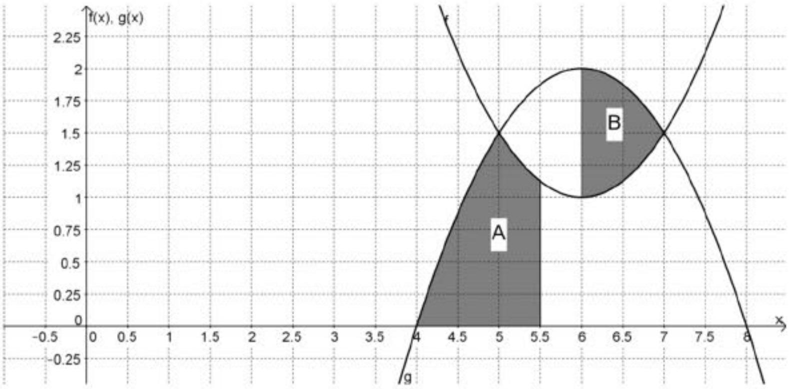
Aufgabe 1 mit Analytischer Geometrie:

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A1	Der Prüfling ...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. Bemerkung: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	
1a	gibt die bestimmten Integrale der Funktionen f und g an, mit denen der Flächeninhalt der eingefärbten Fläche A berechnet werden kann, markiert in Abbildung 1.1 die Fläche, deren Flächeninhalt mit dem Integral $\int_6^7 \left(g(x) - f(x)\right)\,dx$ bestimmt werden kann, und ermittelt näherungsweise den zugehörigen Flächeninhalt.	$A = \int_4^5 g(x)\,dx + \int_5^{5,5} f(x)\,dx$  Ein Kästchen hat einen Wert von $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ Flächeneinheiten. Das Produkt aus ca. 5,5 ausgezählten Kästchen und $\frac{1}{8}$ beträgt ca. $\frac{11}{16}$ FE Flächeneinheiten (exaktes Ergebnis: $\frac{2}{3}$ FE).	5
1b	berechnet das Integral $\int_0^\pi \sin(x)\,dx$ und	$\int_0^\pi \sin(x)\,dx = [-\cos(x)]_0^\pi$ $= -\cos(\pi) - (-\cos(0))$ $= 1 - (-1) = 2$	5

Fortsetzung nächste Seite

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>zu 1b</td><td>entscheidet begründet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>
<table>
<tr><th>Aussage</th><th>Entscheidung und Begründung</th></tr>
<tr><td>Der Graph der Funktion f besitzt keine Nullstellen.</td><td>Die Aussage ist falsch.
Der Graph ist gegenüber dem Graphen der Funktion g mit $g(x) = \sin(x)$ um 2 Einheiten nach unten verschoben, aber auch um drei Einheiten vertikal gestreckt, so dass der Graph die Abszissenachse immer noch mehrfach schneidet.</td></tr>
<tr><td>Der Schnittpunkt des Graphen mit der Ordinatenachse ist ein Extrempunkt.</td><td>Die Aussage ist falsch.
Da für f gilt, dass $p = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ ist, ist der Graph genau um eine Periode verschoben. Er schneidet also die Ordinatenachse im Wendepunkt und nicht in einem Extrempunkt.</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
<tr><td>1c</td><td>berechnet die Stellen des Graphen von f mit waagrechten Tangenten,

leitet die Gleichung der 2. Ableitung f″ her und

vereinfacht den Funktionsterm soweit wie möglich.</td><td>Notwendige Bedingung:
$f'(x) = 0$
$0 = (-2x - x^2) \cdot e^x$
Nach dem Satz vom Nullprodukt und da $e^x \neq 0$ ist,
sind die Nullstellen des ersten Faktors gesucht:
$-2x - x^2 = 0$
$x \cdot (-2 - x) = 0$
Nach dem Satz vom Nullprodukt gilt:
$x_1 = 0$ und $x_2 = -2$
Waagrechte Tangenten liegen in den Punkten mit den Abszissenwerten $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$.

Es gilt: $f'(x) = (-2x - x^2) \cdot e^x$
Mit Hilfe der Produktregel ergibt sich:
$f''(x) = (-2x - x^2) \cdot e^x + (-2 - 2x) \cdot e^x$
$= (-2x - x^2 - 2 - 2x) \cdot e^x$
$= (-x^2 - 4x - 2) \cdot e^x$</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1d</td><td>prüft, ob der Punkt $C(-8|-6|-6)$ auf der Geraden g_1 liegt,

bestimmt eine Gleichung der Geraden g_{AB} und</td><td>Zunächst wird der Parameter t für die x-Koordinate bestimmt:
$2 + 5 \cdot t = -8 \Leftrightarrow t = -2$
Eingesetzt in die Gleichung der y-Koordinate und in die Gleichung der z-Koordinate ergeben sich wahre Aussagen:
$-2 + (-2) \cdot 2 = -6$
$0 + (-2) \cdot 3 = -6$
Somit liegt der Punkt C auf der Geraden.

Als Ortsvektor der Geraden g_{AB} kann der Ortsvektor des Punktes A(1|4|-3) gewählt werden.
Als Richtungsvektor der Geraden g_{AB} kann der Verbindungsvektor zwischen den Punkten A(1|4|-3) und B(-5|8|-9) berechnet werden.

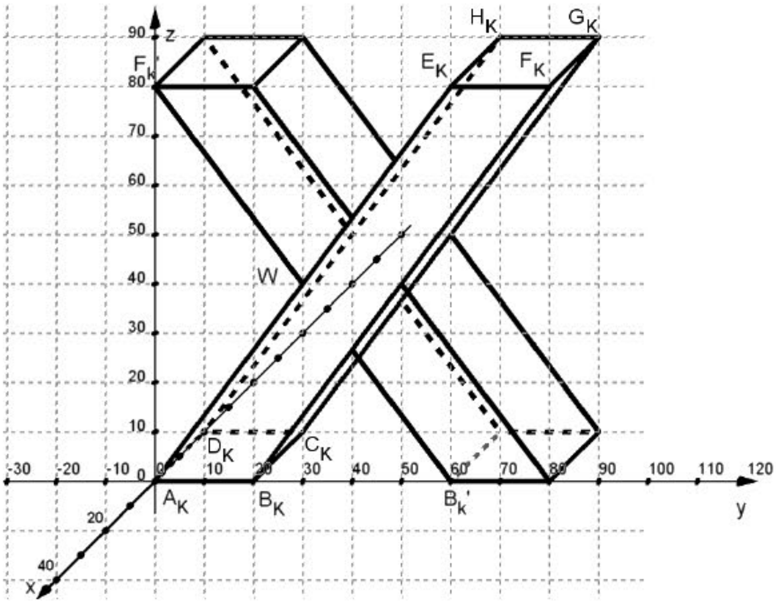
Fortsetzung nächste Seite</td><td>5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>zu 1d</td><td>gibt eine Gleichung der Ebene E_1 an.</td><td>Somit ergibt sich für die Gerade g_{AB}:
$g_{AB}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$
$E_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$</td><td></td></tr>
<tr><td>1e</td><td>entscheidet, welche Lagebeziehung das jeweils angegebene Geradenpaar hat.</td><td>
<table>
<tr><td><u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).
$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $g_4: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + r_4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $g_5: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + r_5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$
$g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + r_3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$</td><td>sind identisch</td><td>sind parallel</td><td>sind windschief</td><td>schneiden sich</td></tr>
<tr><td>g_2 und g_3</td><td></td><td></td><td>x</td><td></td></tr>
<tr><td>g_3 und g_4</td><td></td><td>x</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>g_1 und g_2</td><td></td><td></td><td>x</td><td></td></tr>
<tr><td>g_1 und g_3</td><td>x</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>g_4 und g_5</td><td></td><td></td><td></td><td>x</td></tr>
</table>
</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1f</td><td>bestimmt das Volumen des Würfels,
gibt die Koordinaten der Punkte C und E an und
zeigt, dass die Vektoren $\overrightarrow{AG}$ und $\overrightarrow{CE}$ nicht rechtwinklig zueinander sind.</td><td>An den Koordinaten der Punkte A und B ist zu erkennen, dass die Seitenlänge des Würfel 5 LE beträgt.
$5^3 = 125$
Das Volumen beträgt 125 VE.
C(-4|7|1)
E(1|2|6)
Wenn $\alpha = 90°$ ist, dann muss $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$ gelten.
$\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = 25$
$25 \neq 0$
Somit ist der Winkel kein rechter Winkel.</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>30</td></tr>
</table>

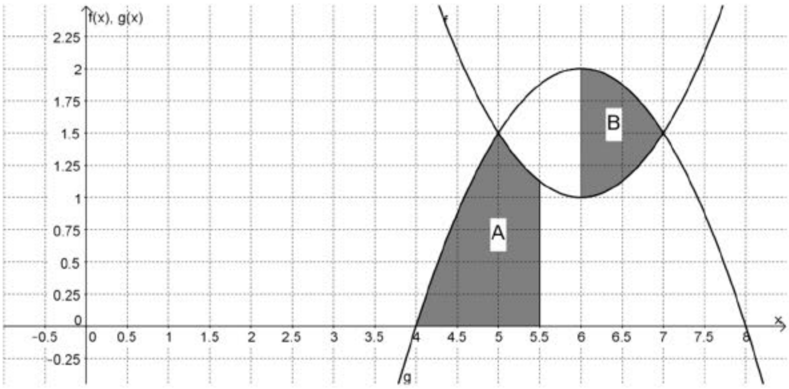
Aufgabe 2: Fehmarnbeltquerung

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A2	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. Bemerkung: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	
2a	begründet ohne Rechnung, dass die Gerade g_1 parallel zur y-Achse liegt, und	Alle Punkte der Geraden g_1 haben als z-Koordinate den Wert drei. Alle Punkte der y-Achse haben als z-Koordinate den Wert null. Die beiden Geraden haben dementsprechend keine gemeinsamen Punkte, folglich müssen sie parallel verlaufen.	4
	gibt die Stärke d der Haltefüllung an.	Die Stärke beträgt drei Meter.	
2b	zeigt, dass die rechte Seitenkante k durch einen Teil der Geraden g_2 modelliert werden kann,	Eine Gerade wird durch zwei Punkte eindeutig definiert. Auf der Geraden g_2 liegen die Punkte $P_1(0\mid 5\mid 0)$ und $P_2(0\mid 13\mid 8,9)$. Das Einsetzen der Punkte in die Geradengleichung ergibt jeweils eine wahre Aussage (exemplarisch mit P_1 durchgeführt): $\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\8\\8,9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow s=0$ Beide Punkte liegen auf der Geraden g_2, somit kann die rechte Seitenkante k durch einen Teil der Geraden g_2 modelliert werden.	7
	prüft rechnerisch, ob die Vorgaben zur Mindestbreite und zum Mindestabstand eingehalten werden.	Zur Ermittlung der y-Koordinate der rechten Seite in einer Höhe von zwei Metern wird die Gleichung $\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\8\\8,9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\2\end{pmatrix}$ aufgelöst und es ergeben sich die Werte $x=0$ und $y\approx 6,8$. Somit ergibt sich in einer Höhe von zwei Metern eine Breite von näherungsweise 6,8 m. Die Mindestbreite wird also eingehalten. Für den Verbindungsvektor eines Punktes P der Geraden g_2 zum Punkt R gilt: $\overrightarrow{PR}=\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}-\left(\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\8\\8,9\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\-5\\8\end{pmatrix}-s\cdot\begin{pmatrix}0\\8\\8,9\end{pmatrix}.$ Im Falle des kürzesten Abstandes ist der Vektor $\overrightarrow{PR}$ orthogonal zum Richtungsvektor der Geraden g_2: $\left(\begin{pmatrix}0\\-5\\8\end{pmatrix}-s\cdot\begin{pmatrix}0\\8\\8,9\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}0\\8\\8,9\end{pmatrix}=0\Rightarrow s=\frac{3\,120}{14\,321}$ *Fortsetzung nächste Seite*	

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
zu 2b		Die Länge des Verbindungsvektors $\overrightarrow{PR}$ mit $s = \frac{3\,120}{14\,321}$ beträgt $\lvert\overrightarrow{PR}\rvert \approx 9{,}07$ Der kürzeste Abstand beträgt näherungsweise 9,07 m. Der Mindestabstand von neun Metern wird also eingehalten. Der Ingenieur hat mit seiner Behauptung nicht Recht.	
2c	ermittelt eine Ebenengleichung in Parameter- und in Koordinatenform, in der die rechte Seitenfläche liegt.	In der Ebene $E_{\mathbf{rechts}}$ liegt die Gerade g_2. Um den Richtungsvektor in x-Achsenrichtung ergänzt, ergibt sich eine Parametergleichung der Ebene: $E_{\mathbf{rechts}}\colon\quad \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\8\\8{,}9\end{pmatrix}$ In der Ebene $E_{\mathbf{rechts}}$ liegen unter anderem die Punkte $P_1(0\|5\|0)$, $P_2(-1\|5\|0)$ und $P_3(0\|13\|8{,}9)$. Werden die Punkte in die allgemeine Form der Koordinatengleichung eingesetzt, ergibt sich folgendes Gleichungssystem: I $\quad 5\cdot b = d$ II $\quad -a + 5\cdot b = d$ III $\quad 13\cdot b + 8{,}9\cdot c = d$ Als Lösung ergibt sich $a = 0$, $b = \frac{1}{5}\cdot d$ und $c = \frac{-16}{89}\cdot d$. Für $d = 445$ ergibt sich die Koordinatengleichung: $89\cdot y - 80\cdot z = 445$	5
2d	leitet die Zahlenwerte her und gibt näherungsweise das Volumen mit Einheit	Es gilt: $\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 15^2\cdot 20$ entspricht dem Volumen des Kegels in m^3, zusammengesetzt aus den beiden halben Kegeln am linken und rechten Rand des Sandhaufens. Der Wert **15** entspricht dem Radius des Kegels von 15 m und der Wert **20** der Höhe des Kegels von 20 m. Es gilt: $\frac{30\cdot 20}{2}\cdot 30$ entspricht dem Volumen des Prismas in m^3 in der Mitte des Sandhaufens. Die Grundfläche bildet ein Dreieck. Der Wert **30** entspricht der Grundseite von 30 m, der Wert **20** der Höhe des Dreiecks von 20 m. Die Höhe/ Länge des Prismas von 30 m entspricht dem Wert **30**. Das Volumen beträgt 13 712,4 m^3.	5
2e	prüft, ob die Vermutung des Ingenieurs richtig ist.	Wenn 7,5 m der Strecke $\overline{C_S B_S}$ abgetragen sind, dann müsste der Punkt $P_S(15\|22{,}5\|0)$ in der Ebene E_1 liegen: $2\cdot 22{,}5 + \frac{3}{2}\cdot 0 = 45$ $45 = 45$ Der Punkt P_S liegt in der Ebene, es muss somit neuer Sand bestellt werden. Die Vermutung des Ingenieurs ist also richtig.	3

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
2f	ergänzt die beiden Teilstücke des zweiten Balkens und berechnet den Innenwinkel des Metallwinkels, der im Punkt W zur Stabilisierung angelegt werden muss.	 Der Winkel α im Punkt W entspricht dem Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{E_K A_K}$ und $\overrightarrow{B_K' F_K'}$. $\cos(\alpha) = \left(\frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -60 \\ -80 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -60 \\ 80 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -60 \\ -80 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -60 \\ 80 \end{pmatrix} \right\|} \right) \Rightarrow \alpha \approx 106°$ Der Winkel beträgt ca. 106°.	6
			30

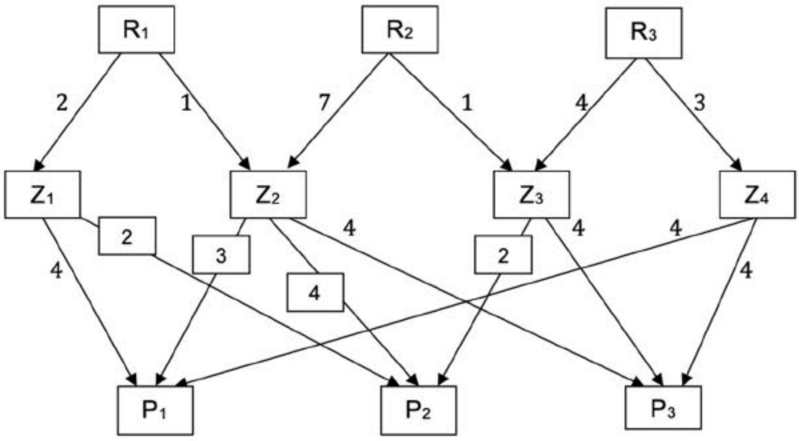
Aufgabe 1 mit Linearer Algebra:

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A1	Der Prüfling …	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. Bemerkung: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	
1a	gibt die bestimmten Integrale der Funktionen f und g an, mit denen der Flächeninhalt der eingefärbten Fläche A berechnet werden kann, markiert in Abbildung 1.1 die Fläche, deren Flächeninhalt mit dem Integral $\int_6^7 \left(g(x)-f(x)\right)\,dx$ bestimmt werden kann, und ermittelt näherungsweise den zugehörigen Flächeninhalt.	$A = \int_4^5 g(x)\ dx + \int_5^{5,5} f(x)\ dx$  Ein Kästchen hat einen Wert von $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$ Flächeneinheiten. Das Produkt aus ca. 5,5 ausgezählten Kästchen und $\frac{1}{8}$ beträgt ca. $\frac{11}{16}$ Flächeneinheiten (exaktes Ergebnis: $\frac{2}{3}$ FE).	5
1b	berechnet das Integral $\int_0^\pi \sin(x)\,dx$ und	$\int_0^\pi \sin(x)\,dx = [-\cos(x)]_0^\pi$ $= -\cos(\pi) - (-\cos(0))$ $= 1 - (-1) = 2$ *Fortsetzung nächste Seite*	5

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>zu 1b</td><td>entscheidet begründet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>
<table>
<tr><th>Aussage</th><th>Entscheidung und Begründung</th></tr>
<tr><td>Der Graph der Funktion f besitzt keine Nullstellen.</td><td>Die Aussage ist falsch.
Der Graph ist gegenüber dem Graphen der Funktion g mit $g(x) = \sin(x)$ um 2 Einheiten nach unten verschoben, aber auch um drei Einheiten vertikal gestreckt, so dass der Graph die Abszissenachse immer noch mehrfach schneidet.</td></tr>
<tr><td>Der Schnittpunkt des Graphen mit der Ordinatenachse ist ein Extrempunkt.</td><td>Die Aussage ist falsch.
Da für f gilt, dass $p = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ ist, ist der Graph genau um eine Periode verschoben. Er schneidet also die Ordinatenachse im Wendepunkt und nicht in einem Extrempunkt.</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
<tr><td>1c</td><td>berechnet die Stellen des Graphen von f mit waagrechten Tangenten,
leitet die Gleichung der 2. Ableitung f″ her und vereinfacht den Funktionsterm soweit wie möglich.</td><td>Notwendige Bedingung:
$f'(x) = 0$
$0 = (-2x - x^2) \cdot e^x$
Nach dem Satz vom Nullprodukt und da $e^x \neq 0$ ist, sind die Nullstellen des ersten Faktors gesucht:
$-2x - x^2 = 0$
$x \cdot (-2 - x) = 0$
Nach dem Satz vom Nullprodukt gilt:
$x_1 = 0$ und $x_2 = -2$
Waagrechte Tangenten liegen in den Punkten mit den Abszissenwerten $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$.
Es gilt: $f'(x) = (-2x - x^2) \cdot e^x$
Mit Hilfe der Produktregel ergibt sich:
$f''(x) = (-2x - x^2) \cdot e^x + (-2 - 2x) \cdot e^x$
$= (-2x - x^2 - 2 - 2x) \cdot e^x$
$= (-x^2 - 4x - 2) \cdot e^x$</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1d</td><td>ergänzt die fehlenden zwei Angaben in der Matrix,
erläutert, wie die obere Matrix in die untere Matrix überführt werden kann und
gibt die Lösungsmenge des LGS an.</td><td>$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & \mathbf{-6} \\ 0 & 0 & \mathbf{4} & 4 \end{array}\right)$
Zur Überführung der oberen Matrix in die untere Matrix wird die erste Zeile der oberen Matrix ohne Veränderung übernommen. Die zweite Zeile in der unteren Matrix ergibt sich, wenn die Einträge der ersten Zeile der oberen Matrix mit zwei multipliziert und zu den entsprechenden Einträgen der zweiten Zeile addiert werden. Die dritte Zeile der unteren Matrix entsteht durch Addition der Einträge der ersten und der dritten Zeile.
$L = \{(3, -1, 1)\}$</td><td>5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>1e</td><td>zeigt, dass M^{-1} die inverse Matrix der Matrix M ist, und</td><td>Es gilt:
$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0{,}5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Daraus folgt: M^{-1} ist die inverse Matrix der Matrix M.</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>begründet, warum für die Matrix N keine inverse Matrix N^{-1} existiert.</td><td>Es gilt:
$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0{,}5 & -1{,}5 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$
In der rechten Koeffizientenmatrix ergibt sich ein Widerspruch in der zweiten Zeile, somit existiert für N keine inverse Matrix.</td><td></td></tr>
<tr><td>1f</td><td>bestimmt die Matrizenelemente a, b, c und d und</td><td>Es gilt: $2 \cdot A = B$
$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a & 2b^2 \\ 2c+2 & -2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
Somit folgt für die Elemente a, b, c und d:
I $2a = -1 \Leftrightarrow a = -0{,}5$
II $2b^2 = 4 \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{2}$
III $2c + 2 = 2 \Leftrightarrow c = 0$
IV $-2d = 2 \Leftrightarrow d = -1$</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>löst die Matrizengleichung nach X auf.</td><td>$M \cdot X + N = P \cdot X$
$\Leftrightarrow N = P \cdot X - M \cdot X$
$\Leftrightarrow N = (P - M) \cdot X$
$\Leftrightarrow X = (P - M)^{-1} \cdot N$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>30</td></tr>
</table>

Aufgabe 2: Parfum

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A2	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. Bemerkung: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	
2a	begründet anhand der zweiten Spalte und mittleren Zeile der Matrix A, dass die Matrix A den gleichen Materialfluss wie das Verflechtungsdiagramm darstellt, und	In der Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ist in jeder Spalte ablesbar, wie viele ME der Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 in jeweils eine ME der einzelnen Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4 einfließen. Bei Riechstoff Z_2 ist dies in der zweiten Spalte ablesbar: Es fließen 1 ME R_1 und 7 ME von R_2 und keine ME von R_3 in die Produktion von einer ME Z_2. Im Verflechtungsdiagramm (Abb. 2.1) lässt sich erkennen, dass ein Pfeil mit 1 ME von R_1 zu Z_2, ein Pfeil mit 7 ME von R_2 zu Z_2 und kein Pfeil von R_3 zu Z_2 verläuft. Somit ist die zweite Spalte von A korrekt. In den Zeilen der Matrix A ist ablesbar, wie viele ME der jeweiligen Rohstoffe bei der Produktion der einzelnen Riechstoffe benötigt werden. Aus der zweiten Zeile von A wird deutlich, dass 7 ME von R_2 in Z_2 sowie 1 ME von R_2 in Z_3 einfließen und Z_1 sowie Z_4 keinen Rohstoff R_2 beinhalten. Im Verflechtungsdiagramm lässt sich erkennen, dass ein Pfeil mit 7 ME von R_2 zu Z_2 und ein Pfeil mit 1 ME von R_2 zu Z_3 verläuft und keine Pfeile von R_2 zu Z_1 und Z_4 verlaufen. Somit ist die mittlere Zeile von A korrekt.	6
	ergänzt die fehlenden Angaben in den Kästchen im Verflechtungsdiagramm mithilfe der Matrix B.	 Abbildung 2.1	

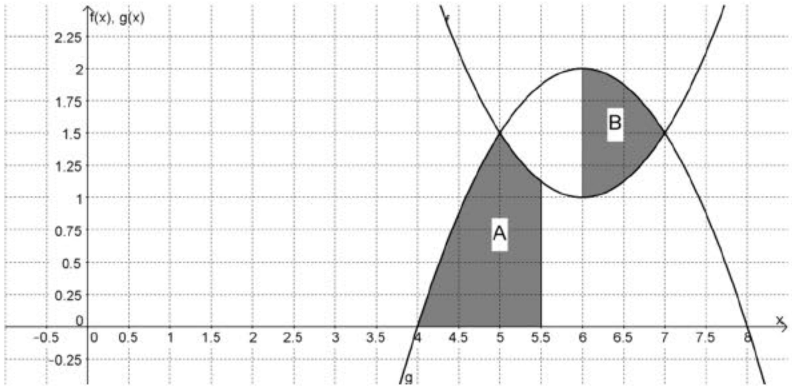
	Anforderungen	Modelllösungen	BE
2b	leitet das Element c_{11} der Rohstoff-Endprodukt-Matrix C her und ermittelt die Menge der pflanzlichen Rohstoffe R_1, R_2 und R_3, die für den Auftrag benötigt werden.	Es gilt: $A \cdot B = C$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 4 \\ 21 & 30 & 32 \\ 12 & 8 & 28 \end{pmatrix}$ $c_{11} = 11$ und kommt aufgrund der Definition der Matrizenmultiplikation folgendermaßen zustande: Jedes Element aus der ersten Zeile von A wird mit dem entsprechenden Element aus der ersten Spalte von B multipliziert und es werden dann die einzelnen Produkte addiert. Das Ergebnis ergibt dann den Eintrag c_{11} in Matrix C. $2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 4 = 11$ Für den Auftragsvektor gilt: $\vec{p} = \begin{pmatrix} 23 \\ 24 \\ 17 \end{pmatrix}$ $C \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 513 \\ 1\,747 \\ 944 \end{pmatrix}$ Somit werden 513 ME von R_1, 1 747 ME von R_2 und 944 ME von R_3 für den Auftrag benötigt.	5
2c	bestimmt den Gewinn, den die Parfum-Manufaktur „Duftig“ durch den Auftrag der Parfümerie „Wunderschön“ erwirtschaftet.	Für die Berechnung der Herstellkosten der Riechstoffe gilt: $(3 \quad 2 \quad 3 \quad 4) \cdot B \cdot \vec{p} = (34 \quad 20 \quad 36) \cdot \begin{pmatrix} 23 \\ 24 \\ 17 \end{pmatrix} = 1\,874$ Für die Berechnung der Herstellkosten der Parfums gilt: $(6 \quad 10 \quad 7) \cdot \begin{pmatrix} 23 \\ 24 \\ 17 \end{pmatrix} = 497$ Die gesamten Kosten für den Auftrag betragen demnach 1 874,00 EUR + 497,00 EUR + 200,00 EUR = 2 571,00 EUR. Der Erlös bestimmt sich folgendermaßen: $(44 \quad 52{,}5 \quad 47) \cdot \begin{pmatrix} 23 \\ 24 \\ 17 \end{pmatrix} = 3\,071$ Für den Gewinn gilt: 3 071,00 EUR − 2 571,00 EUR = 500,00 EUR Somit beträgt der Gewinn für diesen Auftrag 500,00 EUR.	4
2d	zeigt, dass mithilfe des Ausdrucks die Anzahl der Flakons der verschiedenen Parfumsorten berechnet werden kann, und	Folgende Matrizengleichung muss gelöst werden, um die Anzahl der Flakons zu bestimmen, die produziert werden können bei gleichzeitiger Auflösung des Bestandes der vom Haltbarkeitsproblem betroffenen Rohstoffe: Seien x_1, x_2, x_3 die Anzahl der Flakons von P_1, P_2, P_3. $C \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 170 \\ 136 \end{pmatrix}$ *Fortsetzung nächste Seite*	4

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>zu 2d</td><td>berechnet diese Anzahl.</td><td>Somit ergibt sich: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = C^{-1}\cdot\begin{pmatrix}38\\170\\136\end{pmatrix}$
$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$
Es können 2 ME von „Happy Summer“, 0 ME von „Lovely Spring“ und 4 ME von „Spicy Ginger“ produziert werden, sodass alle vom Haltbarkeitsproblem betroffenen Rohstoffe restlos aufgebraucht werden.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">2e</td><td>berechnet anhand der Tabelle 2.2, wie viele Kunden zu Beginn des Jahres 2019 und ein Jahr später die Parfumsorte „Happy Summer“ gekauft haben,</td><td>Um die Anzahl der Kunden zu ermitteln, die zu Beginn des Jahres 2019 die Parfumsorte „Happy Summer“ gekauft hat, müssen die Einträge in der ersten Spalte addiert werden. Somit ergibt sich:
$66\,000 + 18\,000 + 36\,000 = 120\,000$
Zu Beginn des Jahres 2019 haben 120 000 Kunden die Parfumsorte „Happy Summer“ gekauft.
Um die Anzahl der Kunden zu ermitteln, die ein Jahr später die Parfumsorte „Happy Summer“ gekauft haben, müssen die Einträge in der ersten Zeile addiert werden. Somit ergibt sich:
$66\,000 + 18\,000 + 22\,500 = 106\,500$
Ein Jahr später haben 106 500 Kunden die Sorte „Happy Summer“ gekauft.</td><td rowspan="3">5</td></tr>
<tr><td>berechnet das Element m_{31} der Übergangsmatrix M und</td><td>Es gilt: $m_{31} = \frac{36\,000}{120\,000} = 0{,}3$</td></tr>
<tr><td>erläutert die Bedeutung des Elements m_{31} im Sachzusammenhang.</td><td>30 % der Käufer der Parfumsorte „Happy Summer“ wechseln innerhalb eines Jahres zur Parfumsorte „Spicy Ginger“.</td></tr>
<tr><td>2f</td><td>ergänzt die Werte in Tabelle 2.3 und</td><td>
<table>
<tr><td>Zeit t in Jahren (t = 0 entspricht Anfang 2021)</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Anzahl der Kunden der Parfumsorte „Lovely Spring“</td><td>103 500</td><td>**105 750**</td><td>**106 875**</td><td>107 438</td></tr>
<tr><td>Anzahl der Kunden der Parfumsorte „Spicy Ginger“</td><td>154 950</td><td>**154 455**</td><td>153 920</td><td>**153 537**</td></tr>
</table>
</td><td>6</td></tr>
</table>

Fortsetzung nächste Seite

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
zu 2f	beurteilt die Behauptungen des Mitarbeiters.	Für die Berechnung eines Wachstumsfaktors des jährlichen Bestandes der Kunden der Sorte „Lovely Spring“ gilt: $\frac{105\,750}{103\,500} \approx 1{,}0217\;;\; \frac{106\,875}{105\,750} \approx 1{,}0106\;;\; \frac{107\,438}{106\,875} \approx 1{,}0053$ Der Mittelwert aus allen drei Wachstumsfaktoren ergibt ca. den Wert 1,01, sodass es sich in diesem Fall näherungsweise um ein einprozentiges jährliches exponentielles Wachstum handelt. Die erste Behauptung ist somit wahr. Für die jährliche durchschnittliche Abnahme des Kundenbestandes der Sorte „Spicy Ginger“ gilt: $\frac{1}{3}(-495 + (-535) + (-383)) = -471$ Die zweite Behauptung ist somit auch wahr, der Bestand der Kunden der Sorte „Spicy Ginger“ nimmt jährlich durchschnittlich um ca. 470 Kunden ab.	
			30

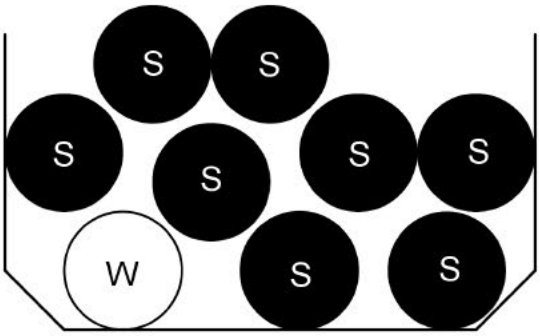
Aufgabe 1 mit Stochastik:

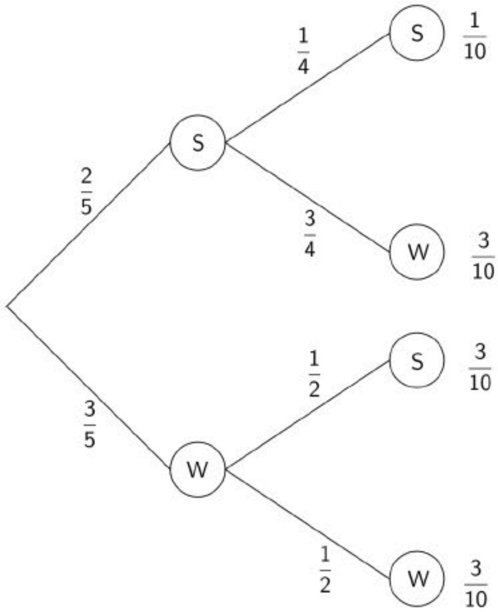
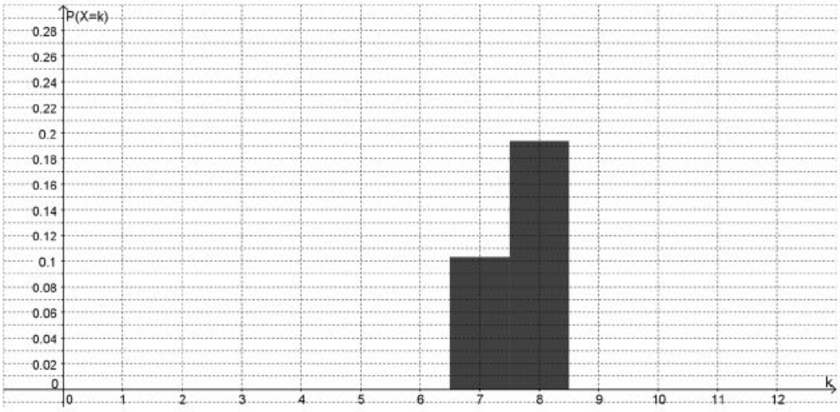
	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A1	Der Prüfling ...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. Bemerkung: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	
1a	gibt die bestimmten Integrale der Funktionen f und g an, mit denen der Flächeninhalt der eingefärbten Fläche A berechnet werden kann, markiert in Abbildung 1.1 die Fläche, deren Flächeninhalt mit dem Integral $\int_6^7 \left(g(x)-f(x)\right)\,dx$ bestimmt werden kann, und ermittelt näherungsweise den zugehörigen Flächeninhalt.	$A=\int_4^5 g(x)\,dx+\int_5^{5,5} f(x)\,dx$  Ein Kästchen hat einen Wert von $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$ Flächeneinheiten. Das Produkt aus ca. 5,5 ausgezählten Kästchen und $\frac{1}{8}$ beträgt ca. $\frac{11}{16}$ Flächeneinheiten (exaktes Ergebnis: $\frac{2}{3}$ FE).	5
1b	berechnet das Integral $\int_0^{\pi}\sin(x)\,dx$ und	$\int_0^{\pi}\sin(x)\,dx=[-\cos(x)]_0^{\pi}$ $=-\cos(\pi)-(-\cos(0))$ $=1-(-1)=2$	5

Fortsetzung nächste Seite

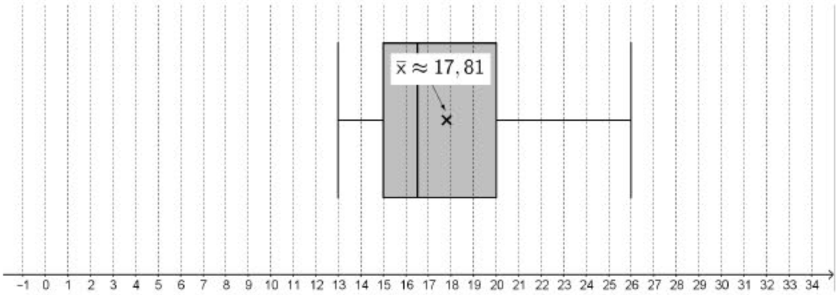
<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>zu 1b</td><td>entscheidet begründet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>
<table>
<tr><th>Aussage</th><th>Entscheidung und Begründung</th></tr>
<tr><td>Der Graph der Funktion f besitzt keine Nullstellen.</td><td>Die Aussage ist falsch.
Der Graph ist gegenüber dem Graphen der Funktion g mit $g(x) = \sin(x)$ um 2 Einheiten nach unten verschoben, aber auch um drei Einheiten vertikal gestreckt, so dass der Graph die Abszissenachse immer noch mehrfach schneidet.</td></tr>
<tr><td>Der Schnittpunkt des Graphen mit der Ordinatenachse ist ein Extrempunkt.</td><td>Die Aussage ist falsch.
Da für f gilt, dass $p = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$ ist, ist der Graph genau um eine Periode verschoben. Er schneidet also die Ordinatenachse im Wendepunkt und nicht in einem Extrempunkt.</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
<tr><td>1c</td><td>berechnet die Stellen des Graphen von f mit waagrechten Tangenten,

leitet die Gleichung der 2. Ableitung f'' her und vereinfacht den Funktionsterm soweit wie möglich.</td><td>Notwendige Bedingung:
$f'(x) = 0$
$0 = (-2x - x^2) \cdot e^x$
Nach dem Satz vom Nullprodukt und da $e^x \neq 0$ ist, sind die Nullstellen des ersten Faktors gesucht:
$-2x - x^2 = 0$
$x \cdot (-2 - x) = 0$
Nach dem Satz vom Nullprodukt gilt:
$x_1 = 0$ und $x_2 = -2$
Waagrechte Tangenten liegen in den Punkten mit den Abszissenwerten $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$.

Es gilt: $f'(x) = (-2x - x^2) \cdot e^x$
Mit Hilfe der Produktregel ergibt sich:
$f''(x) = (-2x - x^2) \cdot e^x + (-2 - 2x) \cdot e^x$
$= (-2x - x^2 - 2 - 2x) \cdot e^x$
$= (-x^2 - 4x - 2) \cdot e^x$</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1d</td><td>vervollständigt die Urne und</td><td>
Fortsetzung nächste Seite</td><td>5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>zu 1d</td><td>zeichnet ein passendes, vollständiges Baumdiagramm für zweimaliges Ziehen.</td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>1e</td><td>begründet, dass $x_{10} = 5$ gelten muss und</td><td>x_1, x_2 und x_3 weichen um $3 + 3 + 1 = 7$ nach oben vom arithmetische Mittel $\bar{x} = 5$ ab und x_4, x_5 und x_6 weichen um $3 + 2 + 2 = 7$ nach unten vom arithmetische Mittel $\bar{x} = 5$ ab. Die Abweichungen nach oben und unten gleichen sich aus. Da x_7, x_8 und x_9 nicht vom arithmetischen Mittel abweichen, muss $x_{10} = 5$ gelten und somit ebenfalls dem arithmetischen Mittel entsprechen.</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>erläutert, wie die empirische Varianz der zweiten Datenreihe hergeleitet wird, und gibt deren Wert an.</td><td>Durch die Erhöhung aller Werte um drei erhöht sich das arithmetische Mittel zwar auf $\bar{x} = 8$, aber die Differenzen der einzelnen Werte zum arithmetischen Mittel bleibt gleich. Folglich gilt für die zweite Datenreihe die gleiche empirische Standardabweichung wie für die erste Datenreihe. Die empirische Varianz der zweiten Datenreihe beträgt somit
$s^2 = 2^2$
$= 4$</td><td></td></tr>
<tr><td>1f</td><td>zeichnet einen Ausschnitt der Verteilung ein und</td><td>
</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>berechnet den Erwartungswert μ und die Wahrscheinlichkeit.</td><td>$\mu = 12 \cdot \frac{3}{4} = 9$
$P(7 < X < 11) \approx 0{,}1936 + 0{,}2581 + 0{,}2323 \approx 0{,}684$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>**30**</td></tr>
</table>

Aufgabe 2: Bienensterben

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A2	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. Bemerkung: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	
2a	zeichnet die im zweiten Boxplot fehlenden Antennen ein,		6
	vergleicht exemplarisch eine statistische Kennzahl der beiden Verteilungen im Sachzusammenhang miteinander und	Lösungshilfe (exakte Kennzahlen): 2016/17: $x_{min} = 16$; $x_{max} = 33$; $Q_1 = 18$; $Q_3 = 25$ 2017/18: $x_{min} = 13$; $x_{max} = 26$ $Q_1 = 15$; $Q_3 = 20$ Die maximale Verlustquote ist von 33 % auf 26 % gesunken. Im Winter 2016/17 gab es wenigstens ein Bundesland mit einer besonders hohen Verlustquote und im Winter 2017/18 nur wenigstens eines mit einer Verlustquote von 26 %. (Dies weist auf ein besonders schädigendes Ereignis in Winter 2016/17 hin, welches wenigstens ein Bundesland betroffen hat.) Des Weiteren könnten alternativ auch das arithmetische Mittel, die Spannweite, Interquartilsabstände sowie die oberen und die unteren Quartile beider Jahre miteinander verglichen werden.	
	erläutert, warum das arithmetische Mittel im Winter 2017/2018 von der Verlustquote in Deutschland abweicht.	Diese, wenn auch geringe, Abweichung liegt darin begründet, dass in den einzelnen, berechneten Verlustquoten (Tab. 2.1) lediglich ein Verhältnis von Verlustvölkern zu eingewinterten Bienenvölkern je Bundesland dargestellt wird. Informationen über die jeweiligen Anzahlen sind in Quoten nicht enthalten. Somit ist das arithmetische Mittel der einzelnen Verlustquoten, in welches die Verlustquoten aller Bundesländer gleichgewichtet einfließen, nicht identisch mit der Verlustquote im gesamten Bundesgebiet, die das Verhältnis der Summe aller Anzahlen von Verlustvölkern zu allen eingewinterten Bienenvölkern berücksichtigt, sodass Bundesländer mit vielen eingewinterten Völkern entsprechend berücksichtigt werden.	

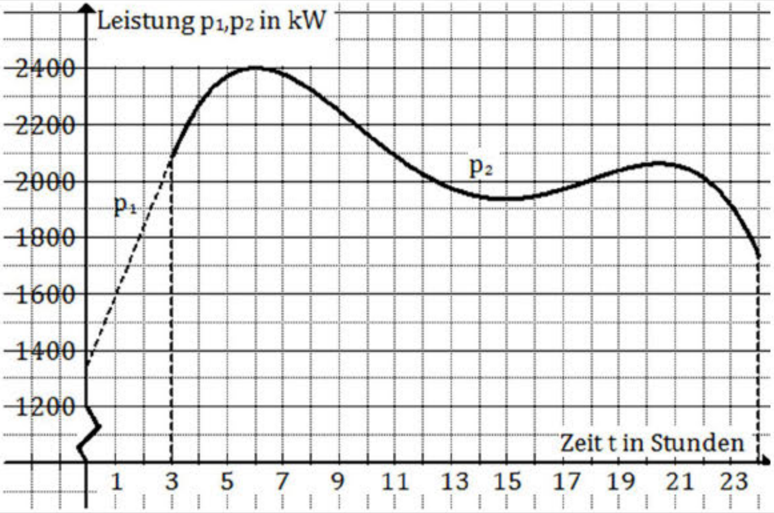
	Anforderungen	• Modelllösungen	BE
2b	erläutert, unter welchen Annahmen die Anzahl der Bienenvölker, die den Winter nicht überleben, als binomialverteilte Zufallsvariable mit einer Verlustwahrscheinlichkeit von 15 % betrachtet werden kann.	• Für die Bienenvölker gilt, dass sie entweder überleben oder nicht überleben, also gibt es nur zwei mögliche Ausgänge. • Die Sterbe-/Überlebenswahrscheinlichkeit ändert sich über den Winter nicht. Die Bienenvölker sterben unabhängig voneinander, auch wenn sie von dem selben Imker eingewintert werden. • Es handelt sich um eine diskrete Zufallsvariable. Die Anzahl der Verlustvölker ist ganzzahlig. • Die Völker des Imkers müssen für den Landkreis repräsentativ sein, damit die dortige Verlustwahrscheinlichkeit von 15 % für die Bienenvölker des Imkers angenommen werden kann.	4
2c	ergänzt den Ausdruck in der Klammer, gibt das Ergebnis näherungsweise an und interpretiert dieses im Sachzusammenhang.	(Die Zufallsvariable X mit „$X \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 500\}$ ist die Anzahl der Bienenvölker, die den Winter nicht überleben. X ist binomialverteilt mit der Kettenlänge $n = 500$ und die Eintrittswahrscheinlichkeit beträgt $p = 0{,}15$.) $P(\mathbf{X} = \mathbf{80}) = \binom{500}{80} \cdot 0{,}15^{80} \cdot 0{,}85^{420} \approx \mathbf{0{,}0401}$ Das Näherungsergebnis der Bernoulli-Kette besagt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass genau 80 Bienenvölker nicht überleben (sterben) bei ca. 4 % liegt.	4
2d	berechnet die Wahrscheinlichkeiten und vergleicht die beiden Werte im Sachzusammenhang miteinander.	Die Wahrscheinlichkeit, dass … • mehr als 70 Bienenvölker sterben, beträgt $P(X \geq 71) = P(X > 70) \approx 71{,}00\ \%$. • mindestens 40, aber weniger als 430 Bienenvölker den Winter überstehen, beträgt $P(40 \leq \overline{X} < 430) = P(40 \leq \overline{X} \leq 429)$ $= P(\overline{X} \leq 429) - P(\overline{X} \leq 39)$ $\approx 71{,}00\ \%$ Beide Wahrscheinlichkeiten sind ungefähr gleich groß, • da die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 70 Bienenvölker sterben gleichbedeutend mit der Wahrscheinlichkeit ist, dass weniger als 430 Bienenvölker den Winter überstehen und • da $P(X < 40) \approx 0\ \%$ gilt, kann dies zusätzlich vernachlässigt werden.	7
2e	ermittelt den langfristig zu erwartenden Erlös pro Glas.	Erlös E pro Glas: $E = 5{,}00 \cdot 0{,}8413 + 4{,}00 \cdot 0{,}1359 + 3{,}00 \cdot 0{,}0214$ $\approx 4{,}81$ [Euro] Der langfristig zu erwartende Erlös beträgt also ca. 4,81 Euro.	3

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>2f</td><td>ergänzt die in der Vierfeldertafel (Abb. 2.3) fehlenden Werte und

beurteilt die Behauptung des Imkers.</td><td>
<table>
<tr><th>absolute Häufigkeiten</th><th>Fill-In</th><th>Fast-Fill</th><th>Summen</th></tr>
<tr><td>zufrieden</td><td>**82**</td><td>**25**</td><td>**107**</td></tr>
<tr><td>nicht zufrieden</td><td>**14**</td><td>**3**</td><td>**17**</td></tr>
<tr><td>Summen</td><td>**96**</td><td>**28**</td><td>124</td></tr>
</table>
Absolut sind mehr Imker mit der Fill-In (82 Imker) zufrieden als mit der Fast-Fill (25 Imker). Allerdings sind ca.
$h_{\mathbf{Fill-In}}(\text{zufrieden}) = \frac{82}{96} \approx 85{,}42\ \%$
der Fill-In-Imker zufrieden, während ca.
$h_{\mathbf{Fast-Fill}}(\text{zufrieden}) = \frac{25}{28} \approx 89{,}29\ \%$
der Fast-Fill-Imker zufrieden sind. Andererseits hatten sich vorher bereits deutlich mehr Imker (96 von 124 Imkern) für die Fill-In entschieden.
Der Prüfling kommt nach Abwägung der Argumente zu einem Urteil.</td><td>6</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>**30**</td></tr>
</table>

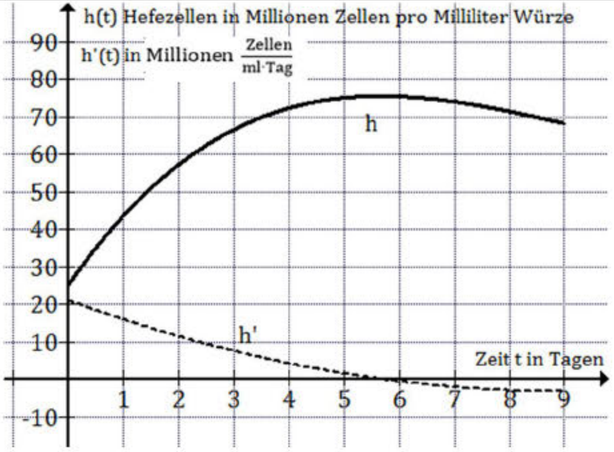
Aufgabe 3: (Analysis A) **Windenergieanlage**

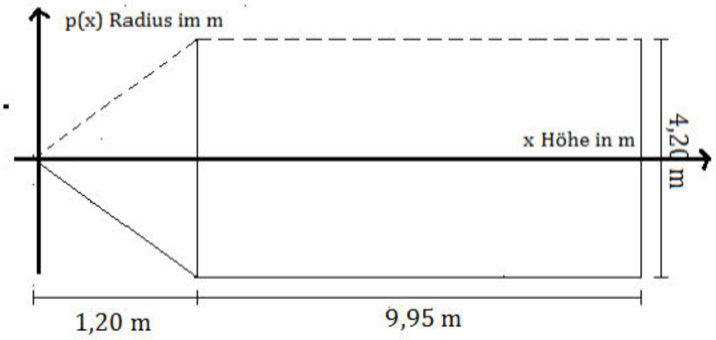
	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A3	Der Prüfling…	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	
3a	erläutert im Sachzusammenhang den in Abbildung 3.2 dargestellten Leistungsverlauf p_2 anhand von zwei Aspekten und begründet, warum die Modellierung durch eine ganzrationale Funktion dritten Grades nicht möglich ist.	Die erzeugte Leistung steigt bis ca. 06:00 Uhr immer langsamer an, bis um 6:00 Uhr die maximale Leistung dieses Tages erreicht wird. In der Zeit von 6:00 Uhr bis 14:30 Uhr sinkt die erzeugte Leistung immer weiter auf ein Minimum von ca. 1 900 kW. Um ca. 10:00 Uhr sinkt die Leistung am stärksten. Eine ganzrationale Funktion dritten Grades besitzt genau einen Wendepunkt. Im Verlauf des Graphen sind zwei Wendepunkte zu erkennen, so dass dieser Verlauf nur durch eine ganzrationale Funktion mindestens 4. Grades beschrieben werden kann.	6
3b	leitet die fehlende Gleichung des ersten linearen Funktionsabschnittes p_1 her und	Gesucht ist eine lineare Funktion der Form $p_1(t) = m \cdot t + b$. Es gilt: $p_2'(t) = -\frac{49}{125} \cdot t^3 + \frac{81}{5} \cdot t^2 - 202 \cdot t + 715$ $p_1'(t) = m$ Ein sprung- und knickfreier Übergang bei $t = 3$ bedeutet, dass $p_1(3) = p_2(3)$ und $p_1'(3) = p_2'(3)$ gelten muss: Sprungfreiheit: $p_1(3) = p_2(3) \Rightarrow p_1(3) = \frac{1\,036\,931}{500} \approx 2\,074$ Knickfreiheit: $p_1'(3) = p_2'(3) \Rightarrow m = \frac{30\,527}{125} \approx 244$ Mit der Punktsteigungsform für lineare Funktionen ergibt sich: $p_1(t) = \frac{30\,527}{125} \cdot (t-3) + \frac{1\,036\,931}{500}$ $= \frac{30\,527}{125} \cdot t + \frac{670\,607}{500}$ $\approx 244 \cdot t + 1\,341$ Fortsetzung nächste Seite	6

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
zu 3b	ergänzt den Graphen von p_1 in Abbildung 3.2.		
3c	berechnet die Zeiträume an diesem Tag, in denen der Wind nach Erreichen seiner jeweiligen maximalen Windstärke abnehmend ist.	Gesucht sind die Monotonintervalle des Graphen der Funktion p, in denen die Steigung negativ ist. Aufgrund der Graphik ist es hinreichend den zweiten Abschnitt zu betrachten. Es gilt: $p_2'(t) = -\frac{49}{125} \cdot t^3 + \frac{81}{5} \cdot t^2 - 202 \cdot t + 715$ $p_2'(t) < 0$ Näherungsweise ergibt sich daraus: $6{,}03077 < t < 14{,}6475$ oder $t > 20{,}6482$ Damit flaut der Wind zunächst zwischen ca. 06:02 Uhr und ca. 14:39 Uhr und später am Tag nochmal nach 20:39 Uhr bis mindestens 24: 00 Uhr ab.	4
3d	ermittelt mit Susannes Ansatz näherungsweise die an diesem Tag insgesamt generierte elektrische Energie.	Die gesamte generierte Energiemenge E in kWh an diesem Tag ergibt sich aus $E \approx 5\,123 + \int_3^{24} p_2(t)dt$ $\approx 49\,752$ Es werden an diesem Tag also ca. 49 752 kWh elektrische Energie erzeugt.	3
3e	zeigt, dass der gesuchte Höhenverlauf der Spitze A durch die Funktion h_A modelliert werden kann.	Zu bestätigen sind die Parameter der trigonometrischen Funktion h_A mit $h_A(t) = 58{,}5 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{5} \cdot (t + 1{,}25)\right) + 141{,}5$: Laut Abbildung 3.4 beträgt der Rotorradius 58,50 m $\Rightarrow \ a = r = 58{,}5$ Die maximale Gesamthöhe beträgt 200 m, daher gilt für die Nabenhöhe n: $n = 200 - r$ Die Nabenhöhe entspricht der vertikalen Verschiebung: $\Rightarrow d = n = 200 - 58{,}5 = 141{,}5$ *Fortsetzung nächste Seite*	5

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
zu 3e		Die Umlaufdauer beträgt 5 s. $\Rightarrow T = p = 5$ $\Rightarrow b = \frac{2 \cdot \pi}{p} = \frac{2 \cdot \pi}{5}$ Zum Beobachtungsbeginn zeigt die Spitze A nach oben ⇒Verschiebung des Graphen um eine Viertel Periode nach links $\Rightarrow c = +\frac{p}{4} = \frac{5}{4} = 1{,}25$ Damit lässt sich der gesuchte Höhenverlauf mit $h_\mathbf{A}$ modellieren.	
3f	ermittelt die Wendestelle des Höhenverlaufs $h_\mathbf{A}$ für $0 \le t \le 3$, bestimmt die zugehörige Steigung in $\frac{\mathbf{km}}{\mathbf{h}}$ und erläutert im Sachzusammenhang die Bedeutung dieser Stelle und der zugehörigen Steigung.	Die Wendestelle in diesem Intervall wird nach einer Viertel Periode und damit nach 1,25 s erreicht. $h_\mathbf{A}`(t) = 23{,}4 \cdot \pi \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{5} \cdot (t + 1{,}25)\right)$ $h_\mathbf{A}`(1{,}25) \approx -73{,}5 \left[\frac{m}{s}\right]$ $\Rightarrow h_\mathbf{A}`(1{,}25) \cdot \frac{3600}{1\,000} \frac{km}{h} \approx -265 \frac{km}{h}$ Die Wendestelle des Höhenverlaufs wird im betrachteten Intervall nach 1,25 Sekunden erreicht und die Steigung beträgt dort ca. $-265 \frac{\mathbf{km}}{\mathbf{h}}$. Nach 1,25 Sekunden steht der Rotor mit der Spitze A waagrecht und erreicht dort seine höchste „Fall“-Geschwindigkeit von 265 $\frac{\mathbf{km}}{\mathbf{h}}$ bzw. verliert dort am schnellsten an Höhe (diese Geschwindigkeit entspricht auch der Umlaufgeschwindigkeit der Rotorspitze).	6
			30

Aufgabe 3: (Analysis B) **Gärung**

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A3	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	
3a	skizziert den Graphen der ersten Ableitung in das gegebene Koordinatensystem. (Abbildung 3.1) und		6
	erläutert im Sachzusammenhang anhand von zwei Aspekten den Verlauf der 1. Ableitung h′.	Die Vermehrungsgeschwindigkeit der Hefezellen ist direkt nach Zugabe der Hefezellen positiv und am höchsten. Danach sinkt sie immer weiter, bis sie im Verlauf des sechsten Tages auf null absinkt und danach die Hefezellen immer schneller abgebaut werden.	
3b	beurteilt diese beiden Aussagen.	.... ob, der Hefebestand (1) in den ersten vier Tagen durchschnittlich um etwa 12 Millionen Hefezellen pro Milliliter Würze und pro Tag ansteigt Zu bestimmen ist die Sekantensteigung im Intervall [0;4]: $\frac{h(4)-h(0)}{4} = 11{,}8$ Der Bestand steigt in diesem Zeitraum also durchschnittlich um 11,8 Millionen Hefezellen pro Milliliter Würze und pro Tag, das entspricht etwa 12 Millionen Hefezellen pro Milliliter Würze und pro Tag. Die Aussage ist also korrekt. (2) mit höchstens 4 Millionen Hefezellen pro Milliliter Würze und pro Tag abnimmt. Wie der Graphik entnommen werden kann, befindet sich der Zeitpunkt der stärksten Abnahme am rechten Rand des Definitionsbereichs. Es gilt: $h'(t) = 0{,}3 \cdot t^2 - 5{,}4 \cdot t + 21$ $h'(9) = -3{,}3$ $\lvert -3{,}3 \rvert < 4$ Auch diese Aussage ist richtig, da die höchste Abnahme weniger als vier Millionen Hefezellen pro Milliliter und pro Tag beträgt.	6

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
3c	bestimmt, wie viele Stunden nach Erreichen des maximalen Hefebestandes die Hefeernte beginnt.	Zeitpunkt des maximalen Hefebestandes: $h'(t) = 0 \Rightarrow t_{e1} \approx 5{,}68$ und $t_{e2} \approx 12{,}32 \notin [0; 9]$ Wie aus dem Graphen in Abbildung 3.1 zu erkennen ist, liegt an der Stelle t_{e1} ein Hochpunkt vor. Die Zeitpunkte, an denen der Hefebestand 70 Millionen Zellen pro Milliliter Würze erreicht, lauten: $h(t) = 70 \Rightarrow t_1 \approx 3{,}55$ und $t_2 \approx 8{,}45$ und $t_3 = 15 \notin [0; 9]$ Aus der Graphik ist erkennbar, dass nur nach t_2 der Wert unterschritten wird. Die Anzahl der gesuchten Tage d beträgt also $d = t_2 - t_{e1} \approx 2{,}77$ [Tage] Der gesuchte Zeitraum beträgt also ca. 66,5 Stunden.	6
3d	zeigt, dass mit der Funktion V der Bestand an Hefezellen rekonstruiert werden kann.	Zu zeigen ist: $V'(t) = v(t)$ und $V(0) \approx 24{,}5$ Millionen Es gilt: $V'(t) = 49 \cdot e^{-0{,}35 \cdot t - 0{,}7} - 0{,}6 \cdot t = v(t)$ $V(0) = -140 \cdot e^{-0{,}35 \cdot 0 - 0{,}7} - 0{,}3 \cdot 0^2 + 94$ $\quad = -140 \cdot e^{-0{,}7} + 94$ $\quad \approx 24{,}48$ q. e. d. Mit der Funktion V kann also der gesuchte Bestand an Hefezellen rekonstruiert werden.	4
3e	berechnet das Integral $\int_6^9 v(t)dt$ und erläutert die Bedeutung des Wertes im Sachzusammenhang.	$\int_6^9 v(t)dt = -7{,}97$ Der Wert des Integrals beträgt −7,97, das bedeutet im Sachzusammenhang, dass von Beginn des siebten Tages bis zum Ende des letzten Tages (des neunten Tages) nach Zugabe der Hefezellen der Hefebestand pro Milliliter Würze um ca. 7,97 Millionen gefallen ist.	4
3f	ergänzt die Koordinatenachsen und deren Beschriftung in Abbildung 3.3 und	 *Fortsetzung nächste Seite*	4

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
zu 3f	zeigt, dass das obere Profil durch den Graphen von p modelliert werden kann.	Der erste Abschnitt ist eine Ursprungsgerade mit der Steigung m $m = \frac{2,1}{1,2}$ $= 1,75$ $\Rightarrow p_1(x) = 1,75 \cdot x$ Da der Radius des zylinderförmigen Teils 2,10 m beträgt, verläuft der zweite Abschnitt in einem Abstand von 2,1 parallel zur Abszissenachse. Die Steigung für diesen Abschnitt beträgt null. $\Rightarrow p_2(x) = 2,1$ Das obere Profil kann also durch den Graphen von p modelliert werden.	
			30

[redacted]