d) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X bei $k = 287$ ein Maximum annimmt.

Linus und Luisa, zwei besonders interessierte Mitglieder des Kurses, betrachten die Auswertung der Umfrage und wollen per Hand nachvollziehen, wie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau 300 der befragten Schülerinnen und Schüler nicht rauchen, mit den Formeln zur Binomialverteilung berechnet wird. Luisa hat herausgefunden, dass der Term

$$1 - P(X > 300) - \sum_{k=0}^{299} P(X = k)$$

zum richtigen Ergebnis führt.

Linus behauptet, dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit auch mit dem Term

$$\binom{350}{300} \cdot (1 - 0{,}82)^{50} \cdot 0{,}82^{300}$$

berechnet werden kann.

e) Leiten Sie Luisas Term zur Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit her.

Begründen Sie ohne Rechnung, dass Linus‘ Term ebenfalls korrekt ist.

Schon seit dem Jahr 2015 ergreift die Schulleitung verstärkt Maßnahmen, um den Anteil an Raucherinnen und Rauchern unter den Schülerinnen und Schülern zu senken. Nun möchte sich die Schulleitung von den Zusammenhängen zwischen der Kenntnis dieser Maßnahmen und der Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Schüler oder eine Schülerin raucht, ein Bild machen. Zu diesem Zweck wurden alle 500 Schülerinnen und Schüler der Schule dazu befragt, ob sie die Maßnahmen der Schulleitung kennen (Ereignis M) und ob sie rauchen (Ereignis R) oder nicht. Dabei gaben insgesamt 400 Befragte an, dass sie die Maßnahmen kennen. Von diesen rauchen 90 % nicht.

Die Auswertung der Befragung soll mithilfe der Vierfeldertafel in Abbildung 2.3 dokumentiert werden.

	R	$\overline{R}$	Σ
M			
$\overline{M}$			
Σ		410	500

Abbildung 2.3

f) Vervollständigen Sie die Vierfeldertafel in Abbildung 2.3.

Erläutern Sie die Bedeutung des Terms $\frac{P(M \cap \overline{R})}{P(\overline{R})}$ im Sachzusammenhang und geben Sie den Wert des Terms näherungsweise an.

Anlage:[1]

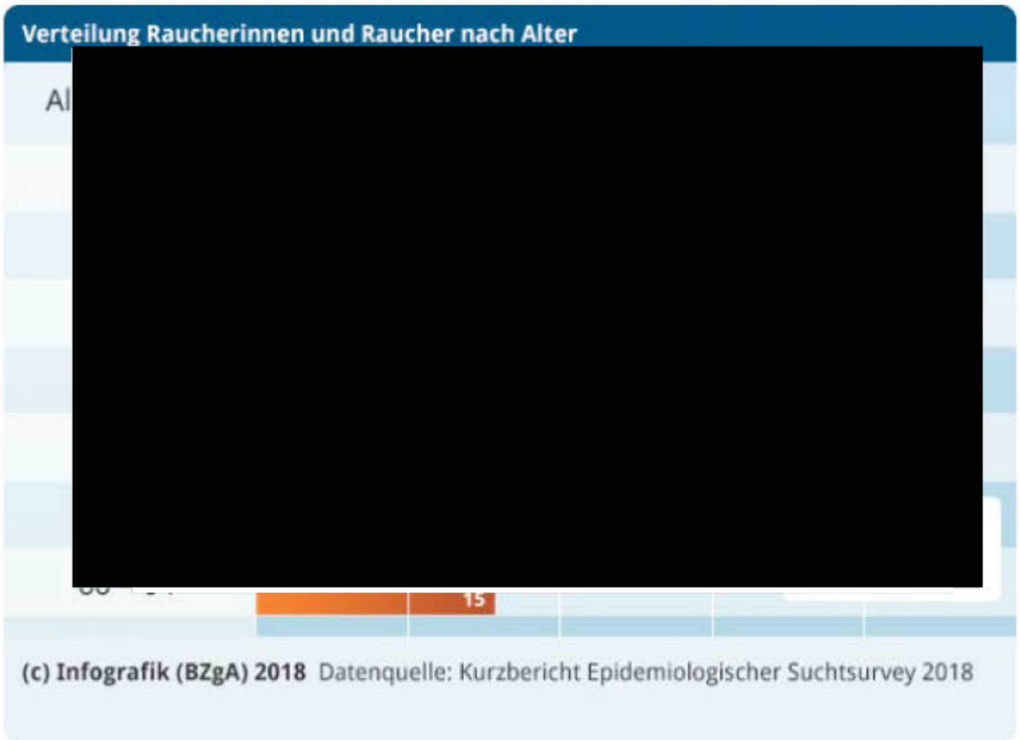


Abbildung 2.1

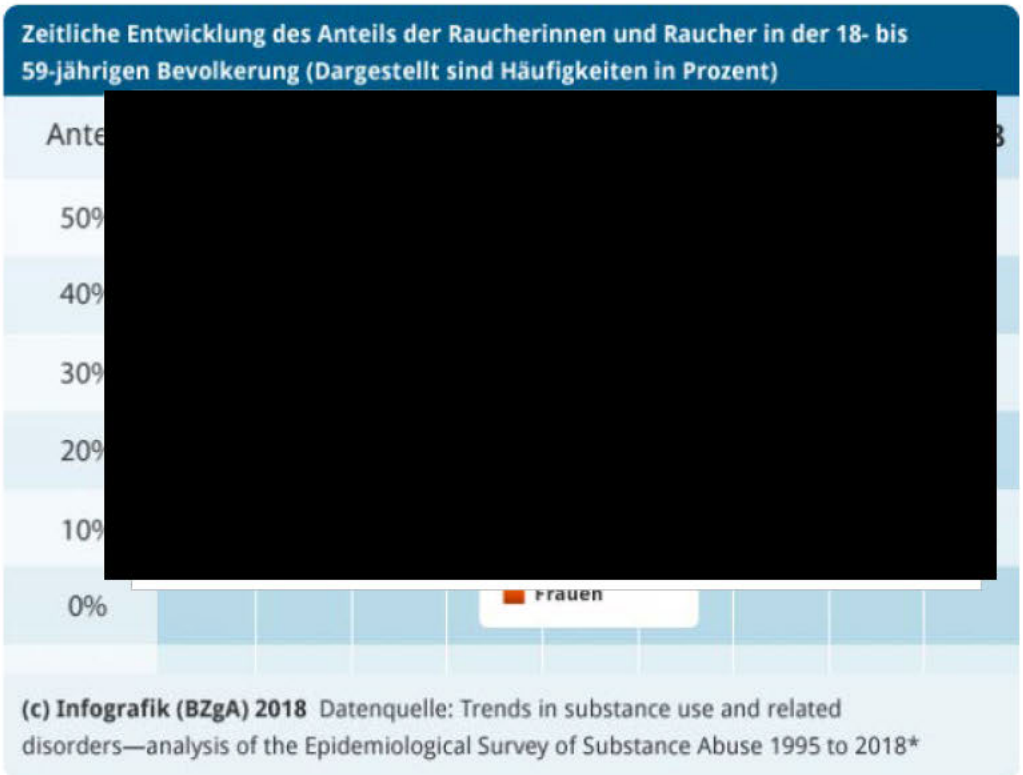


Abbildung 2.2

[1] **Quelle der Grafiken**: Bundeszentrale für gesundheitliche Aufklärung. Unter: www.rauchfrei-info.de/informieren/verbreitung-des-rauchens/raucherquote-bei-erwachsenen/ (Stand: 25.07.2020)

Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1 B:** (hilfsmittelfreier Teil mit Stochastik)

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	30
Erstkorrektur							
Zweitkorrektur							

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: a, b, c, ... $\in \mathbb{R}$ und die Variablen: x, t, ... $\in \mathbb{R}$.

a) In der Abbildung 1.1 ist der Graph der Funktion f dargestellt.

a1) Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion von f in das untere Koordinatensystem (Abbildung 1.2).

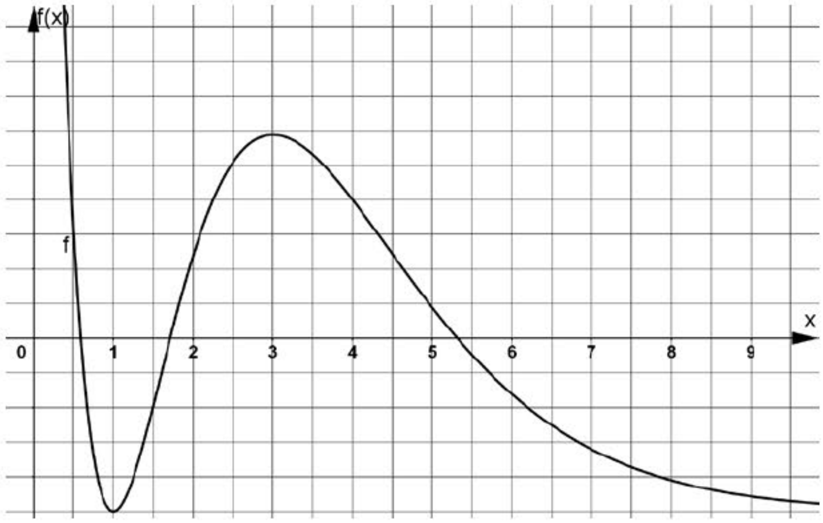


Abbildung 1.1

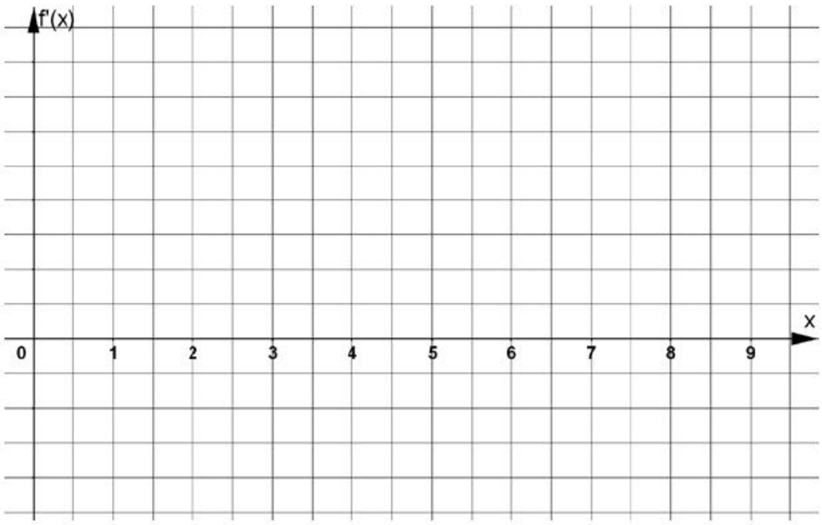


Abbildung 1.2

a2) Entscheiden Sie begründet, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Jeder Graph einer Stammfunktion F von f in Abbildung 1.1 besitzt zwei Wendepunkte.	

b) Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = 0{,}5 \cdot x^3 - 2 \cdot x$$

b1) Bestimmen Sie die Steigung von f im Schnittpunkt mit der Ordinatenachse.

b2) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f insgesamt eine Fläche von 4 Flächeneinheiten (FE) mit der x-Achse einschließt.

c) Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = x \cdot e^x \qquad \text{e ist die Eulersche Zahl.}$$

c1) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph von f im Punkt $E\left(-1 \middle| -\frac{1}{e}\right)$ eine waagerechte Tangente besitzt.

c2) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

<u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).

	wahr	falsch
Der Graph der Funktion f schneidet die Ordinatenachse im Punkt S(0|1).		
Der Graph der Funktion g mit $g(x) = -x \cdot e^x$ entspricht dem an der x-Achse gespiegelten Graphen von f.		

d) Auf Grundlage einer Datenerhebung wurde die in Tabelle 1.1 dargestellte Datenreihe ermittelt.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
2	8	6	4	3	3	5	6

Tabelle 1.1

d1) Zeichnen Sie in Abbildung 1.3 einen Boxplot, dem die Urliste in Tabelle 1.1 zugrunde liegt.

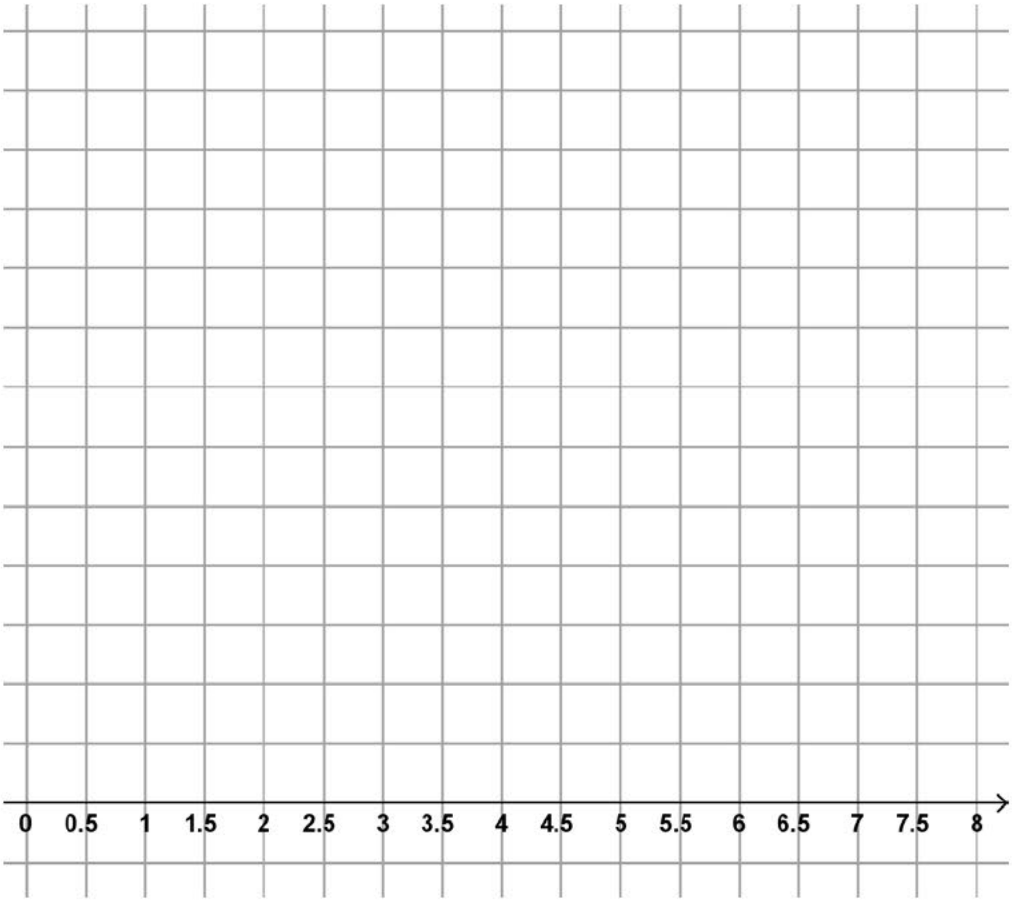


Abbildung 1.3

Es wird eine zweite Datenreihe
$y_1 = 2 \cdot x_1; y_2 = 2 \cdot x_2; \ldots; \ y_8 = 2 \cdot x_8$ gebildet.

d2) Erläutern Sie, wie sich die zweite Datenreihe in Bezug auf den Median und den (Inter-)Quartilsabstand von der ersten Datenreihe unterscheidet.

e) In der Tabelle 1.2 ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariable X mit der Standardabweichung $\sigma_X = \sqrt{\frac{4}{5}}$ dargestellt.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	0,1	0,1	0,5	0,3

Tabelle 1.2

Die Abbildung 1.4 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen Y. Die Zufallsvariable Y ist binomialverteilt mit dem Erwartungswert $\mu_Y = 2$.
Es gilt $X, Y \in \{0,1,2,3\}$.

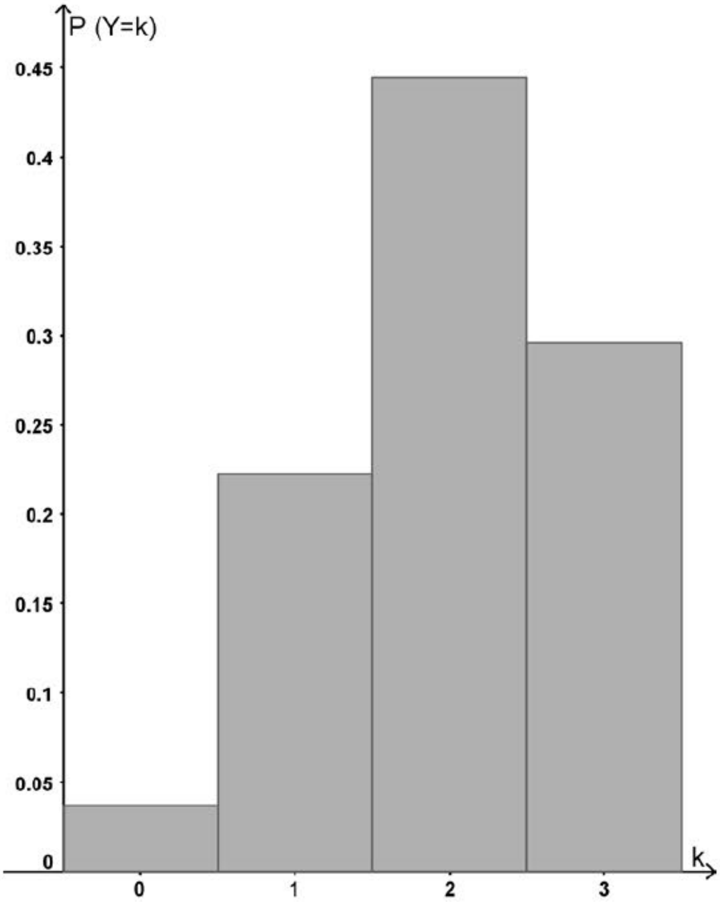


Abbildung 1.4

e1) Bestimmen Sie die Trefferwahrscheinlichkeit p für die binomialverteilte Zufallsvariable Y.

e2) Zeigen Sie, dass für den Erwartungswert der Zufallsvariablen X $\mu_X = 2$ gilt.

e3) Vergleichen Sie die Standardabweichung der Zufallsvariablen X mit der Standardabweichung der Zufallsvariablen Y.

f) Bei einem Glücksspiel zieht ein Spieler aus einer Urne zufällig eine Kugel. Nach dem Zug wird die Kugel in die Urne zurückgelegt. Es befinden sich fünf grüne (G), drei rote (R) und zwei schwarze (S) Kugeln in der Urne, die sich nur durch ihre Farbe voneinander unterscheiden. Zieht der Spieler eine schwarze Kugel, so macht er einen Gewinn in Höhe von 4 €. In allen anderen Fällen wird nichts ausgezahlt. Die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer grünen, roten bzw. schwarzen Kugel wird dabei mit P(G), P(R) bzw. P(S) bezeichnet.

f1) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit P(S) an.

f2) Zeigen Sie, dass $\mathrm{P(R)} > \left(\mathrm{P(G)}\right)^2$ gilt.

f3) Begründen Sie, dass das Spiel bei einem Einsatz des Spielers von 1 € stochastisch fair ist.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 2** (Stochastik): **Tabakkonsum**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	gesamt
Erreichbar	6	6	4	3*	5*	6	30
Erstkorrektur							
Zweitkorrektur							

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Laut Bundesministerium für Gesundheit sterben in Deutschland jährlich ungefähr 120 000 Personen an den Folgen des Tabakkonsums. Die Verringerung des Tabakkonsums ist daher seit einigen Jahren vordringliches gesundheitspolitisches Ziel der Bundesregierung. Ein Berufliches Gymnasium führt deshalb jährlich ein Projekt zur Sensibilisierung zum Thema Tabakkonsum durch.

Den Beginn des Projekts bildet eine Recherchephase, in der die Schülerinnen und Schüler des Kurses im Internet Datenmaterial zum Thema Tabakkonsum in Deutschland sichten. Sie stoßen dabei unter anderem auf die Abbildungen 2.1 und 2.2, die sich in der Anlage zu dieser Aufgabe befinden.

a) Beschreiben Sie die Abbildungen 2.1 und 2.2 aus der Anlage anhand von jeweils zwei selbstgewählten Aspekten.

Ein Schüler des Kurses betrachtet die beiden Grafiken und behauptet, dass sowohl der Anteil an Raucherinnen als auch der Anteil an Rauchern im Alter von 18 bis 59 Jahren seit 1995 stetig zurückgegangen ist und dass der Anteil der Raucher im Jahr 2015 um ca. 34 % im Vergleich zu 1995 gesunken ist.

b) Prüfen Sie die beiden Behauptungen des Schülers.

Der Projektkurs führte eine Umfrage unter den Schülerinnen und Schülern der eigenen Schule durch. Dabei kam heraus, dass der Anteil der Nichtraucherinnen und Nichtraucher unter den Schülerinnen und Schülern der Schule 82 % beträgt.

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die Zufallsvariable X mit „X ist die Anzahl der Nichtraucherinnen und Nichtraucher" binomialverteilt ist.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 350 befragten Schülerinnen und Schülern

   - mindestens 290 Schülerinnen und Schüler nicht rauchen,
   - mehr als 62, aber höchstens 70 Schülerinnen und Schüler rauchen.

d) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X bei $k = 287$ ein Maximum annimmt.

Linus und Luisa, zwei besonders interessierte Mitglieder des Kurses, betrachten die Auswertung der Umfrage und wollen per Hand nachvollziehen, wie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau 300 der befragten Schülerinnen und Schüler nicht rauchen, mit den Formeln zur Binomialverteilung berechnet wird. Luisa hat herausgefunden, dass der Term

$$1 - P(X > 300) - \sum_{k=0}^{299} P(X = k)$$

zum richtigen Ergebnis führt.

Linus behauptet, dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit auch mit dem Term

$$\binom{350}{300} \cdot (1 - 0{,}82)^{50} \cdot 0{,}82^{300}$$

berechnet werden kann.

e) Leiten Sie Luisas Term zur Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit her.

Begründen Sie ohne Rechnung, dass Linus‘ Term ebenfalls korrekt ist.

Schon seit dem Jahr 2015 ergreift die Schulleitung verstärkt Maßnahmen, um den Anteil an Raucherinnen und Rauchern unter den Schülerinnen und Schülern zu senken. Nun möchte sich die Schulleitung von den Zusammenhängen zwischen der Kenntnis dieser Maßnahmen und der Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Schüler oder eine Schülerin raucht, ein Bild machen. Zu diesem Zweck wurden alle 500 Schülerinnen und Schüler der Schule dazu befragt, ob sie die Maßnahmen der Schulleitung kennen (Ereignis M) und ob sie rauchen (Ereignis R) oder nicht. Dabei gaben insgesamt 400 Befragte an, dass sie die Maßnahmen kennen. Von diesen rauchen 90 % nicht.

Die Auswertung der Befragung soll mithilfe der Vierfeldertafel in Abbildung 2.3 dokumentiert werden.

	R	$\overline{R}$	Σ
M			
$\overline{M}$			
Σ		410	500

Abbildung 2.3

f) Vervollständigen Sie die Vierfeldertafel in Abbildung 2.3.

Erläutern Sie die Bedeutung des Terms $\frac{P(M \cap \overline{R})}{P(\overline{R})}$ im Sachzusammenhang und

geben Sie den Wert des Terms näherungsweise an.

Anlage:[1]

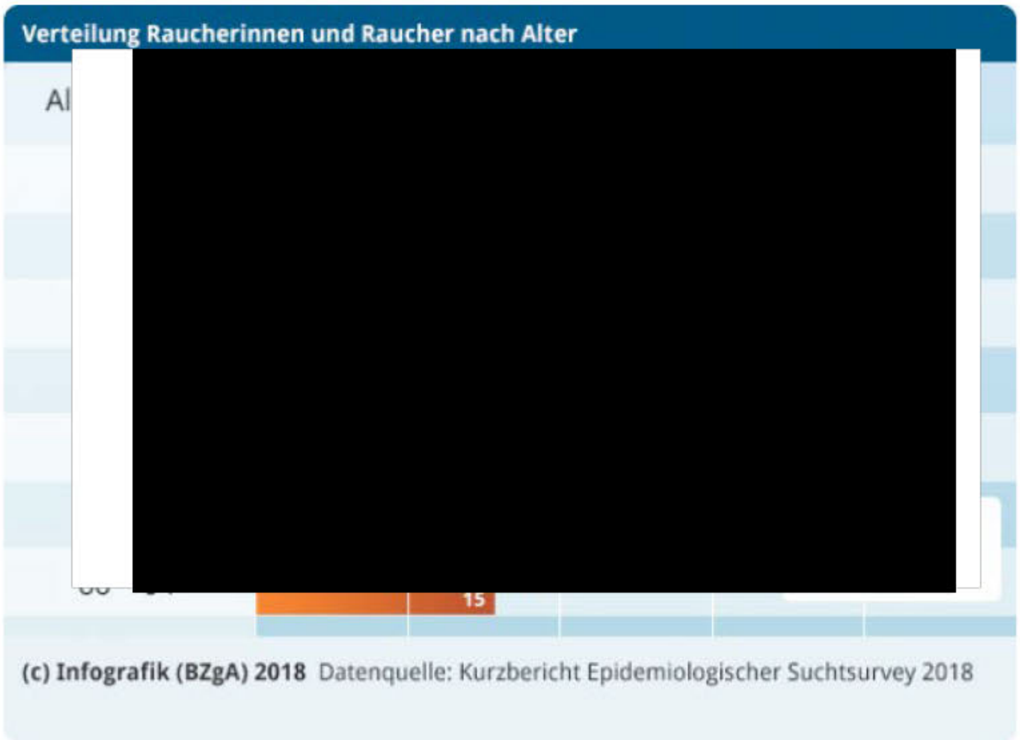


Abbildung 2.1

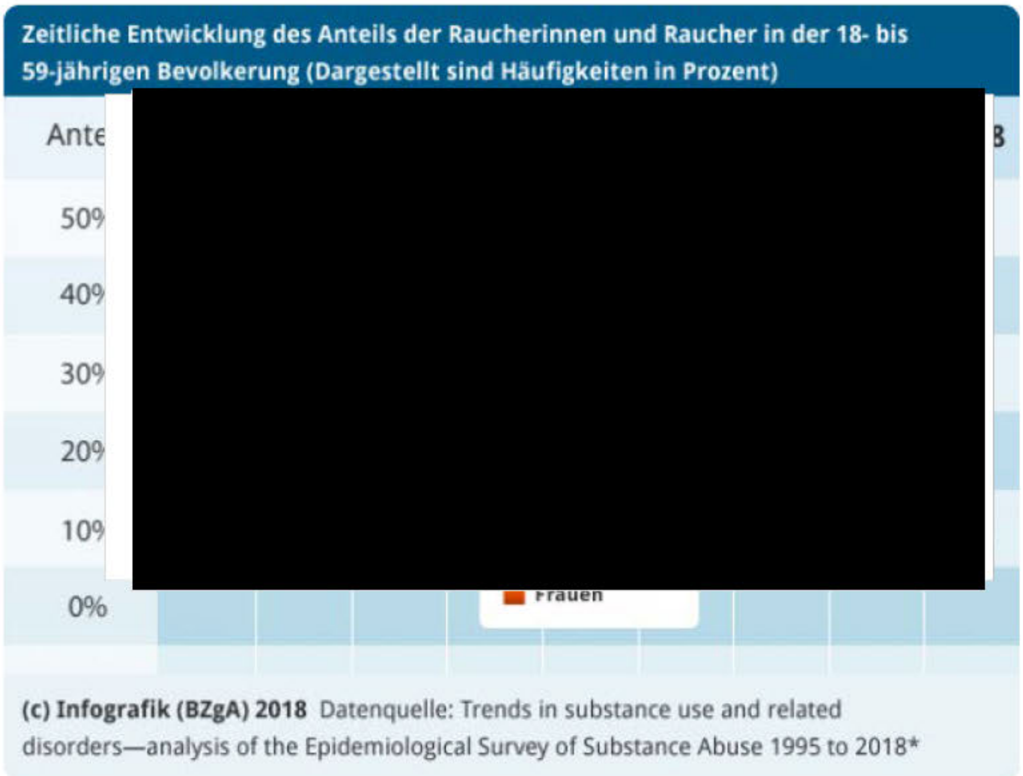


Abbildung 2.2

[1] **Quelle der Grafiken**: Bundeszentrale für gesundheitliche Aufklärung. Unter: www.rauchfrei-info.de/informieren/verbreitung-des-rauchens/raucherquote-bei-erwachsenen/ (Stand: 25.07.2020)

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 3:** Lungenfunktionsdiagnostik

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	gesamt
Erreichbar	6	6	2	3	4	5	4	30
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Durch die Corona-Pandemie gelangten unter anderem auch chronische Atemwegserkrankungen ins Zentrum der Medienberichterstattung, da Menschen mit diesen Erkrankungen zur Risikogruppe gehören. Bei Untersuchungen der Angehörigen der Risikogruppe wird häufig eine Lungenfunktionsanalyse zur Findung der Diagnose durchgeführt.

Bei der Lungenfunktionsanalyse wird das Atemvolumen des Patienten während eines normalen und eines besonders tiefen Atemzuges untersucht (vgl. Abbildung 3.1). Bei der tiefen Atmung werden die Reservevolumina in der Lunge mobilisiert.

Ein Facharzt, der einen Patienten der Risikogruppe untersucht, erhält als Ergebnis einer 13-sekündigen Lungenfunktionsanalyse den in Abbildung 3.1 dargestellten Verlauf des Atemvorgangs.

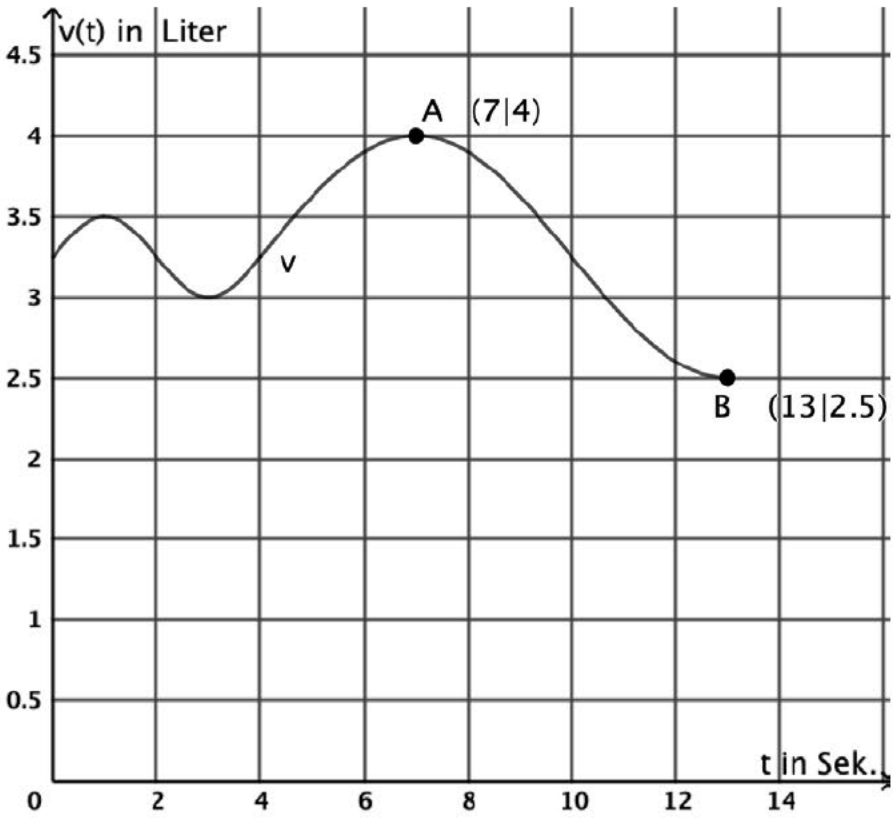


Abbildung 3.1

a) Beschreiben Sie die Grafik in der Abbildung 3.1 anhand dreier Aspekte im Sachzusammenhang.

Der dargestellte Atemvorgang kann durch die Funktion v mit der Gleichung

$$v(t) = \begin{cases} v_1(t), & 0 \leq t \leq 3 \\ v_2(t), & 3 < t \leq 13 \end{cases}$$

beschrieben werden. Hierbei gibt t die Zeit in Sekunden und v(t) das momentane Lungenvolumen in Litern an. Der Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dem Beginn der Analyse.

Bei der Funktion v_1 handelt es sich um die trigonometrische Funktion

$$v_1(t) = 0{,}25 \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) + 3{,}25$$

b) Leiten Sie die Zahlenwerte der Funktion v_1 her.

Weisen Sie rechnerisch nach, dass das lokale Maximum von v_1 bei $M(1|3{,}5)$ liegt und

begründen Sie, warum M nicht das globale Maximum von v ist.

Ein mathematisch interessierter Praktikant des Facharztes bemerkt, dass die Funktion v_1 alternativ auch kürzer in der Form $v_1(t) = a \cdot \sin(b \cdot t) + d$ dargestellt werden kann.

c) Geben Sie eine alternative Gleichung für v_1 in der Form $v_1(t) = a \cdot \sin(b \cdot t) + d$ an.

Er vermutet weiter, dass für alle trigonometrischen Funktionen f, g und deren Ableitungen f', g' für alle $x \in \mathbb{R}$ die folgende Aussage gilt:

$$f'(x) = g'(x) \Longrightarrow f(x) = g(x)$$

d) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass diese Aussage nicht gilt.

Der Facharzt entdeckt in den Notizen seines Praktikanten die folgende Ungleichung:

$$\int_0^3 v_1'(t)\, dt < 0$$

e) Bestimmen Sie den Wert des Integrals und

erläutern Sie die Ungleichung im Sachzusammenhang.

Der Praktikant des Facharztes betrachtet den Graphen der Funktion v und behauptet, dass der Abschnitt v_2 durch eine ganzrationale Funktion modelliert werden kann.

f) Erläutern Sie, dass ein ganzrationaler Ansatz für v_2 mindestens vom Grad 5 sein muss und

geben Sie die Bedingungsgleichungen für die Funktion v_2 an, mit deren Hilfe die Funktionsgleichung ermittelt werden kann.

In einem Fachmagazin findet der Arzt einen Artikel zum Thema Lungenfunktionsanalyse. Diesem entnimmt er, dass sich die tiefe Ausatmung der erwachsenen Patienten mit der Funktion a der Form

$$a(t) = \frac{3}{4} \cdot \sin\left(\frac{1}{6}\pi \cdot (t + 7) - \frac{2}{3}\pi\right) + \frac{13}{4} \text{ mit } 0 \leq t \leq 6$$

beschreiben lässt. Dabei gibt t die Zeit in Sekunden seit Beginn des Ausatemvorgangs und a das momentane Lungenvolumen in Litern an.

g) Berechnen Sie den Zeitpunkt t der maximalen Ausatmungsgeschwindigkeit und

geben Sie die maximale Ausatmungsgeschwindigkeit in der Einheit Liter pro Sekunde $\left[\frac{l}{s}\right]$ an.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 3: Wasserkraft**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	gesamt
Erreichbar	6	6	4	6	4	4	30
Erstkorrektur							
Zweitkorrektur							

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter:
$a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Wasserkraft ist eine der ältesten erneuerbaren Energien. Die Nutzung der Wasserkraft in Form von Wasserrädern geht bis in die Antike zurück. Heute gilt die Wasserkraft weltweit als die Nummer eins bei der Erzeugung von elektrischer Energie aus ressourcenschonenden, erneuerbaren Energien.

In Deutschland werden vor allem Laufwasserkraftwerke betrieben. Laufwasserkraftwerke wandeln die kinetische Energie von Flüssen in elektrische Energie um. Die meisten Wasserkraftwerke sind in den abfluss- und gefällereichen Regionen der Mittelgebirge, Voralpen und Alpen zu finden.

Die nachfolgende Grafik (Abbildung 3.1) zeigt den Wasserfluss $w(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t in Monaten in der Einheit Kubikmeter pro Sekunde $\left[\frac{m^3}{s}\right]$ eines Laufwasserkraftwerkes am Rhein im Jahr 2019. Der Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dem 01. Januar 2019.

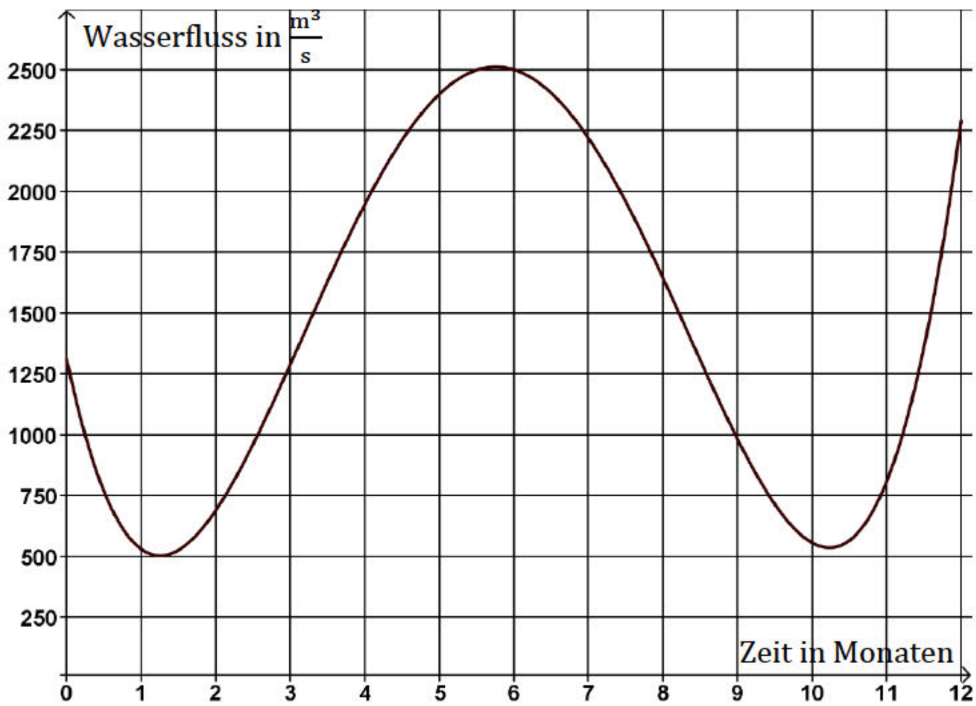


Abbildung 3.1

a) Beschreiben Sie die Grafik in der Abbildung 3.1 anhand dreier Aspekte im Sachzusammenhang.

Nach der Meinung des leitenden Ingenieurs beschreibt die ganzrationale Funktion w mit der Gleichung

$$w(t) = 4{,}9t^4 - 112{,}68t^3 + 774t^2 - 1\,447{,}5t + 1\,310 \qquad \text{für } 0 \leq t \leq 12$$

näherungsweise den in der Abbildung 3.1 dargestellten Graphen.

b) Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt t die Zunahme des Wasserflusses nach diesem Modell am größten war und

geben Sie das zugehörige Datum und die Höhe der Zunahme an.

Die Turbinen können einen Wasserfluss bis zu 750 $\frac{m^3}{s}$ aufnehmen. Dann sind sie voll ausgelastet. Die darüber hinaus gehende Wassermenge kann für die Energiegewinnung nicht mehr genutzt werden. Ein Laufwasserkraftwerk gilt als effizient, wenn die Turbinen für mindestens 70 % des Jahres voll ausgelastet sind.
Die in Abbildung 3.1 dargestellte jahreszeitlich bedingte Schwankung des Wasserflusses kommentiert ein Auszubildender mit folgender Behauptung:

„Das Laufwasserkraftwerk war 2019 ineffizient. Im Jahr 2019 konnten die Turbinen nicht für die geforderte Zeit ausgelastet werden."

c) Prüfen Sie diese Behauptung.

Der leitende Ingenieur sortiert die vorliegenden Daten zum Wasserfluss in $\frac{m^3}{s}$ im Jahr 2019 der Größe nach und erstellt daraus die folgende Grafik (Abbildung 3.2).

Abbildung 3.2

Seinem Auszubildenden erklärt er, dass diese Grafik die Zeitdauer in Monaten wiedergibt, in der der Wasserfluss in $\frac{m^3}{s}$ im Jahr 2019 mindestens einen bestimmten Wert betragen hat.
Beispielsweise beschreibt der Punkt P(5|1 612), dass für die Zeitdauer von 5 Monaten der Wasserfluss mindestens 1 612 $\frac{m^3}{s}$ betrug.

Der leitende Ingenieur modelliert den Verlauf des Graphen in Abbildung 3.2 durch die folgende abschnittsweise definierte Funktion s mit der Gleichung:

$$s(t) = \begin{cases} s_1(t) & \text{für } 0 \leq t \leq 6 \\ 6\,890 \cdot \left(e^{-\frac{1}{3}\cdot t} - e^{-2{,}124\cdot t}\right) + 374 & \text{für } 6 < t \leq 12 \end{cases}$$

Unter der Annahme, dass in H(0|2 512) ein Hochpunkt vorliegt, kann der erste Abschnitt näherungsweise durch die Funktion s_1 mit der Gleichung

$$s_1(t) = 2{,}5298t^3 - 48{,}6667t^2 + 2\,512$$

beschrieben werden.

d) Begründen Sie im Sachzusammenhang, warum die beiden Abschnitte sprung- und knickfrei ineinander übergehen müssen und

stellen Sie das lineare Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten der Funktionsgleichung $s_1(t)$ näherungsweise ermittelt werden können.

Der leitende Ingenieur ermittelt mithilfe der Abbildung 3.2 für das Jahr 2019 näherungsweise einen durchschnittlichen Wasserfluss von 1 420,87 $\frac{m^3}{s}$ pro Monat. Der Auszubildende hat bei der Überprüfung mit folgendem Term ein Ergebnis von 1 420,52 $\frac{m^3}{s}$ ermittelt:

$$\frac{\square}{\square} \cdot \int_0^{\square} w(t)dt$$

e) Vervollständigen Sie den Term zur Berechnung des durchschnittlichen Wasserflusses für das Jahr 2019.

Erläutern Sie, warum der Wert des Auszubildenden vom Wert des Ingenieurs abweicht.

Aus der Berufsschule weiß der Auszubildende, dass die erneuerbaren Energien laut dem „Energiekonzept 2050" weiter ausgebaut werden sollen. Laut einer Studie ist das bestehende Potenzial von Wasserkraft in Deutschland jedoch nahezu ausgeschöpft. Die höchstmögliche installierbare Wasserkraftleistung wird derzeit auf 6 100 Megawatt [MW] geschätzt.

Im Internet findet der Auszubildende Angaben zur installierten Wasserkraftleistung in Megawatt in Deutschland seit 1990. Diese Werte sind in der Tabelle 3.1 dargestellt:

Jahr	1990	2000	2010	2020
Leistung in MW	3 990		5 400	5 697

Tabelle 3.1

Der Auszubildende modelliert die Entwicklung der installierten Wasserkraftleistung in Abhängigkeit der Zeit durch die Funktion p mit der Gleichung

$$p(t) = 6\,100 - 2\,110 \cdot e^{-0{,}0552 \cdot t} \qquad \text{für } t \geq 0 \text{ und e ist die Eulersche Zahl,}$$

wobei $p(t)$ die installierte Wasserkraftleistung in Megawatt angibt und t die Zeit in Jahren. Der Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dem Jahr 1990.

f) Ergänzen Sie den fehlenden Wert für das Jahr 2000 in der Tabelle 3.1 und berechnen Sie, wie viel Prozent der aktuell höchstmöglichen installierbaren Wasserkraftleistung nach diesem Modell bis zum Jahr 2050 erreicht sein werden.

[redacted]