Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1:** (hilfsmittelfreier Teil mit analytischer Geometrie)

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	30
Erstkorrektur							
Zweitkorrektur							

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: a, b, c, ... $\in \mathbb{R}$ und die Variablen: x, t, ... $\in \mathbb{R}$.

a) In Abbildung 1.1 sind die Graphen der beiden Funktionen f und g dargestellt.

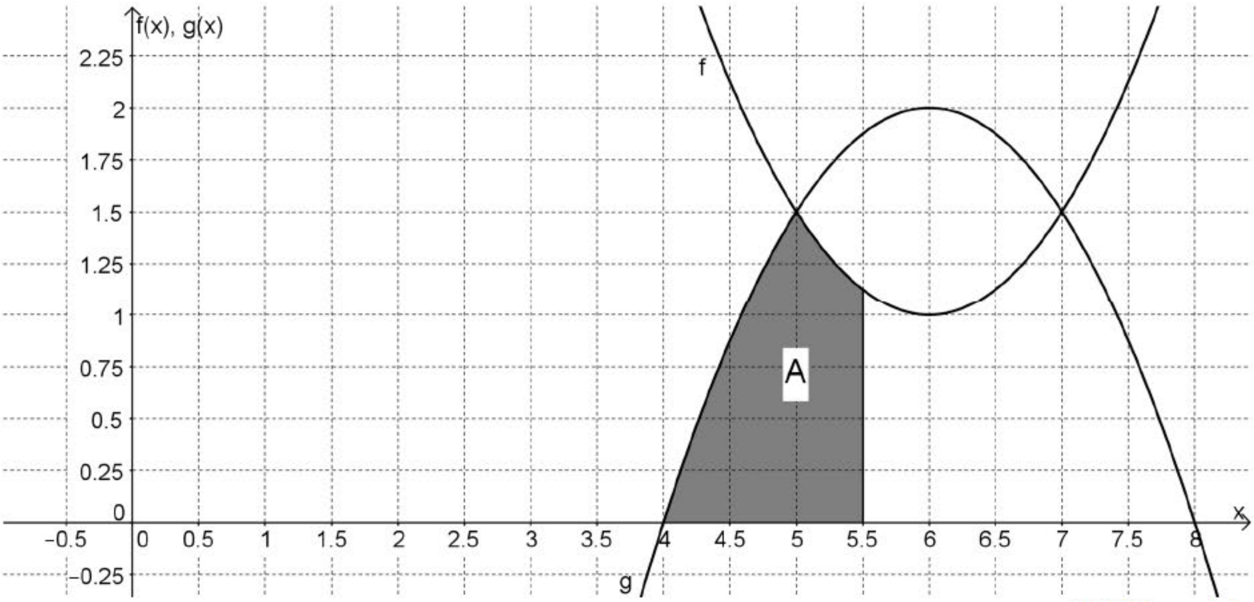


Abbildung 1.1

a1) Geben Sie die bestimmten Integrale der Funktionen f und g an, mit denen der Flächeninhalt der eingefärbten Fläche A berechnet werden kann.

a2) Markieren Sie in Abbildung 1.1 die Fläche, deren Flächeninhalt mit dem Integral

$$\int_6^7 \left(g(x) - f(x)\right)\, dx$$

bestimmt werden kann und

ermitteln Sie näherungsweise den zugehörigen Flächeninhalt.

b)

b1) Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$$

b2) Gegeben ist die modifizierte trigonometrische Funktion f mit der Gleichung:

$$f(x) = 3\sin(2\pi(x+1)) - 2$$

Entscheiden Sie begründet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Der Graph der Funktion f besitzt keine Nullstellen.	
Der Schnittpunkt des Graphen mit der Ordinatenachse ist ein Extrempunkt.	

c) Gegeben sind die Funktion f und ihre Ableitungsfunktion f′ mit

$f(x) = -x^2 e^x$ und $f'(x) = (-2x - x^2) \cdot e^x$ (e ist die Eulersche Zahl)

c1) Berechnen Sie die Stellen des Graphen von f mit waagrechten Tangenten.

c2) Leiten Sie die Gleichung der 2. Ableitung f″ her und vereinfachen Sie den Funktionsterm soweit wie möglich.

d) Gegeben sind die drei Punkte $A(1|\ 4\ |-3)$, $B(-5|\ 8\ |-9)$ und $C(-8|-6|-6)$ sowie die Gerade g_1 mit

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

d1) Prüfen Sie, ob der Punkt $C(-8|-6|-6)$ auf der Geraden g_1 liegt.

Die Gerade $g_{\mathbf{AB}}$ verläuft durch die Punkte A und B. Die Gerade g_1 und die Gerade $g_{\mathbf{AB}}$ spannen die Ebene E_1 auf.

d2) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden $g_{\mathbf{AB}}$ und

geben Sie eine Gleichung der Ebene E_1 an.

e) Gegeben sind die Geraden g_1 bis g_5.

Entscheiden Sie, welche Lagebeziehung das jeweils angegebene Geradenpaar hat.

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).

$$g_1: \vec{x}= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad g_4: \vec{x}= \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + r_4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$g_2: \vec{x}= \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad g_5: \vec{x}= \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + r_5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$g_3: \vec{x}= \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + r_3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

	sind identisch	sind parallel	sind windschief	schneiden sich
g_2 und g_3				
g_3 und g_4				
g_1 und g_2				
g_1 und g_3				
g_4 und g_5				

f) Gegeben sind die Eckpunkte A, B und G des Würfels in Abbildung 1.2 mit $A(1|2|1)$, $B(1|7|1)$, und $G(-4|7|6)$.

f1) Bestimmen Sie das Volumen des Würfels.

f2) Geben Sie die Koordinaten der Punkte C und E an und

zeigen Sie, dass die Vektoren $\overrightarrow{AG}$ und $\overrightarrow{CE}$ nicht rechtwinklig zueinander sind.

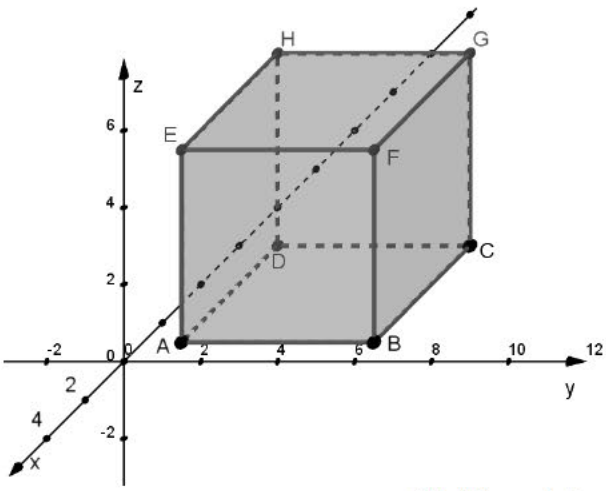


Abbildung 1.2

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 2:** (Analytische Geometrie) **Fehmarnbelt**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	gesamt
Erreichbar	4	7	5	5	3	6	30
Erstkorrektur							
Zweitkorrektur							

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Die feste Fehmarnbeltquerung gilt derzeit als eines der größten europäischen Verkehrsprojekte. Die dänische Insel Lolland und die deutsche Insel Fehmarn sollen dabei mit einem Tunnel verbunden werden.

Der Querschnitt eines Tunnelelementes sowie die Lage eines Tunnelelementes im Meeresgrund sind in Abbildung 2.1 (nicht maßstabsgetreu) dargestellt[1]. Die Tunnelelemente sind parallel zur x-y-Ebene verlegt.

Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.

[redacted]

Abbildung 2.1

Das mit der Planung des Tunnels beauftragte Ingenieurbüro „Schneider" beschäftigt sich mit verschiedenen Aspekten, die bei dem Tunnelbau zu beachten sind. Die Füllungen an den Seiten der Tunnelelemente sind wichtig, um die Standfestigkeit der Tunnelelemente im Meeresgrund zu gewährleisten.

Die Oberseite der **Haltefüllung** (gleichbedeutend mit der Unterseite der **allgemeinen Verfüllung**) wird im dargestellten Querschnitt in Abbildung 2.1 als Teil der Geraden g_1 modelliert mit

$$g_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Begründen Sie innermathematisch und ohne Rechnung, dass die Gerade g_1 parallel zur y-Achse liegt und

geben Sie die Stärke d der Haltefüllung an.

[1] Quelle: Fermen A/S, Französische Straße 55, 10117 Berlin (27.05.2019)

Die **Haltefüllung** sorgt nur für eine ausreichende Stabilität der Tunnelelemente, wenn sie in einer Höhe von zwei Metern eine Mindestbreite von 6,50 m aufweist. Außerdem muss der Punkt R mit R(0|0|8) einen Mindestabstand von neun Metern zur rechten Seitenkante k haben. Die Ingenieure modellieren die Kante k als Teil der Geraden g_2 mit

$$g_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8{,}9 \end{pmatrix}.$$

b) Zeigen Sie, dass die rechte Seitenkante k durch einen Teil der Geraden g_2 modelliert werden kann und

prüfen Sie rechnerisch, ob die Vorgaben zur Mindestbreite und zum Mindestabstand eingehalten werden.

Für weitere Berechnungen muss die rechte Seitenfläche des trapezförmigen Grabens als Teil einer Ebene modelliert werden.

c) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene in Parameter- und in Koordinatenform, in der die rechte Seitenfläche des trapezförmigen Grabens liegt.

Beim Bau der Hinterlandanbindung werden erhebliche Mengen an Bausand benötigt. Im Folgenden soll der in der Abbildung 2.2 vereinfacht dargestellte Sandhaufen modelliert werden.

Die Abmessungen des Sandhaufens werden durch die Punkte $A_S(0|0|20)$, $B_S(15|0|0)$, $C_S(15|30|0)$, $D_S(0|45|0)$, $F_S(-15|0|0)$ und $G_S(0|-15|0)$ beschrieben (siehe Abbildung 2.2).
Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.

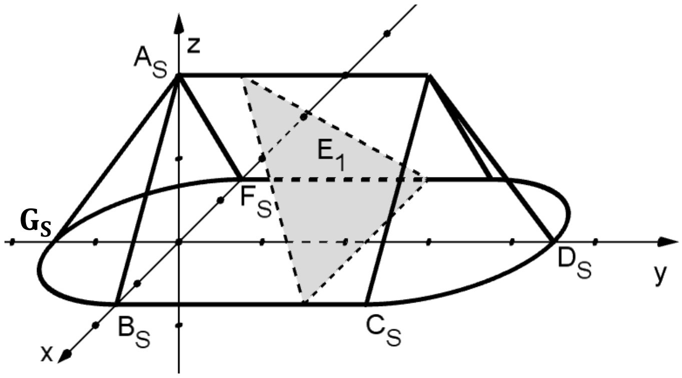


Abbildung 2.2

Ein Ingenieur berechnet das Volumen des Sandhaufens mit folgender Gleichung:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \mathbf{15}^2 \cdot \mathbf{20} + \frac{\mathbf{30} \cdot \mathbf{20}}{2} \cdot \mathbf{30}$$

d) Leiten Sie die fett gedruckten Zahlenwerte her und

geben Sie näherungsweise das Volumen mit Einheit an.

Ein Bagger trägt den Sandhaufen schichtweise vom Punkt D_S aus ab. Nach 15 Arbeitsstunden liegt der neu entstandene Teil der Oberfläche in der Ebene E_1 mit der Gleichung

$$E_1: \quad 2y + \frac{3}{2}z = 45.$$

Neuer Sand muss bestellt werden, wenn 7,5 Meter der Strecke $\overline{C_S B_S}$ abgetragen sind. Einer der Ingenieure vermutet, dass dies nach ca. 15 Arbeitsstunden der Fall ist.

e) Prüfen Sie, ob die Vermutung des Ingenieurs richtig ist.

Einige Gegner der festen Fehmarnbeltquerung stellen als Zeichen des Protestes an diversen Orten in Norddeutschland 90 Zentimeter hohe blaue Kreuze auf.

In Abbildung 2.3 ist ein Balken eines der Kreuze dargestellt. Der zweite Balken (bestehend aus zwei Teilstücken) wird so montiert, dass das Kreuz symmetrisch zur Ebene $y = 40$ ist. Die Teilstücke des zweiten Balkens werden mit dem in Abbildung 2.3 dargestellten Balken verschraubt und durch Metallwinkel, unter anderem im Punkt W, stabilisiert. Die Koordinaten der in Abbildung 2.3 dargestellten Eckpunkte lauten:

$A_K(0\|0\|0)$	$B_K(0\|20\|0)$	$C_K(20\|-20\|0)$	$D_K(-20\|0\|0)$
$E_K(0\|60\|80)$	$F_K(0\|80\|80)$	$G_K(-20\|80\|80)$	$H_K(-20\|60\|80)$

Eine Längeneinheit entspricht einem Zentimeter.

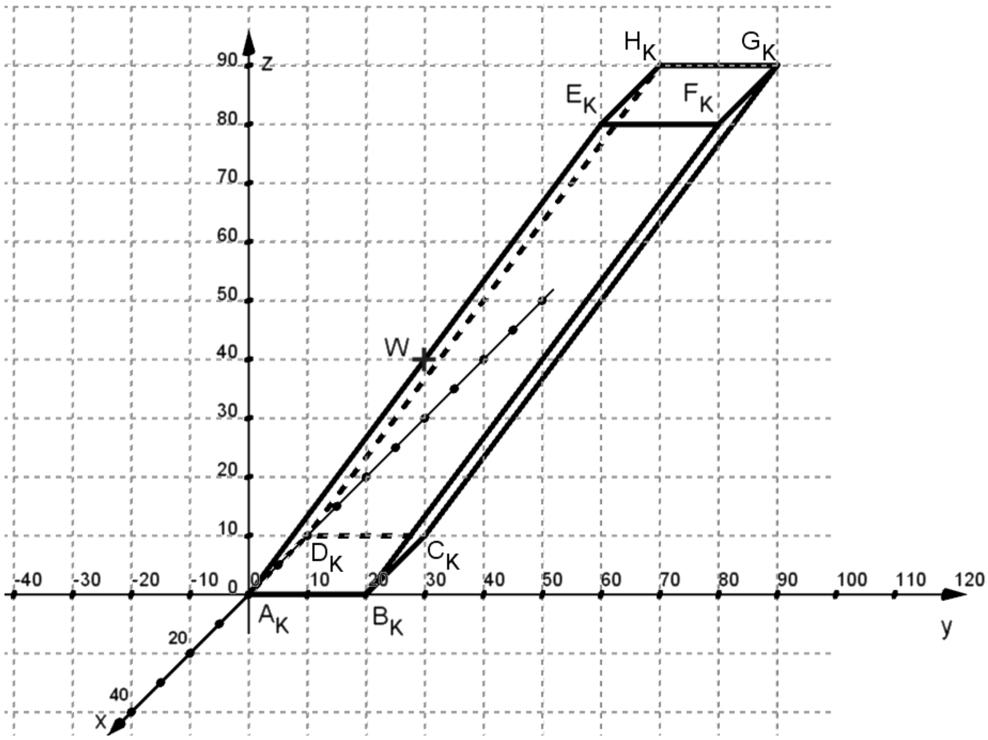


Abbildung 2.3

f) Ergänzen Sie in Abbildung 2.3 die beiden Teilstücke des zweiten Balkens und berechnen Sie den Innenwinkel des Metallwinkels, der im Punkt W zur Stabilisierung angelegt werden muss.

Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1:** (hilfsmittelfreier Teil mit linearer Algebra)

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	30
Erstkorrektur							
Zweitkorrektur							

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \dots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \dots \in \mathbb{R}$.

a) In Abbildung 1.1 sind die Graphen der beiden Funktionen f und g dargestellt.

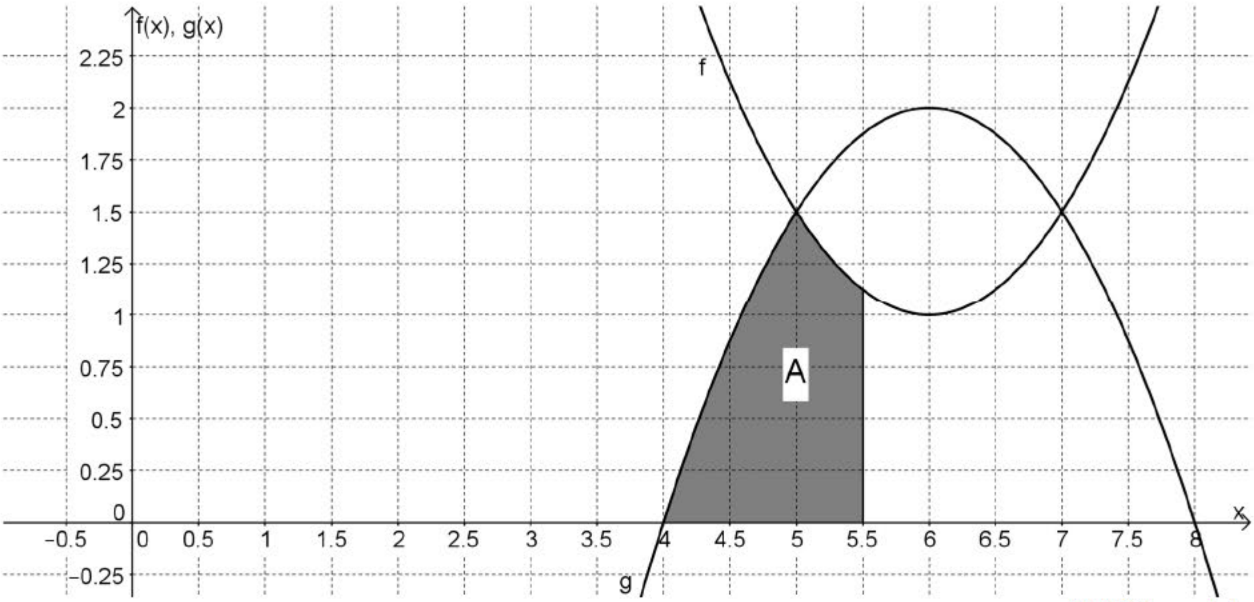


Abbildung 1.1

a1) Geben Sie die bestimmten Integrale der Funktionen f und g an, mit denen der Flächeninhalt der eingefärbten Fläche A berechnet werden kann.

a2) Markieren Sie in Abbildung 1.1 die Fläche, deren Flächeninhalt mit dem Integral

$$\int_6^7 \big(g(x) - f(x)\big)\, dx$$

bestimmt werden kann und

ermitteln Sie näherungsweise den zugehörigen Flächeninhalt.

b)

b1) Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$$

b2) Gegeben ist die modifizierte trigonometrische Funktion f mit der Gleichung:

$$f(x) = 3\sin(2\pi(x+1)) - 2$$

Entscheiden Sie begründet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Der Graph der Funktion f besitzt keine Nullstellen.	
Der Schnittpunkt des Graphen mit der Ordinatenachse ist ein Extrempunkt.	

c) Gegeben sind die Funktion f und ihre Ableitungsfunktion f′ mit

$f(x) = -x^2 e^x$ und $f'(x) = (-2x - x^2) \cdot e^x$ (e ist die Eulersche Zahl)

c1) Berechnen Sie die Stellen des Graphen von f mit waagrechten Tangenten.

c2) Leiten Sie die Gleichung der 2. Ableitung f'' her und vereinfachen Sie den Funktionsterm soweit wie möglich.

d) Gegeben sind zwei erweiterte Koeffizientenmatrizen zu einem linearen Gleichungssystem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & -8 \\ -1 & -2 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & \boxed{} \\ 0 & 0 & \boxed{} & 4 \end{array}\right)$$

d1) Ergänzen Sie die fehlenden zwei Angaben in den Kästchen der unteren Matrix und erläutern Sie, wie die obere Matrix in die untere Matrix überführt werden kann.

d2) Geben Sie die Lösungsmenge des zugehörigen linearen Gleichungssystems an.

e) Gegeben sind die Matrizen M und N mit $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0{,}5 & -2 \end{pmatrix}$ und $N = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0{,}5 & -1{,}5 \end{pmatrix}$.

e1) Zeigen Sie, dass $M^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ die inverse Matrix der Matrix M ist.

e2) Begründen Sie, warum für die Matrix N keine inverse Matrix N^{-1} existiert.

f) Gegeben sind die Matrizen A und B mit $A = \begin{pmatrix} a & b^2 \\ c+1 & -d \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

f1) Bestimmen Sie die Matrixelemente a, b, c und d so, dass

$$2 \cdot A = B$$

gilt.

f2) Lösen Sie die folgende Matrizengleichung nach X auf:

$$M \cdot X + N = P \cdot X$$

Gehen Sie dabei davon aus, dass alle gegebenen und im Verlauf der Rechnung auftretenden Matrizen invertierbar und vom gleichen Typ sind.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 2:** (lineare Algebra) **Parfumherstellung**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	gesamt
Erreichbar	6	5	4	4	5	6	30
Erstkorrektur							
Zweitkorrektur							

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

In der Parfum-Manufaktur „Duftig" werden aus pflanzlichen Rohstoffen sowie destilliertem Wasser und Alkohol verschiedene Sorten Parfum hergestellt. Beispielsweise werden aus den drei pflanzlichen Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die vier Riechstoffe Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4 (Zwischenprodukte) hergestellt und aus diesen Riechstoffen die drei verschiedenen Sorten Parfum (Endprodukte) „Happy Summer" (P_1), „Lovely Spring" (P_2) und „Spicy Ginger" (P_3) gemischt. Das dazugehörige Verflechtungsdiagramm ist in Abbildung 2.1 dargestellt.

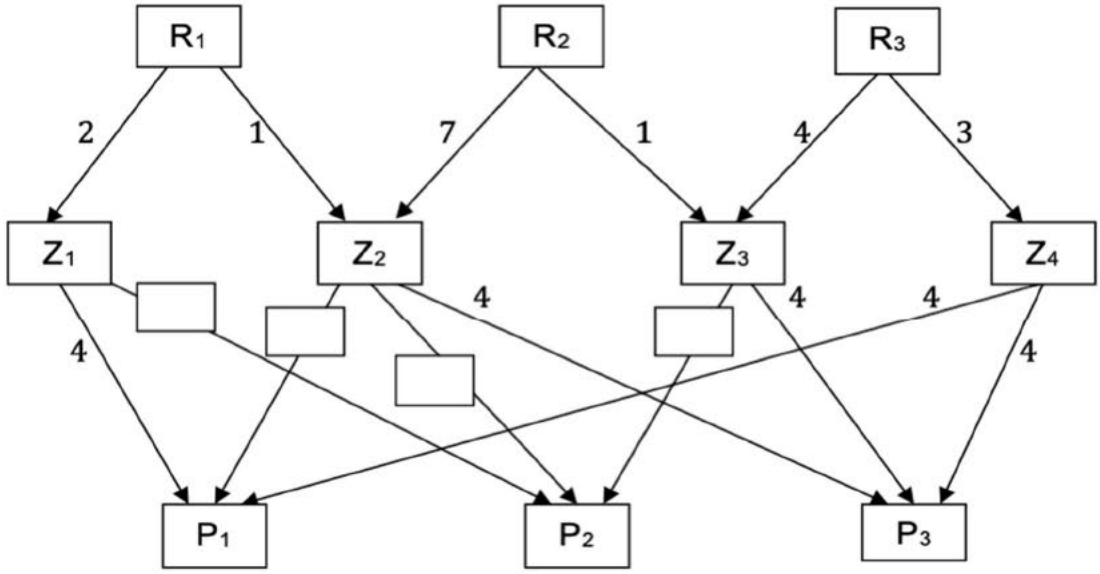


Abbildung 2.1

a) Begründen Sie anhand der zweiten Spalte und mittleren Zeile der Matrix A, dass die Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

den gleichen Materialfluss wie das Verflechtungsdiagramm aus Abbildung 2.1 darstellt.

Ergänzen Sie die fehlenden vier Angaben in den Kästchen im Verflechtungsdiagramm in Abbildung 2.1 mithilfe der Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B mit

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die Parfum-Manufaktur „Duftig“ erhält einen Auftrag von der Parfümerie „Wunderschön“ über die Lieferung ihrer drei Parfumsorten, dabei wird eine Mengeneinheit (ME) Parfum in einem Flakon (Fläschchen) verkauft (siehe Abbildung 2.2).

> **Bestellung**
>
> der Parfümerie „Wunderschön“
> bei der Parfum-Manufaktur „Duftig“:
>
> - 23 Flakons des Parfums „Happy Summer“
> - 24 Flakons des Parfums „Lovely Spring“
> - 17 Flakons des Parfums „Spicy Ginger“
>
> Kiel, den 27.03.2020 gez. L. Schmidt

Abbildung 2.2

b) Leiten Sie das Elements c_{11} der Rohstoff-Endprodukt-Matrix C mit

$$C = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 4 \\ 21 & 30 & 32 \\ 12 & 8 & 28 \end{pmatrix}$$

her.

Ermitteln Sie die Menge der pflanzlichen Rohstoffe R_1, R_2 und R_3, die für den Auftrag der Pafümerie „Wunderschön“ benötigt werden.

Die vier Riechstoffe (Zwischenprodukte) kosten jeweils in der Herstellung (dies beinhaltet die Kosten für Rohstoffe und Fertigungslöhne) 3,00 Euro für eine Mengeneinheit (ME) Z_1, 2,00 EUR für eine ME Z_2, 3,00 EUR für eine ME Z_3 und 4,00 EUR für eine ME Z_4. Die Herstellkosten für je einen Flakon des Parfums „Happy Summer“ betragen 6,00 EUR, für einen Flakon des Parfums „Lovely Spring“ 10,00 EUR und für einen Flakon des Parfums „Spicy Ginger“ 7,00 EUR. Die Fixkosten belaufen sich auf 200,00 EUR.

Die Parfum-Manufaktur „Duftig“ kann die drei Parfumvarianten zu den in der Tabelle 2.1 angegebenen Verkaufspreisen an die Parfümerie „Wunderschön“ absetzen.

Parfum	P_1	P_2	P_3
Verkaufspreis in EUR pro ME (Flakon)	44,00	52,50	47,00

Tabelle 2.1

Für die Kalkulation des Gewinns gelten die Zusammenhänge aus Abbildung 2.3:

> Erlös = Verkaufspreis · (Anzahl der Flakons)
>
> Kosten = (Herstellkosten der Riechstoffe) · (Menge der Riechstoffe)
> + (Herstellkosten der Flakons) · (Anzahl der Flakons) + Fixkosten
>
> Gewinn = Erlös − Kosten

Abbildung 2.3

c) Bestimmen Sie den Gewinn, den die Parfum-Manufaktur „Duftig“ durch den Auftrag der Parfümerie „Wunderschön“ (Abbildung 2.2) erwirtschaftet.

Die pflanzlichen Rohstoffe können verderben und müssen somit vor Ablauf des Haltbarkeitsdatums verarbeitet werden. Aus diesem Grund muss ein Teil des Lagerbestandes an pflanzlichen Rohstoffen zunächst verbraucht werden. Davon betroffen sind 38 ME von Rohstoff R_1, 170 ME von Rohstoff R_2 und 136 ME von Rohstoff R_3.

d) Zeigen Sie, dass mithilfe des Ausdrucks

$$C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 38 \\ 170 \\ 136 \end{pmatrix}$$

die Anzahl der Flakons der verschiedenen Parfumsorten berechnet werden kann, so dass nur der Lagerbestand der vom Haltbarkeitsproblem betroffenen pflanzlichen Rohstoffe restlos verbraucht wird und

berechnen Sie diese Anzahl.

Die Parfum-Manufaktur „Blütenduft“ hat nach intensiver Marktforschung festgestellt, dass ihre Kunden dem Unternehmen treu bleiben und nicht zur Konkurrenz wechseln. Es können aber auch keine neuen Kunden dazugewonnen werden. Innerhalb eines Jahres wechselt ein Teil der Kunden zu einer anderen der drei Parfumsorten „Happy Summer“ (P_1), „Lovely Spring“ (P_2) und „Spicy Ginger“ (P_3).

Das Wechselverhalten der Kunden zwischen den einzelnen Parfumsorten innerhalb des Jahres 2019 kann durch Tabelle 2.2 sowie die Übergangsmatrix M beschrieben werden. Da die Kunden einen Flakon ihres Parfums über einen langen Zeitraum benutzen, findet nur höchstens einmal im Jahr ein Sortenwechsel statt.

Wechselverhalten der Kunden innerhalb des Jahres 2019 (absolute Werte)		von		
		P_1	**P_2**	**P_3**
zu	**P_1**	66 000	18 000	22 500
	P_2	18 000	58 500	22 500
	P_3	36 000	13 500	105 000

Tabelle 2.2

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}20 & 0{,}15 \\ 0{,}15 & 0{,}65 & 0{,}15 \\ 0{,}30 & 0{,}15 & 0{,}70 \end{pmatrix}$$

e) Berechnen Sie anhand der Tabelle 2.2, wie viele Kunden zu Beginn des Jahres 2019 und ein Jahr später die Parfumsorte „Happy Summer“ gekauft haben.

Berechnen Sie mithilfe der Tabelle 2.2 das Element m_{31} der Übergangsmatrix M und

erläutern Sie die Bedeutung des Elements m_{31} im Sachzusammenhang.

Ein Mitarbeiter der Marketing-Abteilung der Parfum-Manufaktur „Blütenduft" untersucht die zukünftige Entwicklung des Kundenbestandes der Parfumsorten „Lovely Spring" und „Spicy Ginger". Teilergebnisse seiner Untersuchung hat der Mitarbeiter in Tabelle 2.3 festgehalten. Zu Beginn des Jahres 2021 kaufen 101 550 Kunden die Parfumsorte „Happy Summer" (P_1).

Zeit t in Jahren (t = 0 entspricht Anfang 2021)	0	1	2	3
Anzahl der Kunden der Parfumsorte „Lovely Spring" (P_2)	103 500			107 438
Anzahl der Kunden der Parfumsorte „Spicy Ginger" (P_3)	154 950		153 920	

Tabelle 2.3

Der Mitarbeiter behauptet in seiner Untersuchung, dass ab dem Beginn des Jahres 2021 der Kundenbestand der Sorte „Lovely Spring" jährlich um ca. 1 % wachsen wird (exponentielles Wachstum) und dass im Mittel der Kundenbestand der Sorte „Spicy Ginger" in diesen drei Jahren jährlich um ca. 470 Kunden fallen wird.

f) Ergänzen Sie mithilfe der Matrix M die Werte in Tabelle 2.3 und

beurteilen Sie die beiden Behauptungen des Mitarbeiters.

Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1:** (hilfsmittelfreier Teil mit Stochastik)

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	30
Erstkorrektur							
Zweitkorrektur							

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

a) In Abbildung 1.1 sind die Graphen der beiden Funktionen f und g dargestellt.

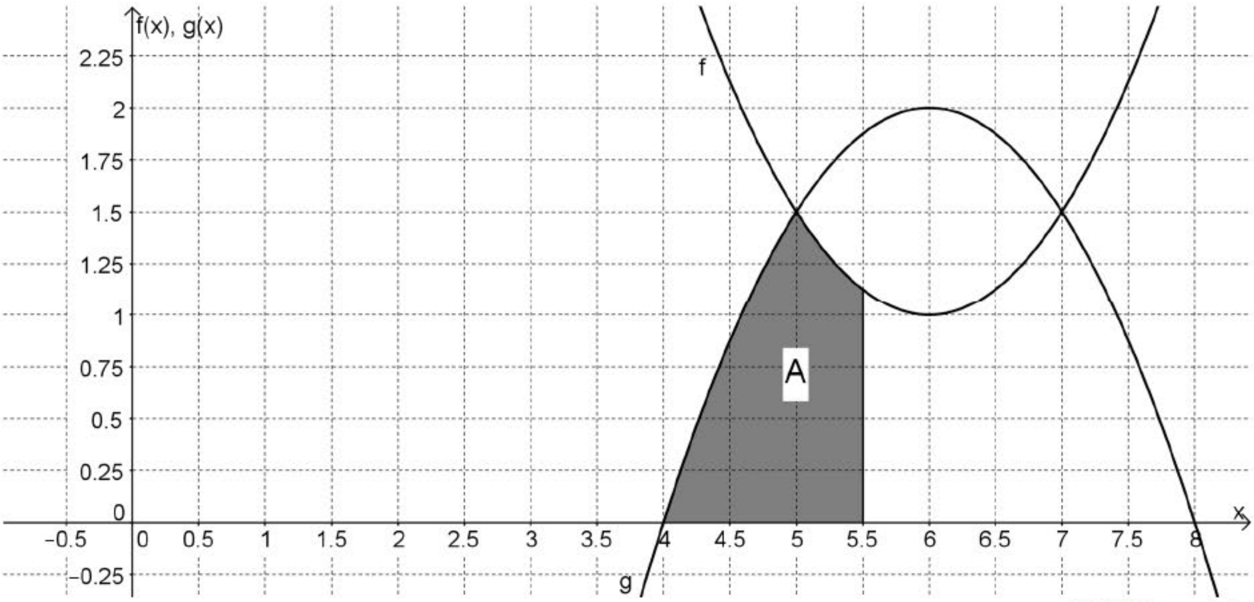


Abbildung 1.1

a1) Geben Sie die bestimmten Integrale der Funktionen f und g an, mit denen der Flächeninhalt der eingefärbten Fläche A berechnet werden kann.

a2) Markieren Sie in Abbildung 1.1 die Fläche, deren Flächeninhalt mit dem Integral

$$\int_6^7 \left(g(x) - f(x)\right)\,dx$$

bestimmt werden kann und

ermitteln Sie näherungsweise den zugehörigen Flächeninhalt.

b)

b1) Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$$

b2) Gegeben ist die modifizierte trigonometrische Funktion f mit der Gleichung:

$$f(x) = 3\sin(2\pi(x+1)) - 2$$

Entscheiden Sie begründet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Der Graph der Funktion f besitzt keine Nullstellen.	
Der Schnittpunkt des Graphen mit der Ordinatenachse ist ein Extrempunkt.	

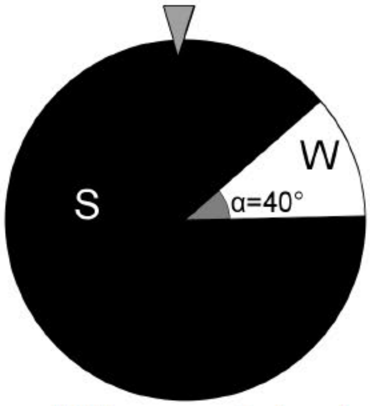
c) Gegeben sind die Funktion f und ihre Ableitungsfunktion f′ mit

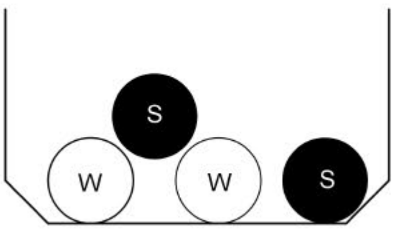
$f(x) = -x^2 e^x$ und $f'(x) = (-2x - x^2) \cdot e^x$ (e ist die Eulersche Zahl)

c1) Berechnen Sie die Stellen des Graphen von f mit waagrechten Tangenten.

c2) Leiten Sie die Gleichung der 2. Ableitung f″ her und vereinfachen Sie den Funktionsterm soweit wie möglich.

d) In Abbildung 1.2 und 1.3 sind zwei verschiedene Zufallsgeräte dargestellt. Bei den Zufallsexperimenten, die mit diesen beiden Zufallsgeräten durchgeführt werden, können in jeder Stufe die Ergebnisse S und W eintreten.

Zufallsgerät	Aufgabenstellung
 Abbildung 1.2: Glücksrad	Vervollständigen Sie die Urne so, dass durch einmaliges Ziehen einer Kugel das einmalige Drehen mit dem Glücksrad aus Abbildung 1.2 simuliert werden kann. 

 Abbildung 1.3: Urne	Bei einem anderen Zufallsexperiment wurde aus der Urne in Abbildung 1.3 bereits einmal eine weiße Kugel gezogen. Die Kugel wurde nicht wieder zurückgelegt. Zeichnen Sie ein zum Zufallsexperiment passendes, vollständiges (1. und 2. Stufe) Baumdiagramm für zweimaliges Ziehen.

e) Auf Grundlage einer Datenerhebung wurde die in Tabelle 1.1 dargestellte Datenreihe ermittelt. Deren empirische Standardabweichung beträgt $s = 2$.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
8	8	6	2	3	3	5	5	5	

Tabelle 1.1

e1) Begründen Sie, dass $x_{10} = 5$ gelten muss, wenn das arithmetische Mittel $\bar{x} = 5$ beträgt.

Für eine zweite Datenreihe gilt: $x_1 + 3;\ x_2 + 3; \dots;\ x_{10} + 3$.

e2) Erläutern Sie, wie die empirische Varianz der zweiten Datenreihe direkt aus der empirischen Varianz der ersten Datenreihe hergeleitet werden kann und

geben Sie deren Wert an.

f) In den Tabellen 1.2 ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der binomialverteilten Zufallsvariablen X mit $n = 12$ und $p = \frac{3}{4}$ dargestellt.

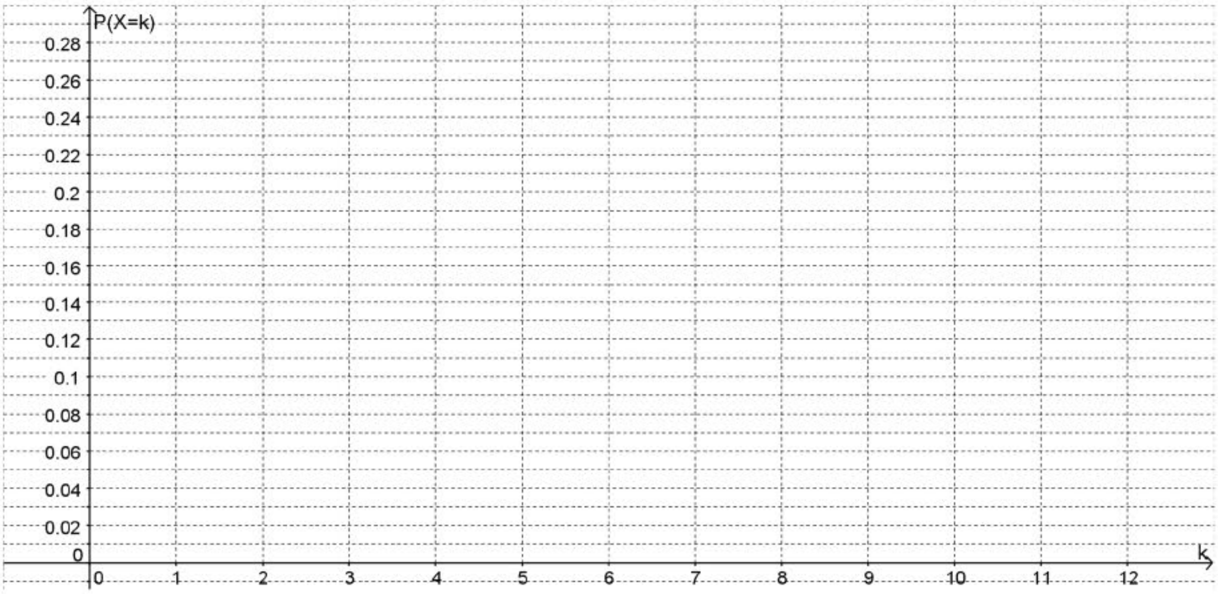


Abbildung 1.4

k	P(X = k)
0	0,0000
1	0,0000
2	0,0000
3	0,0004
4	0,0024
5	0,0115
6	0,0401

k	P(X = k)
7	0,1032
8	0,1936
9	0,2581
10	0,2323
11	0,1267
12	0,0317

Tabelle 1.2

f1) Zeichnen Sie einen Ausschnitt der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X für $7 \leq k < 9$ in Abbildung 1.4 ein.

f2) Berechnen Sie die den Erwartungswert μ und die Wahrscheinlichkeit

$$P(\mu - 2 < X < \mu + 2).$$

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 2:** (Stochastik) **Bienensterben**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	gesamt
Erreichbar	6	4	4	7	3	6	30
Erstkorrektur							
Zweitkorrektur							

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Deutschlandweit werden jeweils im Sommer knapp 900 000 Völker der sogenannten Westlichen Honigbiene von Imkern gehalten. Nach der Honigernte werden die Bienenvölker versorgt und einige davon eingewintert. Trotz Einwinterung sind im Frühling immer wieder erhebliche Verluste zu verzeichnen.

Um die Anzahl der eingewinterten Bienenvölker, die den Winter unbeschadet überstanden haben, zu ermitteln, befragt das Fachzentrum Bienen und Imkerei, Mayen (FBI) jedes Frühjahr Imkerinnen und Imker aus allen Teilen Deutschlands. Diese Meldungen zu den Überwinterungsergebnissen erfasst das FBI getrennt nach Bundesländern.

Die Meldungen für den Winter 2017/2018 sind in der Tabelle 2.1 zusammengefasst.[1]

	Winterverluste 2017/2018		
Bundesland	eingewinterte Bienenvölker [Anzahl]	Verlustvölker [Anzahl]	gerundete Verlustquote [Prozent]
Baden-Württemberg	[redacted]		
Bayern			
Berlin			
Brandenburg			
Bremen			
Hamburg			
Hessen			
Mecklenburg-Vorpommern			
Niedersachsen			
Nordrhein-Westfalen			
Rheinland-Pfalz			
Saarland			
Sachsen			
Sachsen-Anhalt			
Schleswig-Holstein			
Thüringen			
Deutschland			

Tab. 2.1: Meldungen für den Winter 2017/2018

[1] Vgl. DLR Westerwald-Osteifel u. a. (Hrsg.): Bienen@Imkerei, Infobrief 2018 09 vom 18.05.18. Online unter: https://www.apis-ev.de/infobrief-bienenimkerei html [abgerufen am 11.01.19]

Boxplots sind hilfreich, um die Verteilungen der Verlustquoten von Jahr zu Jahr anschaulich darstellen zu können. In der Abbildung 2.1 ist die Verteilung der Verlustquoten nach dem Winter 2016/2017 in einem Boxplot dargestellt[2] und in Abbildung 2.2 ein unvollständiges Boxplot des Folgewinters 2017/2018.

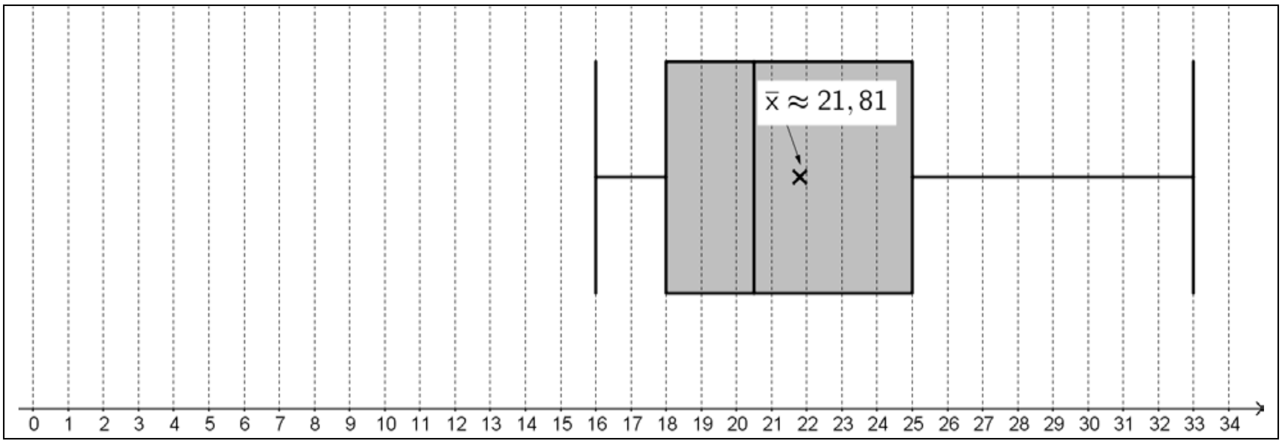


Abbildung 2.1: Verteilung der Verlustquoten nach dem Winter 2016/2017

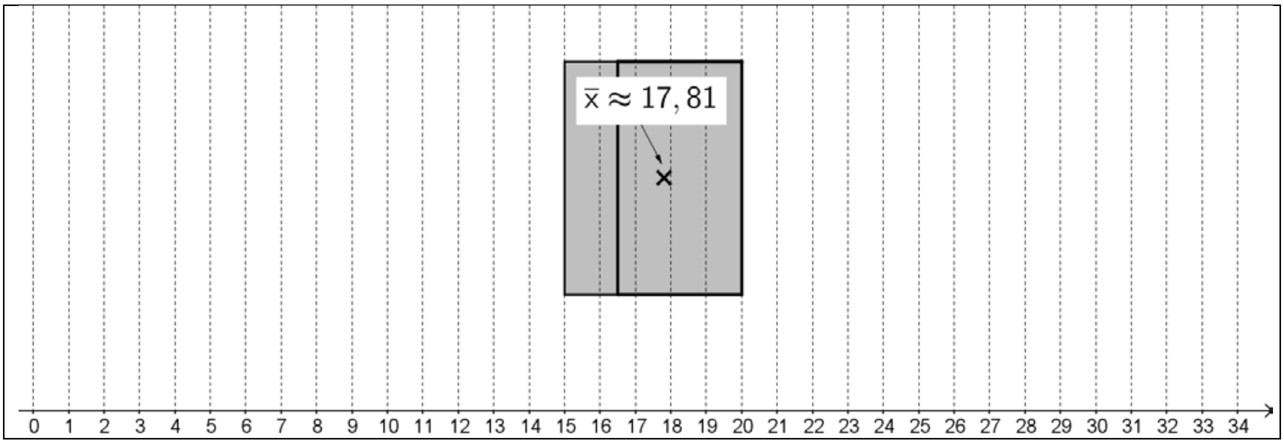


Abbildung 2.2: Verteilung der Verlustquoten nach dem Winter 2017/2018

a) Zeichnen Sie die im zweiten Boxplot (Abbildung 2.2) fehlenden Antennen ein und

vergleichen Sie exemplarisch eine statistische Kennzahl der beiden Verteilungen im Sachzusammenhang miteinander. Lesen Sie hierzu die Werte in den Abbildungen 2.1 und 2.2 ab.

Erläutern Sie, warum das arithmetische Mittel der Verlustquoten der einzelnen Bundesländer im Winter 2017/2018 mit 17,81 % von der Verlustquote in ganz Deutschland im gleichen Winter mit rund 17 % abweicht.

[2] Vgl. DLR Westerwald-Osteifel u. a. (Hrsg.): Bienen@Imkerei, Infobrief 2017 08 vom 05.05.17. Online unter: https://www.apis-ev.de/infobriefe-2017.html [abgerufen am 11.01.19]

Ein Berufsimker aus Schleswig-Holstein wintert im späten Herbst 2018 seine 500 Bienenvölker ein, um seine Verluste möglichst gering zu halten. Die Verlustwahrscheinlichkeit in seinem Landkreis liegt bei 15 %. Da er sich erhebliche Sorgen um seine Bienenvölker macht und ggf. weitere Maßnahmen zum Schutz seiner Bienen ergreifen muss, beschäftigt er sich im Vorfeld mit möglichen Szenarien sowie deren Eintrittswahrscheinlichkeiten.

b) Erläutern Sie, unter welchen Annahmen die Anzahl der Bienenvölker des Imkers, die den Winter nicht überleben, als binomialverteilte Zufallsvariable mit einer Verlustwahrscheinlichkeit von 15 % betrachtet werden kann.

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die Zufallsvariable X „Anzahl der Bienenvölker, die den Winter nicht überleben" dieses Imkers binomialverteilt ist.

c) Ergänzen Sie den Ausdruck in der Klammer,

geben Sie das Ergebnis des Ausdrucks näherungsweise an und

interpretieren Sie dieses im Sachzusammenhang:

$$P(\underline{\qquad\qquad}) = \binom{500}{80} \cdot 0{,}15^{80} \cdot 0{,}85^{420}$$

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass von den Bienenvölkern dieses Imkers…

- … mehr als 70 Bienenvölker sterben,
- … mindestens 40, aber weniger als 430 Bienenvölker den Winter überstehen und

vergleichen Sie die beiden Werte im Sachzusammenhang miteinander.

Die Bienenvölker des Imkers, die den Winter überlebt haben, produzieren im Sommer reichlich Honig. Zum Abfüllen des Honigs in 500 Gramm-Gläser nutzt er eine vollautomatische Abfüllanlage.

Ein Glas Honig (1. Wahl) nimmt der Händler dem Imker zu 5,00 Euro ab. Bei Abweichungen von den 500 Gramm um mehr als 5 Gramm und maximal 10 Gramm nach unten kann der Imker diese Gläser nur für einen Euro weniger (als 2. Wahl) verkaufen. Gläser mit Füllmengen von unter 490 Gramm kann er bis zu einer Füllmenge von 485 Gramm in seinem Hofladen für 3,00 Euro verkaufen. Gläser mit geringeren Füllmengen verbraucht er selbst.

Die Abfüllanlage produziert mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 84,13 % Gläser 1. Wahl und mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 13,59 % Gläser 2. Wahl. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Glas für den Hofverkauf produziert wird, liegt bei ca. 2,14 %.

e) Ermitteln Sie den langfristig zu erwartenden Erlös pro Glas.

Um seinen Erlös erhöhen zu können, erwägt der Imker die Anschaffung einer neuen, präziseren Abfüllanlage, sodass er mehr Gläser 1. Wahl verkaufen kann. Er hat die Anlage „Fill-In" und die Anlage „Fast-Fill" zur Auswahl.

Eine Fachzeitschrift hat 124 Imker, die entweder Fill-In oder Fast-Fill nutzen, dazu befragt, ob sie mit ihrer Anlage zufrieden sind oder nicht. 82 Imker gaben an, dass sie Fill-In nutzen und zufrieden sind und nur 25 Imker gaben an, dass sie Fast-Fill nutzen und zufrieden seien. 96 der befragten Imker nutzen Fill-In.

Der Imker behauptet, dass er sich eindeutig für die Anlage Fill-In entscheiden muss, weil damit mehr Imker zufrieden sind.

absolute Häufigkeiten	Fill-In	Fast-Fill	Summen
zufrieden			
nicht zufrieden			
Summen	96	28	124

Abbildung 2.3

f) Ergänzen Sie die in der Vierfeldertafel (Abb. 2.3) fehlenden Werte und beurteilen Sie die Behauptung des Imkers.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 3:** (Analysis A): **Windkraftanlage**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	gesamt
Erreichbar	6	6	4	3	5	6	30
Erstkorrektur							
Zweitkorrektur							

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Die Schülerinnen und Schüler des Technik-Kurses „Erneuerbare Energien" eines Beruflichen Gymnasiums beschäftigen sich mit der Energiegewinnung durch Windenergieanlagen.

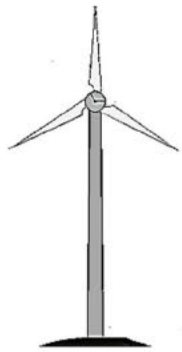


Abbildung 3.1

Windenergieanlagen (Abbildung 3.1) wandeln die Energie des Windes in elektrische Energie um. Die generierte elektrische Energie hängt von den Eckdaten der Anlage und den örtlichen Gegebenheiten, insbesondere der aktuellen Windgeschwindigkeit ab. Je höher die Windgeschwindigkeit ist, desto höher ist auch die Leistung der Anlage.

Zunächst interessieren sich die Schülerinnen und Schüler für die von der Anlage generierte elektrische Energie. Sie betrachten dafür beispielhaft den Verlauf der momentanen Änderungsrate der generierten Energie (Leistungsverlauf) der Windenergieanlage WRS 24 an einem windreichen Wochentag im Herbst. Sie stellen diesen Verlauf in Abbildung 3.2 für $3 \leq t \leq 24$ graphisch dar.

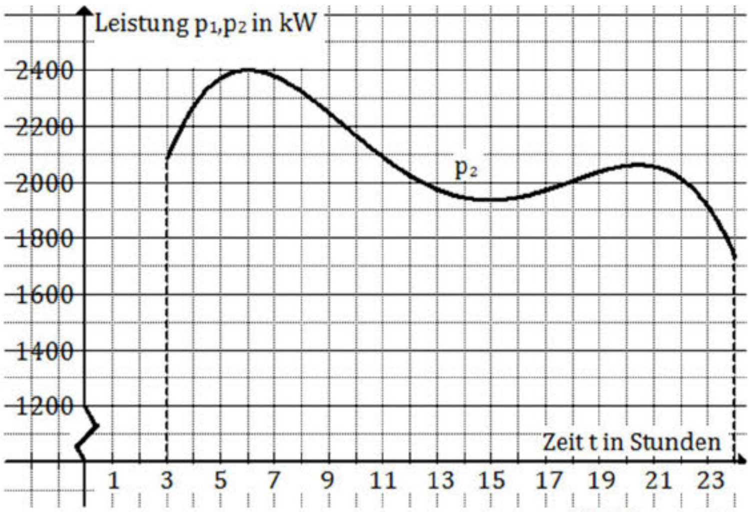


Abbildung 3.2

Die Zeit t ist in Stunden (nach Beobachtungsbeginn um 00:00 Uhr des betrachteten Tages) und die Leistung $p_2(t)$ in Kilowatt (kW) angegeben. Die Ordinatenachse ist im Bereich bis 1 200 kW gestaucht.

a) Erläutern Sie im Sachzusammenhang zwei Aspekte des in Abbildung 3.2 dargestellten Leistungsverlaufs p_2 und

begründen Sie, warum die Modellierung dieses Abschnittes durch eine ganzrationale Funktion dritten Grades nicht möglich ist.

Die Schülergruppe modelliert den gesamten Leistungsverlauf dieses Tages durch die folgende, unvollständig abgebildete, abschnittsweise definierte Funktion p mit der Gleichung:

$$p(t) = \begin{cases} m \cdot t + b & \text{für } 0 \leq t < 3 \\ -\frac{49}{500} \cdot t^4 + \frac{27}{5} \cdot t^3 - 101 \cdot t^2 + 715 \cdot t + 700 & \text{für } 3 \leq t \leq 24 \end{cases}$$

Aus den Aufzeichnungen über die Anlage ergibt sich, dass die Leistung an diesem Tag von 00: 00 Uhr bis 03: 00 Uhr annähernd linear angestiegen ist und sprung- und knickfrei in den zweiten Abschnitt übergeht.

b) Leiten Sie die fehlende Gleichung des ersten linearen Funktionsabschnittes p_1 her und ergänzen Sie den Graphen von p_1 in Abbildung 3.2.

Für den Standort dieser Windkraftanlage stoßen die Schülerinnen und Schüler auf den Windbericht dieses Tages. Laut dieses Windberichtes ist der Wind an diesem Tag mehrfach stark abgeflaut, wodurch auch die Leistung der Anlage jeweils gesunken sein muss.

c) Berechnen Sie die Zeiträume an diesem Tag, in denen der Wind nach Erreichen seiner jeweiligen maximalen Windstärke abnehmend ist.

Die Gruppe möchte auch exemplarisch die gesamte an diesem Tag generierte elektrische Energie in Kilowattstunden (kWh) berechnen.

Susanne vermutet, dass die über einem Zeitraum $[0; t_1]$ generierte elektrische Energie durch das bestimmte Integral

$$\int_0^{t_1} p(t)dt$$

berechnet werden kann.

d) Ermitteln Sie mit Susannes Ansatz näherungsweise die an diesem Tag insgesamt generierte elektrische Energie. Gehen Sie dabei davon aus, dass im Zeitraum von 00: 00 Uhr bis 03: 00 Uhr ca. 5 123 kWh elektrische Energie generiert wurden.

Im Verlauf ihrer Analyse untersucht die Schülergruppe bei einer konstanten Windgeschwindigkeit von $10\,\frac{m}{s}$ die Drehbewegung eines der Rotoren der Windenergieanlage WRS 24 (Abbildung 3.3). Sie möchten den Höhenverlauf der Rotorspitze A in Metern (m) über dem Fußpunkt der Anlage in Abhängigkeit von der Zeit t in Sekunden (s) durch eine modifizierte trigonometrische Funktion h_A der Form

$$h_A(t) = a \cdot \sin\big(b \cdot (t + c)\big) + d$$

modellieren.

Anhand der Zeichnung in Abbildung 3.3 und den in Abbildung 3.4 gegebenen Eckdaten erstellen sie die Gleichung der Funktion h_A mit :

$$h_A(t) = 58{,}5 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{5} \cdot (t + 1{,}25\ )\right) + 141{,}5$$

Zu Beobachtungsbeginn $(t = 0)$ ist das Rotorblatt mit der Spitze A nach oben gerichtetet.

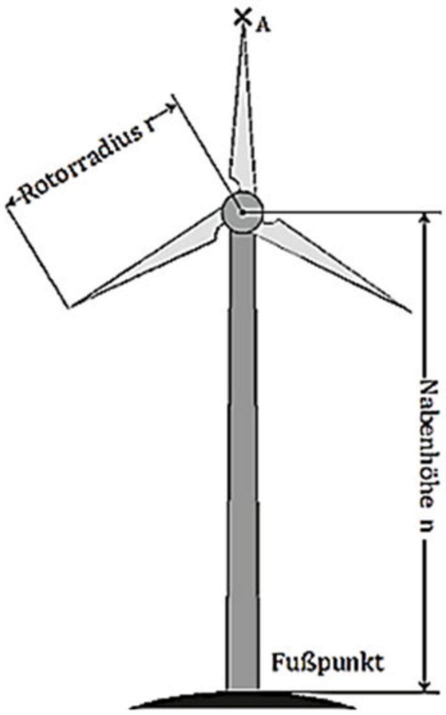


Abbildung 3.3

Technische Daten WRS 24
Rotorradius r: 58,50 m
Max. Gesamthöhe (incl. Rotorblätter):200 m
Bei $10\,\frac{m}{s}$ Windgeschwindigkeit beträgt
die Umlaufdauer T: 5 s

Abbildung 3.4

e) Zeigen Sie, dass der gesuchte Höhenverlauf der Rotorspitze A durch die Funktion h_A modelliert werden kann.

Die Gruppe diskutiert u. a. über die Bedeutung der Wendestellen des Höhenverlaufs der Rotorspitze.

f) Ermitteln Sie die Wendestelle des Höhenverlaufs h_A für $0 \leq t \leq 3$ und

bestimmen Sie die zugehörige Steigung in $\frac{km}{h}$.

Erläutern Sie im Sachzusammenhang die Bedeutung dieser Stelle und der zugehörigen Steigung.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 3:** (Analysis B): **Gärung**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	gesamt
Erreichbar	6	6	6	4	4	4	30
Erstkorrektur							
Zweitkorrektur							

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Einer der Höhepunkte der diesjährigen Projektwoche des Biologietechnik-Kurses eines beruflichen Gymnasiums ist der Besuch einer bekannten Brauerei in Flensburg. Zur Vorbereitung beschäftigt sich der Kurs mit einigen Aspekten des Bierbrauens.

Eine Schülergruppe analysiert beispielhaft den Gärungsprozess während eines Brauvorganges. Zu Beginn der Gärung wird der abgekühlten flüssigen Würze eine bestimmte Menge Hefezellen zugesetzt. Die Hefezellen entziehen der Würze Inhaltsstoffe und vermehren sich zunächst. Die Würze wird so vergoren und es entsteht u. a. Alkohol.

Unter optimalen Laborbedingungen kann der Bestand h der Hefezellen pro Milliliter Würze abhängig von der Gärdauer t näherungsweise durch die Funktion h mit:

$$h(t) = 0{,}1 \cdot t^3 - 2{,}7 \cdot t^2 + 21 \cdot t + 25 \quad \text{mit } 0 \le t \le 9$$

modelliert werden.

Die Gärdauer t ist in Tagen nach Zugabe der Hefezellen ($t = 0$) und der Bestand h der Hefezellen in Millionen Zellen pro Milliliter Würze $\left(\text{Millionen } \frac{\text{Zellen}}{\text{ml}}\right)$ angegeben.

Die Gruppe diskutiert über den Verlauf des Graphen der 1. Ableitung h′ und hat zunächst den Graphen von h graphisch dargestellt (Abbildung 3.1).

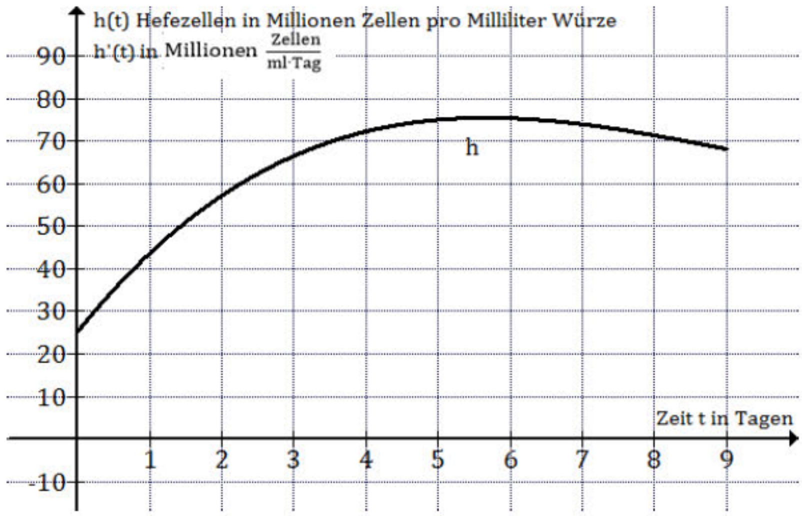


Abbildung 3.1

a) Skizzieren Sie den Graphen der ersten Ableitung h′ in das gegebene Koordinatensystem (Abbildung 3.1) und

erläutern Sie im Sachzusammenhang zwei Aspekten des Verlaufs des Graphen der 1. Ableitung h′.

Eine Schülerin möchte den zeitlichen Verlauf des Hefebestandes beschreiben. Sie überlegt, ob der Hefebestand

(1) in den ersten vier Tagen durchschnittlich um etwa 12 Millionen Hefezellen pro Milliliter Würze und pro Tag $\left(\text{Millionen } \frac{\text{Zellen}}{\text{ml}\cdot\text{Tag}}\right)$ ansteigt und

(2) mit höchstens 4 Millionen Hefezellen pro Milliliter Würze und pro Tag abnimmt.

b) Beurteilen Sie diese beiden Aussagen.

Während der Betriebsbesichtigung berichtet der Braumeister, dass sich im Verlauf der Gärung immer mehr Hefezellen am Boden des Gärgefäßes absetzen. Diese Zellen werden nach Erreichen des höchsten Hefebestandes und vor Ende der Gärung abgeschöpft („geerntet"). Der optimale Zeitpunkt dieser „Hefeernte" ist erreicht, wenn ein Hefebestand von 70 Millionen Zellen pro Milliliter Würze unterschritten wird.

Ein Schüler möchte wissen, wie viele Stunden nach Erreichen des maximalen Hefebestandes diese Hefeernte beginnt.

c) Bestimmen Sie, wie viele Stunden nach Erreichen des maximalen Hefebestandes die Hefeernte beginnt.

Der Braumeister berichtet, dass der Hefebestand unter Laborbedingungen besser durch eine Exponentialfunktion modelliert werden kann. Die Gruppe findet im Internet aber nur die Funktion v, mit der die Vermehrungsrate der Hefezellen modelliert werden kann.

Es gilt:

$$v(t) = 49 \cdot e^{-0{,}35\cdot t - 0{,}7} - 0{,}6 \cdot t \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 9; \text{ (e ist die Eulersche Zahl)}$$

Die Gärdauer t ist in Tagen nach Zugabe der Hefezellen $(t = 0)$ und die Vermehrungsrate v in Millionen Zellen pro Milliliter Würze und pro Tag $\left(\text{Millionen } \frac{\text{Zellen}}{\text{ml}\cdot\text{Tag}}\right)$ angegeben.

Aus dieser Vermehrungsrate und der anfänglich pro Milliliter Würze zugegebenen Anzahl an Hefezellen von ca. 24,5 Millionen Zellen rekonstruiert die Gruppe die unter Laborbedingungen gültige Bestandsfunktion V mit der Gleichung:

$$V(t) = -140 \cdot e^{-0{,}35\cdot t - 0{,}7} - 0{,}3 \cdot t^2 + 94 \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 10$$

d) Zeigen Sie, dass mit der Funktion V der Bestand an Hefezellen rekonstruiert werden kann.

e) Berechnen Sie das Integral

$$\int_6^9 v(t)dt$$

und

erläutern Sie die Bedeutung des Wertes im Sachzusammenhang.

Bei der Betriebsbesichtigung können die Schülerinnen und Schüler auch die Gärkammer besichtigen. In der Gärkammer befinden sich die zylindrokonischen Tanks, in denen der Gärprozess stattfindet. Diese zylinderförmigen Stahltanks laufen unten kegelförmig zu (vgl. Abbildung 3.2).

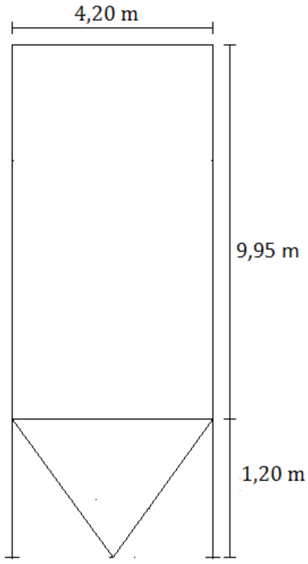


Abbildung 3.2 (nicht maßstabsgetreu)

Abbildung 3.3 zeigt den um 90° im Uhrzeigersinn gedrehten Querschnitt eines solchen Tanks, also den Querschnitt des liegenden Tanks.

Ein Schüler modelliert das obere Profil des liegenden Tanks durch die folgende abschnittsweise definierte Funktion p mit der Gleichung

$$p(x) = \begin{cases} 1{,}75 \cdot x & \text{für} \quad 0 \le x \le 1{,}2 \\ 2{,}1 & \text{für} \quad 1{,}2 < x \le 11{,}15 \end{cases}$$

Dabei gibt x die Höhe des Tanks und p(x) den Radius des Tanks in Abhängigkeit von der Höhe jeweils in Metern (m) an.

f) Ergänzen Sie die Koordinatenachsen und deren Beschriftung in Abbildung 3.3 und

zeigen Sie, dass das obere Profil (gestrichelte Linie) durch den Graphen von p modelliert werden kann.

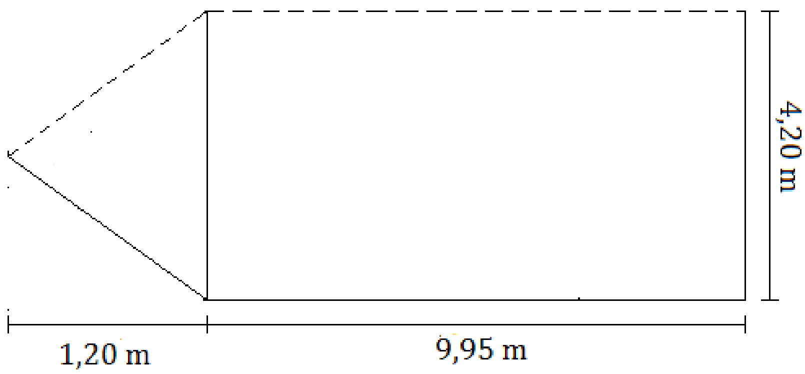


Abbildung 3.3 (nicht maßstabsgetreu)