Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1** (hilfsmittelfreier Teil):

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	5	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

a) Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = -2x^3 + 2x.$$

a1) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.

a2) Bestimmen Sie a mit $0 \leq a \leq 1$ so, dass folgende Gleichung gilt:

$$\int_0^a f(x)dx = 0{,}5$$

a3) Beurteilen Sie ohne Rechnung, ob die folgende Ungleichung gilt:

$$\int_{-1}^2 f(x)dx < 0$$

b) Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = a \cdot \cos\big(b \cdot (x - c)\big) + d \quad \text{mit} \quad a, b \neq 0$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Es gilt immer: $f(c) = 0$		
Die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Funktionswert beträgt $\lvert a \rvert$.		
Für $\lvert d \rvert \leq \lvert a \rvert$ besitzt der Graph von f unendlich viele Nullstellen.		
Der Graph von f ist immer punktsymmetrisch zum Ursprung.		
$F(x) = \frac{a}{b} \cdot \sin\big(b \cdot (x - c)\big) + d \cdot x$ ist die Gleichung einer Stammfunktion von f.		

c) In Abbildung 1.1 sind die Graphen von drei verschiedenen natürlichen Exponentialfunktionen der Form $f(x) = a \cdot e^{b \cdot x - c}$ dargestellt.

c1) Ordnen Sie begründet der Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{2x-4}$$

den zugehörigen Graphen f_1, f_2 oder f_3 zu.

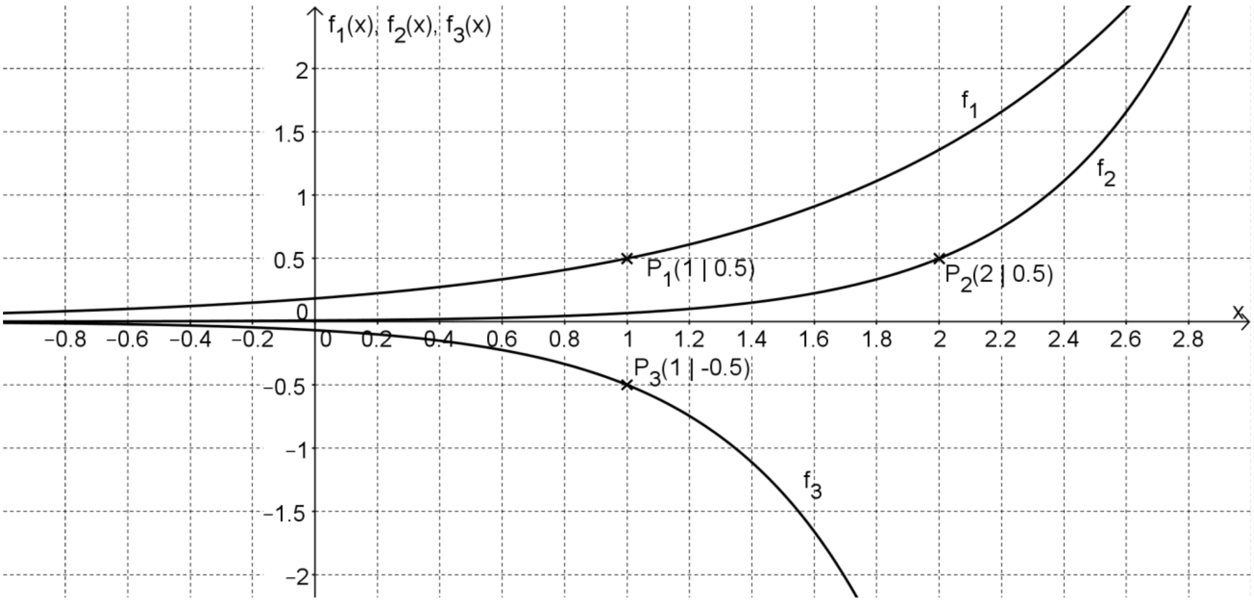

Abbildung 1.1

c2) Geben Sie die Funktionsgleichung des Graphen der Funktion g an, der aus dem Graphen der Funktion f durch Verschiebung um −2 in Abszissenrichtung und um 1 in Ordinatenrichtung hervorgeht.

c3) Leiten Sie die 1. Ableitung der Funktion k mit der Gleichung

$$k(x) = \frac{1}{2} x^2 \cdot e^x$$

her.

d) In Abbildung 1.2 ist der Graph f einer ganzrationalen Funktion vierten Grades abgebildet.

d1) Skizzieren Sie den Ableitungsgraphen der Funktion f in das Koordinatensystem in Abbildung 1.3.

d2) Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Die Stammfunktion F der Funktion f besitzt mindestens eine Nullstelle und genau drei Wendepunkte.

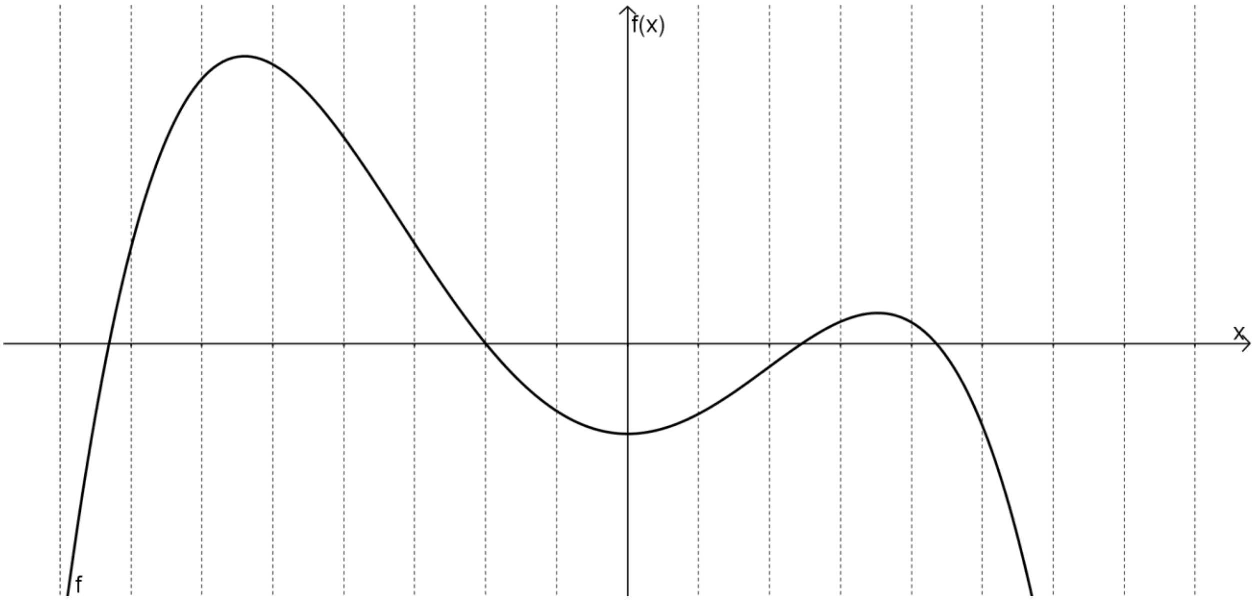

Abbildung 1.2

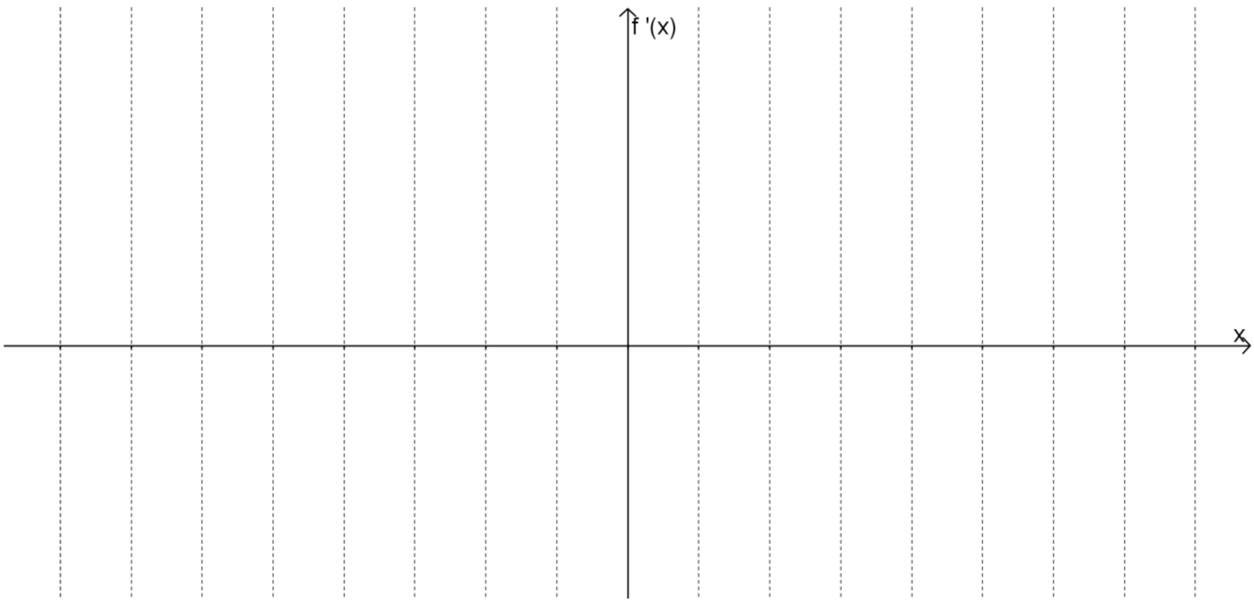

Abbildung 1.3

e) Gegeben sind die beiden Ansichten des gleichen Dreiecks ABC in den Abbildungen 1.4 und 1.5.

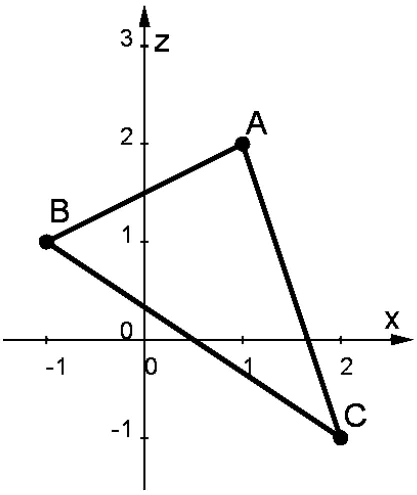

Abbildung 1.4

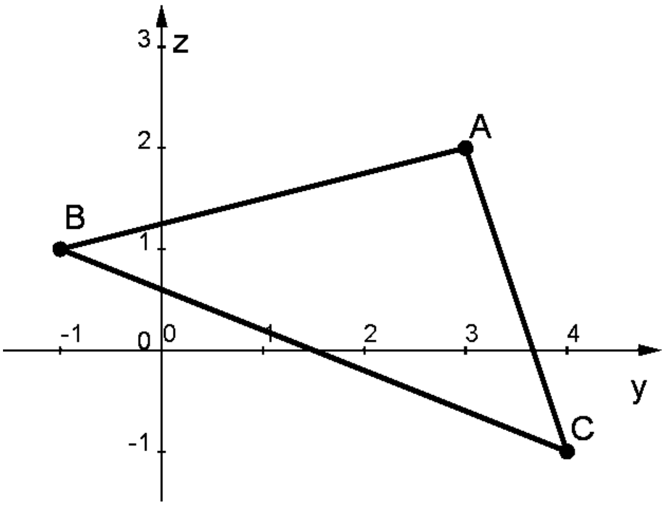

Abbildung 1.5

e1) Geben Sie die ganzzahligen Koordinaten der Punkte A, B und C an.

A(___|___|___) B(___|___|___) C(___|___|___)

e2) Zeichnen Sie die beiden weiteren Ansichten des Dreiecks ABC in die Koordinatensysteme (Abbildung 1.6).

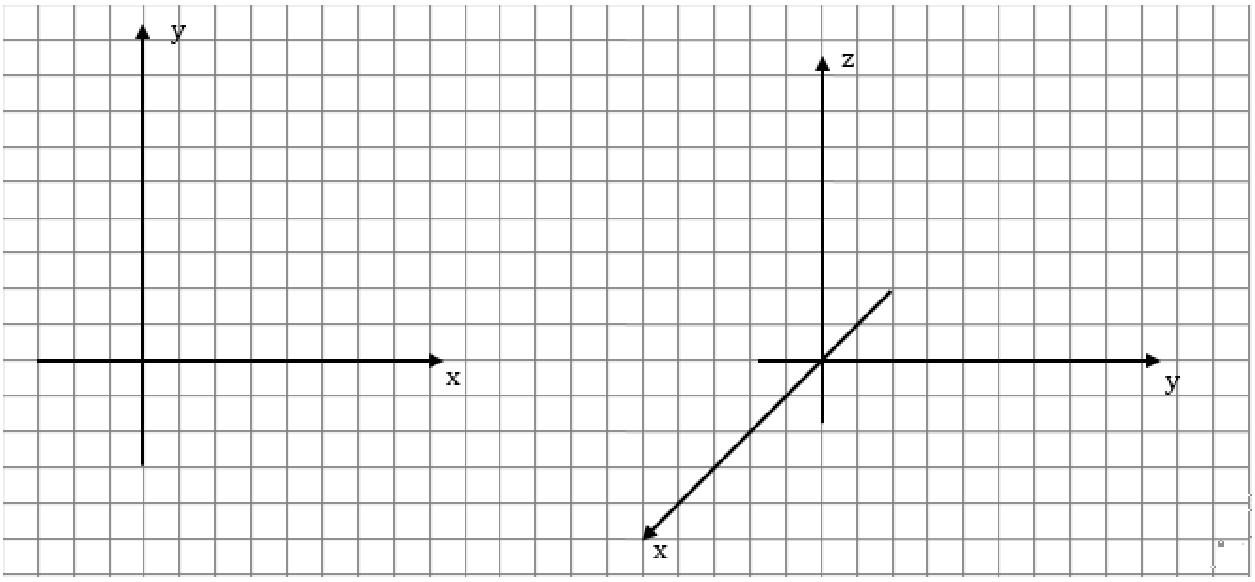

Abbildung 1.6

f) Gegeben ist die Ebene E mit E: $3x - 4y + 6z = 2$.

f1) Geben Sie eine Gleichung der Ebene E in Parameterform an.

f2) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Der Punkt $A\left(k \mid -\frac{1}{2} \mid -\frac{1}{2}k\right)$ liegt für jedes $k \in \mathbb{R}$ in der Ebene E.		
Die Gerade g mit $g: \vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ verläuft parallel zur Ebene E.		
Der Vektor $\vec{n}$ mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} -t \\ \frac{4}{3}t \\ -2t \end{pmatrix}$ ist für jedes $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ Normalenvektor der Ebene E.		

g) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 2 \end{pmatrix}$.

g1) Prüfen Sie, ob die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig (kollinear) sind und begründen Sie, warum die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ für kein t linear abhängig (kollinear) sein können.

g2) Berechnen Sie den Parameter t so, dass $|\vec{c}| = 7$ gilt.

h) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = r \cdot \vec{a} + \vec{b}$.

Bestimmen Sie den Parameter r so, dass der Vektor $\vec{v}$ orthogonal zum Vektor $\vec{a}$ ist.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 2** (Analytische Geometrie): **Seilbahn**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	4	5	6	6	4	3	6	6	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: a, b, c, … $\in \mathbb{R}$ und die Variablen: x, t, … $\in \mathbb{R}$.

Zur Steigerung der touristischen Attraktivität beschließt eine Gemeinde, einen nahe gelegenen Berghang zu einem Skigebiet auszubauen. Der Berghang lässt sich als Teil der Ebene E_w darstellen, ein Ausschnitt der Ebene ist in Abbildung 2.1 eingezeichnet. Eine Seilbahn soll die Touristen von der Talstation zur Bergstation hin- und zurückbefördern. Das Tragseil der Seilbahn ist im Tal im Punkt A(90 | 420 | 5) sowie im Berghang im Punkt B(30 | 30 | 78) befestigt. Um den Bau der Seilbahn zu planen, wird der Verlauf des Tragseils vom Ingenieurbüro als geradlinig angesehen. Die Seilbahn ist Teil der Geraden g_s mit

$$g_s\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 90 \\ 420 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -60 \\ -390 \\ 73 \end{pmatrix}.$$

Der prinzipielle Verlauf der Seilbahn sowie ein Ausschnitt des Berghangs sind in Abbildung 2.1 dargestellt. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.

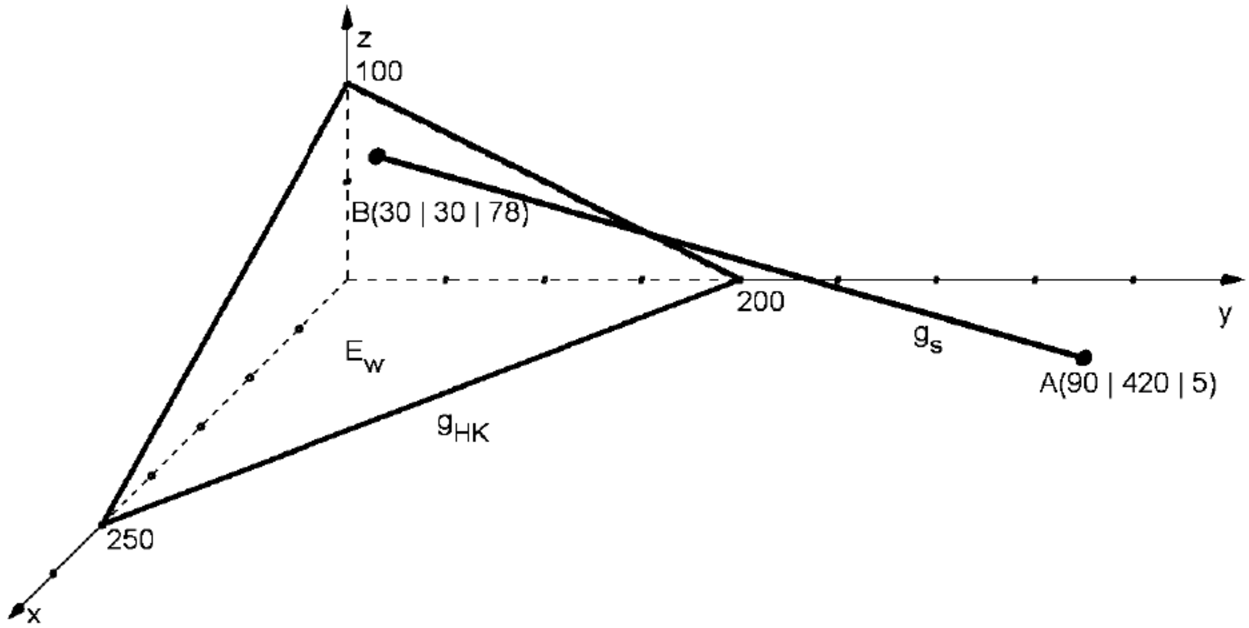

Abbildung 2.1

a) Leiten Sie die Gleichung der Geraden g_s aus den Vorgaben her.

Geben Sie einen im Sachzusammenhang sinnvollen Definitionsbereich für den Parameter t an.

Umfragen haben ergeben, dass Seilbahnen häufig von Touristen gemieden werden, wenn die Steigung größer als 40 % ist. Außerdem sollte die Fahrt auf der ca. 400 m langen Strecke nicht länger als fünf Minuten dauern.

b) Weisen Sie nach, dass die Steigung von 40 % nicht überschritten wird.

   Zeigen Sie, dass die zurückzulegende Strecke näherungsweise 400 m beträgt.

   Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit in Kilometern pro Stunde $\left(\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right)$ sich die Seilbahn mindestens bewegen muss, damit die gewünschte Fahrtzeit nicht überschritten wird.

Um im Zuge der Planung weitere Berechnungen durchführen zu können, modellieren die Ingenieure die Berghangkante in der x-y-Ebene mit Hilfe der Geraden g_{HK} (Abbildung 2.1), die durch die folgende Geradengleichung beschrieben werden kann:

$$g_{HK}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 250 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -250 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \leq r \leq 1$$

Zur Versorgung der Bergstation mit Elektrizität und Wasser soll im Berghang eine möglichst kurze, oberirdische Versorgungsleitung zwischen dem Fußpunkt $B_F(30 \mid 30 \mid 73)$ der Bergstation und der Berghangkante g_{HK} verlegt werden.
Pro laufenden Meter Versorgungsleitung müssen Kosten von 45,00 EUR veranschlagt werden. Die Gemeinde stellt einen Betrag von 6 000,00 EUR zur Verfügung.
Außerdem berichtet der Förster den Ingenieuren von einem Granitfelsen, der sich im Berghang befindet. Bei der Vermessung wird der Mittelpunkt des Granitfelsens im Punkt $G\left(\frac{938}{41} \,\middle|\, \frac{865}{41} \,\middle|\, \frac{429}{5}\right)$ verortet.

c) Beurteilen Sie, ob der Granitfelsen beim Verlegen der Versorgungsleitung im Weg sein wird.

   Untersuchen Sie, ob die von der Gemeinde zur Verfügung gestellte Summe ausreicht, um die entstehenden Kosten zu tragen.

Bei der Planung der Seilbahn muss auch die Sicherheit der Touristen, die die Seilbahn nutzen, berücksichtigt werden. In einem möglichen Unfallszenario bleibt die mit konstanter Geschwindigkeit von der Bergstation B aus kommende Seilbahn nach 20 % der Fahrzeit stehen. Die Fahrgäste würden in einem solchen Szenario, unterstützt von Bergrettern, von der Gondel aus abgeseilt werden. Der Notausstieg der Gondeln befindet sich vier Meter unterhalb des Tragseils. Den Berghang modellieren die Ingenieure als Teil der Ebene E_w mit

$$E_w: 4x + 5y + 10z = 1\,000.$$

d) Weisen Sie nach, dass der Berghang durch einen Ausschnitt der Ebene E_w modelliert werden kann.

   Bestimmen Sie, aus welcher lotrechten Höhe über dem Berghang die Fahrgäste abgeseilt werden müssten.

Am Berghang steht eine sturmgefährdete, senkrechte Tanne im Punkt T. Da zukünftig mit erhöhtem Personenverkehr in der Nähe der Tanne zu rechnen ist, muss zur Stabilisierung ein Stahlseil im Winkel von $\alpha = 45\,°$ an der Tanne angebracht und am Berghang im Punkt H verankert werden.

e) Erläutern Sie anhand einer eigenen Skizze ein mögliches Vorgehen zur Bestimmung der Höhe, in der das Stahlseil an der Tanne angebracht werden muss (konkrete Rechnungen sind nicht erforderlich).

Am Rand des Berghanges befindet sich eine Felswand. Diese kann als Teil der x-z-Ebene beschrieben werden. Die Ingenieure berechnen zunächst folgenden Ausdruck:

$$\arccos\left(\frac{\left|\begin{pmatrix}4\\5\\10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}4\\5\\10\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right|}\right)$$

f) Geben Sie das Ergebnis des Ausdrucks an und

erläutern Sie, was mit diesem Ausdruck im Sachzusammenhang berechnet wurde.

Ein kleiner Vorsprung an der Felswand in V(30 | 0,5 | 200) dient Fallschirmspringern mit einem Wingsuit (Flügelanzug) als Startpunkt für spektakuläre Flüge. Die Fallschirmspringer springen in y-Achsenrichtung ab und legen auf einem Meter Sinkflug zwischen 2 und 2,5 Meter Horizontalflug zurück. Die Flugbahn kann als geradlinig angesehen werden. Aus Sicherheitsgründen müssen die Fallschirmspringer jederzeit während des Fluges einen Mindestabstand von 50 Metern zur geplanten Seilbahn einhalten.

g) Prüfen Sie, ob der Vorsprung auch nach der Fertigstellung der Seilbahn weiterhin von den Fallschirmspringern genutzt werden kann.

Tatsächlich verläuft das Tragseil der Seilbahn nicht wie ursprünglich angenommen linear. Das Tragseil beschreibt einen parabelförmigen Bogen zwischen den Punkten C und D (Abbildung 2.2, die Achsen bilden ein von Abbildung 2.1 unabhängiges, neues Koordinatensystem). Im Punkt D hat das Tragseil keine Steigung.

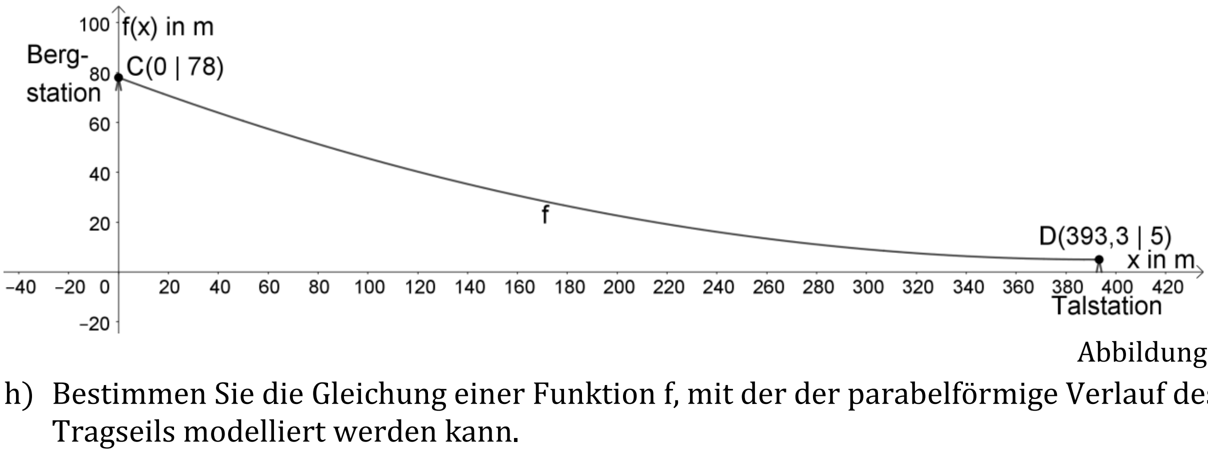

Abbildung 2.2

h) Bestimmen Sie die Gleichung einer Funktion f, mit der der parabelförmige Verlauf des Tragseils modelliert werden kann.

Erläutern Sie, warum sich aus $|\overline{CD}| = 400$ der Definitionsbereich $D(f) = [0; 393{,}3]$ ergibt.

Untersuchen Sie, ob die gewünschte maximale Steigung von 40 % auch mit dem neu modellierten Verlauf der Seilbahn eingehalten wird.

Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1** (hilfsmittelfreier Teil):

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	5	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

a) Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = -2x^3 + 2x.$$

a1) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.

a2) Bestimmen Sie a mit $0 \leq a \leq 1$ so, dass folgende Gleichung gilt:

$$\int_0^a f(x)dx = 0{,}5$$

a3) Beurteilen Sie ohne Rechnung, ob die folgende Ungleichung gilt:

$$\int_{-1}^2 f(x)dx < 0$$

b) Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$f(x) = a \cdot \cos\big(b \cdot (x - c)\big) + d \quad \text{mit} \quad a, b \neq 0$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Es gilt immer: $f(c) = 0$		
Die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Funktionswert beträgt $\lvert a \rvert$.		
Für $\lvert d \rvert \leq \lvert a \rvert$ besitzt der Graph von f unendlich viele Nullstellen.		
Der Graph von f ist immer punktsymmetrisch zum Ursprung.		
$F(x) = \frac{a}{b} \cdot \sin\big(b \cdot (x - c)\big) + d \cdot x$ ist die Gleichung einer Stammfunktion von f.		

c) In Abbildung 1.1 sind die Graphen von drei verschiedenen natürlichen Exponentialfunktionen der Form $f(x) = a \cdot e^{b \cdot x - c}$ dargestellt.

c1) Ordnen Sie begründet der Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{2x-4}$$

den zugehörigen Graphen f_1, f_2 oder f_3 zu.

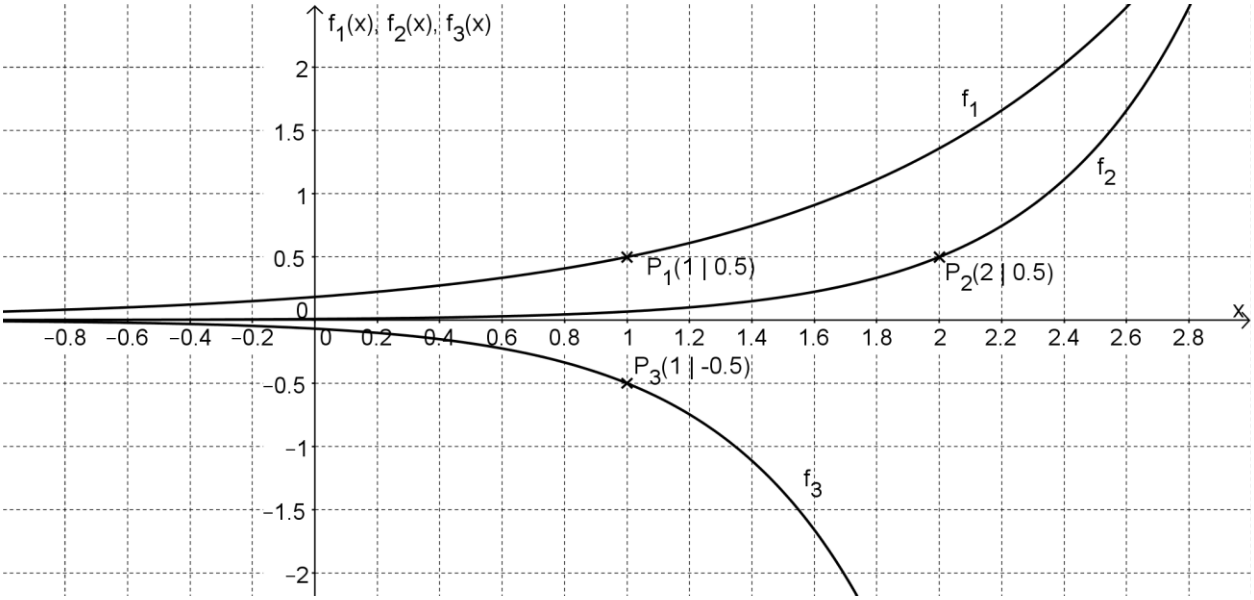

Abbildung 1.1

c2) Geben Sie die Funktionsgleichung des Graphen der Funktion g an, der aus dem Graphen der Funktion f durch Verschiebung um -2 in Abszissenrichtung und um 1 in Ordinatenrichtung hervorgeht.

c3) Leiten Sie die 1. Ableitung der Funktion k mit der Gleichung

$$k(x) = \frac{1}{2} x^2 \cdot e^x$$

her.

d) In Abbildung 1.2 ist der Graph f einer ganzrationalen Funktion vierten Grades abgebildet.

d1) Skizzieren Sie den Ableitungsgraphen der Funktion f in das Koordinatensystem in Abbildung 1.3.

d2) Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Die Stammfunktion F der Funktion f besitzt mindestens eine Nullstelle und genau drei Wendepunkte.

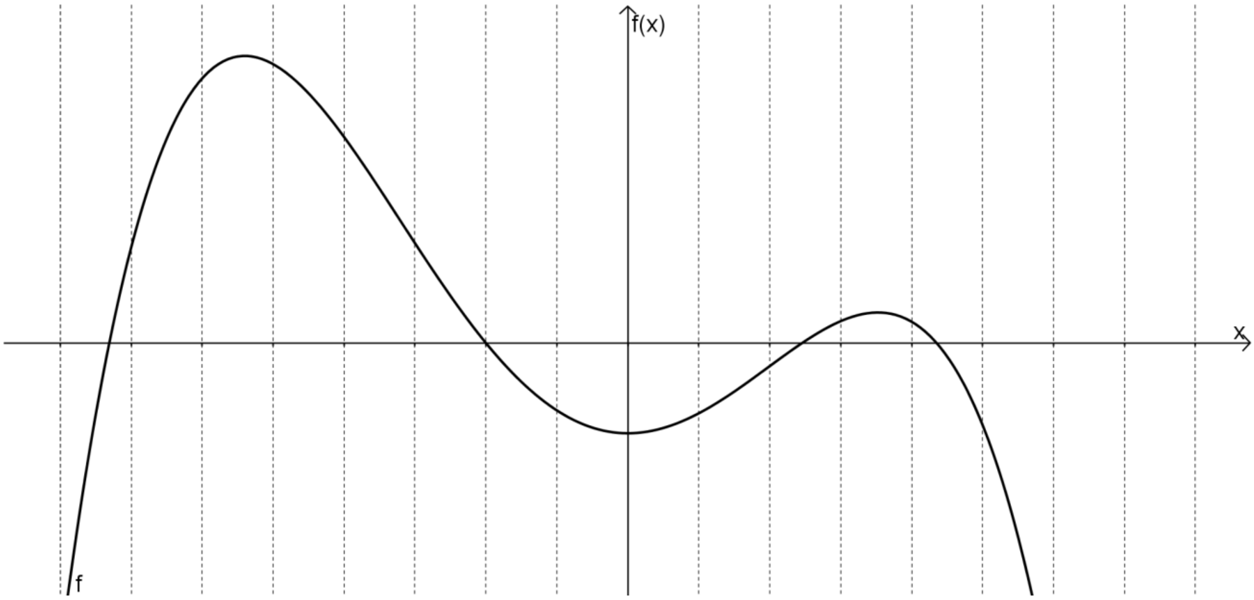

Abbildung 1.2

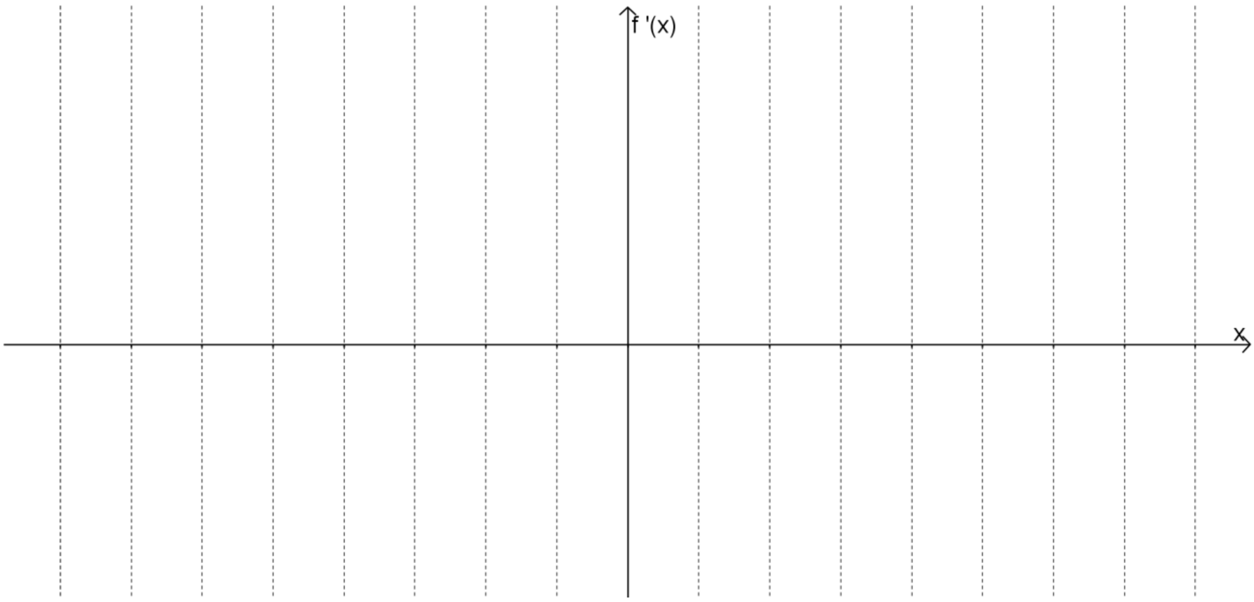

Abbildung 1.3

e) Gegeben ist das folgende Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{llllr} x & -y & & = & -1 \\ x & +y & -4z & = & 7 \\ x & -3y & +(r+4)z & = & -7 \end{array} \right|$$

e1) Geben Sie für das Gleichungssystem eine Matrizengleichung an.

e2) Berechnen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems in Abhängigkeit vom Parameter r.

f) Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0{,}5 & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 3 & 0{,}5 \\ 2 & c_{22} \end{pmatrix}.$$

f1) Berechnen Sie m_{11} so, dass die folgende Gleichung gilt:

$$M \cdot L = L \cdot M$$

f2) Ermitteln Sie die Elemente der Matrix $X_{(2,2)}$:

$$2 \cdot A \cdot B^3 - A^T + X = C$$

g) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

<u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Durch Addition einer 2 x 4-Matrix mit einer 4 x 3-Matrix ergibt sich eine 2 x 3-Matrix.		
Sind die Matrizen A und B invertierbar und vom gleichen Typ, dann ist $A \cdot (B^{-1})^{-1}$ definiert.		
Für die Multiplikation einer quadratischen Matrix D mit der Einheitsmatrix E und einem Skalar a gilt: $D \cdot E \cdot a = a \cdot D$.		
Sind zwei invertierbare Matrizen A und B vom gleichen Typ, dann gilt: $A + B = B + A \Rightarrow A \cdot B = B \cdot A$.		
Ist G eine 2 x 2–Grenzmatrix einer Verteilung und $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ein Fixvektor dieser Verteilung, dann gilt: $G = \begin{pmatrix} \frac{x}{x+y} & \frac{x}{x+y} \\ \frac{y}{x+y} & \frac{y}{x+y} \end{pmatrix}$		

h) Ein Übergangsprozess kann mit der Übergangsmatrix $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}75 \\ 0{,}5 & 0{,}25 \end{pmatrix}$ beschrieben werden. Gegeben ist die folgende Gleichung:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass eine Lösung für $x + y = 1$ existiert und

erläutern Sie die Bedeutung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Name des Prüflings	
Zeitpunkt der Abgabe	

Punkteverteilung **Aufgabe 2** (Lineare Algebra)**: Schweinswale**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	5	4	6	5	6	5	4	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

In einem Projekt untersucht eine Klasse eines Beruflichen Gymnasiums die Populationsentwicklung von Schweinswalen in einem begrenzten Gebiet. Dieses Gebiet kann aufgrund der geografischen Lage als abgeschlossenes Biotop betrachtet werden, so dass keine Schweinswale zu- oder abwandern. Nach ihrer Recherche gehen die Schülerinnen und Schüler davon aus, dass sich Schweinswale in die vier Altersstufen Kälber (K), Jungtiere (J), erwachsene Tiere (E) und Alttiere (A) einteilen lassen, in der die Tiere unterschiedlich lange verbleiben. Die jährliche Populationsentwicklung lässt sich durch die Matrix M darstellen.

Wechselverhalten innerhalb eines Jahres		von			
		K	**J**	**E**	**A**
nach	**K**	0	0	0,45	0
	J	0,75	0,45	0	0
	E	0	0,33	0,75	0
	A	0	0	0,05	0,6

Tabelle 2.1

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}45 & 0 \\ 0{,}75 & 0{,}45 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}33 & 0{,}75 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Verschiedene Zählungen zu Beginn des Jahres 2006 ließen auf einen Bestand von etwa 40 Kälbern, 60 Jungtieren, 200 erwachsenen Tieren und 30 Alttieren schließen. Sinkt der Bestand einer Schweinswalpopulation unter 30 Tiere, gilt sie unter Biologen als Restpopulation, die auf Grund der geringen genetischen Vielfalt vom Aussterben bedroht ist.

Eine Schülerin der Klasse behauptet, dass

- nur die erwachsenen Tiere (E) fortpflanzungsfähig sind,
- die Sterberate bei den Jungtieren (J) am höchsten ist und
- die Population in 20 Jahren vom Aussterben bedroht sein wird.

a) Stellen Sie das Wechselverhalten durch einen geeigneten Graphen dar.

Beurteilen Sie die drei Aussagen der Schülerin.

Da eine Zählung der Tiere auf Grund der Größe des Biotops sehr aufwändig ist, existieren für die meisten Jahre nur von Experten geschätzte Werte. Eine solche Expertenschätzung prognostizierte ausgehend von den Daten der Zählung zu Beginn des Jahres 2006 einen Gesamtbestand von etwa 320 bis 350 Tieren für den Beginn des Jahres 2008.

b) Zeigen Sie, dass die von den Schülerinnen und Schülern erstellte Matrix M zu einer ähnlichen Prognose für das Jahr 2008 führt wie die der Experten.

Geben Sie für $M^2 = S$ das Matrizenelement s_{12} an und

interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.

Für die Jahre vor 2006 findet die Klasse keine Daten zum Bestand der Schweinswale in diesem Biotop. Ein Schüler behauptet, dass man den Gesamtbestand zu Beginn des Jahres 2005 mit folgendem Ansatz berechnen kann:

$$(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1) \cdot M^{-1} \cdot \vec{p}_0 \approx (373) \quad \text{mit } \vec{p}_0 = (40 \quad 60 \quad 200 \quad 30)^T$$

c) Geben Sie an, unter welcher Voraussetzung der Rechenansatz des Schülers für die Rekonstruktion der Daten des Vorjahres verwendet werden kann und

erläutern Sie den Rechenansatz.

Begründen Sie anhand des Kälberbestands, dass das Ergebnis in diesem Fall nicht verwendet werden kann.

Während ihrer Projektarbeit erfahren die Schülerinnen und Schüler von einem Biologen der Universität Kiel, dass die betrachtete Population seit Beginn des Jahres 2017 von einem besonders hartnäckigen Krankheitserreger befallen ist. Der Befall beeinflusst sowohl die Fortpflanzungsrate bei den erwachsenen Tieren als auch die Kälbersterblichkeit.

Zu Beginn des Jahres 2017 gab es in diesem Biotop nach Expertenschätzung 70 Kälber, 100 Jungtiere, 140 erwachsene Tiere und 20 Alttiere. Die aufgrund des Erregerbefalls durchgeführte aufwändige Zählung zu Beginn des Jahres 2018 ergab 32 Kälber, 83 Jungtiere, 138 erwachsene Tiere und 19 Alttiere. Die Schülerinnen und Schüler wollen auf Grundlage des Anfangsbestands von 2017 den Einfluss des Erregers auf die zukünftigen Gesamtbestände ermitteln.

$$M_{neu} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{0{,}23} & 0 \\ \boxed{0{,}54} & 0{,}45 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}33 & 0{,}75 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

d) Leiten Sie die aufgrund des Erregerbefalls veränderten Elemente der Matrix M_{neu} her und

vergleichen Sie den theoretischen Gesamtbestand zu Beginn des Jahres 2020 ohne Erregerbefall von ca. 298 Tieren mit dem Gesamtbestand nach dem Erregerbefall.

Der Biologe informiert die Klasse darüber, dass über den Jahreswechsel von 2018 nach 2019 eine Gruppe Schweinswale eingewandert ist und sich der bestehenden Population angeschlossen hat. Aus den verschiedenen Beobachtungen konnte rekonstruiert werden, dass es sich um hierbei vier Kälber, acht Jungtiere und sechs Alttiere handelt. Die Angaben zur Anzahl der erwachsenen Tiere (E) schwanken jedoch stark.

Die Biologen der Universität Kiel hoffen, dass bei einer ausreichend großen Anzahl eingewanderter erwachsener Tiere (E) der Gesamtbestand trotz des Erregerbefalls zu Beginn des Jahres 2020 bei über 300 Tieren liegen wird. Sie gehen dabei davon aus, dass der Erreger sich auf die neu eingewanderten Tiere genauso auswirkt wie auf den bisherigen Bestand.

e) Ermitteln Sie, ab welcher Anzahl eingewanderter erwachsener Tiere (E) nach diesem Modell der Gesamtbestand zu Beginn des Jahres 2020 bei über 300 Tieren liegen würde.

Der Bestand der Schweinswale wird durch Stellnetzfischerei zunehmend bedroht. Daher werden zum Schutz der Schweinswale sogenannte „Pinger“ eingesetzt. Sie warnen die Schweinswale vor den Netzen mit akustischen Signalen. Zu ihrer Herstellung werden die unterschiedlichen, vorgefertigten Metallstangen M_1 und M_2 sowie Metallblöcke M_3 verwendet. Die daraus hergestellten Rohbehälter und Deckel sind die Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4, aus denen schließlich die drei für einen Pinger benötigten Bauteile B_1, B_2 und B_3 gefertigt werden. Ein Pinger besteht aus jeweils einem Bauteil B_1, B_2 und B_3. Die Produktionsmatrizen für verschiedenen Produktionsstufen können zum Teil den Tabellen 2.2 bis 2.4 entnommen werden.

Ausgangsprodukt-Zwischenprodukt-Tabelle

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
M_1	0			1
M_2		0	0	
M_3	0		1	0

Tabelle 2.2

Zwischenprodukt-Bauteile-Tabelle

	B_1	B_2	B_3
Z_1	2	2	1
Z_2	1	3	5
Z_3	2	0	3
Z_4	0	4	2

Tabelle 2.3

Ausgansprodukt-Bauteile-Tabelle

	B_1	B_2	B_3
M_1	4	4	8
M_2	2	6	3
M_3	4	6	13

Tabelle 2.4

Ein Produktionsbetrieb wird von einem Fischerei-Verband beauftragt, 30 Pinger zu fertigen. Die Metallstangen M_1 und M_2 sind in ausreichender Menge im Lager vorhanden, von den Metallblöcken M_3 befinden sich jedoch nur 20 Stück im Lager. Der Produktionsleiter bestellt die zusätzlich benötigten Metallblöcke bei einem Lieferanten.

f) Vervollständigen Sie die Ausgangsprodukt-Zwischenprodukt-Tabelle und

ermitteln Sie, wie viele Metallblöcke M_3 für die Herstellung der 30 Pinger mindestens bestellt werden müssen.

Einige Wochen später überprüft der Produktionsleiter den Lagerbestand und stellt fest, dass sich 60 Metallstangen M_1, 44 Metallstangen M_2 sowie 78 Metallblöcke M_3 im Lager befinden. Da der Lagerplatz aufgelöst werden soll, gibt er den Auftrag an die Produktionsstraße, so viele Pinger zu produzieren, dass der Lagerbestand restlos aufgebraucht wird.

g) Entscheiden Sie begründet, ob der Lagerplatz aufgelöst werden kann und

bestimmen Sie, wie viele Pinger maximal mit dem Lagerbestand produziert werden können.

In den Tabellen 2.5 und 2.6 werden die Einkaufsstückkosten für die Metallbauteile bzw. die Fertigungsstückkosten für die Zwischenprodukte angegeben. Die Kosten sind zum Teil abhängig vom Parameter c mit $c > \frac{4}{3}$ angegeben.

	M_1	M_2	M_3
Einkaufskosten in EUR pro Stück	5	$3c - 4$	1

Tabelle 2.5

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
Fertigungskosten in EUR pro Stück	2	$c + 2$	4	$c - 1$

Tabelle 2.6

Die Kosten für die Endmontage eines Pingers betragen 13,00 EUR. Die Gesamtkosten H für die Herstellung eines Pingers sollen den Wert von 210,00 EUR nicht übersteigen.

Laut Hersteller können die Gesamtkosten H_c in EUR für die Produktion eines Pingers in Abhängigkeit vom Parameter c durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$H_c = 48c + 114$$

h) Leiten Sie die Gleichung H_c her und

ermitteln Sie den Wert, den der Parameter c maximal annehmen darf, so dass der Kostenrahmen eingehalten werden kann.

Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1** (hilfsmittelfreier Teil):

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	5	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

a) Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = -2x^3 + 2x.$$

a1) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.

a2) Bestimmen Sie a mit $0 \leq a \leq 1$ so, dass folgende Gleichung gilt:

$$\int_0^a f(x)dx = 0{,}5$$

a3) Beurteilen Sie ohne Rechnung, ob die folgende Ungleichung gilt:

$$\int_{-1}^2 f(x)dx < 0$$

b) Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$f(x) = a \cdot \cos\big(b \cdot (x - c)\big) + d \quad \text{mit} \quad a, b \neq 0$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Es gilt immer: $f(c) = 0$		
Die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Funktionswert beträgt $\lvert a\rvert$.		
Für $\lvert d\rvert \leq \lvert a\rvert$ besitzt der Graph von f unendlich viele Nullstellen.		
Der Graph von f ist immer punktsymmetrisch zum Ursprung.		
$F(x) = \frac{a}{b} \cdot \sin\big(b \cdot (x - c)\big) + d \cdot x$ ist die Gleichung einer Stammfunktion von f.		

c) In Abbildung 1.1 sind die Graphen von drei verschiedenen natürlichen Exponentialfunktionen der Form $f(x) = a \cdot e^{b \cdot x - c}$ dargestellt.

c1) Ordnen Sie begründet der Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{2x-4}$$

den zugehörigen Graphen f_1, f_2 oder f_3 zu.

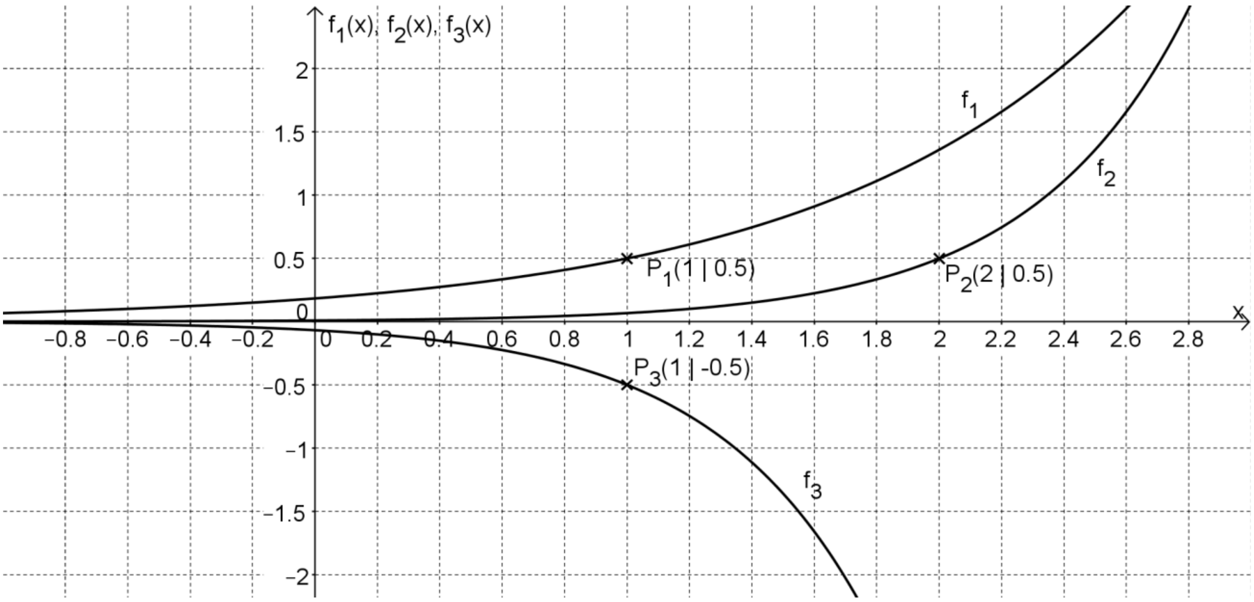

Abbildung 1.1

c2) Geben Sie die Funktionsgleichung des Graphen der Funktion g an, der aus dem Graphen der Funktion f durch Verschiebung um -2 in Abszissenrichtung und um 1 in Ordinatenrichtung hervorgeht.

c3) Leiten Sie die 1. Ableitung der Funktion k mit der Gleichung

$$k(x) = \frac{1}{2} x^2 \cdot e^x$$

her.

d) In Abbildung 1.2 ist der Graph f einer ganzrationalen Funktion vierten Grades abgebildet.

d1) Skizzieren Sie den Ableitungsgraphen der Funktion f in das Koordinatensystem in Abbildung 1.3.

d2) Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Die Stammfunktion F der Funktion f besitzt mindestens eine Nullstelle und genau drei Wendepunkte.

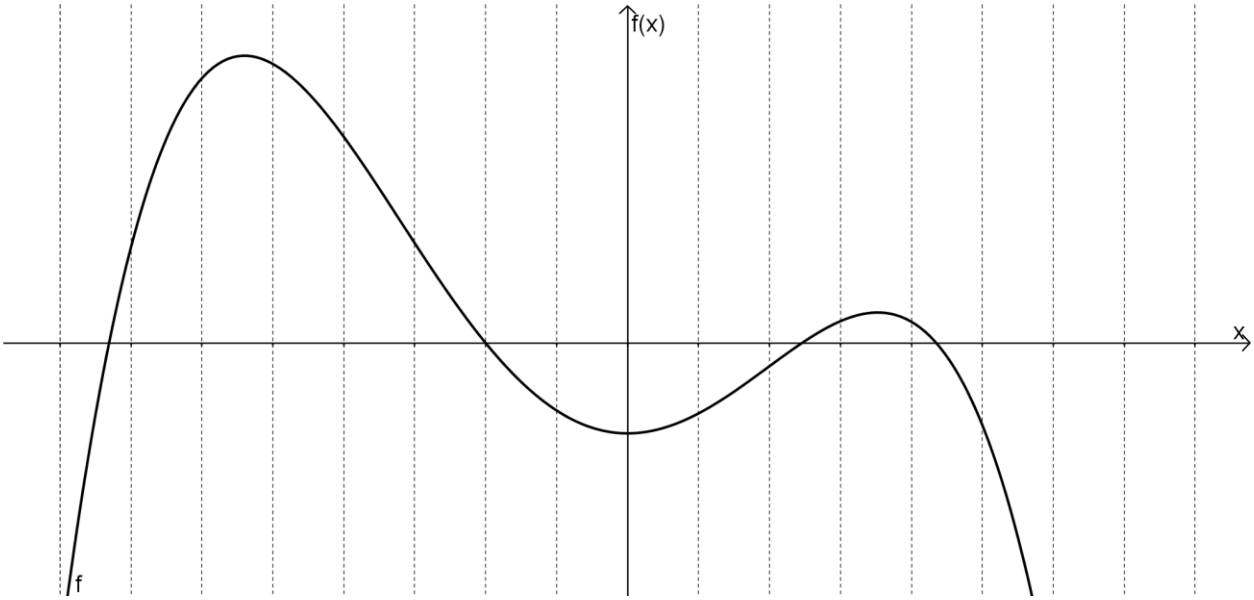

Abbildung 1.2

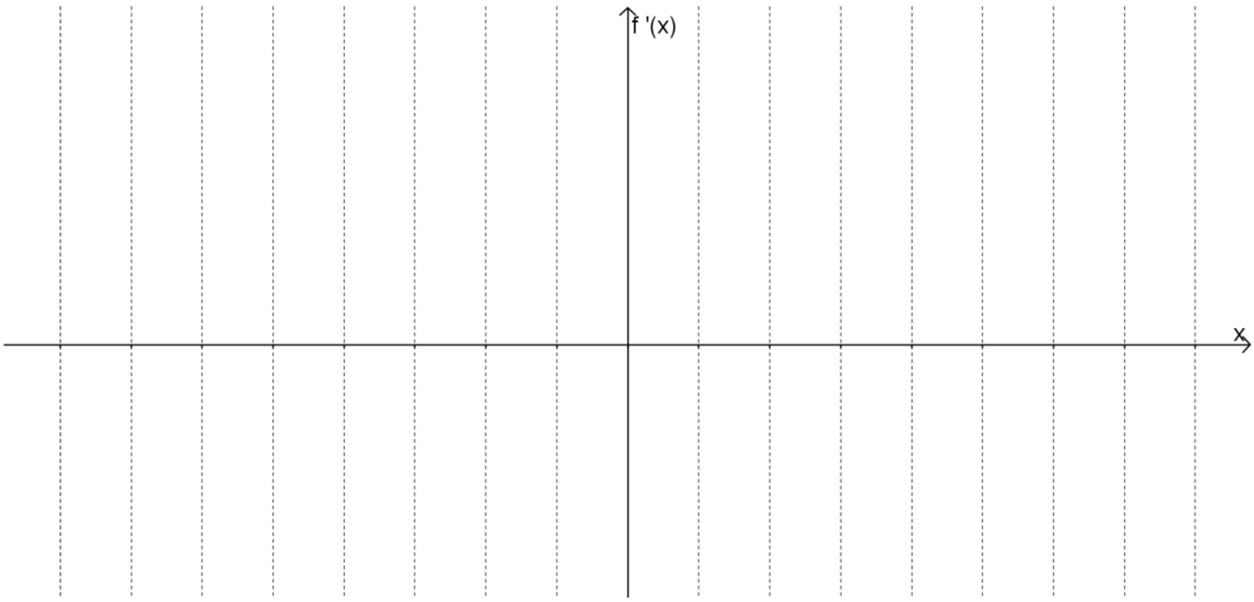

Abbildung 1.3

e) In Abbildung 1.4 ist eine Binomialverteilung X mit der Kettenlänge $n = 5$ und einer Eintrittswahrscheinlichkeit von $p = 0{,}4$ dargestellt. Folgende Wahrscheinlichkeiten sind bekannt:

$$P(X \leq \mu) = 0{,}68256 \text{ und } P(X < \mu) = 0{,}33696$$

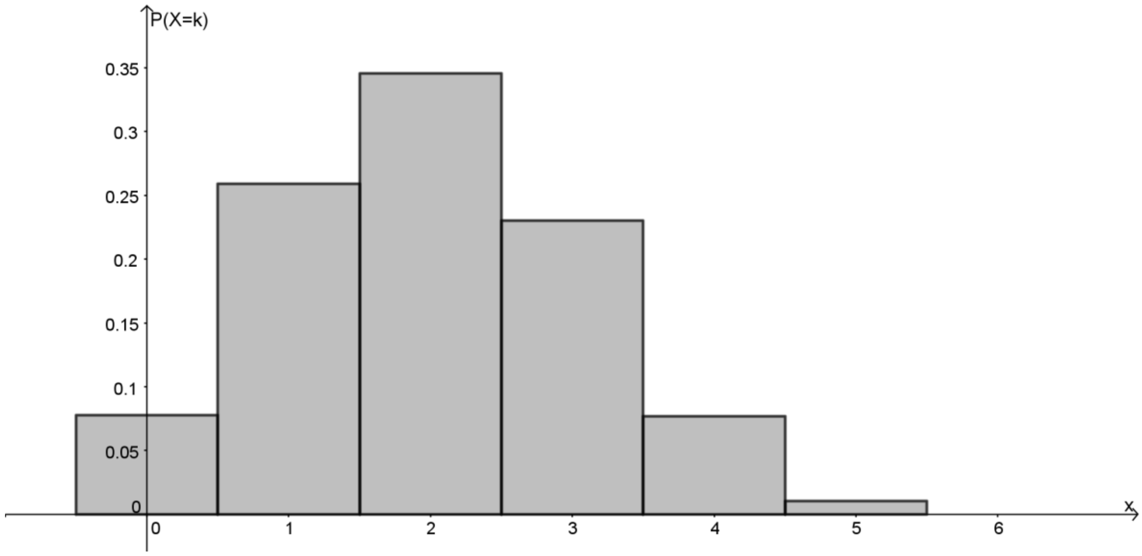

Abbildung 1.4

e1) Geben Sie den Erwartungswert μ sowie die Wahrscheinlichkeit $P(X = \mu)$ an.

e2) Markieren Sie die Säulen, die zur Wahrscheinlichkeit $P(X > \mu)$ im Säulendiagramm (Abbildung 1.4) gehören.

Eine zweite Binomialverteilung Y hat eine Kettenlänge von $n = 10$ und eine Standardabweichung von $\sigma = \sqrt{\frac{8}{5}}$.

e3) Zeigen Sie, dass zwei mögliche Trefferwahrscheinlichkeiten p_1 und p_2 existieren, die dieser Binomialverteilung zugrunde liegen können und

geben Sie die Werte für p_1 und p_2 an.

f) Ein idealer Würfel hat die in Abbildung 1.5 abgebildeten Seitenflächen, auf denen jeweils zwei der Symbole (Karo (♢), Herz (♡), Pik (♠) und Kreuz (♣)) abgebildet sind.

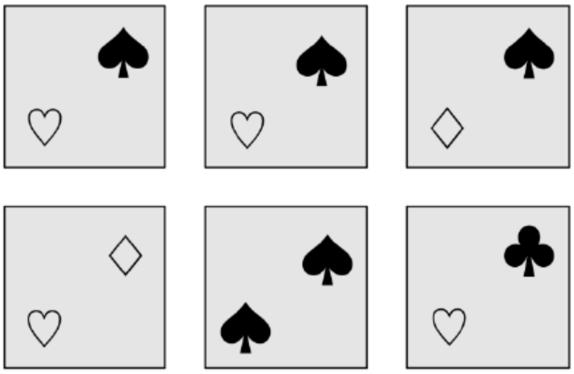

Abbildung 1.5

Der Würfel wird einmal geworfen. Für die Ereignisse A und B gilt:

- Ereignis A: „Maximal ein Pik“
- Ereignis B: „Ein Herz“.

f1) Vergleichen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und B miteinander.

In einem weiteren Experiment wird der Würfel zweimal geworfen. Erfasst wird die Anzahl der Pik-Symbole. Dieses zweite Experiment liegt dem in Abbildung 1.6 unvollständig gezeichneten Baumdiagramm zugrunde.

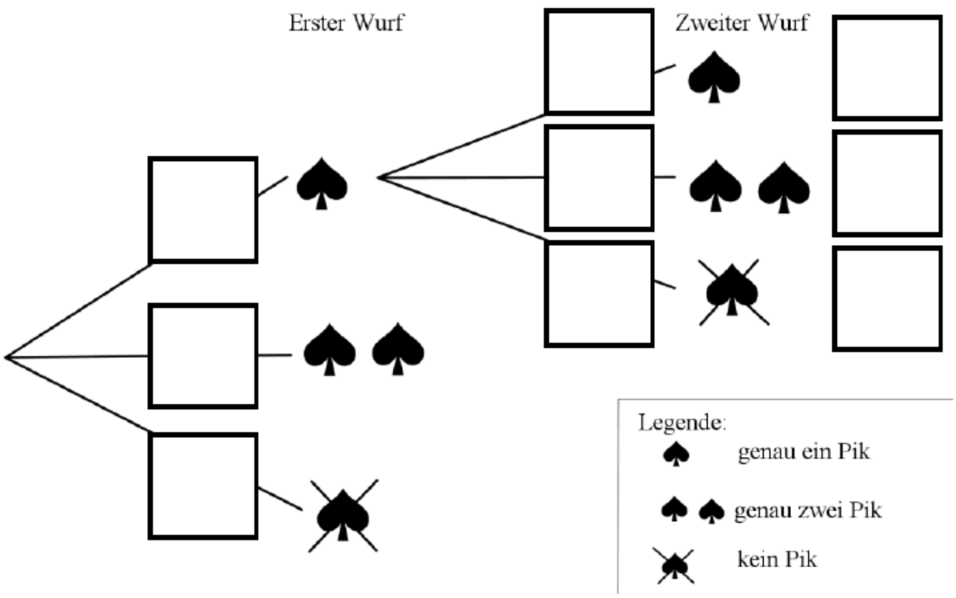

Abbildung 1.6

f2) Ergänzen Sie die in Abbildung 1.6 fehlenden Wahrscheinlichkeiten.

f3) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei beiden Würfen zusammen mindestens ein Pik zu sehen ist.

g) Gegeben ist die folgende Vierfeldertafel (Tabelle 1.1), aus der ersichtlich ist, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Ereignisse A und B sowie deren Gegenereignisse $\overline{A}$ und $\overline{B}$ eintreten.

P	A	$\overline{A}$	Summe
B			20 %
$\overline{B}$	64 %		
Summe	80 %		100 %

Tabelle 1.1

g1) Ergänzen Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten in der Vierfeldertafel (Tabelle 1.1).

g2) Zeichnen Sie ein vollständiges Baumdiagramm, aus dem die Wahrscheinlichkeit $P_A(B)$ (alternative Schreibweise $P(B|A)$) abgelesen werden kann.

g3) Prüfen Sie, ob die Ereignisse A und B stochastisch abhängig sind.

h) Für das Merkmal X ist die folgende Urliste gegeben:

8	7	10	3	8	6	8	6

Tabelle 1.2

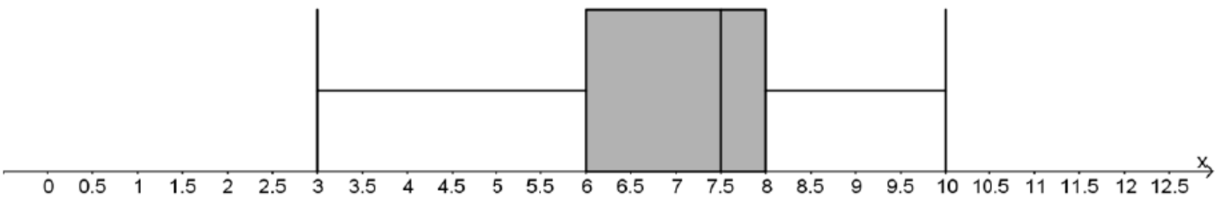

Abbildung 1.7

h1) Geben Sie das arithmetische Mittel an: $\bar{x} =$ $\boxed{}$

h2) Erstellen Sie eine sortierte Urliste und

prüfen Sie, ob dem Boxplot (Abbildung 1.7) die Urliste (Tabelle 1.2) zugrunde liegen kann.

Name des Prüflings	

Punkteverteilung **Aufgabe 2** (Stochastik)**: Gummibärchen**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	i	gesamt
Erreichbar	3	3	6	4	4	4	7	6	3	40
Erstkorrektur										
Zweitkorrektur										

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Ob Schokolade, Bonbons oder Lakritz, verschiedenste Leckereien versüßen vielen von uns den Tag und dies nicht nur zu Weihnachten oder zu Ostern. Lilli und Max favorisieren unter allen Süßigkeiten Gummibärchen. Natürlich hat jeder dabei eine andere Lieblingsgeschmacksrichtung. Bei Lilli ist dies Zitrone und Max mag eher Himbeere.

Als Lilli und Max sich eine Tüte Gummibärchen teilen, ärgert sich Lilli darüber, dass die Zitronenbärchen in der Tüte immer viel zu schnell leer sind und äußert die Vermutung, dass Zitronenbärchen bestimmt am wenigsten in der Tüte vorkommen. Max vermutet eher, dass alle Geschmacksrichtungen gleich häufig in einer Tüte vorhanden sind.

Um die Vermutungen zu überprüfen, schüttet Max eine Tüte auf einem Tisch aus und sortiert die Gummibärchen nach ihrer Geschmacksrichtung. Zur übersichtlicheren Ergebnisbetrachtung möchte Max die Sortierung in der folgenden Tabelle 2.1 zusammenfassen.

Geschmacksrichtung x_i	Himbeere	Zitrone	Apfel	Erdbeere	Saftorange	Ananas	Summe
Absolute Häufigkeit $H(x_i)$ in Stück	18		30		36	27	150
Relative Häufigkeit $h(x_i)$ in Prozent	12			14		18	

Tabelle 2.1

a) Ergänzen Sie die fehlenden Werte in der Tabelle 2.1.

Im Internet hat Max einen Bericht des Schülers Leon gefunden, der eine XL-Tüte Gummibärchen mit 200 Gummibärchen untersucht hat. Leon hat seine Ergebnisse mithilfe eines Kreisdiagramms (Abb. 2.1) dargestellt. Aufgrund ihrer farblichen Ähnlichkeit wurden Zitronen- und Ananasgummibärchen zusammengefasst dargestellt. Er schreibt in seinem Bericht, dass er sich später noch einmal beide Sorten genauer angeschaut habe und es fünf Ananasgummibärchen mehr gab als Zitronengummibärchen.

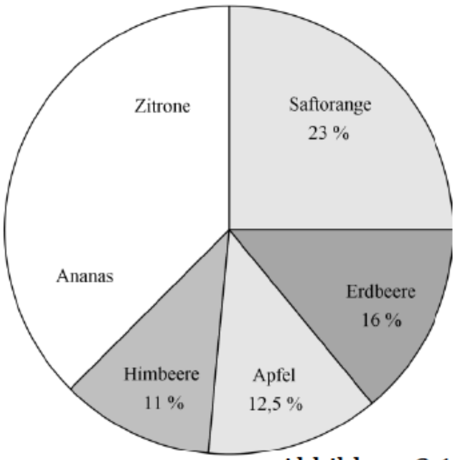

Abbildung 2.1

b) Vervollständigen Sie das Kreisdiagramm (Abbildung 2.1) und

ergänzen Sie die beiden fehlenden relativen Häufigkeiten.

Lilli findet, dass der Inhalt einer Tüte Gummibärchen für eine statistische Betrachtung nicht ausreichend ist. Aus Ihrer Vorratsschublade holt sie 10 Tüten Gummibärchen und sortiert deren Inhalt auf dem Tisch. Dabei erfasst Lilli jeweils immer die Gesamtanzahl an Gummibärchen sowie die Anzahl an Zitronengummibärchen je Tüte. Ihre Ergebnisse hält sie in der Tabelle 2.2 fest.

Tüte	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Zitronengummibärchen in Stück	17	27	29	22	25	26	30	20	21	23
Gummibärchen in Stück	155	153	150	151	153	152	154	152	155	152

Tabelle 2.2

c) Erläutern Sie aus mathematischer Sicht, warum Lilli die Betrachtung von nur einer Tüte Gummibärchen nicht ausreicht,

bestimmen Sie die Standardabweichung der Datenreihe „Zitronengummibärchen“,

geben Sie den Modalwert (Modus) der Datenreihe „Gummibärchen“ in den von Lilli untersuchten 10 Tüten Gummibärchen an und

erläutern Sie die Bedeutung dieses Modalwertes im Sachzusammenhang.

Max organisiert für sich und Lilli eine Werksbesichtigung bei ihrem Lieblingsgummibärchenhersteller. Bei der Besichtigung berichten Lilli und Max dem Werksmitarbeiter von ihren getätigten Auszählungen. Dieser gibt an, dass versucht wird, alle sechs Geschmacksrichtungen bei der Abfüllung zu gleichen Anteilen in die Gummibärchentüten zu füllen. Abweichungen sind der Automatisierung geschuldet.

An einem Förderband, auf dem alle Gummibärchen gut durchmischt an Lilli und Max vorbeifahren, fragt Lilli, ob sie ein paar Gummibärchen probieren dürfte, woraufhin der Mitarbeiter einen automatischen Auswurf aktiviert. Lilli hofft natürlich vor allem auf Zitronengummibärchen.

d) Erläutern Sie, unter welchen Bedingungen die Anzahl der Zitronengummibärchen am automatischen Auswurf vom Förderband als binomialverteilte Zufallsvariable betrachtet werden kann.

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die Zufallsvariable X: „Anzahl der Zitronengummibärchen“ binomialverteilt ist. Bei der einmaligen Betätigung des Auswurfs am Förderband werden 300 Gummibärchen ausgeworfen.

Der Mitarbeiter behauptet, dass mehr als 100 Zitronengummibärchen nicht möglich seien und zeigt folgende Rechnung:

$$P(X > 100) = \sum_{i=101}^{300} \binom{300}{i} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{i} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{300-i} = 0\,\%.$$

e) Beweisen oder widerlegen Sie die Behauptung des Mitarbeiters.

Der Mitarbeiter behauptet weiter, dass in weniger als 80 % der Fälle maximal 54 Zitronengummibärchen in solch einem Auswurf vorhanden seien.

f) Prüfen Sie mit Hilfe der Binomialverteilung den Wahrheitsgehalt dieser Behauptung.

Lilli ist immer noch der Meinung, dass deutlich weniger Zitronengummibärchen als andere Geschmacksrichtungen in den Gummibärchentüten vorkommen und deshalb die Automatisierung der Abfüllung verbessert werden müsste.

Der Mitarbeiter gibt an, dass die Abfüllanlage täglich auf deren Genauigkeit getestet wird. Dabei wird eine Probe von 1 500 Gummibärchen entnommen, welche anschließend nach Geschmacksrichtungen sortiert wird. Eine Neueinstellung der Abfüllung wird dann vorgenommen, wenn sich der Anteil einer Geschmacksrichtung stark verändert hat.

Im heutigen Test wurden beispielsweise 275 Zitronengummibärchen ausgeworfen. Die maximale Irrtumswahrscheinlichkeit des durchgeführten Tests ist bei 5 % (Signifikanzniveau) angesetzt.

g) Geben Sie die Nullhypothese H_0 sowie die Gegenhypothese H_1 an,

   prüfen Sie mithilfe des Annahme- und des Ablehnungsbereichs der Nullhypothese, ob eine Neueinstellung der Abfüllanlage notwendig ist,

   bestimmen Sie die Wahrscheinlichekeit für den α-Fehler (Fehler 1. Art) und

   vergleichen Sie diesen mit dem vorgegebenen Signifikanzniveau von 5 %.

Max interressiert sich neben der Geschmacksrichtung auch für das Füllgewicht einer Tüte Gummibärchen. Bei der Besichtigung werden Gummibärchentüten mit einem Füllgewicht von 300 Gramm befüllt. Ein Computer dokumentiert das Gewicht jeder Tüte. Aufgrund dieser empirischen Daten wurde festgelegt, dass das Gewicht normalverteilt ist und ein Mittelwert von 300 Gramm sowie eine Varianz von 10 Gramm^2 vorliegen.

h) Skizzieren Sie den Graphen der hier zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und

   berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Tüte Gummibärchen

   - weniger als 295 Gramm und
   - zwischen 298 und 303 Gramm

   wiegt.

Der Mitarbeiter berichtet Max, dass eine präzisere Waage in die Abfüllanlage verbaut werden soll. Durch diese Neuerung soll die Streuung um das mittlere Tütengewicht so verringert werden, dass die Wahrscheinlichkeit für ein Tütengewicht von weniger als 295 Gramm auf unter 5 % fällt.

i) Berechnen Sie, welche Standardbweichung durch den Einbau der neuen Waage in die Abfüllanlage erreicht werden müsste, um das Ziel zu erreichen.

Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 3: Spielplatz**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	i	gesamt
Erreichbar	4	7	3	4	6	5	4	4	3	40
Erstkorrektur										
Zweitkorrektur										

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Die Stadt Kiel möchte die Attraktivität eines Neubaugebietes steigern und plant, in dessen unmittelbarer Nähe auf einer großen öffentlichen Grünfläche einen Spielplatz zu errichten.

Interessierte Schülerinnen und Schüler eines beruflichen Gymnasiums beteiligen sich im Rahmen eines Projektes an der Planung und Gestaltung dieses Spielplatzes.

Vom Grünflächenamt der Stad Kiel bekommen die Schülerinnen und Schüler die Vorgabe, dass dieser öffentliche Spielplatz eine Mindestgrundfläche von 2 500 m² haben muss und aus Sicherheitsgründen vollständig eingezäunt werden soll. In der Budgetplanung der Stadt Kiel ist ein maximaler Betrag von 5 000,00 EUR für die Materialkosten der Einzäunung vorgesehen. Der geplante Einstabmattenzaun kostet je laufenden Meter komplett ca. 25,00 EUR.

Die Schülerinnen und Schüler gehen aus Erfahrung davon aus, dass eine annähernd quadratische Grundfläche eine Lösung wäre und wollen die folgende Tabelle ergänzen.

a) Ergänzen Sie die fehlenden Werte in der Tabelle 3.1.

Fläche des Spielplatzes in m²	Umfang der Fäche des Spielplatzes in m	Materialkosten für den Zaun in EUR
2 500		
	190	
	220	

Tabelle 3.1

Bei näherer Betrachtung des Lageplans erkennen die Schülerinnen und Schüler, dass es möglich wäre, die Spielplatzfläche an die bereits vorhandene 40 m lange eingezäunte Seite einer Kindertagesstätte anzuschließen. Ein nicht maßstabsgetreuer Lageplan ist in Abbildung 3.1 dargestellt.

Ein Schüler aus der Projektgruppe behauptet, dass dann für einen Gesamtumfang von 240 m und die Spielplatzfläche f folgende Gleichungen gelten:

(1) $240 = 2 \cdot a + 2 \cdot b$ (2) $f(a) = -a^2 + 120 \cdot a$ mit $0 \leq a \leq 100$.

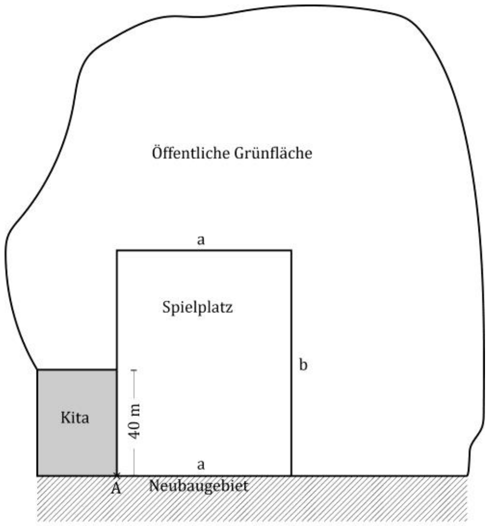

Abbildung 3.1

Dabei sind die Seiten a und b sowie der Umfang in Metern (m) und die rechteckige Spielplatzfläche f in Quadratmetern (m^2) angegeben.

b) Zeigen Sie, dass der Schüler mit seinen Behauptungen Recht hat.

   Berechnen Sie die Abmessungen des Spielplatzes mit maximaler Fläche mit Hilfe der Funktion f und

   prüfen Sie, ob die Mindestfläche und die Kostenvorgabe der Stadt Kiel in diesem Fall eingehalten werden können.

Aufgrund landschaftlicher Gegebenheiten hat sich die Stadt Kiel für einen Spielplatz mit einer quadratischen Fläche von 2 500 m^2 entschieden.

Das Grünflächenamt der Stadt Kiel fordert bei so großen öffentlichen Spielplätzen eine räumliche Abtrennung des Spielbereichs für Kleinkinder zum Beispiel durch eine Hecke.

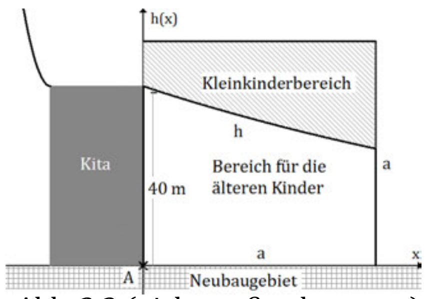

Abb. 3.2 (nicht maßstabsgetreu)

Der Kleinkinderbereich soll ca. $\frac{1}{3}$ der gesamten Spielplatzfläche einnehmen und nicht direkt an die Kindertagesstätte angrenzen (siehe Abbildung 3.2).

Die Projektgruppe vermutet, dass eine auf dem Gelände bereits vorhandene ca. 80 cm hohe Buchsbaumhecke als Abgrenzung verwendet werden kann und modelliert den Verlauf der Hecke näherungsweise durch den Graphen einer Exponentialfunktion mit der Gleichung

$$h(x) = 40 \cdot e^{-0{,}0085 \cdot x} \quad \text{mit } 0 \leq x \leq 50 \text{ und e ist die Eulersche Zahl.}$$

Der Ursprung des verwendeten Koordinatensystems liegt im Punkt A, h(x) und x sind in Metern (m) angegeben.

c) Prüfen Sie, ob die Hecke als Abgrenzung des Kleinkinderbereichs verwendet werden kann.

Die Hecke soll mit einem fest installierten Bewässerungssystem ausgestattet werden. Dabei verläuft der Bewässerungsschlauch direkt an den Pflanzen entlang.

d) Erläutern Sie, wie Sie näherungsweise ohne Integralrechnung die Länge der Hecke aus den Modellannahmen bestimmen können und

geben Sie eine erste Näherung der Länge der Hecke an.

Im weiteren Verlauf beteiligen sich die Schülerinnen und Schüler auch an der Planung einzelner Spielgeräte.

Im Bereich des Spielplatzes für die älteren Kinder soll eine Rutschbahn errichtet werden, deren Profilkurve mithilfe der Funktion p mit der Gleichung

$$p(x) = \begin{cases} -0{,}65 \cdot x^3 + 0{,}15 \cdot x^2 + 3{,}5 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 3 \cdot e^{-0{,}55 \cdot (x-1)} & \text{für } 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$ und e ist die Eulersche Zahl

modelliert werden kann. Dabei sind x und p(x) in Metern (m) angegeben.

e) Zeichnen Sie den zweiten Teil des Verlaufs der Rutsche in Abbildung 3.3 und

interpretieren Sie die folgende Aussage im Sachzusammenhang:

Es gilt:

$$p_1(1) = p_2(1) \text{ und } p_1'(1) = p_2'(1).$$

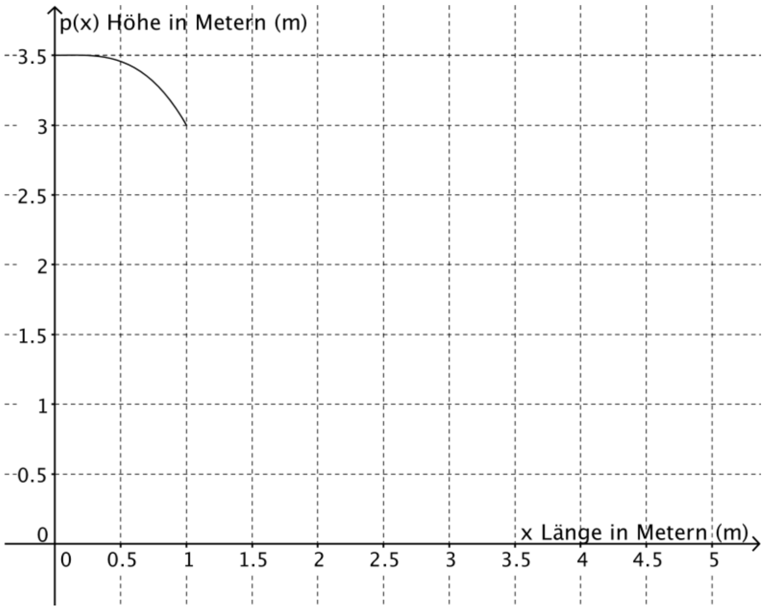

Abbildung 3.3: Verlauf (Profilkurve) der Rutschbahn

In einer Broschüre der Unfallkasse finden sich folgende Sicherheitsbestimmungen über Rutschen für ältere Kinder:

(1) Das Gefälle darf durchschnittlich 85 % nicht überschreiten.
(2) Winkel zur Horizontalen über 60° sind unzulässig.

f) Untersuchen Sie, ob im gesamten Rutschenverlauf p im Bereich $0 \leq x \leq 5$ die Sicherheitsbestimmungen eingehalten werden.

Die Stadt möchte gerne eine ähnliche Rutsche im Kleinkinderbereich aufstellen, dort dürfen jedoch der Steigungswinkel der Rutschbahn an jeder Stelle nur halb so groß sein wie bei der Rutsche im Bereich der älteren Kinder.

Ein Schüler behauptet, dass sich der Winkel zur Horizontalen bei der Rutschbahn halbiert, wenn der Graph von p um den Faktor 0,5 in Ordinatenrichtung gestaucht wird.

g) Beweisen oder widerlegen Sie die Behauptung des Schülers.

Nach der Spielplatzeröffnung beobachten die Schülerinnen und Schüler die Nutzung des Spielplatzes an verschiedenen Tagen. Ihre Beobachtungen zeigen, dass sich der Besucherstrom der ankommenden Besucher am Eingang des Spielplatzes durch die Funktionenschar b_k mit der Gleichung

$$b_k(t) = k \cdot e^{0{,}1 \cdot t} \cdot (t^2 - 8 \cdot t)^2 \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 8\,;\ 0 < k \leq 0{,}1 \text{ und e ist die Eulersche Zahl}$$

darstellen lässt, wobei t die Zeit in Stunden (h) ab 10:00 Uhr morgens und $b_k(t)$ die momentane Änderungsrate in Besuchern pro Stunde $\left(\frac{\text{Besucher}}{\text{h}}\right)$ angibt.

h) Erläutern Sie, in wieweit der Parameter k die Veränderung des Wetters widerspiegeln könnte,

zeigen Sie, dass der Zeitpunkt des größten Besucherstroms wetterunabhängig, d. h. unabhängig vom Wert des Parameters k ist und

geben Sie die Uhrzeit an, bei der der Besucherstrom am größten ist.

i) Berechnen Sie den Wert des Parameters k so, dass während der Öffnungszeit des Spielplatzes von 10:00 bis 18:00 Uhr ca. 100 Besucher den Spielplatz betreten haben.

Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 3: Gestaltung**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	i	gesamt
Erreichbar	6	3	4	4	6	4	3	5	5	40
Erstkorrektur										
Zweitkorrektur										

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Die Schülerinnen und Schüler des Profils Gestaltungstechnik sollen in einem fächerübergreifenden Projekt die Entwicklung fiktiver Modellunternehmen analysieren und für ein ausgewähltes Produkt dieser Unternehmen Werbeartikel entwerfen.

Eine Schülergruppe analysiert die Daten zum Getränkeabsatz der fiktiven mittelgroßen Familienbrauerei Hansebräu GmbH & Co. KG. Den Schülerinnen und Schülern liegen einige unvollständige Informationen zu den (momentanen) Absatzraten in den Jahresmitten der letzten 18 Jahre vor.

- In den 8 Jahren von 2000 bis 2007 sind die betrachteten Absatzraten um jährlich 1 % auf ca. 81 400 $\frac{\text{hl}}{\text{Jahr}}$ gesunken.
- Von 2007 bis 2011 blieben die betrachteten Absatzraten annähernd konstant bei ca. 81 400 $\frac{\text{hl}}{\text{Jahr}}$.

In Tabelle 3.1 und Abbildung 3.1 sind einige der Absatzraten in 1 000 Hektolitern pro Jahr $\left(1\,000\ \frac{\text{hl}}{\text{Jahr}}\right)$ angegeben. Dabei gibt t die Zeit in Jahren nach dem Beobachtungsbeginn Anfang des Jahres 2000 $(t = 0)$ und a_k die Absatzrate in der Jahresmitte des Jahres k an.

Jahr k	2000	2007	2011	2013	2015	2017
Absatzrate a_k in der Jahresmitte des Jahres k in 1 000 Hektolitern pro Jahr			$\approx 81{,}4$	$\approx 84{,}1$	$\approx 90{,}3$	$\approx 92{,}0$

Tabelle 3.1

a) Ergänzen Sie die fehlenden Werte in Tabelle 3.1 und

vervollständigen Sie die Abbildung 3.1 um die zwei fehlenden Punkte aus der Tabelle 3.1. Beachten Sie, dass die Ordinatenachse in einem Teilbereich gestaucht ist.

Begründen Sie, inwieweit aufgrund der gesamten Datenlage zur Modellierung der Entwicklung der Absatzraten der letzten 18 Jahre eine aus drei unterschiedlichen Funktionstypen abschnittsweise definierte Funktion geeignet sein könnte.

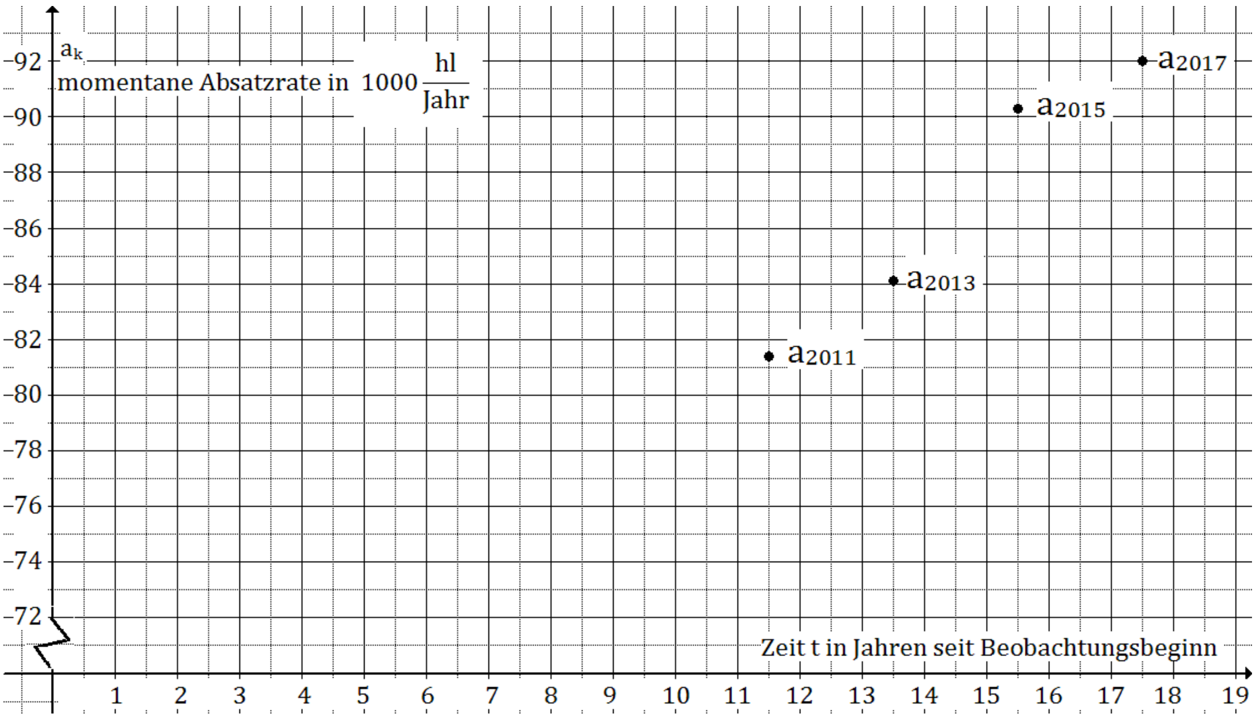

Abbildung 3.1

Auf Grund der Datenlage folgern die Schülerinnen und Schüler, dass die betrachtete Absatzrate a_k in der Zeit von 2011 bis 2017 im Mittel jährlich um ca. $1\,770\,\frac{\text{hl}}{\text{Jahr}}$ gestiegen ist.

b) Prüfen Sie diese Schlussfolgerung.

Die Schülerinnen und Schüler modellieren den Verlauf der momentanen Absatzrate ab dem Jahr 2011 ($t = 11$) näherungsweise durch die Funktion g mit der Gleichung:

$$g(t) = -\frac{1}{6} \cdot t^3 + \frac{115}{16} \cdot t^2 - \frac{24\,011}{240} \cdot t + \frac{34\,231}{64} \quad \text{für } t \geq 11$$

Dabei gibt $g(t)$ näherungsweise die momentane Absatzrate in 1 000 Hektolitern pro Jahr $\left(1\,000\,\frac{\text{hl}}{\text{Jahr}}\right)$ abhängig von der Zeit t in Jahren seit Beobachtungsbeginn an ($t = 11$ entspricht hier dem 01.01.2011 um 0:00 Uhr).

Für die geforderte betriebswirtschaftliche Analyse wollen die Schülerinnen und Schüler die Gesamtgetränkeabsatzmenge für die Jahre 2011 bis einschließlich 2017 und die Anzahl der in diesem Zeitraum verkauften Getränkekisten ermitteln.

In der Schülergruppe kursieren für die Ermittlung der Gesamtgetränkeabsatzmenge in Litern (l) zwei unterschiedliche Ansätze:

$$(1) \quad 100\,000 \cdot \sum_{k=2011}^{2017} a_k \approx 60\,908\,750 \quad \text{oder} \qquad (2) \quad 100\,000 \cdot \int_{11}^{18} g(t)\,dt \approx 60\,905\,100$$

c) Vergleichen Sie die beiden Ansätze miteinander.

Die Gesamtgetränkeabsatzmenge für den Zeitraum von 2011 bis einschließlich 2017 beträgt also ca. 61 Millionen Liter. Die hergestellten Getränke werden seit dem Jahr 2011 in Kisten mit 24 Flaschen à 0,33 l und in Kisten mit 20 Flaschen à 0,5 l verkauft. Es wurden doppelt so viele 24-er Kisten wie 20-er Kisten verkauft.

d) Bestimmen Sie näherungsweise die Anzahl, der im Zeitraum von 2011 bis einschließlich 2017 verkauften 20-er und 24-er Kisten.

Die Schülerinnen und Schüler entwerfen für ein hochpreisiges Getränk als Werbemaßnahme neue extravagante Flaschenformen. Einen der Flaschenentwürfe sehen Sie liegend im Schrägbild in Abbildung 3.2. Die Innenkontur der liegenden Flasche entsteht durch Rotation des Graphen der Funktion f um die Abszissenachse.

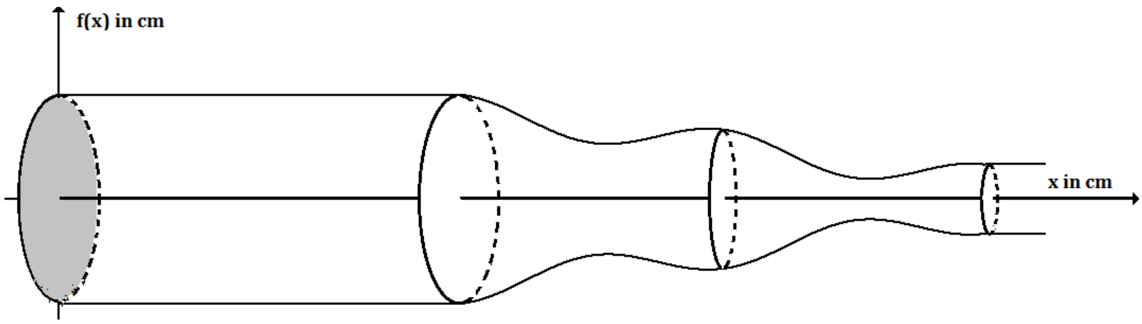

Abbildung 3.2 Schrägbild der liegenden Flasche

Die Innenkontur der Flasche kann näherungsweise durch die abschnittsweise definierte Funktion f mit der folgenden Gleichung modelliert werden:

$$f(x) = \begin{cases} 2{,}72 & \text{für } 0 \leq x < 10 \\ 0{,}4 \cdot \cos\left(\frac{4}{13}\pi \cdot (x-10)\right) - 0{,}14 \cdot x + 3{,}72 & \text{für } 10 \leq x \leq 23 \\ 0{,}9 & \text{für } 23 < x \leq 24{,}5 \end{cases}$$

Alle Längenangaben sind in Zentimetern angegeben.

Um in der automatischen Abfüllanlage befüllt werden zu können, muss die Flasche die im Betriebshandbuch zu findenden Anforderungen erfüllen. Einen Ausschnitt aus dem Betriebshandbuch finden Sie in Abbildung 3.3 wieder.

e) Beurteilen Sie, unter Berücksichtigung der Wanddicke von 2 mm, ob die neue Flasche die Anforderungen erfüllt.

maximaler Außendurchmesser D:	$D \leq 61$ mm
minimaler Innendurchmesser d:	$10 \text{ mm} \leq d \leq 20$ mm

Abbildung 3.3

Geben Sie den tatsächlichen Außendurchmesser und den minimalen Innendurchmesser an.

Laut Betriebshandbuch können die 24,5 cm hohen Flaschen maximal bis 0,5 cm unter die Flaschenöffnung befüllt werden. Unter Berücksichtigung dieser Tatsache kann nach Meinung der Schülerinnen und Schüler folgender Term für die Berechnung der pro Flasche maximal abfüllbaren Flüssigkeitsmenge in Litern verwendet werden:

$$\boxed{\mathbf{\frac{1}{1\,000}}} \cdot \left(\boxed{\mathbf{74{,}794 \cdot \pi}} + \pi \cdot \int_{10}^{23} \left(0{,}4 \cdot \cos\left(\frac{4}{13}\pi \cdot (x-10)\right) - 0{,}14x + 3{,}72 \right)^2 dx \right)$$

f) Leiten Sie den Faktor: $\mathbf{\frac{1}{1\,000}}$ und den Summanden: $\mathbf{74{,}794 \cdot \pi}$ als Bestandteile des obigen Terms her.

Während des Füllvorganges entstehen Verwirbelungen, insbesondere an nicht knickfreien Übergängen der Innenkontur und an den Übergängen von einer Rechts- in eine Linkskrümmung oder umgekehrt.

g) Untersuchen Sie daher den Graphen der Funktion f an der Stelle $x = 10$ auf Knickfreiheit (Sprungfreiheit können Sie voraussetzen).

Der zweite Abschnitt der Funktion f gehört zur Funktionenschar h_k mit

$$h_k(x) = 0{,}4 \cdot \cos\left(\frac{4}{13}\pi \cdot (x-10)\right) - k \cdot x + 3{,}72 \text{ mit } 10 \le x \le 23 \text{ und } 0 \le k \le 1.$$

Der Parameter k steht hier in direktem Zusammenhang mit dem Innenvolumen.

h) Zeigen Sie, dass die Lage der Wendestellen unabhängig vom Parameter k ist,

berechnen Sie alle Wendestellen für $10 \le x \le 23$ und

geben Sie die zugehörigen Innenradien der neu entworfenen Flasche mit $k = 0{,}14$ an.

Die Tangenten an die Graphen der Funktionenschar h_k an der Stelle $x = 16{,}5$ werden mit t_k bezeichnet.

i) Ermitteln Sie die Tangentengleichung $t_k(x)$ an der Stelle $x = 16{,}5$ und

weisen Sie nach, dass sich alle Tangenten t_k in genau einem Punkt schneiden.