Aufgabe 1 A mit Analytischer Geometrie:

A1 1a	Anforderungen  Der Prüfling  skizziert den Graphen der Ableitungsfunktion von fin das untere Ko-	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:  Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.  Bemerkung: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	BE 5
	skizziert den Gra- phen der Ablei- tungsfunktion von	Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.  Bemerkung: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	
1a	phen der Ablei- tungsfunktion von	f '(x) f(x)	5
	entscheidet begründet, ob die Aussage wahr oder falsch ist.	Aussage Entscheidung und Begründung  Jeder Graph einer Stammfunktion F von f in Abbildung 1.1  Der Graph von f besitzt zwei Extrempunkte, also	
1b	bestimmt die Steigung von f im Schnittpunkt mit der Ordinatenachse und zeigt, dass der Graph der Funktion f insgesamt eine Fläche von 4 Flächeneinhei-	von f in Abbildung 1.1 besitzt zwei Wendepunkte.  Ber Graph von f besitzt zwei Extrempunkte, also muss jeder Graph einer Stammfunktion F von f zwei Wendepunkte besitzen.  Es gilt: $f'(x) = 1,5 \cdot x^2 - 2$ damit gilt $f'(0) = -2$ Bestimmen der Nullstellen als Integrationsgrenzen: $0 = 0,5 \cdot x^3 - 2 \cdot x$ $\Leftrightarrow 0 = x \cdot (0,5 \cdot x^2 - 2)$ $\Leftrightarrow x = 0 \lor 0,5 \cdot x^2 - 2 = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \lor x = 2 \lor x = -2$	5
	ten (FE) mit der x- Achse einschließt.	Wegen der Punktsymmetrie zum Ursprung genügt es, den Flächeninhalt im II. Quadranten zu betrachten. Dieser ist 2 FE groß. Eine mögliche Stammfunktion ist $F(x)=\frac{1}{8}x^4-x^2$ Fortsetzung nächste Seite	

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu	Amor der ungen	Für den Inhalt der gesuchten Fläche gilt:	
1b		$2 \cdot \int_{-2}^{0} f(x) dx = 4$ $\Leftrightarrow [F(x)]_{-2}^{0} = 2$ $\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{8}(-2)^{4} - (-2)^{2}\right) = 2$ $\Leftrightarrow -(-2) = 2$ $\Leftrightarrow 2 = 2 \text{ wahre Aussage.}$	
1c	bestimmt alle Nullstellen von f im Intervall $0 \le x \le 3$ und	Die Funktion f hat eine Amplitude von 1 und ist um 1 nach oben verschoben. Sie berührt daher die x-Achse in den lokalen Minima. Das erste lokale Minimum besitzt f an der Stelle $x=\frac{1}{2}$ . Durch die Periodendauer $p=1$ befinden sich weitere Nullstellen bei $x=\frac{3}{2}$ und $x=\frac{5}{2}$ .	5
	entscheidet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.	Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).    Im Intervall $0 \le x \le 3$ hat die Funktion h mit der Gleichung $h(x) = 2 \cdot f(x) - 1$ doppelt so viele Nullstellen wie die Funktion f.    Der Graph der Funktion g mit der Gleichung $g(x) = \cos(2\pi \cdot (x-\pi)) + 1$ ist gegenüber dem Graphen der Funktion f $x$ um $\pi$ Einheiten nach rechts verschoben.	
1d	berechnet den Be- trag von ä und	Es gilt: $ \vec{a}  = \left  \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right $ $= \sqrt{16 + 16 + 4}$ $= \sqrt{36}$ $= 6$	5
	zeigt, dass die Vektoren ä und b nicht orthogonal zueinander sind, und	Für zwei orthogonale Vektoren gilt, dass deren Skalarprodukt null ist. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \\ = 4 - 12 - 4 \\ = -12 \neq 0$ Also sind die Vektoren nicht orthogonal zueinander.	
	bestimmt den Wert x so, dass die Vektoren b und c linear abhängig sind.	Die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear abhängig, wenn es reelle Zahlen s und t gibt, so dass $s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{0}$ . Die erste und dritte Komponente zeigen, dass $s = 2$ und $t = 1$ die Bedingung erfüllen. Also gilt: $2 \cdot 3 + 1 \cdot x = 0$ $\iff x = -6$	

	Anforderungen	Modelllösungen	
1e	entscheidet begründet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind und	Aussage Entscheidung und Begründung  Die Aussage ist wahr.  Mit b = 4 kann die Gerade durch A und B dargestellt werden mit $g_{AB}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ und mit $r = 2$ gilt dann: $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OC}$	5
	bestimmt den Pa- rameter b so, dass der Punkt B in der Ebene E liegt.	Durch das Einsetzen der Koordinaten des Punktes B(3   b   -1) in die Ebenengleichung E ergibt sich die Gleichung: $5 \cdot 3 + 3 \cdot b - 5 \cdot (-1) = 5$ $\Leftrightarrow b = -5$ .	
1f	ergänzt in der Abbildung 1.3 den Pyramidenstumpf zu einer Pyramide und	Die Spitze S kann als Schnittpunkt der Geraden g <sub>1</sub> durch B und F sowie g <sub>2</sub> durch D und H ergänzt (und auch berechnet) werden. Durch die Verbindung mit G und E ist die Pyramide komplett.	5
	gibt die Koordina- ten der Spitze S an und	Die Spitze S hat die Koordinaten S(0   0   6). (Die Spitze liegt senkrecht über dem Mittelpunkt von B und D, hat also die Koordinaten S(0   0   h). Die Höhe h lässt sich aus dem Koordinatensystem ablesen oder durch Rechnung bestimmen.)	
	berechnet den Flä- cheninhalt des Quadrats EFGH.	Gesucht ist $\left(\left \overrightarrow{EF}\right \right)^2$ .  Der Wert des Flächeninhalts kann mit Hilfe der Diagonale d berechnet werden. Im Quadrat EFGH gilt nach dem Satz von Pythagoras: $d^2 = \left(\left \overrightarrow{EF}\right \right)^2 + \left(\left \overrightarrow{EH}\right \right)^2$ $= 2 \cdot \left(\left \overrightarrow{EF}\right \right)^2$ Fortsetzung nächste Seite	

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 1f		Mit den Punkten F und H kann die Länge der Diagonale d berechnet werden: $d = \left  \overrightarrow{FH} \right $ $= \sqrt{(-8)^2 + 4^2 + 0^2}$ $= \sqrt{64 + 16}$ $= \sqrt{80}$ Somit ergibt sich für den Flächeninhalt des Quadrats EFGH: $\left(\left  \overrightarrow{EF} \right  \right)^2 = \frac{d^2}{2}$ $= 40 \text{ (Flächeneinheiten)}$	
			30

Aufgabe 2: Miniatur-Autorennen

	Anforderungen	Modelllösungen	
	8	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:	
A2	Der Prüfling	Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
2a	weist nach, dass die Gleichung $x_2 + 2x_3 = 17$ die Ebene durch die drei Punkte A, B und C festlegt.	Die Koordinaten der drei Punkte A, B und C erfüllen die gegebene Gleichung: Punkt A: $0 \cdot (-45) + 1 \cdot 17 + 2 \cdot 0 = 17$ . Punkt B: $0 \cdot (35) + 1 \cdot 17 + 2 \cdot 0 = 17$ . Punkt C: $0 \cdot (10) + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 7 = 17$ . Da die drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen, legen sie eine Ebene fest. Also beschreibt die Gleichung $x_2 + 2x_3 = 17$ die Ebene, die durch die Punkte A, B und C festgelegt wird.	4
2b	zeigt, dass das Trapez ABCD gleichschenklig ist, wenn der Punkt D die Koordinaten D(-20 3 7) hat.	Zu zeigen ist: $\overrightarrow{BA}$ parallel zu $\overrightarrow{CD}$ sowie $ \overrightarrow{BC}  =  \overrightarrow{AD} $ . $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -45 - 35 \\ 17 - 17 \\ 0 - 0 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -20 - 10 \\ 3 - 3 \\ 7 - 7 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} -30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $= \frac{3}{8} \cdot \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Also ist $\overrightarrow{BA}$ parallel zu $\overrightarrow{CD}$ . $ \overrightarrow{BC}  = \sqrt{(10 - 35)^2 + (3 - 17)^2 + (7 - 0)^2}$ $= \sqrt{625 + 196 + 49}$ $ \overrightarrow{AD}  = \sqrt{(-20 - (-45))^2 + (3 - 17)^2 + (7 - 0)^2}$ $=  \overrightarrow{BC} $ Also ist ABCD ein gleichschenkliges Trapez.	5
2c	bestimmt die Ko- ordinaten des Durchstoßpunktes E als Schnittpunkt der Geraden, die den Pfeiler be- schreibt, mit der x <sub>1</sub> -x <sub>2</sub> -Ebene.	Die Koordinaten des Punktes E können als Schnittpunkt einer senkrecht zur schiefen Ebene durch den Punkt C laufenden Gerade mit der $x_1$ - $x_2$ -Ebene berechnet werden: Die $x_1$ - $x_2$ -Ebene kann mit der Gleichung $x_3=0$ dargestellt werden. Die Gerade, die den Pfeiler beschreibt, durch den Normalenvektor der schiefen Ebene mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$ Fortsetzung nächste Seite	5

	۸۲	M-1-1112	
711	Anforderungen	Modelllösungen  Die Bedingung $x_3 = 0$ ist für $r = -3.5$ erfüllt, so dass die Koordina-	
zu 2c		ten des Punktes $E(10 -0.5 0)$ berechnet werden können: $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - 3.5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 10 \\ -0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$	
2d	gibt die Punkte an, an denen sich "Ti- ger" zu den Zeit- punkten t = 1 und t = 2 befindet und berechnet die Zeit	f: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 34 \\ 0 \end{pmatrix}$ für t = 1: (5   51   0), für t = 2: (15   85   0).	5*
	t, die "Tiger" zum Zurücklegen einer Strecke von einem Meter benötigt.	In einer Sekunde wird die Strecke des Betrags des Richtungsvektors zurückgelegt:	
2e	erläutert den Wert 3,0 in der Unglei- chung,	Mit der halben Breite des Miniatur-Autos von 2 cm und dem Radius des Pfostens von 10 mm (= 1 cm) ergibt sich der Wert 3,0.	6*
	begründet das Re- lationszeichen und	Der Abstand zwischen der Fahrbahn, die als Gerade ohne Ausdehnung beschrieben wird, und dem Mittelpunkt des Hindernisses muss dann größer als 3,0 (Zentimeter) sein.	
	untersucht, ob "Tiger" an dem Pfosten im Punkt Pvorbeifahren kann.	Ein möglicher Weg der Untersuchung besteht in der Nutzung der Formel, in die die Koordinaten des Punktes P(4,3   39   0) eingesetzt werden. So wird der Abstand zwischen dem Punkt P und der Geraden f ermittelt: $ \overrightarrow{XP}  = \sqrt{(4,3+5-10t)^2+(39-17-34t)^2}$ $ \overrightarrow{XP}  = \sqrt{(9,3-10t)^2+(22-34t)^2}$ $ \overrightarrow{XP}  = \sqrt{9,3^2-186t+100t^2+22^2-1496t+1156t^2}$ $ \overrightarrow{XP}  = \sqrt{1256t^2-1682t+570,49}$ Der Betrag ist minimal, falls 1256t² – 1682t + 570,49 minimal ist,	
		also für den Wert t, der sich aus der Gleichung 2 512 t – 1 682 = 0 ergibt.  Fortsetzung nächste Seite	

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2e		Daraus folgt $t = \frac{1682}{2512}$ $= \frac{841}{1256}$ Dann ist $ \overrightarrow{XP}  = \sqrt{1256 \cdot \left(\frac{841}{1256}\right)^2 - 1682 \cdot \left(\frac{841}{1256}\right) + 570,49}$ Also: $ \overrightarrow{XP}  \approx 2,71$ [cm] $< 3$ [cm] "Tiger" schafft es nicht, an dem Pfosten im Punkt P vorbei zu fahren.	
2f	leitet den Zusam- menhang zwi- schen den Werten der Parameter s und t her.	Da t die Zeit in Sekunden nach dem Verlassen der Startrampe angibt, kann ein Zusammenhang zwischen s und t über eine zeitliche Einordnung hergestellt werden: Für $s=1$ wird der Mittelpunkt $(-5 17 0)$ der unteren Kante der Startrampe erreicht, also der Punkt, an dem sich "Tiger" zum Zeitpunkt $t=0$ befindet. Für $t=1$ wird der Punkt $(5 51 0)$ erreicht, so dass $s=3$ sein muss. Für $t=2$ ergibt sich $(15 85 0)$ , so dass $s=5$ sein muss. Der Wert des Parameters $s$ ist also immer $s=1$ plus das Doppelte von $s=1$ 0. (Insgesamt ergibt sich der lineare Zusammenhang $s=1$ 0.)	5*
			30

Aufgabe 1 B mit Analytischer Geometrie:

	Anforderungen	Modelllösungen	
A1	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:  Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.  Bemerkung:  Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	BE
1a	skizziert den Graphen der Ableitungsfunktion von f in das untere Koordinatensystem (Abbildung 1.2.) und  entscheidet begründet, ob die Aussage wahr oder falsch ist.	Aussage Entscheidung und Begründung  Jeder Graph einer Stammfunktion F von f in Abbildung 1.1  Der Graph von f besitzt zwei Extrempunkte, also	5
		besitzt zwei muss jeder Graph einer Stammfunktion F von f zwei Wendepunkte besitzen.	
1b	bestimmt die Steigung von f im Schnittpunkt mit der Ordinaten- achse und  zeigt, dass der Graph der Funk- tion f insgesamt eine Fläche von 4 Flächeneinhei- ten (FE) mit der x- Achse einschließt.	Es gilt: $f'(x) = 1,5 \cdot x^2 - 2$ damit gilt $f'(0) = -2$ Bestimmen der Nullstellen als Integrationsgrenzen: $0 = 0,5 \cdot x^3 - 2 \cdot x$ $\Leftrightarrow 0 = x \cdot (0,5 \cdot x^2 - 2)$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee 0,5 \cdot x^2 - 2 = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2$ Wegen der Punktsymmetrie zum Ursprung genügt es, den Flächeninhalt im II. Quadranten zu betrachten. Dieser ist 2 FE groß. Eine mögliche Stammfunktion ist $F(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2$ Fortsetzung nächste Seite	5

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 1b	8	Für den Inhalt der gesuchten Fläche gilt: $2 \cdot \int_{-2}^{0} f(x) dx = 4$ $\Leftrightarrow [F(x)]_{-2}^{0} = 2$ $\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{8}(-2)^{4} - (-2)^{2}\right) = 2$ $\Leftrightarrow -(-2) = 2$ $\Leftrightarrow 2 = 2 \text{ wahre Aussage.}$	
1c	weist rechnerisch nach, dass der Graph von f im Punkt E $\left(-1   -\frac{1}{e}\right)$ eine waagerechte Tangente besitzt und	In einem Punkt mit waagerechter Tangente gilt $f'(x) = 0$ $f'(x) = e^x + x \cdot e^x$ $0 = e^x + x \cdot e^x$ $\Leftrightarrow x = -1$ $f(-1) = -1 \cdot e^{-1} = -\frac{1}{e}$ Also besitzt der Graph der Funktion f im Punkt $E\left(-1   -\frac{1}{e}\right)$ eine waagerechte Tangente.	5
	entscheidet, ob die folgenden Aus- sagen wahr oder falsch sind.	Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).  Der Graph der Funktion f schneidet die Ordinatenachse im Punkt $S(0 1)$ .  Der Graph der Funktion g mit $g(x) = -x \cdot e^x$ entspricht dem an der $x$ -Achse gespiegelten Graphen von f.	
1d	berechnet den Be- trag von ä und	Es gilt: $ \vec{a}  = \left  \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right $ $= \sqrt{16 + 16 + 4}$ $= \sqrt{36}$ $= 6$	5
	zeigt, dass die Vektoren ä und b nicht orthogonal zueinander sind, und	Für zwei orthogonale Vektoren gilt, dass deren Skalarprodukt null ist. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \\ = 4 - 12 - 4 \\ = -12 \neq 0$ Also sind die Vektoren nicht orthogonal zueinander. Fortsetzung nächste Seite	

	Anfondomingon	Modelllägungen	
zu	Anforderungen bestimmt den	Modelllösungen  Die Vektoren b  und c  sind linear abhängig, wenn es reelle Zahlen s	
1d	Wert x so, dass die	und t gibt, so dass $\mathbf{s} \cdot \vec{\mathbf{b}} + \mathbf{t} \cdot \vec{\mathbf{c}} = \vec{0}$ . Die erste und dritte Komponente	
	Vektoren b und c	zeigen, dass $s = 2$ und $t = 1$ die Bedingung erfüllen. Also gilt:	
	linear abhängig sind.	$2 \cdot 3 + 1 \cdot x = 0$	
		$\Leftrightarrow x = -6$	102
1e	entscheidet be- gründet, ob die	Aussage Entscheidung und Begründung	5
	Aussagen wahr	Die Aussage ist wahr.	
	oder falsch sind, und	Mit $b = 4$ kann die Gerade durch A und B dargestellt werden mit	
	unu	12-12 AND 12-12 AND 12-12-12-12-12-12-12-12-12-12-12-12-12-1	
		Für b = 4 liegt der Punkt C auf der Geraden durch A und $g_{AB}$ : $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$	
		und mit $r = 2$ gilt dann:	
		$\begin{pmatrix} -2\\1\\4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 5\\3\\3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\\7\\6 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OC}$	
		(4/ (-5/ (-6/	
	1	Dunch des Einsetzen der Verendinsten des Dunktes D(2 h  1) in	
	bestimmt den Pa- rameter b so, dass	Durch das Einsetzen der Koordinaten des Punktes B(3   b   $-1$ ) in die Ebenengleichung E ergib sich die Gleichung:	
	der Punkt B in der	$5 \cdot 3 + 3 \cdot \mathbf{b} - 5 \cdot (-1) = 5$	
4.6	Ebene E liegt.	$\Leftrightarrow b = -5.$	
1f	ergänzt in der Ab- bildung 1.3 den	Die Spitze S kann als Schnittpunkt der Geraden g <sub>1</sub> durch B und F sowie g <sub>2</sub> durch D und H ergänzt (und auch berechnet) werden.	5
	Pyramidenstumpf	Durch die Verbindung mit G und E ist die Pyramide komplett.	
	zu einer Pyramide und	So	
	SW000004-2000	5	
		4	
		3	
		€-12 1	
		X <sub>2</sub>	
		3	
		B 5 5	
	gibt die Koordina- ten der Spitze S an	Die Spitze S hat die Koordinaten S(0   0   6). (Die Spitze liegt senkrecht über dem Mittelpunkt von B und D, hat	
	und	also die Koordinaten S(0   0   h). Die Höhe h lässt sich aus dem Ko-	
		ordinatensystem ablesen oder durch Rechnung bestimmen.)	
		Fortsetzung nächste Seite	

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 1f	berechnet den Flä- cheninhalt des Quadrats EFGH.	Gesucht ist $\left(\left \overrightarrow{EF}\right \right)^2$ .  Der Wert des Flächeninhalts kann mit Hilfe der Diagonale d berechnet werden. Im Quadrat EFGH gilt nach dem Satz von Pythagoras: $d^2 = \left(\left \overrightarrow{EF}\right \right)^2 + \left(\left \overrightarrow{EH}\right \right)^2 \\ = 2 \cdot \left(\left \overrightarrow{EF}\right \right)^2$ Mit den Punkten F und H kann die Länge der Diagonale d berechnet werden: $d = \left \overrightarrow{FH}\right  \\ = \sqrt{(-8)^2 + 4^2 + 0^2} \\ = \sqrt{64 + 16} \\ = \sqrt{80}$ Somit ergibt sich für den Flächeninhalt des Quadrats EFGH: $\left(\left \overrightarrow{EF}\right \right)^2 = \frac{d^2}{2} \\ = 40 \text{ (Flächeneinheiten)}$	
			30

Aufgabe 2: Miniatur-Autorennen

	Anforderungen	Modelllösungen	
	8	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:	
A2	Der Prüfling	Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
2a	weist nach, dass die Gleichung $x_2 + 2x_3 = 17$ die Ebene durch die drei Punkte A, B und C festlegt.	Die Koordinaten der drei Punkte A, B und C erfüllen die gegebene Gleichung: Punkt A: $0 \cdot (-45) + 1 \cdot 17 + 2 \cdot 0 = 17$ . Punkt B: $0 \cdot (35) + 1 \cdot 17 + 2 \cdot 0 = 17$ . Punkt C: $0 \cdot (10) + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 7 = 17$ . Da die drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen, legen sie eine Ebene fest. Also beschreibt die Gleichung $x_2 + 2x_3 = 17$ die Ebene, die durch die Punkte A, B und C festgelegt wird.	4
2b	zeigt, dass das Trapez ABCD gleichschenklig ist, wenn der Punkt D die Koordinaten D(-20 3 7) hat.	Zu zeigen ist: $\overrightarrow{BA}$ parallel zu $\overrightarrow{CD}$ sowie $ \overrightarrow{BC}  =  \overrightarrow{AD} $ . $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -45 - 35 \\ 17 - 17 \\ 0 - 0 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -20 - 10 \\ 3 - 3 \\ 7 - 7 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} -30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $= \frac{3}{8} \cdot \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Also ist $\overrightarrow{BA}$ parallel zu $\overrightarrow{CD}$ . $ \overrightarrow{BC}  = \sqrt{(10 - 35)^2 + (3 - 17)^2 + (7 - 0)^2}$ $= \sqrt{625 + 196 + 49}$ $ \overrightarrow{AD}  = \sqrt{(-20 - (-45))^2 + (3 - 17)^2 + (7 - 0)^2}$ $=  \overrightarrow{BC} $ Also ist ABCD ein gleichschenkliges Trapez.	5
2c	bestimmt die Ko- ordinaten des Durchstoßpunktes E als Schnittpunkt der Geraden, die den Pfeiler be- schreibt, mit der x <sub>1</sub> -x <sub>2</sub> -Ebene.	Die Koordinaten des Punktes E können als Schnittpunkt einer senkrecht zur schiefen Ebene durch den Punkt C laufenden Gerade mit der $x_1$ - $x_2$ -Ebene berechnet werden: Die $x_1$ - $x_2$ -Ebene kann mit der Gleichung $x_3=0$ dargestellt werden. Die Gerade, die den Pfeiler beschreibt, durch den Normalenvektor der schiefen Ebene mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$ Fortsetzung nächste Seite	5

	۸۲	M-1-111:	
711	Anforderungen	Modelllösungen  Die Bedingung $x_3 = 0$ ist für $r = -3.5$ erfüllt, so dass die Koordina-	
zu 2c		ten des Punktes $E(10 -0.5 0)$ berechnet werden können: $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - 3.5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 10 \\ -0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$	
2d	gibt die Punkte an, an denen sich "Ti- ger" zu den Zeit- punkten t = 1 und t = 2 befindet und berechnet die Zeit	f: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 34 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $t = 1$ : $(5   51   0)$ , für $t = 2$ : $(15   85   0)$ .	5*
	t, die "Tiger" zum Zurücklegen einer Strecke von einem Meter benötigt.	In einer Sekunde wird die Strecke des Betrags des Richtungsvektors zurückgelegt:	
2e	erläutert den Wert 3,0 in der Unglei- chung,	Mit der halben Breite des Miniatur-Autos von 2 cm und dem Radius des Pfostens von 10 mm (= 1 cm) ergibt sich der Wert 3,0.	6*
	begründet das Re- lationszeichen und	Der Abstand zwischen der Fahrbahn, die als Gerade ohne Ausdehnung beschrieben wird, und dem Mittelpunkt des Hindernisses muss dann größer als 3,0 (Zentimeter) sein.	
	untersucht, ob "Tiger" an dem Pfosten im Punkt Pvorbeifahren kann.	Ein möglicher Weg der Untersuchung besteht in der Nutzung der Formel, in die die Koordinaten des Punktes P(4,3   39   0) eingesetzt werden. So wird der Abstand zwischen dem Punkt P und der Geraden f ermittelt: $ \overrightarrow{XP}  = \sqrt{(4,3+5-10t)^2+(39-17-34t)^2}$ $ \overrightarrow{XP}  = \sqrt{(9,3-10t)^2+(22-34t)^2}$ $ \overrightarrow{XP}  = \sqrt{9,3^2-186t+100t^2+22^2-1496t+1156t^2}$ $ \overrightarrow{XP}  = \sqrt{1256t^2-1682t+570,49}$ Der Betrag ist minimal, falls $1256t^2-1682t+570,49$ minimal ist,	
		also für den Wert t, der sich aus der Gleichung 2512t-1682 = 0 ergibt.	
		Fortsetzung nächste Seite	

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2e		Daraus folgt $t = \frac{1 \ 682}{2 \ 512}$ $= \frac{841}{1 \ 256}$ Dann ist $\left  \overrightarrow{XP} \right  = \sqrt{1256 \cdot \left( \frac{841}{1 \ 256} \right)^2 - 1 \ 682 \cdot \left( \frac{841}{1 \ 256} \right) + 570,49}$ Also: $\left  \overrightarrow{XP} \right  \approx 2,71 \ [\text{cm}] < 3 \ [\text{cm}]$ "Tiger" schafft es nicht, an dem Pfosten im Punkt P vorbei zu fahren.	
2f	leitet den Zusam- menhang zwi- schen den Werten der Parameter s und t her.	Da t die Zeit in Sekunden nach dem Verlassen der Startrampe angibt, kann ein Zusammenhang zwischen s und t über eine zeitliche Einordnung hergestellt werden: Für $s=1$ wird der Mittelpunkt $(-5 \ 17 \ 0)$ der unteren Kante der Startrampe erreicht, also der Punkt, an dem sich "Tiger" zum Zeitpunkt $t=0$ befindet. Für $t=1$ wird der Punkt $(5 \ 51 \ 0)$ erreicht, so dass $s=3$ sein muss. Für $t=2$ ergibt sich $(15 \ 85 \ 0)$ , so dass $s=5$ sein muss. Der Wert des Parameters $s$ ist also immer $s=1$ plus das Doppelte von $s=1$ .	5*
			30

Aufgabe 1 A mit Linearer Algebra:

	Anforderungen	Modelllösungen	
A1	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:  Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.  Bemerkung:  Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	BE
1a	skizziert den Gra- phen der Ablei- tungsfunktion von f in das untere Ko- ordinatensystem (Abbildung 1.2.) und  entscheidet be- gründet, ob die Aussage wahr	Aussage Entscheidung und Begründung	5
1b	bestimmt die Steigung im Schnittpunkt mit der Ordinatenachse und	Die Aussage ist wahr.  einer Stammfunktion F von f in Abbildung 1.1 besitzt zwei Wendepunkte.  Der Graph von f besitzt zwei Extrempunkte, also muss jeder Graph einer Stammfunktion F von f zwei Wendepunkte besitzen.  Es gilt: $f'(x) = 1,5 \cdot x^2 - 2$ damit gilt $f'(0) = -2$	5
	zeigt, dass der Graph der Funk- tion f insgesamt eine Fläche von 4 Flächeneinhei- ten (FE) mit der Abszissenachse einschließt.	Bestimmen der Nullstellen als Integrationsgrenzen: $0 = 0.5 \cdot x^3 - 2 \cdot x \\ \Leftrightarrow 0 = x \cdot (0.5 \cdot x^2 - 2) \\ \Leftrightarrow x = 0 \lor 0.5 \cdot x^2 - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \lor x = 2 \lor x = -2$ Wegen der Punktsymmetrie zum Ursprung genügt es, den Flächeninhalt im II. Quadranten zu betrachten. Dieser ist 2 FE groß. Eine mögliche Stammfunktion ist $F(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2$	

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu		Für den Inhalt der gesuchten Fläche gilt:	
1b		$2 \cdot \int_{-2}^{0} f(x) dx = 4$	
		$\Leftrightarrow [F(x)]_{-2}^0 = 2$	
		$\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{8}(-2)^4 - (-2)^2\right) = 2$	
		$\Leftrightarrow$ $-(-2) = 2$	
		$\Leftrightarrow$ 2 = 2 wahre Aussage.	
1c	bestimmt alle Nullstellen von f	Die Funktion f hat eine Amplitude von 1 und ist um 1 nach oben verschoben. Sie berührt daher die x-Achse in den lokalen Minima.	5
	im Intervall $0 \le x \le 3$ und	Das erste lokale Minimum besitzt f an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ .	
		Durch die Periodenlänge p = 1 befinden sich weitere Nullstellen bei $x = \frac{3}{2}$ und $x = \frac{5}{2}$ .	
	entscheidet, ob die	Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	
	folgenden Aussagen wahr	$\begin{array}{l} \text{Im Intervall } 0 \leq x \leq 3 \text{ hat die Funktion h mit der Gleichung} \\ h(x) = 2 \cdot f(x) - 1 \text{ doppelt so viele Nullstellen wie die Funktion f.} \end{array} \qquad x$	
	oder falsch sind.	Der Graph der Funktion g mit der Gleichung $g(x) = \cos(2\pi \cdot (x - \pi)) + 1$ ist gegenüber dem Graphen der Funktion f um $\pi$ Einheiten nach rechts verschoben.	
1d	weist nach, dass für die gegebenen Matrizen $A^T \cdot B^T = (B \cdot A)^T$ gilt und	Es gilt: $A^{T} \cdot B^{T} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \end{pmatrix}$ $= (14  2)^{T}$	5
		$= \left( \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)^{T}$	
	gibt die Werte für	$= (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})^{\mathbf{T}}$	
2	die Parameter a und b so an, dass die Matrix C stochastisch ist.	a = 0 und b = 0,4 (unter der Prämisse: Spaltensumme = 1)	
1e	berechnet die Pa- rameter a und b	Die Multiplikation inverser Matrizen ergibt als Produkt die Einheitsmatrix:	5
	und	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	
		Daraus lassen sich vier Gleichungen erstellen:	
		I $4+3 \cdot a = 1 \Leftrightarrow a = -1$ II $-6+3 \cdot b = 0 \Leftrightarrow b = 2$	
		III $2+2\cdot a=0 \iff a=-1$	
		$IV -3 + 2 \cdot b = 1 \iff b = 2$	
		Fortsetzung nächste Seite	

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 1e	begründet, von welchem Typ die Matrix X sein muss und	Damit die Matrix X mit der Matrix A, die vom Typ 2 × 2 ist, multipliziert werden kann, muss die Matrix X als zweiter Faktor zwei Zeilen besitzen. Das Produkt besitzt nur eine Spalte, somit muss die Matrix X als zweiter Faktor nur eine Spalte besitzen. Die Matrix X ist somit vom Typ 2 × 1 bzw. ist ein Spaltenvektor mit 2 Zeilen. Somit gilt:	
	bestimmt die Matrix X.	Es ergeben sich zwei Gleichungen: $\begin{array}{l} \text{I } 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 35 \\ \text{II } x_1 + 2 \cdot x_2 = 20 \\ \end{array}$ Die Lösung des linearen Gleichungssystems ergibt: $\begin{array}{l} x_1 = 10 & \text{und} & x_2 = 5 \\ \text{Also gilt } X = {10 \choose 5} \end{array}$	
1f	gibt die Übergangsmatrix M an und  entscheidet begründet, welches der Diagramme in Abbildung 1.4 die Anzahl der Objekte im Zustand A in Abhängigkeit von der Anzahl der Übergänge n korrekt widerspiegelt.	$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ 0 & 0,8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{A}{B} \stackrel{C}{C}$ Durch Berechnen der Übergänge kann die Entscheidung getroffen werden: $\begin{pmatrix} 0 & 0,8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow n = 1 \text{: } 0 \text{ Objekte in Zustand A}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0,8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} \Rightarrow n = 2 \text{: } 80 \text{ Objekte in Zustand A}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0,8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} \Rightarrow n = 3 \text{: } 0 \text{ Objekte in Zustand A}$ Das Diagramm 2 spiegelt den Zusammenhang korrekt wider.	5
			30

Aufgabe 2: (Lineare Algebra) Digitale Spiele

	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
2a	erläutert die Matrizenelemente a <sub>13</sub> , a <sub>43</sub> und a <sub>44</sub> im Sachzusammenhang und vergleicht diese Werte mit denen aus dem Übergangsgraphen.	$a_{13}=2\ 000$ Eine Jungkröte legt durchschnittlich 2 000 Eier pro Periode (6 Monate) sowohl in Australien als auch in Südamerika. $a_{43}=0.04$ Die Wahrscheinlichkeit der Jungkröte in die Entwicklungsstufe der adulten Kröte zu gelangen, beträgt in Australien 4 % und ist in Südamerika mit 0,5 % sehr viel geringer. (Die Entwicklungsstufe adulte Kröte wird nach einer Periode erreicht). $a_{44}=0.6$ Auch die erwachsenen Kröten haben in Australien mit 60 % eine höhere Überlebenswahrscheinlichkeit als in Südamerika, dort beträgt diese 50 %.	6
2b			4

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2b		≈ \begin{pmatrix} 188 530 052 \\ 6 645 950 \\ 87 903 \\ 5 112 \end{pmatrix}  Nach 10 Jahren gibt es ca. 5 112 adulte Kröten und 87 903 Jungkröten.	
2c	ermittelt die Anzahl der Jungkröten und der adulten Kröten zum September 2020.	Mit der inversen Matrix kann der Bestand der Vorperiode $\vec{v}_{S20}$ bestimmt werden: $\vec{v}_{S20} = A^{-1} \cdot \vec{v}_{M21}$ $\vec{v}_{S20} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 000 & 10 & 000 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,04 & 0,6 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 200 & 000 \\ 100 & 000 \\ 900 \\ 68 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 2 & 000 & 000 \\ 30 & 000 \\ 800 \\ 60 \end{pmatrix}$ Im September 2020 gab es 800 Jungkröten und 60 adulte Kröten.	3
2d	begründet, warum für die Entwicklung der Aga-Kröten nach dem Aufstellen der Krötenzäune und dem Einsammeln der Kröten die Populationsmatrix Aneu gilt und ermittelt, wie viele Eier eine adulte Kröte noch legt und	Junggkröten legten vor dieser Maßname 2 000 Eier, 5 % davon sind 100 Eier. Der Parameter k steht für die Anzahl der Eier, die eine adulte Kröte nach dieser Maßnahme durchschnittlich legt.  Da die Übergangswahrscheinlichkeiten für die Entwicklung der Eier in Kaulquappen und der Kaulquappen in Jungkröten von dieser Maßnahme nicht betroffen sind, werden diese Werte aus der Populatonsmatrix A übernommen.  Durch das Entnehmen der an den Zäunen eingesammelten Kröten, ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Jungkröte sich zur adulten Kröte weiterentwickelt, um 50 % gesunken und somit mit 0,02 nur noch halb so groß wie in Matrix A. Bei den adulten Kröten sinkt die Überlebenswahrscheinlichkeit – bzw. die Wahrscheinlichkeit auch in der nächsten Periode noch Teil des Ökosystems zu sein – auf 50 %, dies entspricht dem Wert 0,5 in der Matrix A <sub>neu</sub> .  Mit der neuen Populationmatrix und den beiden gegebenen Populationsvektoren kann eine Matrizengleichung aufgestellt werden. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & k \\ 0,05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,02 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1500000 \\ 50000 \\ 1000 \\ 360 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000000 \\ 75000 \\ 1500 \\ 200 \end{pmatrix}$ Der Parameter k wird durch die Multiplikation der ersten Zeile der Populationsmatrix mit dem Startvektor berechnet: $1000000 = 100000 + 360 \cdot k$ $\Leftrightarrow 2500 = k$ Eine adulte Kröte legt mit dieser Maßnahme durchschnittlich nur	5*
		noch 2 500 Eier.  Fortsetzung nächste Seite	

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2d	ermittelt, wie viele adulte Kröten gefangen wurden.	Die Überlebenswahrscheinlichkeit von adulten Kröten ist von 60 % auf 50 % gesunken, somit sind 10 % am Zaun eingefangen worden. 10 % von 360 adulten Kröten wurden gefangen, also 36 Stück.	
2e	erläutert die Zah- lenwerte der ers- ten Spalte im Sachzusammen- hang und	72 % der Spieler, die PC-Plattformen nutzen, bleiben der PC-Plattform treu, 20 % wechseln zur Konsolen-Plattform und 8 % zu Mobile-Plattformen.	3
	bestimmt, wie viele Spieler im Jahr 2020 insgesamt von den beiden anderen Plattformen zur Konsole wechselten.	0,2 · 0,5 Mrd. +0,04 · 1,1 Mrd. = 0,144 Mrd. 144 Millionen Spieler wechseln zur Konsole.	
2f	weist rechnerisch nach, warum der Mitschüler Max recht hat und	Aus der Matrix S ist zu entnehmen, dass ein Mobile-Plattform-Nutzer mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,92 im nächsten Jahr wieder die Mobile-Plattform nutzen wird. Somit gilt für 6 Jahre: $0,92^6\approx 0,606$ Dies entspricht der Wahrscheinlichkeit von 60,6 %, die Max genannt hat.	3
	erläutert, den Wert 0,68 aus der Potenzmatrix S <sup>6</sup> im Sachzusam- menhang.	Die 0,68 bzw. 68 % aus der Potenzmatrix, beinhalten neben den Mobile-Plattform-Nutzern, die nie die Plattform wechselten, auch diejenigen Mobile-Spieler, die zwischenzeitlich eine andere Platt- form nutzten und nun im Jahr sechs bei der Mobile-Plattform sind und in diesem Jahr nicht wechseln.	
2g	berechnet mit der Matrix Z die im Jahr 2020 neu hin- zukommenden Spieler und	Durch die linksseitige Multiplikation von Z mit $\vec{a}_{2019}$ ergeben sich die neu hinzukommenden Spieler:	6*
	gibt die (gesamte) Spielerverteilung für das Jahr 2020 an und	Die PC-Plattform nutzen 549 Millionen Spieler, die Konsolen-Plattform nutzen 648 Millionen Spieler und die Mobile-Plattformen nutzen 1 177 Millionen Spieler.  Fortsetzung nächste Seite	

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2g	entscheidet begründet, welcher der vier Lösungsansätze richtig ist.	Beim ersten Lösungsansatz werden durch die Multiplikation S⋅Z die Werte in den Spalten von S jeweils mit 0,01 bzw. 0,02 und 0,05 multipliziert, daher ergeben sich für die weitere Multiplikation mit dem Verteilungsvektor $\vec{a}_{2019}$ geringere Spielerzahlen ((0,0086, 0,013 0,0524) <sup>T</sup> ) als für das Jahr 2019. Der Lösungsansatz 1 ist somit nicht richtig.  Beim zweiten Lösungsansatz werden die Werte in den Zeilen von S mit den Faktoren 1,01 bzw. 1,02 und 1,05 multipliziert, d.h. auch die Elemente der Matrix S, die für die Anteile der "Plattform-Wechsler" stehen, so würden sich z.B. die Anteile der Plattform-wechsler von PC zu Mobile um 5 % erhöhen ( von 0,08 auf 0,084). Durch die weitere Multiplikation mit $\vec{a}_{2019}$ ergeben sich somit für PC- und Mobile-Spieler zu hohe Werte und für Konsole-Spieler einen leicht zu niedrigen Wert ((0,5494 0,6467 1,1781) <sup>T</sup> ). Der Lösungsansatz 2 ist somit nicht richtig.  Der dritte Lösungsansatz kann durch eine Umformung hergeleitet werden:  S⋅ $\vec{a}_{2019}$ gibt die Verteilung der "alten" Spieler im Jahr 2020 an. Die Verteilung "aller" Spieler für 2020 ergibt sich durch Addition: S⋅ $\vec{a}_{2019}$ + Z⋅ $\vec{a}_{2019}$ ⇔ (S + Z) ⋅ $\vec{a}_{2019}$ ⇒ (S + Z) ⋅ $\vec{a}_{2019}$ ⇒ Die Eingabe des Lösungsansatzes 3 in den CAS liefert die Spielerzahlen ((0,549 0,648 1,177) <sup>T</sup> ). Lösungsansatz 3 ist somit richtig.  Der vierte Lösungsansatz beinhaltet eine nicht ausführbare Matrizenmultiplikation. S⋅ $\vec{a}_{2019}$ ergibt einen Spaltenvektor, dieser soll jedoch mit einer Matrix vom Typ 3 × 3 multipliziert werden.	
			30

Aufgabe 1 B mit Linearer Algebra:

	Anforderungen	Modelllösungen	
A1	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:  Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.  Bemerkung:  Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	BE
1a	skizziert den Gra- phen der Ablei- tungsfunktion von f in das untere Ko- ordinatensystem (Abbildung 1.2.) und		5
	entscheidet be- gründet, ob die Aussage wahr oder falsch ist.	Jeder Graph einer Stammfunktion F von f in Abbildung 1.1 besitzt zwei Wendepunkte.  Die Aussage ist wahr. Der Graph von f besitzt zwei Extrempunkte, also muss jeder Graph einer Stammfunktion F von f zwei Wendepunkte besitzen.	
1b	bestimmt die Steigung im Schnittpunkt mit der Ordinatenachse und zeigt, dass der Graph der Funktion f insgesamt eine Fläche von 4 Flächeneinheiten (FE) mit der x-Achse einschließt.	Es gilt: $f'(x) = 1,5 \cdot x^2 - 2$ damit gilt $f'(0) = -2$ Bestimmen der Nullstellen als Integrationsgrenzen: $0 = 0,5 \cdot x^3 - 2 \cdot x$ $\Leftrightarrow 0 = x \cdot (0,5 \cdot x^2 - 2)$ $\Leftrightarrow x = 0 \lor 0,5 \cdot x^2 - 2 = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \lor x = 2 \lor x = -2$ Wegen der Punktsymmetrie zum Ursprung genügt es, den Flächeninhalt im II. Quadranten zu betrachten. Dieser ist 2 FE groß. Eine mögliche Stammfunktion ist $F(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2$	5

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 1b		Für den Inhalt der gesuchten Fläche gilt: $2 \cdot \int_{-2}^{0} f(x) dx = 4$ $\Leftrightarrow [F(x)]_{-2}^{0} = 2$ $\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{8}(-2)^{4} - (-2)^{2}\right) = 2$ $\Leftrightarrow -(-2) = 2$ $\Leftrightarrow 2 = 2 \text{ wahre Aussage.}$	
1c	weist rechnerisch nach, dass der Graph von f im Punkt E $\left(-1 \mid -\frac{1}{e}\right)$ eine waagerechte Tangente besitzt und entscheidet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.	In einem Punkt mit waagerechter Tangente gilt $f'(x) = 0$ $f'(x) = e^x + x \cdot e^x$ $0 = e^x + x \cdot e^x$ $\Leftrightarrow x = -1$ $f(-1) = -1 \cdot e^{-1} = -\frac{1}{e}$ Also besitzt der Graph der Funktion f im Punkt $E\left(-1   -\frac{1}{e}\right)$ eine waagerechte Tangente.  Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).  Der Graph der Funktion f schneidet die Ordinatenachse im Punkt $E\left(-1   -\frac{1}{e}\right)$ Der Graph der Funktion g mit $E\left(-1   -\frac{1}{e}\right)$ Der Graph der Funktion g mit $E\left(-1   -\frac{1}{e}\right)$ Der Graph der Funktion g mit $E\left(-1   -\frac{1}{e}\right)$	5
1d	weist nach, dass für die gegebenen Matrizen $A^T \cdot B^T = (B \cdot A)^T$ gilt und gibt die Werte für die Parameter a und b so an, dass die Matrix C stochastisch ist.	Es gilt: $A^{T} \cdot B^{T} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \end{pmatrix}$ $= (14 & 2)^{T}$ $= \begin{pmatrix} (4 & 2) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}^{T}$ $= (B \cdot A)^{T}$ $a = 0 \text{ und } b = 0,4 \text{ (unter der Prämisse: Spaltensumme} = 1)$ Die Multiplikation inverser Matrizen ergibt als Produkt die Einheitsmatrix:	5
	rameter a und b und	matrix:	

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 1e	begründet, von welchem Typ die Matrix X sein muss und	Damit die Matrix X mit der Matrix A, die vom Typ 2 × 2 ist, multipliziert werden kann, muss die Matrix X als zweiter Faktor zwei Zeilen besitzen. Das Produkt besitzt nur eine Spalte, somit muss die Matrix X als zweiter Faktor nur eine Spalte besitzen. Die Matrix X ist somit vom Typ 2 × 1 bzw. ist ein Spaltenvektor mit 2 Zeilen. Somit gilt:	
	bestimmt die Matrix X.	Es ergeben sich zwei Gleichungen: $\begin{array}{l} \text{I } 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 35 \\ \text{II } x_1 + 2 \cdot x_2 = 20 \\ \end{array}$ Die Lösung des linearen Gleichungssystems ergibt: $\begin{array}{l} x_1 = 10 & \text{und} & x_2 = 5 \\ \text{Also gilt } X = {10 \choose 5} \end{array}$	
1f	gibt die Übergangsmatrix M an und  entscheidet begründet, welches der Diagramme in Abbildung 1.4 die Anzahl der Objekte im Zustand A in Abhängigkeit von der Anzahl der Übergänge n korrekt widerspiegelt.	$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ 0 & 0,8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & C \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & C \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & C \\ 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow n = 1 \text{: } 0 \text{ Objekte in Zustand A}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0,8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} \Rightarrow n = 2 \text{: } 80 \text{ Objekte in Zustand A}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0,8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 80 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} \Rightarrow n = 3 \text{: } 0 \text{ Objekte in Zustand A}$ Das Diagramm 2 spiegelt den Zusammenhang korrekt wider.	5
			30

Aufgabe 2: (Lineare Algebra) Digitale Spiele

	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
2a	erläutert die Matrizenelemente a <sub>13</sub> , a <sub>43</sub> und a <sub>44</sub> im Sachzusammenhang und vergleicht diese Werte mit denen aus dem Übergangsgraphen.	$a_{13}=2\ 000$ Eine Jungkröte legt durchschnittlich 2 000 Eier pro Periode (6 Monate) sowohl in Australien als auch in Südamerika. $a_{43}=0.04$ Die Wahrscheinlichkeit der Jungkröte in die Entwicklungsstufe der adulten Kröte zu gelangen, beträgt in Australien 4 % und ist in Südamerika mit 0,5 % sehr viel geringer. (Die Entwicklungsstufe adulte Kröte wird nach einer Periode erreicht). $a_{44}=0.6$ Auch die erwachsenen Kröten haben in Australien mit 60 % eine höhere Überlebenswahrscheinlichkeit als in Südamerika, dort beträgt diese 50 %.	6
2b	berechnet ausgehend von der ursprünglichen Anfangspopulat- ion $\vec{v}_0$ von zehn adulten Kröten und der Matrix A die Anzahl der Jungkröten und adulten Kröten nach einem und nach 10 Jahren.		4

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2b		≈ \begin{pmatrix} 188 530 052 \\ 6 645 950 \\ 87 903 \\ 5 112 \end{pmatrix}  Nach 10 Jahren gibt es ca. 5 112 adulte Kröten und 87 903 Jungkröten.	
2c	ermittelt die Anzahl der Jungkröten und der adulten Kröten zum September 2020.	$ \begin{array}{l} \text{Mit der inversen Matrix kann der Bestand der Vorperiode $\vec{v}_{S20}$ bestimmt werden:} \\ \vec{v}_{S20} = A^{-1} \cdot \vec{v}_{M21} \\ \vec{v}_{S20} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 000 & 10 & 000 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 03 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,04 & 0,6 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 200 & 000 \\ 100 & 000 \\ 900 \\ 68 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 2 & 000 & 000 \\ 30 & 000 \\ 800 \\ 60 \end{pmatrix} \\ \text{Im September 2020 gab es 800 Jungkröten und 60 adulte Kröten.}  $	3
2d	begründet, warum für die Entwicklung der Aga-Kröten nach dem Aufstellen der Krötenzäune und dem Einsammeln der Kröten die Populationsmatrix A <sub>neu</sub> gilt und	Junggkröten legten vor dieser Maßname 2 000 Eier, 5 % davon sind 100 Eier. Der Parameter k steht für die Anzahl der Eier, die eine adulte Kröte nach dieser Maßnahme durchschnittlich legt. Da die Übergangswahrscheinlichkeiten für die Entwicklung der Eier in Kaulquappen und der Kaulquappen in Jungkröten von dieser Maßnahme nicht betroffen sind, werden diese Werte aus der Populatonsmatrix A übernommen. Durch das Entnehmen der an den Zäunen eingesammelten Kröten, ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Jungkröte sich zur adulten Kröte weiterentwickelt, um 50 % gesunken und somit mit 0,02 nur noch halb so groß wie in Matrix A. Bei den adulten Kröten sinkt die Überlebenswahrscheinlichkeit – bzw. die Wahrscheinlichkeit auch in der nächsten Periode noch Teil des Ökosystems zu sein – auf 50 %, dies entspricht dem Wert 0,5 in der Matrix A <sub>neu</sub> .  Mit der neuen Populationmatrix und den beiden gegebenen Populationsvektoren kann eine Matrizengleichung aufgestellt werden. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & k \\ 0,05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,03 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 500 & 000 \\ 50 & 000 \\ 1 & 000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 000 & 000 \\ 75 & 000 \\ 1 & 500 \\ 200 \end{pmatrix}$ Der Parameter k wird durch die Multiplikation der ersten Zeile der	5*
	ermittelt, wie viele Eier eine adulte Kröte noch legt und	Der Parameter k wird durch die Multiplikation der ersten Zeile der Populationsmatrix mit dem Startvektor berechnet:  1 000 000 = 100 000 + 360 ⋅ k  ⇔ 2 500 = k  Eine adulte Kröte legt mit dieser Maßnahme durchschnittlich nur noch 2 500 Eier.  Fortsetzung nächste Seite	

	A., f	M-1-111:	
zu	Anforderungen ermittelt, wie viele	Modelllösungen  Die Überlebenswahrscheinlichkeit von adulten Kröten ist von 60 %	
2d	adulte Kröten gefangen wurden.	auf 50 % gesunken, somit sind 10 % am Zaun eingefangen worden.  10 % von 360 adulten Kröten wurden gefangen, also 36 Stück.	
2e	erläutert die Zah- lenwerte der ers- ten Spalte im Sachzusammen- hang und	72 % der Spieler, die PC-Plattformen nutzen, bleiben der PC-Plattform treu, 20 % wechseln zur Konsolen-Plattform und 8 % zu Mobile-Plattformen.	3
	bestimmt, wie viele Spieler im Jahr 2020 insgesamt von den beiden anderen Plattformen zur Konsole wechselten.	0,2 · 0,5 Mrd. +0,04 · 1,1 Mrd. = 0,144 Mrd.  144 Millionen Spieler wechseln zur Konsole.	
2f	weist rechnerisch nach, dass der Mit- schüler Max recht hat und	Aus der Matrix S ist zu entnehmen, dass ein Mobile-Plattform-Nutzer mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,92 im nächsten Jahr wieder die Mobile-Plattform nutzen wird. Somit gilt für 6 Jahre: $0,92^6\approx 0,606$ Dies entspricht der Wahrscheinlichkeit von 60,6 %, die Max genannt hat.	3
	erläutert den Wert 0,68 aus der Po- tenzmatrix S <sup>6</sup> im Sachzusammen- hang.	Die 0,68 bzw. 68 % aus der Potenzmatrix, beinhalten neben den Mobile-Plattform-Nutzern, die nie die Plattform wechselten, auch diejenigen Mobile-Spieler, die zwischenzeitlich eine andere Platt- form nutzten und nun im Jahr sechs bei der Mobile-Plattform sind und in diesem Jahr nicht wechseln.	
2g	berechnet mit der Matrix Z die im Jahr 2020 neu hin- zukommenden Spieler und	Durch die linksseitige Multiplikation von Z mit $\vec{a}_{2019}$ ergeben sich die neu hinzukommenden Spieler: $ \vec{Z} \cdot \vec{a}_{2019} = \begin{pmatrix} 0,01 & 0 & 0 \\ 0 & 0,02 & 0 \\ 0 & 0 & 0,05 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,7 \\ 1,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,005 \\ 0,014 \\ 0,055 \end{pmatrix} $ 5 Millionen Spieler gewinnt die PC-Plattform hinzu, 14 Millionen die Konsolen-Plattform und 55 Millionen die Mobile-Plattformen.	6*
	gibt die (gesamte) Spielerverteilung für das Jahr 2020 an und	Die PC-Plattform nutzen 549 Millionen Spieler, die Konsolen-Plattform nutzen 648 Millionen Spieler und die Mobile-Plattformen nutzen 1 177 Millionen Spieler.  Fortsetzung nächste Seite	

	A C 1	M. 1 We	
	Antorderungen	Modelllosungen	
zu 2g	Anforderungen entscheidet be- gründet, welcher der vier Lösungs- ansätze richtig ist.	Beim ersten Lösungsansatz werden durch die Multiplikation S·Z die Werte in den Spalten von S jeweils mit 0,01 bzw. 0,02 und 0,05 multipliziert, daher ergeben sich für die weitere Multiplikation mit dem Verteilungsvektor $\vec{a}_{2019}$ geringere Spielerzahlen ((0,0086, 0,013 0,0524) <sup>T</sup> ) als für das Jahr 2019. Der Lösungsansatz 1 ist somit nicht richtig.  Beim zweiten Lösungsansatz werden die Werte in den Zeilen von S mit den Faktoren 1,01 bzw. 1,02 und 1,05 multipliziert, d.h. auch die Elemente der Matrix S, die für die Anteile der "Plattform-Wechsler" stehen, so würden sich z.B. die Anteile der Plattformwechsler von PC zu Mobile um 5 % erhöhen ( von 0,08 auf 0,084). Durch die weitere Multiplikation mit $\vec{a}_{2019}$ ergeben sich somit für PC- und Mobile-Spieler zu hohe Werte und für Konsole-Spieler einen leicht zu niedrigen Wert ((0,5494 0,6467 1,1781) <sup>T</sup> ). Der Lösungsansatz 2 ist somit nicht richtig.  Der dritte Lösungsansatz kann durch eine Umformung hergeleitet werden:  S· $\vec{a}_{2019}$ gibt die Verteilung der "alten" Spieler im Jahr 2020 an. Z· $\vec{a}_{2019}$ gibt die Verteilung der "neuen" Spieler im Jahr 2020 an. Die Verteilung "aller" Spieler für 2020 ergibt sich durch Addition: S· $\vec{a}_{2019}$ + Z· $\vec{a}_{2019}$ ⇔ (S + Z)· $\vec{a}_{2019}$ Die Eingabe des Lösungsansatzes 3 in den CAS liefert die Spielerzahlen ((0,549 0,648 1,177) <sup>T</sup> ). Lösungsansatz 3 ist somit richtig.	
		Der vierte Lösungsansatz beinhaltet eine nicht ausführbare Matrizenmultiplikation. S $\cdot \vec{a}_{2019}$ ergibt einen Spaltenvektor, dieser soll jedoch mit einer Matrix vom Typ 3 × 3 multipliziert werden.	
			30

Aufgabe 1 A: mit Stochastik

	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:  Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.  Bemerkung:  Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	BE
1a	skizziert den Graphen der Ableitungsfunk- tion von f in das untere Koordi- natensystem (Abbildung 1.2.) und		5
	entscheidet be- gründet, ob die Aussage wahr oder falsch ist.	Jeder Graph einer Stammfunktion F von f in Abbildung 1.1 besitzt zwei Wendepunkte.  Die Aussage ist wahr. Der Graph von f besitzt zwei Extrempunkte, also muss jeder Graph einer Stammfunktion F von f zwei Wendepunkte besitzen.	
1b	bestimmt die Steigung von f im Schnittpunkt mit der Ordinaten- achse und zeigt, dass der Graph der Funktion f insge- samt eine Fläche von 4 Flächen- einheiten (FE) mit der x-Achse	Es gilt: $f'(x) = 1.5 \cdot x^2 - 2$ damit gilt $f'(0) = -2$ Bestimmen der Nullstellen als Integrationsgrenzen: $0 = 0.5 \cdot x^3 - 2 \cdot x$ $\Leftrightarrow 0 = x \cdot (0.5 \cdot x^2 - 2)$ $\Leftrightarrow x = 0 \lor 0.5 \cdot x^2 - 2 = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \lor x = 2 \lor x = -2$ Wegen der Punktsymmetrie zum Ursprung genügt es, den	5
	einschließt.	Flächeninhalt im II. Quadranten zu betrachten. Dieser ist 2 FE groß. Eine mögliche Stammfunktion ist $F(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2$ Fortsetzung nächste Seite	

	Anforderungen	Modelllösungen			
zu		Für den Inhalt der gesuchten Fläche gilt:			
1b		$2 \cdot \int_{-2}^{0} f(x)  \mathrm{d}x = 4$			
		$\Leftrightarrow [F(x)]_{-2}^0 = 2$			
		$\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{8}(-2)^4 - (-2)^2\right) = 2$			
		$\Leftrightarrow$ $-(-2) = 2$			
		$\Leftrightarrow$ 2 = 2 wahre Aussage.			
1c	bestimmt alle Nullstellen von f im Intervall $0 \le x \le 3$ und	Die Funktion f hat eine Amplitude von 1 und ist um 1 r verschoben. Sie berührt daher die x-Achse in den lokal Das erste lokale Minimum besitzt f an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ .	len Mi		5
	V \( \times \( \times \) \( \times \)	Durch die Periodenlänge p = 1 befinden sich weitere I bei $x = \frac{3}{2}$ und $x = \frac{5}{2}$ .	Nullste	ellen	
	entscheidet, ob die	Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).  Im Intervall $0 \le x \le 3$ hat die Funktion h mit der Gleichung	wahr	falsch	
	folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.	$h(x) = 2 \cdot f(x) - 1$ doppelt so viele Nullstellen wie die Funktion f.  Der Graph der Funktion g mit der Gleichung	х		
	\$49 Lindbert 2011 The Children of the Park Children of the Second State Children	$g(x) = \cos(2\pi \cdot (x-\pi)) + 1 \text{ ist gegenüber dem Graphen der Funktion f} \\ \text{um } \pi \text{ Einheiten nach rechts verschoben.}$	Х		
1d	zeichnet in Abbildung 1.3 ei- nen Boxplot, dem die Urliste in Ta- belle 1.1 zugrunde liegt.und	0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5 5.5 6 6.5 7	7.5 8	3	5
	erläutert, wie sich die zweite Daten- reihe in Bezug auf den Median und den (Inter-)Quartils- abstand von der ersten Datenreihe unterscheidet.	Durch die Verdoppelung aller Elemente einer Datenre auch die Quartile mit diesem Faktor skaliert. Also nehmen der Median (Quartil $Q_2$ ) und der Interquartilsabstand ( $Q_3-Q_1$ ) der zweiten Datenreih Doppelte der Werte der ersten Datenreihe an.		erden	

	Anforderungen	Modelllösungen	
1e	bestimmt die Trefferwahr- scheinlichkeit p für die binomialverteilte Zufallsvariable Y,	Da die Zufallsvariable Y binomialverteilt mit der Kettenlänge $n=3$ ist, folgt mit $\mu_Y=n\cdot p=2$ unmittelbar $p=\frac{2}{3}$ .	5
	zeigt, dass für den Erwartungswert der Zufalls- variablen X μ <sub>X</sub> =2 gilt und	Für den Erwartungswert $\mu_X$ gilt: $\mu_X = \sum_{k=0}^3 k \cdot P(X = k)$ $= 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.3$ $= 2$	
	vergleicht die Standardabwei- chung der Zufalls- variablen X mit der Standard- abweichung der Zufallsvariablen Y.	Für die Standardabweichung $\sigma_Y$ gilt: $\sigma_Y = \sqrt{\mu_Y \cdot (1-p)}$ $= \sqrt{2 \cdot \left(1-\frac{2}{3}\right)}$ $= \sqrt{\frac{2}{3}}$ Nach Voraussetzung ist $\sigma_X = \sqrt{\frac{4}{5}}$ . Es folgt $\sigma_X > \sigma_Y$ .	
		Die Standardabweichung der Zufallsvariablen X ist also größer als die Standardabweichung der Zufallsvariablen Y.	
1f	gibt die Wahrscheinlich- keit P(S) an,	Es gilt $P(S) = \frac{2}{10} = 0.2$ .	5
	zeigt, dass $P(R) > (P(G))^{2} \text{ gilt}$ und	Es gilt: P(R) = 0.3 > 0.25 = 0.5 <sup>2</sup> = $(P(G))^2$	
	begründet, dass das Spiel bei einem Einsatz des Spielers von 1 € stochastisch fair ist.	Bei einem Einsatz von 1 € gilt für den Erwartungswert E(X) (den erwarteten Gewinn): $E(X) = -1 \cdot P(R) - 1 \cdot P(G) + 4 \cdot P(S)$ $= -0.3 - 0.5 + 0.8$ $= 0$ Also ist das Spiel stochastisch fair.	30

Aufgabe 2: Tabakkonsum

	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:  Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
2a	beschreibt die Abbildungen 2.1 und 2.2 aus der Anlage anhand von jeweils zwei selbst gewählten Aspekten.	<ul> <li>Abbildung 2.1: Anteil der Raucherinnen und Raucher in verschiedenen Altersgruppen.</li> <li>In allen Altersgruppen ist der Anteil der männlichen Raucher stets größer.</li> <li>Zwischen 21 und 24 Jahren ist der Anteil an Rauchern insgesamt am größten, ab einem Alter von 30 Jahren sinkt dieser Anteil kontinuierlich.</li> <li>Weitere Aspekte möglich.</li> <li>Abbildung 2.2: Zeitliche Entwicklung des Anteils der Raucherinnen und Raucher.</li> <li>Anteil männlicher Raucher ist nach einem Anstieg von 1995</li> </ul>	6
		<ul> <li>bis 1997 insgesamt rückläufig von 42,8 % im Jahr 1995 bzw. 43,4 % im Jahr 1997 auf 24,2 % im Jahr 2018</li> <li>Anteil weiblicher Raucher ist ebenfalls rückläufig. Rückgang setzte aber erst deutlich später ein: von 2003 mit 30,5% auf 18,5 % im Jahr 2018.</li> <li>Rückgang bei männlichen Rauchern deutlich stärker, Anteil männlicher Raucher jedoch noch immer höher Weitere Aspekte möglich.</li> </ul>	
2b	prüft die beiden Behauptungen des Schülers.	Sowohl bei den Rauchern als auch bei den Raucherinnen war von 1995 bis 1997 in der Altersgruppe von 18 bis 59 Jahre ein Zuwachs zu verzeichnen. Die jeweiligen Anteile sind also nicht stetig zurückgegangen. Die erste Behauptung ist somit falsch.  Im Jahre 1995 betrug der Anteil der Raucher 42,8 %, 2015 waren es nur noch 28,1 %. Dies entspricht einem Rückgang von ca. 34,35 %. Die zweite Behauptung ist also wahr.	6
2c	berechnet die gesuchten Wahr- scheinlichkeiten.	(Die Zufallsvariable X mit "X ist die Anzahl der Nichtraucherinnen und Nichtraucher" ist binomialverteilt mit der Kettenlänge n = 350 und der Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,82.) $P(X \ge 290) = 1 - P(X \le 289) \\ = 1 - F_{350;0,82}(289) \\ \approx 0,3690$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 290 Schülerinnen und Schüler nicht rauchen, beträgt also ca. 36,90 %. $P(62 < \overline{X} \le 70) = P(280 \le X \le 287) \\ = F_{350;0,82}(287) - F_{350;0,82}(280) \\ \approx 0,3733$	4

	Anforderungen	Modelllösungen	
2d	begründet, dass die Wahrschein- lichkeitsverteilung von X bei k = 287 ein Maximum an- nimmt.	Für den Erwartungswert $\mu$ der Zufallsvariablen X gilt: $\mu = 350 \cdot 0.82 = 287.$ Da bei ganzzahligem Erwartungswert $\mu$ bei einer Binomialverteilung die maximale Einzelwahrscheinlichkeit $P(X=k)$ stets bei $k=\mu$ vorliegt, ist $P(X=287)$ das Maximum aller Einzelwahrscheinlichkeiten $P(X=k)$ für $0 \le k \le 350$ .	3*
2e	leitet Luisas Term zur Berechnung der gesuchten Wahrscheinlich- keit her und  begründet ohne Rechnung, dass Linus' Term ebenfalls korrekt ist.	Gesucht ist ein Term für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau 300 Schülerinnen und Schüler Nichtraucher sind, also $P(X=300)$ . Für Luisas Term gilt: $P(X=300) = P(X \le 300) - P(X \le 299) \\ = 1 - P(X > 300) - P(X \le 299) \\ = 1 - P(X > 300) - \sum_{k=0}^{299} P(X=k)$ Linus' Term entspricht fast der passenden Formel $P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \text{ mit den Werten} \\ n = 350; \ p = 0.82; \ k = 300 \text{ , nur die Terme } p^k \text{ und } (1-p)^{n-k} \\ \text{sind vertauscht. Da diese jedoch multipliziert werden und die} \\ \text{Reihenfolge somit keine Rolle spielt, ist sein Term korrekt.}$ Somit führt sein Ansatz ebenfalls zur gesuchten Wahrscheinlichkeit.	5*
2f	vervollständigt die Vierfeldertafel in	$\overline{R}$ $\overline{R}$ $\Sigma$	6
	Abbildung 2.3,	M 40 360 400	
		M 50 50 100	
		Σ <b>90</b> 410 500	
	erläutert die Bedeutung des Terms P(M∩R) im Sachzusammen- hang und	Der Term gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass eine Person, von der man weiß, dass sie nicht raucht, die Maßnahmen der Schulleitung kennt. Es handelt sich also um die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_{\overline{R}}$ (M) (alternative Schreibweise $P(M \overline{R})$ ).	
	gibt den Wert des Terms näherungs- weise an.	Es gilt $\frac{P(M \cap \overline{R})}{P(\overline{R})} \approx 0.8780$ .	5
			30

Aufgabe 1 B: mit Stochastik

	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:  Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.  Bemerkung:  Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	BE
1a	skizziert den Graphen der Ableitungsfunk- tion von f in das untere Koordi- natensystem (Abbildung 1.2.) und		5
	entscheidet be- gründet, ob die Aussage wahr oder falsch ist.	Jeder Graph einer Stammfunktion F von f in Abbildung 1.1 besitzt zwei Wendepunkte.  Die Aussage ist wahr. Der Graph von f besitzt zwei Extrempunkte, also muss jeder Graph einer Stammfunktion F von f zwei Wendepunkte besitzen.	
1b	bestimmt die Steigung von f im Schnittpunkt mit der Ordinaten- achse und zeigt, dass der Graph der Funktion f insge- samt eine Fläche von 4 Flächen- einheiten (FE) mit der x-Achse	Es gilt: $f'(x) = 1.5 \cdot x^2 - 2$ damit gilt $f'(0) = -2$ Bestimmen der Nullstellen als Integrationsgrenzen: $0 = 0.5 \cdot x^3 - 2 \cdot x$ $\Leftrightarrow 0 = x \cdot (0.5 \cdot x^2 - 2)$ $\Leftrightarrow x = 0 \lor 0.5 \cdot x^2 - 2 = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \lor x = 2 \lor x = -2$ Wegen der Punktsymmetrie zum Ursprung genügt es, den	5
	einschließt.	Flächeninhalt im II. Quadranten zu betrachten. Dieser ist 2 FE groß. Eine mögliche Stammfunktion ist $F(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2$ Fortsetzung nächste Seite	

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 1b		Für den Inhalt der gesuchten Fläche gilt: $2 \cdot \int_{-2}^{0} f(x) dx = 4$	
		$\Leftrightarrow [F(x)]_{-2}^{0} = 2$	
		$\iff -\left(\frac{1}{8}(-2)^4 - (-2)^2\right) = 2$	
		$\Leftrightarrow -(-2) = 2$ $\Leftrightarrow 2 = 2 \text{ wahre Aussage.}$	
1c	weist rechnerisch nach, dass der Graph von f im Punkt $E\left(-1 -\frac{1}{e}\right)$ eine waagerechte Tangente besitzt	In einen Punkt mit waagerechter Tangente gilt $f'(x) = 0$ $f'(x) = e^{x} + x \cdot e^{x}$ $0 = e^{x} + x \cdot e^{x}$ $\Leftrightarrow x = -1$ $f(-1) = -1 \cdot e^{-1} = -\frac{1}{2}$	5
	und	e	
	entscheidet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.	Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).  Der Graph der Funktion f schneidet die Ordinatenachse im Punkt S(0 1).	
	ouer raisen sina.	Der Graph der Funktion g mit g(x) = $-x \cdot e^x$ entspricht dem an der x-Achse gespiegelten Graphen von f.	
1d	zeichnet in Abbildung 1.3 ei- nen Boxplot, dem die Urliste in Ta- belle 1.1 zugrunde liegt und		5
	erläutert, wie sich die zweite Daten- reihe in Bezug auf den Median und den (Inter-)Quartils- abstand von der ersten Datenreihe unterscheidet.	Durch die Verdoppelung aller Elemente einer Datenreihe werden auch die Quartile mit diesem Faktor skaliert. Also nehmen der Median (Quartil $Q_2$ ) und der Interquartilsabstand ( $Q_3-Q_1$ ) der zweiten Datenreihe das Doppelte der Werte der ersten Datenreihe an.	

	Anforderungen	Modelllösungen	
1e	bestimmt die Trefferwahr- scheinlichkeit p für die binomialverteilte Zufallsvariable Y,	Da die Zufallsvariable Y binomialverteilt mit der Kettenlänge $n=3$ ist, folgt mit $\mu_Y=n\cdot p=2$ unmittelbar $p=\frac{2}{3}$ .	5
	zeigt, dass für den Erwartungswert der Zufalls- variablen X μ <sub>X</sub> =2 gilt und	Für den Erwartungswert $\mu_X$ gilt: $\mu_X = \sum_{k=0}^3 k \cdot P(X = k)$ $= 0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.3$ $= 2$	
	vergleicht die Standardabwei- chung der Zufalls- variablen X mit der Standard- abweichung der Zufallsvariablen Y.	Für die Standardabweichung $\sigma_Y$ gilt: $\sigma_Y = \sqrt{\mu_Y \cdot (1-p)}$ $= \sqrt{2 \cdot \left(1-\frac{2}{3}\right)}$ $= \sqrt{\frac{2}{3}}$ Nach Voraussetzung ist $\sigma_X = \sqrt{\frac{4}{5}}$ . Es folgt $\sigma_X > \sigma_Y$ .	
		Die Standardabweichung der Zufallsvariablen X ist also größer als die Standardabweichung der Zufallsvariablen Y.	
1f	gibt die Wahrscheinlich- keit P(S) an,	Es gilt $P(S) = \frac{2}{10} = 0.2$ .	5
	zeigt, dass $P(R) > (P(G))^{2} \text{ gilt}$ und	Es gilt: P(R) = 0.3 > 0.25 = 0.5 <sup>2</sup> = $(P(G))^2$	
	begründet, dass das Spiel bei einem Einsatz des Spielers von 1 € stochastisch fair ist.	Bei einem Einsatz von 1 € gilt für den Erwartungswert E(X) (den erwarteten Gewinn): $E(X) = -1 \cdot P(R) - 1 \cdot P(G) + 4 \cdot P(S)$ $= -0.3 - 0.5 + 0.8$ $= 0$ Also ist das Spiel stochastisch fair.	30

Aufgabe 2: Tabakkonsum

	Anforderungen	Modelllösungen				
A2	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:  Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.  Bemerkung:  Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.				
2a	2a beschreibt die Abbildung 2.1: Anteil der Raucherinnen und Raucher in verschiedenen Altersgruppen.  In allen Altersgruppen ist der Anteil der männlichen Raustets größer.					
	selbst gewählten Aspekten.	<ul> <li>Zwischen 21 und 24 Jahren ist der Anteil an Rauchern insgesamt am größten, ab einem Alter von 30 Jahren sinkt dieser Anteil kontinuierlich.</li> <li>Weitere Aspekte möglich.</li> </ul>				
		<ul> <li>Abbildung 2.2: Zeitliche Entwicklung des Anteils der Raucherinnen und Raucher.</li> <li>Anteil männlicher Raucher ist nach einem Anstieg von 1995 bis 1997 insgesamt rückläufig von 42,8 % im Jahr 1995 bzw. 43,4 % im Jahr 1997 auf 24,2 % im Jahr 2018</li> <li>Anteil weiblicher Raucher ist ebenfalls rückläufig. Rückgang setzte aber erst deutlich später ein: von 2003 mit 30,5% auf 18,5 % im Jahr 2018.</li> <li>Rückgang bei männlichen Rauchern deutlich stärker, Anteil männlicher Raucher jedoch noch immer höher</li> </ul>				
		Weitere Aspekte möglich.				
2b	prüft die beiden Behauptungen des Schülers.	Sowohl bei den Rauchern als auch bei den Raucherinnen war von 1995 bis 1997 in der Altersgruppe von 18 bis 59 Jahre ein Zuwachs zu verzeichnen. Die jeweiligen Anteile sind also nicht stetig zurückgegangen. Die erste Behauptung ist somit falsch.  Im Jahre 1995 betrug der Anteil der Raucher 42,8 %, 2015 waren es nur noch 28,1 %. Dies entspricht einem Rückgang von ca. 34,35 %. Die zweite Behauptung ist also wahr.	6			
2c	berechnet die gesuchten Wahr- scheinlichkeiten.	(Die Zufallsvariable X mit "X ist die Anzahl der Nichtraucherinnen und Nichtraucher" ist binomialverteilt mit der Kettenlänge n = 350 und der Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,82.) $P(X \ge 290) = 1 - P(X \le 289) \\ = 1 - F_{350;0,82}(289) \\ \approx 0,3690$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 290 Schülerinnen und Schüler nicht rauchen, beträgt also ca. 36,90 %. $P(62 < \overline{X} \le 70) = P(280 \le X \le 287) \\ = F_{350;0,82}(287) - F_{350;0,82}(280) \\ \approx 0,3733$	4			

	Anforderungen	Modelllösungen					
2d	begründet, dass die Wahrschein- lichkeitsverteilung von X bei k = 287 ein Maximum an- nimmt.	Für den Erwartungswert $\mu$ der Zufallsvariablen X gilt: $\mu=350\cdot 0.82=287.$ Da bei ganzzahligem Erwartungswert $\mu$ bei einer Binomialverteilung die maximale Einzelwahrscheinlichkeit $P(X=k)$ stets bei $k=\mu$ vorliegt, ist $P(X=287)$ das Maximum aller Einzelvahrscheinlichkeiten $P(X=k)$ für $0 \le k \le 350.$					
2e	leitet Luisas Term zur Berechnung der gesuchten Wahrscheinlich- keit her und begründet ohne Rechnung, dass Linus' Term ebenfalls korrekt ist.	Gesucht ist ein Term für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau 300 Schülerinnen und Schüler Nichtraucher sind, also $P(X=300)$ . Für Luisas Term gilt: $P(X=300) = P(X \le 300) - P(X \le 299) \\ = 1 - P(X > 300) - P(X \le 299) \\ = 1 - P(X > 300) - \sum_{k=0}^{299} P(X=k)$ Linus' Term entspricht fast der passenden Formel $P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \text{ mit den Werten} \\ n=350; p=0,82; k=300, \text{ nur die Terme } p^k \text{ und } (1-p)^{n-k} \\ \text{sind vertauscht. Da diese jedoch multipliziert werden und die} \\ \text{Reihenfolge somit keine Rolle spielt, ist sein Term korrekt.}$ Somit führt sein Ansatz ebenfalls zur gesuchten Wahrscheinlichkeit.					
2f	vervollständigt die Vierfeldertafel in	$oxed{R} oxed{\overline{R}} oxed{\Sigma}$	6				
	Abbildung 2.3,	M 40 360 400					
		M 50 50 100					
		Σ 90 410 500					
	erläutert die Bedeutung des Terms $\frac{P(M \cap \overline{R})}{P(\overline{R})}$ im Sachzusammen- hang und	Der Term gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass eine Person von der man weiß, dass sie nicht raucht, die Maßnahmen der Schulleitung kennt. Es handelt sich also um die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_{\overline{R}}$ (M) (alternative Schreibweise $P(M \overline{R})$ ).					
9	gibt den Wert des Terms näherungs- weise an.	Es gilt $\frac{P(M \cap \overline{R})}{P(\overline{R})} \approx 0.8780$ .					
			30				

Aufgabe 3: Lungenfunktionsanalyse

	Anforderungen	Modelllösungen	
A3	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
3a	beschreibt die Grafik in der Abbildung 3.1 anhand dreier Aspekte im Sachzusammen- hang.	<ul> <li>Der Patient atmet während der ersten drei Sekunden zunächst normal. Von der dritten bis dreizehnten Sekunde atmet er tief ein und aus.</li> <li>Das Lungenvolumen während der normalen Atmung bewegt sich zwischen 3 und 3,5 Litern.</li> <li>Das Lungenvolumen beim tiefen Atemzug liegt zwischen 2,5 und 4 Litern.</li> <li>Weitere Aspekte sind möglich.</li> </ul>	6
3b	leitet die Zahlenwerte der Funktion v <sub>1</sub> her und  weist rechnerisch nach, dass das lokale Maximum von v <sub>1</sub> bei M(1 3,5) liegt und  begründet, warum M nicht das globale Maximum	Gesucht sind die Werte der Parameter der Cosinus Funktion. $v_1(t) = a \cdot \cos(b \cdot t + c) + d.$ Laut Abbildung 3.1 beträgt das minimale und das maximale Lungenvolumen 3 bzw. 3,5 Liter. $a = 0.5 \cdot (3.5 - 3) = 0.25$ Der Mittelwert des Lungenvolumens beträgt 3,25Liter $d = 0.5 \cdot (3 + 3.5) = 3.25$ Die Periodendauer beträgt vier Sekunden. Daraus ergibt sich die Gleichung $4b = 2\pi \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}\pi.$ Der Graph von $v_1$ ist um eine Viertel Periode $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ auf der Abszisse nach rechts verschoben, d.h. $c = -\frac{\pi}{2}.$ Für ein lokales Maximum an der Stelle t gilt: $v_1'(t) = 0 \land v_1''(t) < 0$ $v_1'(t) = -\frac{1}{8}\pi \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$ Notwendige Bedingung: $v_1''(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \lor t = 3$ $v_1''(t) = -\frac{1}{16}\pi^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$ Hinreichende Bedingung: $v_1''(1) = -\frac{1}{16}\pi^2 < 0 \Rightarrow \text{lokales Maximum}$ $v_1''(3) = \frac{1}{16}\pi^2 > 0 \Rightarrow \text{lokales Minimum}$ $v(1) = 3.5.$ M kann nicht das globale Maximum sein, da die Funktion v an der Stelle $t = 7 \text{ noch einen größeren Funktionswert hat.}$	6
3c	von v ist.  gibt eine alter- native Gleichung für v <sub>1</sub> in der Form v <sub>1</sub> (t) = a · sin(b · t) + d	$v_1(t) = \frac{1}{4} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot t\right) + \frac{13}{4}$	2

	Anforderungen	Modelllösungen	
3d	zeigt anhand eines Gegenbeispiels, dass die Aussage $f'(x) = g'(x) \Rightarrow$ f(x) = g(x) nicht gilt.	Die Aussage kann z. B. mit folgendem Gegenbeispiel widerlegt werden: Setze: $f'(x) = g'(x) = \cos(x)$ Dann sind $f(x) = \sin(x) + 1 \text{ und } g(x) = \sin(x)$ Stammfunktionen von $f'(x)$ und $g'(x)$ . Wähle z. B. $x=0$ . Dann gilt: $f(0) \neq g(0)$ Die Aussage $f'(x) = g'(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist damit widerlegt.	3
3e	bestimmt den Wert des Integrals und erläutert die Ungleichung im Sachzusammen- hang.	$\int\limits_0^3 {{v_1}'(t)} \; dt = \int\limits_0^3 {\left( { - \frac{1}{8}\pi \cdot \sin \left( {\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot t - \frac{\pi }{2}} \right)} \right)} dt$ $= -0.25$ ${v_1}'(t) \; gibt \; die \; Atmungsgeschwindigkeit \; in \; \frac{Liter}{Sekunde}} \; an. \; Somit \; ist$ $\int_0^3 {{v_1}'(t)} \; dt \; die \; ein- \; beziehungsweise \; ausgeatmete \; Luftmenge \; innerhalb \; der \; ersten \; drei \; Sekunden. \; Da \; nur \; eine \; Sekunde \; ein- \; jedoch \; zwei \; Sekunden \; ausgeatmet \; wird, \; ist \; der \; Integralwert \; negativ.$	4
3f	erläutert, dass ein ganzrationaler Ansatz für v <sub>2</sub> mindestens vom Grad 5 sein muss und  gibt die Bedingungsglei- chungen für die Funktion v <sub>2</sub> an, mit deren Hilfe die Funktionsglei- chung ermittelt werden könnte.	<ul> <li>v<sub>2</sub> muss folgende 6 Bedingungen erfüllen:</li> <li>Sprung- und Knickfreiheit im Übergang zu v<sub>1</sub>, d.h. es müssen 2 Bedingungen erfüllt werden: v<sub>1</sub>(3) = v<sub>2</sub>(3) und v<sub>1</sub>'(3) = v<sub>2</sub>'(3).</li> <li>Hochpunkt (7 4), d.h. es müssen 2 Bedingungen erfüllt werden: v<sub>2</sub>(7) = 4 und v<sub>2</sub>'(7) = 0</li> <li>Tiefpunkt in (13 2,5), d.h. es müssen 2 Bedingungen erfüllt werden: v<sub>2</sub>(13) = 2,5 und v<sub>2</sub>'(13) = 0.</li> <li>Aus den 6 Bedingungen können 6 Parameter bestimmt werden. Somit muss ein ganzrationaler Ansatz für v<sub>2</sub> mindestens vom Grad 5 sein.</li> <li>Es ergeben sich folgende Bedingungsgleichungen: v<sub>2</sub>(3) = 3 v<sub>2</sub>'(3) = 0 v<sub>2</sub>(7) = 4 v<sub>2</sub>'(7) = 0 v<sub>2</sub>(13) = 2,5 v<sub>2</sub>'(13) = 0</li> </ul>	5
3g	berechnet den Zeitpunkt t der maximalen Ausatmungsge- schwindigkeit und	Zum Zeitpunkt der maximalen Ausatmungsgeschwindigkeit ist a'(t) minimal. Für diesen Zeitpunkt gilt: $a''(t) = 0 \ \land \ a'''(t) > 0 \\ a''(t) = -\frac{1}{48}\pi^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{6}\pi \cdot (t+7) - \frac{2}{3}\pi\right)$ Notwendige Bedingung: $0 = -\frac{1}{48}\pi^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{6}\pi \cdot (t+7) - \frac{2}{3}\pi\right)$ Fortsetzung nächste Seite	4

nt
) į
30

Aufgabe 3: Wasserkraft

	Anforderungen	Modelllösungen	
А3	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:  Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
3a	beschreibt die Grafik in der Ab- bildung 3.1 an- hand dreier As- pekte im Sachzu- sammenhang.	<ul> <li>Der Wasserfluss beträgt zu Jahresbeginn ca. 1 300 m³, fällt dann bis Anfang Februar auf ein Minimum von ca. 500 m³ ab.</li> <li>Ab Februar steigt der Wasserfluss über ca. 4 Monate bis zum Maximum Ende Juni auf ca. 2 500 m³.</li> <li>Danach nimmt der Wasserfluss über knapp fünf Monate ab, bis er Anfang November wieder ein Minimum von ca. 500 m³ s erreicht.</li> <li>Weitere Aspekte sind möglich.</li> </ul>	6
3b	berechnet, zu welchem Zeitpunkt t die Zunahme des Wasserflusses nach diesem Mo- dell am größten war und	Gesucht ist die Wendestelle mit positiver Steigung. Es gilt: $w'(t) = 19,6t^3 - 338,04t^2 + 1548t - 1447,5$ $w''(t) = 58,8t^2 - 676,08t + 1548$ $w'''(t) = 117,6t - 676,08$ Notwendige Bedingung: $w''(t) = 0$ $0 = 58,8t^2 - 676,08t + 1548$ $\Leftrightarrow t \approx 3,156 \ \lor t \approx 8,342$ Hinreichende Bedingung: $w'''(3,156) \neq 0 \ \land \ w''(3,156) = 0$ $w'''(8,342) \neq 0 \ \land \ w''(8,342) = 0 \ \text{ist erfüllt}$ Berechnung der Steigung: $w''(3,156) \approx 687 \qquad \text{also ist } t \approx 3,156 \ \text{die gesuchte Stelle}$ $w'(8,342) \approx -680$	6
	gibt das zugehö- rige Datum und die Höhe der Zunahme an.	$t=3$ entspricht dem 1. April $30 \cdot 0.156 = 4.68$ Die größte Zunahme liegt mit ca. $687 \frac{\frac{m^3}{s}}{Monat}$ am 5. April 2019 vor.	
3c	prüft die Behauptung.	Gesucht sind die Zeitabschnitte für die gilt: $w(t) \geq 750 \left[\frac{m^3}{s}\right]$ . Lösen von $w(t) = 750$ führt zu: $t \approx 0.5215 \ \lor \ t \approx 2.1293 \ \lor \ t \approx 9.4221 \ \lor \ t \approx 10.923$ Zeitspanne in Monaten berechnen: $12 - (2.1293 - 0.5215) - (10.923 - 9.4221) \approx 8.89$ Das Wasserkraftwerk kann für fast neun Monate (ca. für 74 % des Jahres) vollständig zur Energieerzeugung genutzt werden. Die Behauptung ist also falsch.	4

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
3d	begründet im	Der Graph der Funktion s stellt dieselben Daten zum Wasserfluss	6
3d begründet im Sachzusammen- hang, warum die Abschnitte sprung- und knickfrei ineinander übergehen müssen und  stellt das lineare Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten der Funktionsgleich- ung s <sub>1</sub> (t) näherungsweise ermittelt werden können.		in $\frac{m^3}{s}$ dar wie der Graph der Funktion w, nur in einer anderen Reihenfolge. Die Änderungen des Wasserflusses gehen in der Naturstetig ineinander über. Eine Knickstelle ist somit unrealistisch.	
	knickfrei ineinander übergehen	Der Wert des Wasserflusses in $\frac{m^3}{s}$ kann sich in der Natur auch nicht abrupt ändern. Es können daher ebenso ein sprunghafter Anstieg als auch eine sprunghafte Abnahme des Wasserflusses in diesem Sachzusammenhang ausgeschlossen werden.	
	Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten der Funktionsgleich- ung s <sub>1</sub> (t) näherungsweise ermittelt werden	Die beiden Abschnitte $s_1(t) = 2,5298t^3 - 48,6667t^2 + 2512$ und $s_2(t) = 6890 \cdot \left(e^{-\frac{1}{3}t} - e^{-2,124 \cdot t}\right) + 374$ sollen sprung- und knickfrei ineinander übergehen. Sprungfrei bedeutet, dass die Funktion an der Stelle $t = 6$ stetig ist, also gilt: $s_1(6) = s_2(6) \approx 1306,44$ . Knickfrei bedeutet, dass beide Teilabschnitte an der Stelle $t = 6$ die gleiche Steigung besitzen, also $s_1'(6) = s_2'(6) \approx -310,78$ gilt. Aus den mathematischen Bedingungen: Existenz eines Hochpunktes HP(0 2512) bedeutet: $s_1(0) = 2512$ und $s_1'(0) = 0$ sprungfreier Übergang bedeutet: $s_1(6) = s_2(6) \approx 1306,44$ knickfreier Übergang bedeutet: $s_1'(6) = s_2'(6) \approx -310,78$ Es ergeben sich folgende Gleichungen: I: $2512 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d$ II: $0 = 3 \cdot a \cdot 0^2 + 2 \cdot b \cdot 0 + c$ III: $1306,44 = a \cdot 6^3 + b \cdot 6^2 + c \cdot 6 + d$ IV: $-310,78 = 3 \cdot a \cdot 6^2 + 2 \cdot b \cdot 6 + c$	
3e	vervollständigt den Term zur Be- rechnung des durchschnittlichen Wasserflusses für das Jahr 2019 und	$ \begin{array}{c} \boxed{1} \\ \boxed{12} \end{array} $ $ \int_{0}^{\boxed{12}} w(t)dt $	4
	erläutert, warum der Wert des Aus- zubildenden vom Wert des Ingeni- eurs abweicht.	Die Abweichung lässt sich zum einen über die Modellierung des Sachzusammenhanges mit den unterschiedlichen Funktionstypen erklären. Da es sich bei der Funktion s um eine Modellierung aus den Daten von w handelt, gibt s(t) den Wasserfluss von w(t) nur näherungsweise wieder, was dann zu der ermittelten Abweichung führt.  Zum anderen werden in beiden Modellierungen gerundete Werte für die Koeffizienten verwendet, wodurch eine Abweichung in der Nachkommastelle erklärbar ist.	

	Anforderungen	Modelllösungen					BE
3f	ergänzt den feh- lenden Wert für das Jahr 2000 in der Tabelle 3.1 und	Jahr Leistung in MW	1990 3 990	2000 4 885	2010 5 400	2020 5 697	4
	berechnet, wie viel Prozent der aktuell höchst- möglichen instal- lierbaren Wasser- kraftleistung nach diesem Modell bis 2050 erreicht sein werden.	$p(60) \approx 6.023$ $\frac{6.023}{6.100} \approx 0.987377$ Bis zum Jahr 2050 höchstmöglichen V	können nac				
							30

