1. Grundlegende Beschreibung der Struktur und Merkmale von Steuer-Identifikationsnummern im IdNr-Verfahren

Die Identifikationsnummer nach § 139 AO dient ausschließlich der Identifikation von Steuerpflichtigen. Sie „besteht aus einer Ziffernfolge, die nicht aus anderen Daten über den Steuerpflichtigen gebildet oder abgeleitet werden darf; die letzte Stelle ist eine Prüfziffer".[1]
Im Verlauf der organisatorischen und technischen Vorbereitung zur Einführung der IdNr hat man sich auf eine elfstellige Ziffernfolge inklusive Prüfziffer geeinigt. Gesetzliche Anforderungen sowie verschiedene in der Arbeitsgruppe „ID-Merkmal" diskutierte mögliche Probleme führen im Ergebnis zu einem numerischen Format mit folgenden Eigenschaften, die festgelegt sind:

festgelegte Eigenschaften gültiger Steuer-Identifikationsnummern	
1	Die IdNr ist eine elfstellige Ziffernfolge (einschließlich Prüfziffer).
2	Es sind keinerlei Bedeutungen wie z.B. Geburtsdatum oder FA-Nummer herleitbar.[2]
3	Es gibt keine führende Null, d.h. an erster Position steht eine Ziffer aus der Menge $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.
4	An den Positionen 2 bis 10 stehen Ziffern aus der Menge $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.
5	Die elfte Ziffer ist eine Prüfziffer.
6	Jede IdNr besitzt in den ersten zehn Ziffern eine obligatorische Ziffernwiederholung. Dies bedeutet: **Entweder** zwei Ziffern sind gleich **oder** drei Ziffern sind gleich.
6a	Es gibt keine IdNr, die mehr als drei Ziffern gleicher Ausprägung auf den ersten zehn Stellen besitzt.
6b	Es gibt keine IdNr, die weniger als zwei Ziffern gleicher Ausprägung auf den ersten zehn Stellen besitzt.
6c	Es gibt keine IdNr, bei der auf den ersten zehn Zifferpositionen unterschiedliche Zifferausprägungen mehrfach auftreten.
6d	Existieren zwei gleiche Ziffern an den ersten zehn Positionen, können diese an beliebigen Stellen stehen. Die restlichen acht Stellen (ohne Prüfziffer) werden mit Ziffern unterschiedlicher Ausprägung besetzt.
6e	Existieren drei gleiche Ziffern an den ersten zehn Positionen, dürfen sie nicht an aufeinander folgenden Stellen stehen. Die restlichen sieben Stellen (ohne Prüfziffer) werden mit Ziffern unterschiedlicher Ausprägung besetzt.

[1] vgl. § 139a Abs. 1 AO
[2] vgl. AG ID-Merkmal: „Anforderungsbeschreibung zur Einführung und Verwendung der IdNr nach § 139b AO"; Version 1.0; Stand 19. September 2006; S. 19

Im mathematischen Sinn ist die Identifikationsnummer (ohne Betrachtung der Prüfziffer) eine einfache zehnstellige Zahl. Ihre individuellen Ausprägungen erhält man durch unterschiedliche Positionierung von Ziffern aus der Menge $\{0,...,9\}$ an den einzelnen zehn Stellen der Zahl. Man erhält alle kombinatorisch möglichen Zahlenausprägungen durch Permutation. Im Kontext des hier vorliegenden Dokuments bezeichnet man mit ‚Permutation' die Veränderung der Reihenfolge einzelner Ziffern der Identifikationsnummer. Mathematisch entspricht dies einer eineindeutigen Abbildung der Ziffernmenge auf sich selbst. Durch Vertauschungen von Ziffern entstehen jeweils eigenständige, eindeutige Identifikationsnummern.

Beispiel:	42**21**567890
	42**12**567890
	421**52**67890

2. Grundlegende Beschreibung der mathematischen Hintergründe zur Erzeugung von Steuer-Identifikationsnummern im IdNr-Verfahren

2.1. Anforderungen an eine Steuer-Identifikationsnummer

Eine zehnstellige Ziffernfolge umfasst zehn Milliarden verschiedene Kombinationsmöglichkeiten (inklusive der Ausprägung „0000000000"). Aus dieser Menge müssen alle Werte herausgesucht werden, die allen in Abschnitt 1 festgelegten Eigenschaften genügen.
Theoretisch könnte man einen fortlaufenden Zähler betrachten und für jeden Wert prüfen, ob alle Bedingungen eingehalten sind. Dies ist wegen der hohen Zahl an Vergleichsoperationen und der daraus folgenden Rechenzeit höchst ineffizient.
Deswegen kommen zur Erzeugung eindeutiger Identifikationsnummern sogenannte „Multiset Permutations" als Werkzeug der Kombinatorik zum Einsatz. Zentrale Eigenschaft der Multiset Permutationen ist die Berücksichtigung von Ziffer-Wiederholungen innerhalb der Zahlenketten. Wegen der hohen Anzahl möglicher Permutationen wurde ein an der Victoria Universität von British Columbia veröffentlichter Algorithmus[3] in Bezug auf die angewendeten Rekursionen modifiziert. Nur so ließen sich vernünftige Laufzeiten erreichen und Hauptspeicher-Grenzen umgehen.

2.2. Mathematische Betrachtungen ohne Ziffernwiederholung

Betrachtet man die Steuer-Identifikationsnummer (ohne Prüfziffer) zunächst als zehnstellige Ziffernfolge ohne Ziffernwiederholung, ergibt sich die Anzahl einmalig vorkommender Ausprägungen aus

$$10! = 3.628.800$$

Kombinationen. Diese Menge ist nicht ausreichend.

2.3. Mathematische Betrachtungen mit zwei obligatorisch gleichen Ziffern gemäß der festgelegten Eigenschaften 6 und 6d

Existieren zwei Ziffern gleicher Ausprägung, bleiben für andere, einmalig vorkommende Ziffern innerhalb einer Identifikationsnummer (ohne Prüfziffer) noch 8 Stellen übrig.

[3] vgl. Ruskey, Lausch: „Information on Permutations of a Multiset"; University of Victoria, British Columbia, Canada; http://theory.cs.uvic.ca/amof/e_mulpl.htm

Beispiel: 1123456789

Die Anzahl einmalig vorkommender Kombinationen bei einer zehnstelligen Ziffernfolge mit einer vorgegebenen einmaligen Ziffernwiederholung entspricht also[4]:

$$\frac{10!}{1!\cdots 1!\cdot 2!} = 1.814.400$$

Im Zähler des Quotienten steht die Anzahl aller möglichen Zifferkombinationen ohne Berücksichtigung von Mehrfachausprägungen. Im Nenner steht das Produkt der Fakultäten jeder einzelnen Zifferhäufigkeit.
Mit einer Berücksichtigung jeder einzelnen Zifferhäufigkeit im Nenner wird der Effekt der obligatorischen Wiederholung (eine Ziffer tritt immer doppelt auf) in die Betrachtung einbezogen. Sind bei einer Permutation mit Wiederholung n Ziffern identisch, tritt für die mehrfach auftretenden Ziffern folgender Effekt ein: Es sind genau n! Anordnungen gleich, weil die n identischen Ziffern untereinander vertauschbar sind und sich dabei keine neuen Ziffernfolgen ergeben[5].

Nachdem man alle möglichen Ausprägungen durch Permutation ermittelt hat, können die doppelt vorkommenden Ziffern in den einzelnen Ausprägungen einfach substituiert werden. Dabei muss man beachten, dass durch die Substitution nicht mehr als zwei Ziffern gleich sind.

Beispiel (ohne Prüfziffer):

4112567890
4221567890
4551267890
4661257890

Durch diese Operationen erhält man die zehnfache Menge (18.144.000) an gültigen Identifikationsnummern, Ziffernfolgen mit führenden Nullen müssen verworfen werden.

[4] vgl. Blecksmith: "Math Lecture Notes: Permutations and Combinations"; Dept.of Mathematical Sciences, Northern Illinois University; principle No. 22, page 9 http://www.math.niu.edu/~richard/Math210/comb_ho.pdf

[5] vgl. http://www.mathebibel.de/permutation-mit-wiederholung; schön beschriebene, leicht verständliche Darstellung.

Wie bereits betont, existieren wegen der doppelt vorhandenen Ziffer noch 8 einmalig vorkommende Ziffern. Dadurch wird eine Ziffer aus dem Wertebereich der Kombination verdrängt. Diesen Effekt kann man nutzen, um durch weitere Substitutionen wiederum ein Vielfaches gültiger Identifikationsnummern zu erhalten. Die Methode impliziert automatisch, dass die erzeugte Zahlenmenge nur aus einmalig existierenden Kombinations-Ausprägungen besteht.

Beispiel für die Ziffernfolge mit doppelter Ziffer „1“:

1. Verdrängungssituation: 1123456789 [0 fehlt] ← keine führenden Nullen vorhanden
2. Verdrängungssituation: 1103456789 [2 fehlt]
3. Verdrängungssituation: 1102456789 [3 fehlt]
4. Verdrängungssituation: 1102356789 [4 fehlt]
5. Verdrängungssituation: 1102346789 [5 fehlt]
6. Verdrängungssituation: 1102345789 [6 fehlt]
7. Verdrängungssituation: 1102345689 [7 fehlt]
8. Verdrängungssituation: 1102345679 [8 fehlt]
9. Verdrängungssituation: 1102345678 [9 fehlt]

Weil jede der oben aufgeführten Zeilen durch Permutation etwa 18.144.000 Ausprägungen liefert, beträgt die Gesamtzahl an Nummern etwa 9 × 18.144.000 = 163.296.000 eindeutige Möglichkeiten. Von dieser Menge müssen die Zifferfolgen mit führenden Nullen abgezogen werden. Führende Nullen treten nur in acht der hier beschriebenen neun Verdrängungssituationen auf. Insgesamt muss man beachten, dass die doppelt vorhandenen Ziffern über zehn Ausprägungen {0,...,9} rotieren.

<u>Exkurs:</u> Anzahl der Zifferkombinationen mit führender Null

Setzt man gedanklich die erste Ziffer als führende Null fest, gibt es

$$\frac{9!}{1!\cdots 1!\cdot 2!} = 181.440$$

Kombinationen mit einer obligatorischen Ziffer-Wiederholung, die ungleich Null ist.

(Ende Exkurs)

Die verbleibende Anzahl von Kombinationen nach Abzug führender Nullen beträgt

$$\underbrace{163.296.000}_{\text{alle Ausprägungen}} - \underbrace{9 \times \frac{9!}{1! \cdots 1! \cdot 2!} \times}_{\text{Kombinationen mit führender Null}} 10 = 163.296.000 - 16.329.600 = 146.966.400$$

2.4. Mathematische Betrachtungen mit drei obligatorisch gleichen Ziffern gemäß der festgelegten Eigenschaften 6 und 6e

Eine Erweiterung der bisher beschriebenen Menge von Identifikationsnummern erfolgt durch Erhöhung der Anzahl obligatorisch gleicher Ziffern von 2 auf 3.

Beispiel (ohne Prüfziffer):

4**1**5**11**67890
4**22**567**2**890
54**5**2**5**67890
42578**6**90**66**

Analog zu den Ausführungen in Abschnitt 2.3 entspricht die Anzahl zehnstelliger Identifikationsnummern (ohne Prüfziffer) mit drei obligatorisch gleichen Ziffern:

$$\frac{10!}{1! \cdots 1! \cdot 3!} = 604.800$$

Wegen der dreifach gleichartig vorhandenen Ziffer existieren noch 7 einmalig vorkommende Ziffern. Dadurch werden zwei Ziffern aus dem Wertebereich verdrängt. Diesen Effekt kann man wieder analog zu vorhin nutzen.

Beispiel für die Ziffernfolge mit dreifacher Ziffer „1“:

1. Verdrängungssituation: 1134156789 [0,2 fehlen]
2. Verdrängungssituation: 1124156789 [0,3 fehlen]
3. Verdrängungssituation: 1123156789 [0,4 fehlen]
4. Verdrängungssituation: 1123146789 [0,5 fehlen]
5. Verdrängungssituation: 1123145789 [0,6 fehlen]
6. Verdrängungssituation: 1123145689 [0,7 fehlen]
7. Verdrängungssituation: 1123145679 [0,8 fehlen]
8. Verdrängungssituation: 1123145678 [0,9 fehlen]

Anzahl der obigen Kombinationen mit dreifach gleicher Ziffer „1“ :

$$8 \times \frac{10!}{1! \cdots 1! \cdot 3!} = 8 \times 604.800 = 4.838.400$$

Rotiert man die dreifach vorkommende Ziffer über $\{1,\ldots,9\}$, erhält man

$$9 \times 8 \times \frac{10!}{1! \cdots 1! \cdot 3!} = 72 \times 604.800 = 43{,}545.600$$

Kombinationen. Hierbei fehlt die Ziffer Null vollständig.

Verglichen mit den Betrachtungen aus Abschnitt 2.3 werden jetzt zwei Ziffern aus den Kombinationen verdrängt. Deswegen muss man beachten, alle existierenden Zifferkombinationen aus den Verdrängungen per Substitution wieder eingesetzt werden. In den Substitutionen spielt die dreifach vorkommende Ziffer keine Rolle, denn ihre Häufigkeit darf die festgelegte Anzahl 3 nicht überschreiten.

Konkret ergeben sich für eine dreifach vorhandene Ziffer „1“ folgende Kombinationen:

1.	Zifferkombination: 1011456789	[2,3 fehlen]	15.	Zifferkombination: 1011235789	[4,6 fehlen]
2.	Zifferkombination: 1011356789	[2,4 fehlen]	16.	Zifferkombination: 1011235689	[4,7 fehlen]
3.	Zifferkombination: 1011346789	[2,5 fehlen]	17.	Zifferkombination: 1011235679	[4,8 fehlen]
4.	Zifferkombination: 1011345789	[2,6 fehlen]	18.	Zifferkombination: 1011235678	[4,9 fehlen]
5.	Zifferkombination: 1011345689	[2,7 fehlen]	19.	Zifferkombination: 1011234789	[5,6 fehlen]
6.	Zifferkombination: 1011345679	[2,8 fehlen]	20.	Zifferkombination: 1011234689	[5,7 fehlen]
7.	Zifferkombination: 1011345678	[2,9 fehlen]	21.	Zifferkombination: 1011234679	[5,8 fehlen]
8.	Zifferkombination: 1011256789	[3,4 fehlen]	22.	Zifferkombination: 1011234678	[5,9 fehlen]
9.	Zifferkombination: 1011246789	[3,5 fehlen]	23.	Zifferkombination: 1011234589	[6,7 fehlen]
10.	Zifferkombination: 1011245789	[3,6 fehlen]	24.	Zifferkombination: 1011234579	[6,8 fehlen]
11.	Zifferkombination: 1011245689	[3,7 fehlen]	25.	Zifferkombination: 1011234578	[6,9 fehlen]
12.	Zifferkombination: 1011245679	[3,8 fehlen]	26.	Zifferkombination: 1011234569	[7,8 fehlen]
13.	Zifferkombination: 1011245678	[3,9 fehlen]	27.	Zifferkombination: 1011234568	[7,9 fehlen]
14.	Zifferkombination: 1011236789	[4,5 fehlen]	28.	Zifferkombination: 1011234567	[8,9 fehlen]

Ist die Ziffer „9“ dreifach vorhanden, entstehen folgende Kombinationen:

1. Zifferkombination: 9909345678 [1,2 fehlen]	15. Zifferkombination: 9909124678 [3,5 fehlen]
2. Zifferkombination: 9909245678 [1,3 fehlen]	16. Zifferkombination: 9909124578 [3,6 fehlen]
3. Zifferkombination: 9909235678 [1,4 fehlen]	17. Zifferkombination: 9909124568 [3,7 fehlen]
4. Zifferkombination: 9909234678 [1,5 fehlen]	18. Zifferkombination: 9909124567 [3,8 fehlen]
5. Zifferkombination: 9909234578 [1,6 fehlen]	19. Zifferkombination: 9909123678 [4,5 fehlen]
6. Zifferkombination: 9909234568 [1,7 fehlen]	20. Zifferkombination: 9909123578 [4,6 fehlen]
7. Zifferkombination: 9909234567 [1,8 fehlen]	21. Zifferkombination: 9909123568 [4,7 fehlen]
8. Zifferkombination: 9909145678 [2,3 fehlen]	22. Zifferkombination: 9909123567 [4,8 fehlen]
9. Zifferkombination: 9909135678 [2,4 fehlen]	23. Zifferkombination: 9909123478 [5,6 fehlen]
10. Zifferkombination: 9909134678 [2,5 fehlen]	24. Zifferkombination: 9909123468 [5,7 fehlen]
11. Zifferkombination: 9909134578 [2,6 fehlen]	25. Zifferkombination: 9909123467 [5,8 fehlen]
12. Zifferkombination: 9909134568 [2,7 fehlen]	26. Zifferkombination: 9909123458 [6,7 fehlen]
13. Zifferkombination: 9909134567 [2,8 fehlen]	27. Zifferkombination: 9909123457 [6,8 fehlen]
14. Zifferkombination: 9909125678 [3,4 fehlen]	28. Zifferkombination: 9909123456 [7,8 fehlen]

Ist die Ziffer „0“ dreifach vorhanden, entstehen folgende Kombinationen:

1. Zifferkombination: 0345678900 [1,2 fehlen]	15. Zifferkombination: 0124678900 [3,5 fehlen]
2. Zifferkombination: 0245678900 [1,3 fehlen]	16. Zifferkombination: 0124578900 [3,6 fehlen]
3. Zifferkombination: 0235678900 [1,4 fehlen]	17. Zifferkombination: 0124568900 [3,7 fehlen]
4. Zifferkombination: 0234678900 [1,5 fehlen]	18. Zifferkombination: 0124567900 [3,8 fehlen]
5. Zifferkombination: 0234578900 [1,6 fehlen]	19. Zifferkombination: 0123678900 [4,5 fehlen]
6. Zifferkombination: 0234568900 [1,7 fehlen]	20. Zifferkombination: 0123578900 [4,6 fehlen]
7. Zifferkombination: 0234567900 [1,8 fehlen]	21. Zifferkombination: 0123568900 [4,7 fehlen]
8. Zifferkombination: 0145678900 [2,3 fehlen]	22. Zifferkombination: 0123567900 [4,8 fehlen]
9. Zifferkombination: 0135678900 [2,4 fehlen]	23. Zifferkombination: 0123478900 [5,6 fehlen]
10. Zifferkombination: 0134678900 [2,5 fehlen]	24. Zifferkombination: 0123468900 [5,7 fehlen]
11. Zifferkombination: 0134578900 [2,6 fehlen]	25. Zifferkombination: 0123467900 [5,8 fehlen]
12. Zifferkombination: 0134568900 [2,7 fehlen]	26. Zifferkombination: 0123458900 [6,7 fehlen]
13. Zifferkombination: 0134567900 [2,8 fehlen]	27. Zifferkombination: 0123457900 [6,8 fehlen]
14. Zifferkombination: 0125678900 [3,4 fehlen]	28. Zifferkombination: 0123456900 [7,8 fehlen]

Rotiert man die dreifach vorkommende Ziffer über $\{1,...,9\}$ und substituiert man in zulässiger Weise, erhält man

$$280 \times \frac{10!}{1! \cdots 1! \cdot 3!} = 280 \times 604.800 = 169.344.000$$

Kombinationen, die auch Null(en) enthalten.

Ausprägungen von Identifikationsnummern mit führender Null sind weiterhin nicht zugelassen. Deswegen gelten analoge Betrachtungen zu Zifferkombinationen mit führender Null wie in Abschnitt 2.3:

Setzt man gedanklich die erste Ziffer als führende Null fest, gibt es

$$\frac{9!}{1!\cdots1!\cdot3!} = 60.480$$

Ausprägungen mit drei gleichen Ziffern und führender Null für jede der 280 Kombinationen.

Die verbleibende Anzahl von Kombinationen nach Abzug führender Nullen beträgt

$$\underbrace{169.344.000}_{\text{alle Aus-prägungen mit Null}} - 280 \times \underbrace{\frac{9!}{1!\cdots1!\cdot3!}}_{\text{Kombina-tionen mit führender Null}} = 169.344.000 - 16.934.400 = 152.409.600$$

Die gesamte Zahl verwertbarer Kombinationen mit drei gleichen Ziffern beträgt

$$152.409.600 + 43.545.600 = \underline{195.955.200}$$

Die geforderte Eigenschaft 6e schränkt die zulässige Menge ein, so dass dreifach vorkommende Ziffern derselben Ausprägung nicht an aufeinander folgenden Stellen stehen dürfen. Man muss also Kombinationen mit dieser Eigenschaft von der Menge zulässiger Identifikationsnummern abziehen. In diesem Fall gilt folgender Effekt:

Ziffer-position	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl möglicher Ziffern an der betreffenden Position	1	1	1	9	8	7	6	5	4	3
	9	1	1	1	1	8	7	5	4	3
	9	8	1	1	1	7	6	5	4	3
	9	8	7	1	1	1	6	5	4	3
	9	8	7	6	1	1	1	5	4	3
	9	8	7	6	5	1	1	1	4	3
	9	8	7	6	5	4	1	1	1	3
	9	8	7	6	5	4	3	1	1	1

Die Tabelle zeigt, dass es acht verschiedene Positionen des Blocks von drei aufeinanderfolgenden, gleichen Ziffern gibt. Zusätzlich muss man beachten, dass die gleichen Ziffern von 0 bis 9 (zehn Ausprägungen) rotieren können. In dieser Betrachtung sind führende Nullen eingeschlossen.

Daraus ergibt sich eine Anzahl von Kombinationen, die drei aufeinanderfolgende Ziffern aufweisen:

$$8 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 14.515.200$$

Ohne führende Nullen ergeben sich $\frac{9}{10} \times 14.515.200 = 13.063.680$ Kombinationen.

Somit gibt es 195.955.200 − 13.063.680 = <u>182.891.520</u> valide Möglichkeiten mit drei Ziffern gleicher Ausprägung (ohne Prüfziffer).