Name: ____________________

Abiturprüfung 2017

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

a) Eine Funktion f ist durch $f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

(1) *Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f.*

(2) Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $S(0|1)$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck.

Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

(3 + 3 Punkte)

b) Gegeben sind

die Ebene $E:\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5$ und

die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$.

(1) *Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von E und g.*

(2) *Begründen Sie, dass g nicht senkrecht zur Ebene E verläuft.*

(4 + 2 Punkte)

Name: ____________________

c) Untersucht werden die Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen.

(1) *Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems:*

$$\begin{aligned} 3\cdot x_1 - 2\cdot x_2 \qquad\qquad &= 13 \\ x_2 + 2\cdot x_3 &= 5 \\ x_2 + \quad x_3 &= 3 \end{aligned}$$

(2) Betrachtet wird das folgende Gleichungssystem mit einem Parameter $p \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + \quad x_3 &= 4 \\ 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \qquad\quad &= 5 \\ 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + p\cdot x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Geben Sie einen Wert von p an, für den das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.

Begründen Sie, dass es keinen Wert von p gibt, für den das Gleichungssystem genau eine Lösung hat.

(3 + 3 Punkte)

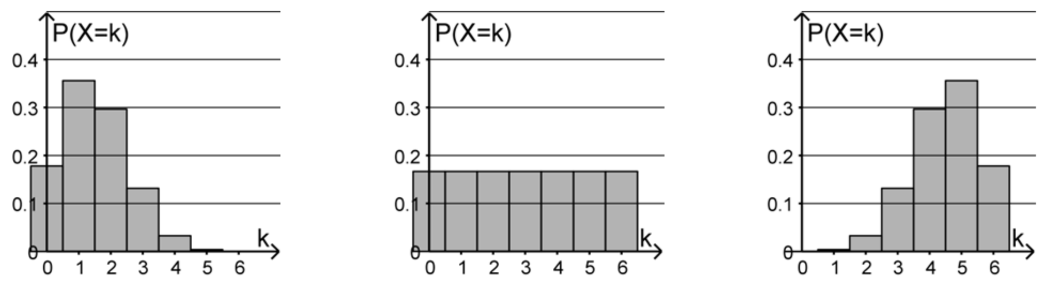
Name: ____________________

d) Jedes Überraschungsei eines Herstellers enthält entweder eine Figur oder keine Figur, wobei der Anteil der Überraschungseier mit einer Figur 25 % beträgt.

(1) Zehn Überraschungseier werden nacheinander zufällig ausgewählt.
Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür an, dass nur in den letzten beiden Überraschungseiern jeweils eine Figur enthalten ist.

(2) Sechs Überraschungseier werden zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X gibt an, wie viele dieser Überraschungseier eine Figur enthalten. Eine der folgenden Abbildungen stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsgröße X dar:

I. II. III.



Geben Sie an, welche Abbildung dies ist. Begründen Sie, dass die beiden anderen Abbildungen dies nicht sind.

(2 + 4 Punkte)

Hinweis:

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2017

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

1. Aufgabenart

Hilfsmittelfrei zu bearbeitende Aufgabe

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2017

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Analysis
   - Fortführung der Differentialrechnung
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

   Lineare Algebra/Analytische Geometrie
   - Lineare Gleichungssysteme
   - Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
   - Lagebeziehungen
   - Skalarprodukt

   Stochastik
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung und Normalverteilung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Hinweis

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) $f(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2e^{\frac{1}{2}x}-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\frac{1}{2}x}=\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x=\ln\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x=2\cdot\ln\frac{1}{2}$.

(2) $f'(x)=e^{\frac{1}{2}x}$.

Die Steigung der Tangente ist $f'(0)=1$.

Folglich ist ein Winkel des Dreiecks 45° groß. Da die Koordinatenachsen einen rechten Winkel einschließen, beträgt die Größe des dritten Winkels ebenfalls 45°. Damit stimmen zwei Winkel des Dreiecks überein. Das Dreieck ist folglich gleichschenklig.

Teilaufgabe b)

(1) Für $t\in\mathbb{R}$ ist $P(2+2t\,|\,1-t\,|\,-2-4t)$ ein Punkt auf der Geraden g.

P liegt genau dann in E, wenn: $2\cdot(2+2t)-(1-t)+2\cdot(-2-4t)=5$

$\Leftrightarrow -3t=6 \Leftrightarrow t=-2$.

Es folgt der Schnittpunkt: $S(-2|3|6)$.

(2) Der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor zu E und damit senkrecht zu E.

Da der Richtungsvektor der Geraden offensichtlich nicht kollinear zu diesem Vektor ist, verläuft g nicht senkrecht zu E.

Teilaufgabe c)

(1) Mithilfe des Additionsverfahrens erhält man aus II – III: $x_3 = 2$.

Durch Einsetzen in II oder III ergibt sich $x_2 = 1$ und durch Einsetzen in I erhält man $x_1 = 5$. Damit lautet die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{(5;1;2)\}$.

(2) Das Gleichungssystem hat für $p = 1$ unendlich viele Lösungen.

Für $p \neq 1$ liefern die erste und dritte Gleichung $x_3 = 0$. Damit führen die erste und zweite Gleichung zu einem Widerspruch, das Gleichungssystem hat also keine Lösung.

Damit gibt es keinen Wert von *p*, für den das Gleichungssystem genau eine Lösung hat.

Teilaufgabe d)

(1) $P(E) = 0{,}75^8 \cdot 0{,}25^2$.

(2) Abbildung I zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von *X*.

X ist binomialverteilt, der Erwartungswert von *X* ist $6 \cdot 0{,}25 = 1{,}5$.

Abbildung II zeigt eine Gleichverteilung und gehört damit nicht zu *X*.

Abbildung III zeigt eine Verteilung mit einem Erwartungswert, der größer als 1,5 ist.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:__________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt die Nullstelle der Funktion *f*.	3			
2	(2) weist nach, dass das Dreieck gleichschenklig ist.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**6**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die Koordinaten des Schnittpunkts von E und g.	4			
2	(2) begründet, dass g nicht senkrecht zu E verläuft.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**6**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die Lösungsmenge des Gleichungssystems.	3			
2	(2) gibt einen Wert von *p* an, für den das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.	1			
3	(2) begründet, dass es keinen Wert von *p* gibt, für den das Gleichungssystem genau eine Lösung hat.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**6**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt einen Term zur Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit an.	2			
2	(2) gibt an, welche Abbildung die angegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung darstellt, und begründet, dass die anderen Abbildungen diese nicht darstellen.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**6**			

	Summe insgesamt	**24**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2017

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a durch die Funktionsgleichung

$$f_a(x) = x^2 \cdot e^{-a \cdot x} \text{ mit } a > 0 \,.$$

Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet.

a) (1) *Ermitteln Sie denjenigen Wert von a, für den der Punkt $(1\,|\,0{,}5)$ auf G_a liegt.*

(2) *Berechnen Sie die Koordinaten und die Art der Extrempunkte von G_a in Abhängigkeit von a.*

[Zur Kontrolle: Extremstellen von f_a sind $x = 0$ und $x = \frac{2}{a}$.]

(3) *Begründen Sie, dass der Hochpunkt von G_a für jeden Wert von a im ersten Quadranten liegt, und beschreiben Sie, wie sich seine Lage für wachsende Werte von a ändert.*

(4) *Zeigen Sie, dass die Extrempunkte von G_a für alle Werte von a auf dem Graphen der Funktion g mit $g(x) = \frac{x^2}{e^2}$ liegen.*

(2 + 9 + 3 + 3 Punkte)

Name: ____________________

Im Folgenden sei $a = 0{,}2$ und $G_{0,2}$ sei der Graph der Funktion $f_{0,2}$.

b) (1) Für jeden Wert von b mit $0 \le b \le 100$ sind die Punkte $A(0\,|\,0)$ und $B(b\,|\,0)$ sowie der Punkt C gegeben. C hat die x-Koordinate b und liegt auf dem Graphen $G_{0,2}$.

Bestimmen Sie denjenigen Wert von b, für den der Flächeninhalt des Dreiecks ABC maximal ist, und geben Sie den zugehörigen Flächeninhalt an.

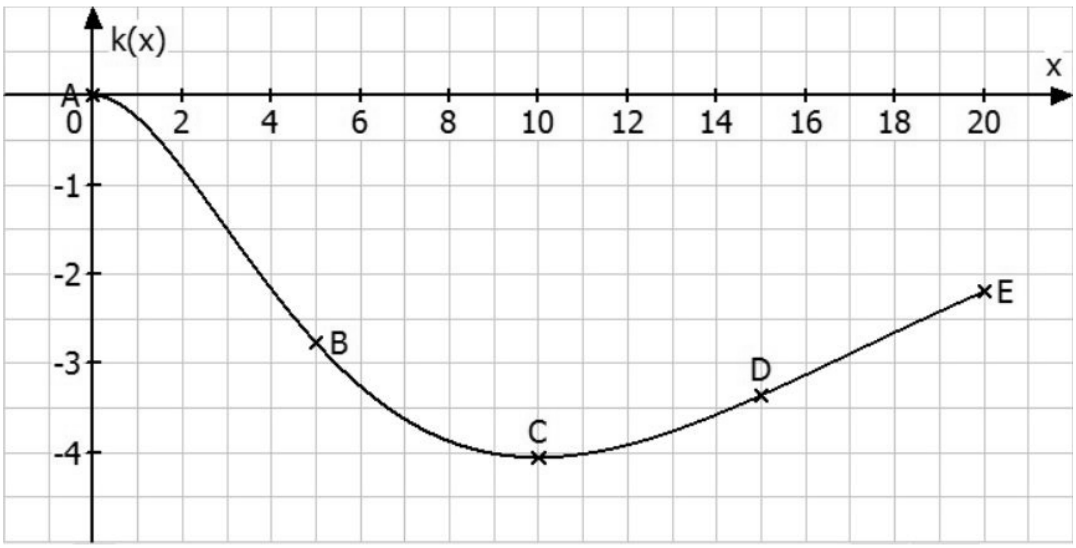
(2) Die x-Achse, $G_{0,2}$ und die Gerade mit der Gleichung $x = p$ mit $p > 0$ schließen ein Flächenstück ein.

Bestimmen Sie die Größe dieses Flächenstücks.

Zeigen Sie, dass der Inhalt des Flächenstücks auch für beliebig große Werte von p kleiner als 250 *ist.*

(7 + 6 Punkte)

c) In der *Abbildung* ist der Graph der Funktion k mit $k(x) = -0{,}3 \cdot x^2 \cdot e^{-0{,}2 \cdot x}$ für $0 \le x \le 20$ dargestellt.



Abbildung

Name: ____________________

(1) Es gilt $k(x) = -0{,}3 \cdot f_{0,2}(x)$.

Beschreiben Sie, wie der Graph von k *aus dem Graphen von* $f_{0,2}$ *hervorgeht.*

(2) Verbindet man die Punkte $A(0\,|\,0)$, $B(5\,|\,k(5))$, $C(10\,|\,k(10))$, $D(15\,|\,k(15))$ und $E(20\,|\,k(20))$ in dieser Reihenfolge durch Strecken, so liefert die Summe der Längen dieser Strecken einen Näherungswert für die Länge des in der Abbildung dargestellten Graphen von k im Intervall $[0;20]$.

Berechnen Sie diesen Näherungswert, wobei Sie $|\overline{AB}| \approx 5{,}71$, $|\overline{CD}| \approx 5{,}05$ *und* $|\overline{DE}| \approx 5{,}13$ *ohne Nachweis verwenden dürfen.*

(3) *Beschreiben Sie, wie man unter Verwendung von Strecken zwischen Punkten auf dem in der Abbildung dargestellten Graphen von k im Intervall* $[0;20]$ *dessen Länge beliebig genau berechnen kann.*

(4) Die Länge s des Graphen der Funktion k über einem Intervall $[a;b]$ ist gegeben durch

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (k'(x))^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Bestimmen Sie die Länge des Graphen von k im Intervall $[0;20]$.

(2 + 3 + 3 + 2 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2017

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2017

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Fortführung der Differentialrechnung
     - Behandlung von ganzrationalen Funktionen, natürlichen Exponential- und Logarithmusfunktionen und deren Verknüpfung bzw. Verkettung mit Untersuchung von Eigenschaften in Abhängigkeit von Parametern
     - notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Die Gleichung $f_a(1) = 0{,}5$ wird von $a = \ln(2)$ gelöst.

(2) Es gilt $f_a{}'(x) = e^{-a\cdot x}\cdot(2\cdot x - a\cdot x^2)$, $f_a{}''(x) = e^{-a\cdot x}\cdot(a^2\cdot x^2 - 4\cdot a\cdot x + 2)$.

Die für eine lokale Extremstelle von f_a notwendige Bedingung $f_a{}'(x) = 0$ ist für $x = 0$ und $x = \frac{2}{a}$ erfüllt.

Mit $f_a{}''(\frac{2}{a}) = -2\cdot e^{-2} < 0$ hat f_a einen lokalen Hochpunkt $H_a(\frac{2}{a} \mid \frac{4\cdot e^{-2}}{a^2})$.

Mit $f_a{}''(0) = 2 > 0$ hat f_a einen lokalen Tiefpunkt $T(0 \mid 0)$.

(3) Der Hochpunkt von G_a liegt für alle $a > 0$ im ersten Quadranten, da $\frac{2}{a} > 0$ und $\frac{4\cdot e^{-2}}{a^2} > 0$ gilt.

Für wachsende Werte von *a* nähert sich der Hochpunkt von G_a dem Nullpunkt an.

(4) Da $g(0) = 0$ und $g(\frac{2}{a}) = \frac{4}{e^2\cdot a^2}$ gilt, liegen für jeden Wert von *a* Hochpunkt und Tiefpunkt von G_a auf dem Graphen von *g*.

Teilaufgabe b)

(1) Der Flächeninhalt des Dreiecks lässt sich hier in Abhängigkeit von *b* durch die Funktion *A* mit $A(b) = 0{,}5 \cdot b \cdot f_{0,2}(b)$ berechnen.

Der Taschenrechner liefert im gegebenen Intervall (z. B. durch graphische Analyse) den globalen Hochpunkt $H(15\,|\,84{,}02)$ des Graphen von *A*.

Für $b = 15$ ist der Flächeninhalt des Dreiecks *ABC* mit ca. 84,02 FE maximal.

(2) Da $f_{0,2}(0) = 0$ und $f_{0,2}(x) > 0$ für $x > 0$ gilt, lässt sich der Inhalt des Flächenstücks bestimmen durch $\int_0^p f_{0,2}(x)\mathrm{d}x = 5 \cdot (50 \cdot e^{\frac{p}{5}} - p^2 - 10 \cdot p - 50) \cdot e^{\frac{-p}{5}}$.

Es gilt $5 \cdot (50 \cdot e^{\frac{p}{5}} - p^2 - 10 \cdot p - 50) \cdot e^{\frac{-p}{5}} = 250 - 5 \cdot (p^2 + 10 \cdot p + 50) \cdot e^{\frac{-p}{5}} < 250$, da alle Faktoren im Subtrahenden für alle Werte von *p* größer als Null sind.

Teilaufgabe c)

(1) Der Graph von *k* geht aus dem Graphen von $f_{0,2}$ durch eine Stauchung mit dem Faktor 0,3 in *y*-Richtung und eine Spiegelung an der *x*-Achse hervor.

(2) Es gilt $|\overline{BC}| = \sqrt{(k(10) - k(5))^2 + (10-5)^2} \approx 5{,}17$ und damit ergibt sich 21,06 [LE] als ein Näherungswert für die Länge des in der Abbildung dargestellten Graphen von *k* im Intervall $[0;20]$.

(3) Man teilt das Intervall von $x_0 = 0$ bis $x_n = 20$ durch $x_1,\ x_2, \dots, x_{n-1}$ mit $n \in \mathbb{N}$ in *n* gleich große Teile und addiert die Längen der Strecken $\overline{P_0(x_0\,|\,k(x_0))P_1(x_1\,|\,k(x_1))}$, $\overline{P_1(x_1\,|\,k(x_1))P_2(x_2\,|\,k(x_2))}, \dots,\ \overline{P_{n-1}(x_{n-1}\,|\,k(x_{n-1}))P_n(x_n\,|\,k(x_n))}$.

Durch eine geeignete Vergrößerung der Anzahl der Teile ist es möglich, die Länge beliebig genau zu berechnen.

(4) Für die Länge des Graphen von *k* im Intervall $[0;20]$ gilt:

$$s = \int_0^{20} \sqrt{1 + (k'(x))^2}\,\mathrm{d}x \approx 21{,}18 \text{ [LE].}$$

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt den Wert von a.	2			
2	(2) gibt den Ableitungsterm an und bestimmt die möglichen Extremstellen mit einer notwendigen Bedingung.	4			
3	(2) bestätigt die Extremstellen mit einer hinreichenden Bedingung und bestimmt die Koordinaten und die Art der Extrempunkte.	5			
4	(3) begründet, dass der Hochpunkt für jeden Wert von a im ersten Quadranten liegt, und beschreibt, wie sich seine Lage für wachsende Werte von a ändert.	3			
5	(4) zeigt, dass die Extrempunkte für alle Werte von a auf dem Graph von g liegen.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (17) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**17**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt den Flächeninhalt des Dreiecks abhängig von b.	2			
2	(1) bestimmt denjenigen Wert von b, für den der Flächeninhalt des Dreiecks maximal ist, und gibt diesen Flächeninhalt an.	5			
3	(2) bestimmt die von p abhängige Größe des Flächenstücks.	3			
4	(2) zeigt, dass der Inhalt des Flächenstücks auch für beliebig große Werte von p kleiner als 250 ist.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (13) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**13**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) beschreibt, wie der Graph von k aus dem Graphen von $f_{0,2}$ hervorgeht.	2			
2	(2) berechnet den Näherungswert.	3			
3	(3) beschreibt, wie man unter Verwendung von Strecken zwischen Punkten die geforderte Länge beliebig genau berechnen kann.	3			
4	(4) bestimmt die Länge des Graphen von k im Intervall $[0;20]$.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (10) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**10**			

	Summe insgesamt	**40**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2017

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Die Zeitspanne vom Sonnenaufgang (Zeitpunkt, zu dem die Oberkante der Sonne den Horizont überschreitet) bis zum Sonnenuntergang (Zeitpunkt, zu dem die Oberkante der Sonne den Horizont unterschreitet) wird als Tageslänge bezeichnet. Sie hängt vom Ort ab und ändert sich im Verlauf des Jahres.

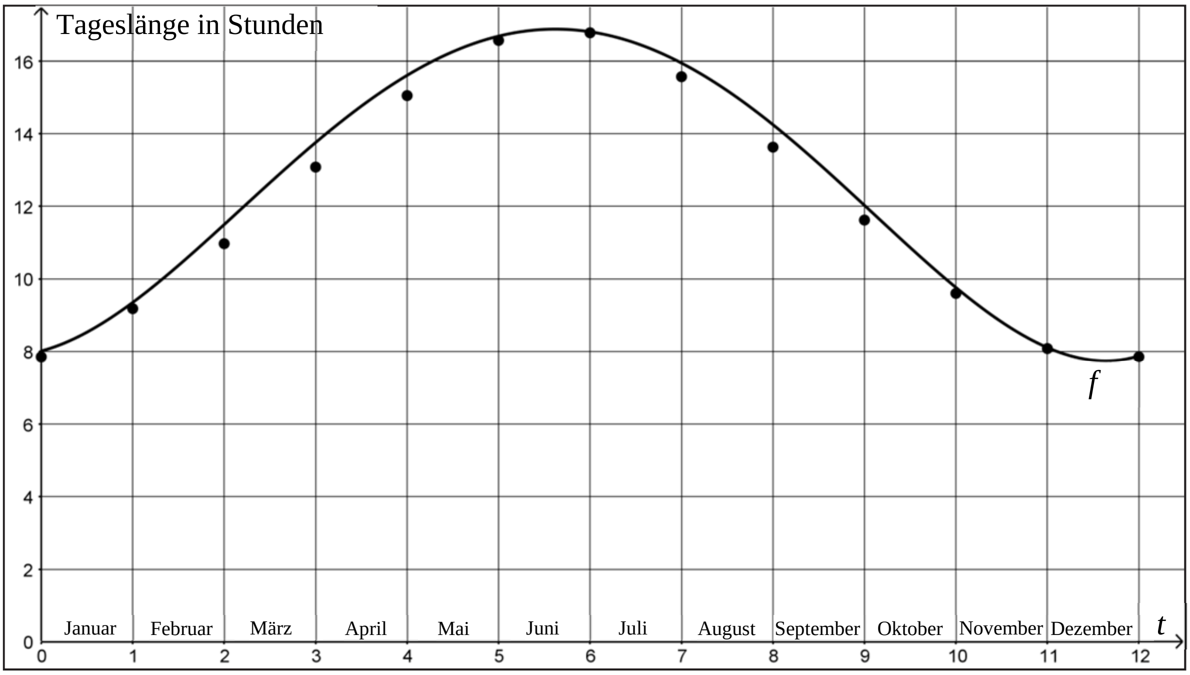
In der folgenden *Abbildung* sind die Tageslängen in der kleinen ostwestfälischen Stadt Rahden für jeden ersten Tag eines Monats im Zeitraum vom 1. Januar 2017 bis zum 1. Januar 2018 aufgetragen. Darüber hinaus ist der Graph einer ganzrationalen Funktion f dargestellt, mit der ein Schüler die Tageslängen modelliert hat.

Vereinfachend wird hier angenommen, dass alle Monate die gleiche Länge von 30 Tagen haben.

Dabei entspricht $t=0$ dem 1. Januar 2017, $t=\frac{1}{30}\approx 0{,}03$ entspricht dem 2. Januar 2017, ...,

$t=1$ entspricht dem 1. Februar 2017, $t=1\frac{1}{30}\approx 1{,}03$ entspricht dem 2. Februar 2017 usw.

Name: ____________________



Abbildung

a) *Entscheiden Sie anhand der Abbildung, welchen Grad die ganzrationale Funktion f mindestens haben muss, und begründen Sie Ihre Entscheidung.*

(4 Punkte)

Aufgrund zu großer Abweichungen hat der Schüler die Modellierung mit der Funktion *f* wieder verworfen. In einem neuen Ansatz hat er zur Modellierung der Tageslängen in Rahden im Zeitraum vom 1. Januar 2017 bis zum 21. Juni 2017 für $0 \leq t \leq 5{,}67$ die Funktion *g* mit der Gleichung

$$g(t) = -0{,}08 \cdot t^3 + 0{,}6324 \cdot t^2 + 0{,}54432 \cdot t + 8,\ t \in \mathbb{R},$$

verwendet.

Dabei wird $g(t)$ als Tageslänge in Stunden aufgefasst.

Name: ____________________

b) (1) *Ermitteln Sie mit der Funktion g die Tageslänge in Rahden für den heutigen Tag (3. Mai, also* $t \approx 4{,}07$*) und vergleichen Sie den von Ihnen berechneten Wert mit der tatsächlichen heutigen Tageslänge in Rahden von 15 Stunden und 10 Minuten.*

(2) *Geben Sie den Wert des Terms* $\frac{g(4)-g(2)}{2}$ *an und interpretieren Sie diesen Wert im Sachzusammenhang.*

(3) Vom 1. Januar 2017 bis zum 21. Juni 2017 ($t \approx 5{,}67$) werden nördlich des Äquators (und damit auch in Rahden) die Tage immer länger.

Zeigen Sie rechnerisch, dass diese Tatsache durch die Funktion g zutreffend modelliert wird.

(4) *Weisen Sie nach, dass folgende Aussage gilt:*

$$g''(t) < 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \text{ mit } t > 2{,}635\,.$$

Interpretieren Sie die Bedeutung dieser Aussage für $2{,}635 < t < 5{,}67$ *unter Berücksichtigung von* b) (3) *im Sachzusammenhang.*

(5) *Entscheiden Sie, ob die Funktion g zur Modellierung der Tageslängen für das gesamte Jahr* 2017 *geeignet ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.*

(4 + 4 + 6 + 7 + 3 Punkte)

Name: ____________________

c) Der 21. Juni 2017 ($t \approx 5{,}67$) ist der längste Tag des Jahres 2017, der 21. Dezember 2017 ($t \approx 11{,}67$) ist der kürzeste Tag des Jahres 2017 in Rahden.

Eine Freundin des Schülers schlägt vor, zur Modellierung der Tageslängen vom 21. Juni 2017 bis zum 1. Januar 2018 für $5{,}67 \le t \le 12$ eine ganzrationale Funktion h dritten Grades zu verwenden, deren Ableitung h' eine quadratische Funktion von folgender Form ist:

$$h'(t) = a \cdot (t - 5{,}67) \cdot (t - 11{,}67)\ ,\ t \in \mathbb{R}\ ,$$

wobei a eine noch zu ermittelnde reelle Zahl ist.

(1) *Begründen Sie, dass es sinnvoll ist, von dem Ansatz* $h'(t) = a \cdot (t - 5{,}67) \cdot (t - 11{,}67)$ *auszugehen, wenn die Tageslängen ab dem* 21. Juni 2017 d*urch eine ganzrationale Funktion h dritten Grades modelliert werden sollen.*

(2) Vom 21. Juni 2017 bis zum 21. Dezember 2017 werden die Tage in Rahden um insgesamt 9,15 Stunden kürzer.

Ermitteln Sie a passend zu diesem Wert.

[Zur Kontrolle: $a \approx 0{,}25417$]

(3) *Bestimmen Sie ausgehend von den Betrachtungen in* c) (1) *und* (2) *eine Gleichung einer Funktion h zur Modellierung der Tageslängen in Rahden vom 21. Juni 2017 bis zum 1. Januar 2018, in der kein Integralzeichen auftritt.*

(4 + 4 + 4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2017

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2017

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
     - Behandlung von ganzrationalen Funktionen, natürlichen Exponential- und Logarithmusfunktionen und deren Verknüpfung bzw. Verkettung mit Untersuchung von Eigenschaften in Abhängigkeit von Parametern
     - notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

Die Funktion f muss mindestens vom Grad 4 sein, denn der Graph von f hat im dargestellten Bereich offensichtlich zwei Wendepunkte.

Teilaufgabe b)

(1) $g(4{,}07) \approx 15{,}30$.

Die mit der Funktion g berechnete Tageslänge beträgt ungefähr 15 Stunden und 18 Minuten. Die berechnete Tageslänge unterscheidet sich damit um etwa 8 Minuten von der tatsächlichen Tageslänge in Rahden am 3. Mai 2017.

(2) $\dfrac{g(4)-g(2)}{2} \approx 2{,}10$.

Im Zeitraum vom 1. März 2017 bis zum 1. Mai 2017 nimmt die Tageslänge in Rahden durchschnittlich um 2,1 Stunden (2 Stunden und 6 Minuten) pro Monat zu.

(3) $g'(t) = -0{,}24 \cdot t^2 + 1{,}2648 \cdot t + 0{,}54432$.

Die Gleichung $g'(t) = 0$ hat die Lösungen $t = -0{,}4$ und $t = 5{,}67$. Wegen $g'(0) = 0{,}54432 > 0$ gilt $g'(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $-0{,}4 < t < 5{,}67$ und damit auch für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $0 \le t < 5{,}67$.

Da die Änderungsrate von g für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $0 \le t < 5{,}67$ positiv ist, wird die Tatsache, dass die Tage vom 1. Januar 2017 bis zum 21. Juni 2017 immer länger werden, durch die Funktion g zutreffend modelliert.

(4) $g''(t) = -0{,}48 \cdot t + 1{,}2648$.

Einzige Lösung der Gleichung $g''(t)=0$ ist $t=2,635$. Wegen $g''(5)=-1,1352<0$ gilt $g''(t)<0$ für alle $t\in\mathbb{R}$ mit $t>2,635$.

[Hier kann alternativ auch mit dem Verlauf des Graphen von g'' argumentiert werden.]

Für $2,635<t<5,67$ (d. h. ungefähr vom 20. März 2017 bis zum 21. Juni 2017) nehmen die Tageslängen immer langsamer zu.

(5) Ab ungefähr $t=9,7$ werden die Funktionswerte von g negativ, die Funktion ist daher nicht zur Modellierung der Tageslängen für das gesamte Jahr 2017 geeignet.

Teilaufgabe c)

(1) Da der 21. Juni 2017 der längste und der 21. Dezember 2017 der kürzeste Tag des Jahres 2017 sind, ist es sinnvoll, zur Modellierung der Tageslängen ab dem 21. Juni 2017 eine Funktion zu verwenden, deren Graph an den Stellen $t=5,67$ und $t=11,67$ waagerechte Tangenten besitzt. Die zugehörige Ableitungsfunktion muss dann bei $t=5,67$ und $t=11,67$ Nullstellen besitzen, was für alle $a\in\mathbb{R}$ für alle Funktionen h' mit $h'(t)=a\cdot(t-5,67)\cdot(t-11,67)$ der Fall ist.

(2) $\int\limits_{5,67}^{11,67} h'(t)\,\mathrm{d}t=-9,15 \Leftrightarrow a\approx 0,25417$.

(3) Mit $h'(t)=0,25417\cdot(t-5,67)\cdot(t-11,67)$ ergibt sich:

$$h(t)=g(5,67)+\int\limits_{5,67}^{t} h'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\approx 0,08472\cdot t^3-2,20365\cdot t^2+16,81815\cdot t-23,12307\,.$$

[Hinweis: Abhängig von Rundungen in Zwischenergebnissen können sich geringfügige Abweichungen ergeben.]

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:___________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	entscheidet anhand der *Abbildung*, welchen Grad die ganzrationale Funktion f mindestens haben muss.	2			
2	begründet seine Entscheidung.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**4**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt mit der Funktion g die Tageslänge in Rahden für den 3. Mai ($t \approx 4{,}07$).	2			
2	(1) vergleicht den von ihm berechneten Wert mit der tatsächlichen Tageslänge in Rahden.	2			
3	(2) gibt den Wert des Terms $\frac{g(4)-g(2)}{2}$ an.	2			
4	(2) interpretiert diesen Wert im Sachzusammenhang.	2			
5	(3) zeigt rechnerisch, dass die Tatsache, dass die Tage immer länger werden, durch die Funktion g zutreffend modelliert wird.	6			
6	(4) weist nach, dass die Aussage $g''(t) < 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 2{,}635$ gilt.	4			
7	(4) interpretiert die Bedeutung dieser Aussage für $2{,}635 < t < 5{,}67$ unter Berücksichtigung von b) (3) im Sachzusammenhang.	3			
8	(5) entscheidet, ob die Funktion g zur Modellierung der Tageslängen für das gesamte Jahr 2017 geeignet ist, und begründet seine Entscheidung.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (24) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**24**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass es sinnvoll ist, von dem Ansatz $h'(t) = a \cdot (t - 5{,}67) \cdot (t - 11{,}67)$ auszugehen, wenn die Tageslängen ab dem 21. Juni 2017 durch eine ganzrationale Funktion *h* dritten Grades modelliert werden sollen.	4			
2	(2) ermittelt *a* passend zu dem gegebenen Wert.	4			
3	(3) bestimmt ausgehend von den Betrachtungen in c) (1) und c) (2) eine Gleichung einer Funktion h zur Modellierung der Tageslängen in Rahden vom 21. Juni 2017 bis zum 1. Januar 2018, in der kein Integralzeichen auftritt.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (12) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**12**			

	Summe insgesamt	**40**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

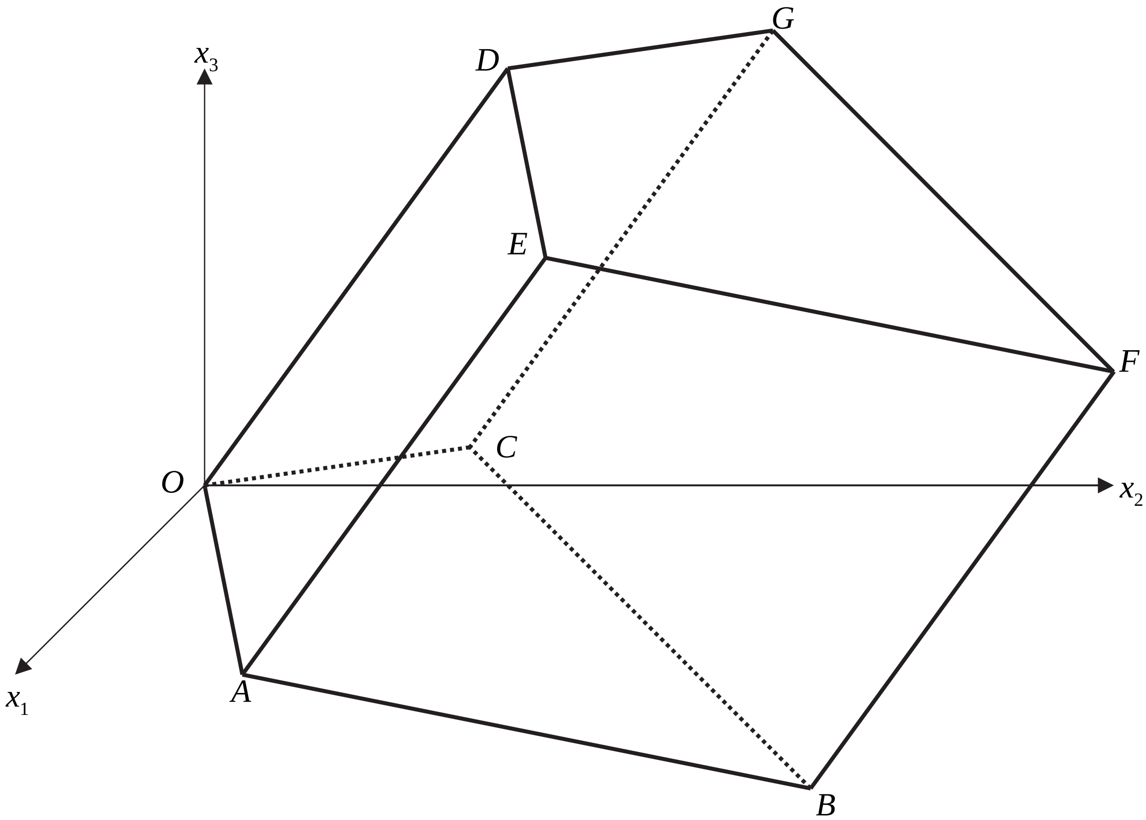
Abiturprüfung 2017

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $O(0\,|\,0\,|\,0)$, $A(6\,|\,4\,|\,-2)$, $B(0\,|\,16\,|\,-8)$, $C(-6\,|\,4\,|\,-2)$ und $D(0\,|\,8\,|\,11)$ Eckpunkte eines **schiefen** Prismas[1] $OABCDEFG$ mit viereckiger Grundfläche $OABC$ (siehe Abbildung).



Abbildung

[1] Ein Prisma besitzt eine Grundfläche und eine dazu parallele deckungsgleiche Deckfläche. Die Seitenflächen sind Parallelogramme. Bei einem schiefen Prisma stehen die Seitenkanten **nicht** senkrecht auf der Grundfläche. Das Volumen ist das Produkt aus der Grundfläche und der Höhe, die senkrecht auf der Grundfläche steht.

Name: ____________________

a) (1) *Stellen Sie eine Parameter- und eine Koordinatengleichung der Ebene H auf, die die Punkte O, A und B enthält.*

[Mögliches Ergebnis für die Koordinatengleichung: $H: x_2 + 2x_3 = 0$)

(2) *Bestimmen Sie eine Parameterform der Geraden g, die H senkrecht schneidet und durch D verläuft.*

[Mögliche Lösung: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix},\ t \in I\!R$]

(3) *Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g und der Ebene H.*

[Zur Kontrolle: $S(0\,|\,2\,|\,-1)$]

(6 + 3 + 3 Punkte)

b) (1) *Zeigen Sie, dass die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{OB}$ des Vierecks OABC zueinander senkrecht sind und sich im Mittelpunkt T von $\overline{AC}$ schneiden.*

[Zur Kontrolle: $T(0\,|\,4\,|\,-2)$]

Nach Aufgabe b) (1) ist das Viereck *OABC* ein Drachenviereck.

(2) *Bestimmen Sie das Volumen des Prismas OABCDEFG.*

(7 + 5 Punkte)

c) Es gibt Ebenen, die das Prisma in zwei volumengleiche Teile zerlegen.

(1) *Beschreiben Sie die Lage zweier dieser Ebenen.*

(2) *Begründen Sie die Volumengleichheit der beiden Teilkörper für einen der beiden Schnitte aus* c) (1).

(3 + 3 Punkte)

Name: ____________________

d) Der Punkt B wird auf der Strecke $\overline{BO}$ zum Punkt $B' \neq O$ so verschoben, dass alle Seiten des Vierecks $OAB'C$ gleich lang sind.
Ermitteln Sie die Koordinaten von B'.

(4 Punkte)

e) *Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes auf der Strecke* $\overline{OA}$, *der von dem Punkt D den kürzesten Abstand besitzt.*

(6 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2017

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Innermathematische Argumentationsaufgabe / Vektorielle Geometrie

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2017

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Analytische Geometrie und Lineare Algebra
   - Lineare Gleichungssysteme
   - Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
   - Lagebeziehungen und Abstände
   - Skalarprodukt

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Eine Parametergleichung der Ebene H ist z. B.: $\vec{x} = r^* \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s^* \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ -8 \end{pmatrix}$ bzw.

$\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(r, r^*, s, s^* \in \mathbb{R})$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x_1 = 3r \\ x_2 = 2r + 2s \\ x_3 = -r - s \end{array} \right|.$$

Nach Eliminieren der Parameter r und s erhält man die Koordinatengleichung

$H:\ x_2 + 2x_3 = 0$.

(2) Da die Gerade g die Ebene H senkrecht schneidet, ist ein Normalenvektor von H

(z. B. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$) ein Richtungsvektor von g.

Eine Parametergleichung von g lautet: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$.

(3) Schnittpunktberechnung von g und H:

$S_t(0 \mid 8-t \mid 11-2t)\ (t \in \mathbb{R})$ ist ein beliebiger Punkt auf der Geraden g.

S_t ist genau dann Schnittpunkt von g und H, wenn gilt:

$8 - t + 2 \cdot (11 - 2t) = 0 \Leftrightarrow t = 6$.

Eingesetzt in g erhält man den Schnittpunkt $S(0 \mid 2 \mid -1)$.

Teilaufgabe b)

(1) Es ist $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ -8 \end{pmatrix}$. Da $\begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ -8 \end{pmatrix} = 0$ gilt, ist $\overline{AC} \perp \overline{OB}$.

Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$ ist der Punkt $T(0\,|\,4\,|\,-2)$.

Eine Gleichung der Geraden OB ist: $OB: \vec{x} = u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ -8 \end{pmatrix} (u \in \mathbb{R})$.

Mit $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ -8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 = 0 \\ u = 0{,}25 \\ u = 0{,}25 \end{vmatrix}$ und $0 \le u \le 1$ folgt, dass T auf $\overline{OB}$ liegt und damit der Schnittpunkt von $\overline{AC}$ und $\overline{OB}$ ist.

(2) Es gilt $V_{Prisma} = G_{Prisma} \cdot h_{Prisma}$. Da das Viereck $OABC$ ein Drachenviereck ist, gilt für den Flächeninhalt: $G_{Prisma} = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 16 \\ -8 \end{pmatrix} \right| = 6\sqrt{320} \left[= 48\sqrt{5} \approx 107{,}33\,[\text{FE}] \right]$.

Da $D \in h$ und $h \perp H$ ist, gilt für die Höhe des Prismas:

$h_{Prisma} = \left|\overline{DS}\right| = \sqrt{180} \left[= 6\sqrt{5} \approx 13{,}42\,[\text{LE}] \right]$. Es folgt: $V_{Prisma} = 1440\,[\text{VE}]$.

Teilaufgabe c)

(1) Beispielsweise wird das Prisma durch die Ebene, die die Mittelpunkte der Strecken $\overline{OD}$, $\overline{AE}$ und $\overline{BF}$ [und $\overline{CG}$] enthält, bzw. durch die Ebene *K*, die die Punkte O, B und F [und D] enthält, in zwei volumengleiche „Teilprismen" zerlegt.

(2) Aus b) (1) und der nachfolgenden Info folgt, dass $\overline{OB}$ die Fläche des Vierecks *OABC* halbiert. Entsprechend halbiert $\overline{DF}$ die Fläche des Vierecks *DEFG*. Die Ebene *K* enthält die Strecken $\overline{OB}$ und $\overline{DF}$. Das Prisma wird durch diese Ebene in zwei „Teilprismen" zerlegt. Da $\left|\overline{DS}\right|$ die Höhe beider Teilprismen ist, besitzen beide Teilprismen wegen $V_{Prisma} = \textit{Grundfläche x Höhe}$ denselben Volumeninhalt.

Teilaufgabe d)

In dem Drachenviereck *OABC* sind die Strecken $\overline{OA}$ und $\overline{OC}$ ($\left|\overline{OA}\right| = \left|\overline{OC}\right| = \sqrt{56}\,[\text{LE}]$) gleich lang. Wenn alle vier Seiten gleich lang sein sollen, muss das Viereck eine Raute sein. In einer Raute halbieren sich die Diagonalen. Der Mittelpunkt $T(0\,|\,4\,|\,-2)$ der Strecke $\overline{AC}$ ist der Schnittpunkt der Diagonalen der gesuchten Raute. Die Koordinaten von B' erhält man aus $\overrightarrow{OB'} = 2\cdot\overrightarrow{OT}$. Es folgt $B'(0\,|\,8\,|\,-4)$.

Teilaufgabe e)

Wird das Lot von einem Punkt *T* auf eine Gerade gefällt, so ist der Lotfußpunkt der Punkt auf der Geraden, der von *T* den kürzesten Abstand besitzt.
Bestimmung der Koordinaten des Lotfußpunktes $L \in OA$ für das Lot von *D* auf die Gerade OA:

$\overline{DL} \perp OA \Leftrightarrow \overrightarrow{DL}\cdot\overrightarrow{a_{OA}} = 0$. Dabei ist $\overrightarrow{a_{OA}}$ ein Richtungsvektor der Geraden *OA*.

$(6w\,|\,4w\,|\,-2w)$ $(w \in I\!R)$ ist ein beliebiger Punkt auf *OA*.

$$\begin{pmatrix} 6w \\ 4w-8 \\ -2w-11 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow w = \frac{5}{28};\; L\left(\frac{15}{14}\,\Big|\,\frac{5}{7}\,\Big|\,-\frac{5}{14}\right).$$

Da $0 \le \frac{5}{28} \le 1$ ist, liegt *L* auf der Strecke $\overline{OA}$ und ist damit der gesuchte Punkt.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:__________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) stellt eine Parametergleichung der Ebene *H* auf, die die Punkte *O*, *A* und *B* enthält.	3			
2	(1) stellt eine Koordinatengleichung der Ebene *H* auf.	3			
3	(2) bestimmt eine Parameterform der Geraden *g*, die *H* senkrecht schneidet und durch *D* verläuft.	3			
4	(3) berechnet die Koordinaten des Schnittpunktes *S* der Geraden *g* und der Ebene *H*.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (12) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**12**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{OB}$ zueinander senkrecht sind.	3			
2	(1) zeigt, dass sich die Diagonalen im Mittelpunkt *T* von $\overline{AC}$ schneiden.	4			
3	(2) bestimmt das Volumen des Prismas *OABCDEFG*.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (12) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**12**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) beschreibt die Lage zweier der gesuchten Ebenen.	3			
2	(2) begründet die Volumengleichheit der beiden Teilkörper für einen der beiden Schnitte aus c) (1).	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**6**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt die Koordinaten von B'.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**4**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt die Koordinaten des Punktes auf der Strecke $\overline{OA}$, der von dem Punkt D den kürzesten Abstand besitzt.	6			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**6**			

	Summe insgesamt	**40**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

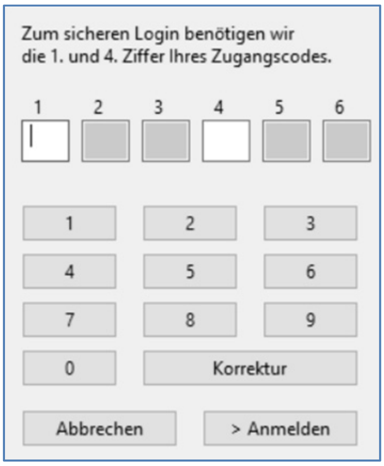
Abiturprüfung 2017

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Beim Onlinebanking gibt es verschiedene Sicherheitsvorkehrungen. Bei einer Sicherheitsabfrage muss der Benutzer (nennen wir ihn Ben) zusätzlich zu seinem Onlinebanking-PIN einen Zahlencode, der aus sechs Ziffern besteht, kennen und teilweise eingeben, um sich anzumelden.
Damit eine potenzielle Angreiferin (nennen wir sie Anna) nicht auf Anhieb alle sechs Ziffern erfährt, werden von der Bank bei jedem Anmeldevorgang nur zwei zufällig ausgewählte Ziffern abgefragt. Welche der sechs Ziffern abgefragt werden, bestimmt die Bank nach dem Zufallsprinzip.
Ist z. B. der Code von Ben 235793 und öffnet sich beim Anmelden folgendes Fenster,



Abbildung

so muss Ben die Ziffern 2 und 7 eingeben. Will Anna nun den gesamten 6-stelligen Code stehlen, muss sie mehrere Male beim Anmelden „zuschauen“. Zu diesem Zweck installiert sie eine Schadsoftware auf Bens Computer, die ihr bei jedem Zuschauen die Beobachtung der beiden eingegebenen Ziffern und ihrer Position ermöglicht.

Name: ____________________

a) Die Matrix U beschreibt den Prozess aus Annas Sicht von anfangs null bekannten Ziffern (Zustand z_0) bis hin zu sechs bekannten Ziffern (Zustand z_6). Dabei beschreibt z_i den Zustand mit i bekannten Ziffern (i = 0, 2, 3, 4, 5, 6). Der Zustand z_1 kann nicht eintreten, da nach dem ersten „Zuschauen“ sofort zwei Ziffern bekannt sind.

$$\begin{array}{ccc} \text{von} & \begin{array}{cccccc} z_0 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 \end{array} & \text{nach} \\ U = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{15} & \frac{3}{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{15} & \frac{9}{15} & \frac{6}{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{15} & \frac{8}{15} & \frac{10}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{15} & \frac{5}{15} & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} z_0 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{array} \end{array}$$

(1) *Zeichnen Sie das zugehörige Übergangsdiagramm.*

(2) Betrachten Sie nun die zweite Spalte der Matrix U.

Erklären Sie im Sachzusammenhang die Einträge mit dem Wert Null in dieser Spalte.

Leiten Sie die von Null verschiedenen Werte in dieser Spalte her.

(3) *Begründen Sie:* $U^2 \cdot \vec{s}$ *mit* $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *ergibt die zweite Spalte der Matrix U.*

(4 + 6 + 2 Punkte)

b) Ben meldet sich jeden Monat fünfmal beim Onlinebanking an.

(1) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Anna nach einem Monat den Code vollständig kennt, wenn sie vorher keine Ziffer des Codes kannte.*

(2) Angenommen, Anna kennt bereits zwei Ziffern des Codes.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Anna nach dreimaligem Zuschauen der Code vollständig bekannt ist.

(3) *Ermitteln Sie die Anzahl der Anmeldevorgänge, die Anna mindestens beobachten muss, um den Code mit mindestens* 99%*iger Wahrscheinlichkeit vollständig zu kennen.*

(3 + 3 + 4 Punkte)

Name: ____________________

c) Betrachtet wird ein anderer stochastischer Prozess, der durch die Matrix

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$ beschrieben wird.

(1) *Erklären Sie die Bedeutung für den stochastischen Prozess, wenn ein Diagonalelement den Wert* 1 *besitzt.*

(2) *Ermitteln Sie, welcher Wahrscheinlichkeitsverteilung sich der durch* A *beschriebene Prozess bei Verwendung der Startverteilung* $\vec{v}_s = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}3 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$ *auf lange Sicht nähert.*

(3) *Bestimmen Sie für den durch A beschriebenen Prozess die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf lange Sicht für die allgemeine Startverteilung*

$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *mit* $a,b,c \in \mathbb{R}$.

Beurteilen Sie, ob es auf lange Sicht für jeden stochastischen Prozess genau eine sich stabilisierende Wahrscheinlichkeitsverteilung gibt, die unabhängig von der Startverteilung ist. (2 + 3 + 5 Punkte)

d) Eine Bank geht nach bisherigen Erfahrungen von einem Risiko von $p = 0{,}001$ aus, dass ein Konto bei der Anmeldung zum Onlinebanking angegriffen wird. Um diese Vermutung zu kontrollieren, werden 25000 Anmeldevorgänge genau untersucht.

(1) *Erläutern Sie, welche Annahmen getroffen werden müssen, um diese Vorgehensweise im Folgenden mit Hilfe einer Binomialverteilung zu modellieren.*

(2) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als* 25 *Angriffe erfolgen.*

Weicht ein Stichprobenergebnis um mehr als das Dreifache der Standardabweichung vom Erwartungswert ab, so spricht man von einem extrem ungewöhnlichen Ergebnis.

(3) *Ermitteln Sie, wie viele Angriffe registriert werden müssen, um von einem extrem ungewöhnlichen Ergebnis zu sprechen.* (2 + 2 + 4 Punkte)

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2017

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Stochastik mit Schwerpunkt stochastische Matrizen

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2017

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Stochastik
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung und Normalverteilung
   - Stochastische Prozesse

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

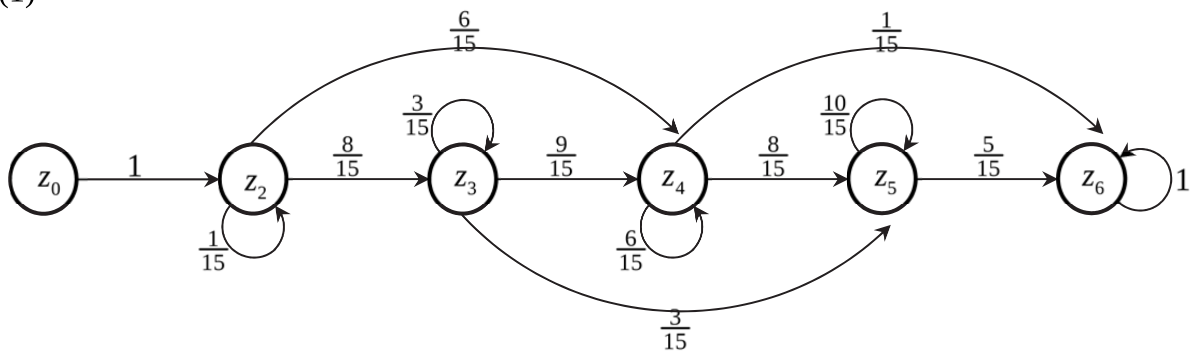
[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

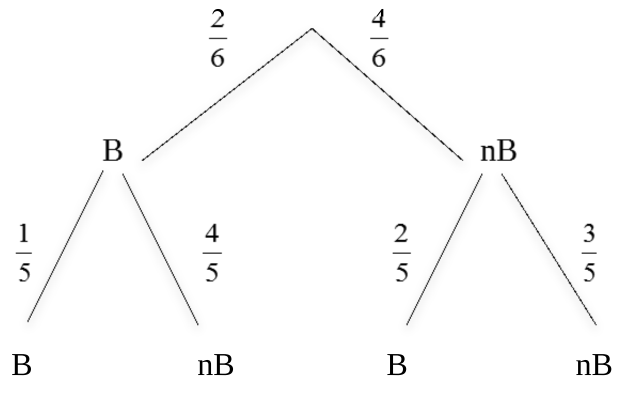
Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1)



(2) Ausgehend vom Zustand z_2 (d. h., 2 Ziffern des Codes sind bereits bekannt) kann Anna beim nächsten Zuschauen keine neue Ziffer (sie verbleibt in z_2), eine neue Ziffer (Wechsel zu z_3) oder zwei neue Ziffern (Wechsel zu z_4) erfahren. Alle weiteren Übergänge sind unmöglich, d. h., sie treten mit einer Wahrscheinlichkeit von 0 ein. Daher stehen in der ersten, fünften und letzten Zeile der zweiten Spalte Nullen.
Berechnung der anderen Übergangswahrscheinlichkeiten in der zweiten Spalte durch Betrachtung eines zweistufigen Baumdiagramms, ausgehend von bereits zwei bekannten Ziffern:



B: Bekannte Ziffer erscheint
nB: Nicht bekannte Ziffer erscheint

Es ergeben sich folgende Übergangswahrscheinlichkeiten:

$P(z_2 \to z_2) = P(B,B) = 1/15$.

$P(z_2 \to z_3) = P(B,nB$ oder $nB,B) = 8/15$.

$P(z_2 \to z_4) = P(nB,nB) = 6/15$.

[Alternativer Lösungsweg: Betrachtung der möglichen 15 Stellenkombinationen im Code (Stellen 1.2., 2.3., ..., 5.6.) und Abzählen der Möglichkeiten, die zum jeweiligen Zustand führen.]

(3) Die Elemente der ersten Spalte der Produktmatrix U^2 bilden sich als Skalarprodukt jeweils der Zeilen der Matrix U mit der ersten Spalte von U, also mit

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daher entspricht die erste Spalte der Produktmatrix U^2 der 2. Spalte von U.
Durch Multiplikation des Vektors $\vec{s}$ mit U^2 erhält man als Ergebnisvektor die erste Spalte von U^2 und damit die zweite Spalte von U.
[Eine alternative Argumentation ergibt sich bei Anwendung des Assoziativgesetzes:
$U \cdot \left(U \cdot \vec{s}\right) = \left(U \cdot U\right) \cdot \vec{s}$]

Teilaufgabe b)

(1) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für den Zustand z_6 nach fünfmaligem Zuschau-Prozess ausgehend vom Zustand z_0.

$$\text{Mit } \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ gilt: } U^5 \cdot \vec{x}_0 = U^5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}0063 \\ 0{,}1345 \\ 0{,}5020 \\ 0{,}3571 \end{pmatrix}.$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 0,36 kennt Anna nach fünfmaligem Zuschauen den Code vollständig.

(2) Mit $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt: $U^3 \cdot \vec{x}_1 \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}0003 \\ 0{,}0308 \\ 0{,}2898 \\ 0{,}5120 \\ 0{,}1671 \end{pmatrix}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass Anna der Code nach dreimaligem Zuschauen vollständig bekannt ist, wenn sie bereits zwei Ziffern kannte, beträgt ungefähr 0,17.

(3) Mithilfe des Taschenrechners kann folgende Gleichung numerisch untersucht werden: $\vec{x}_n = U^n \cdot \vec{x}_0$.

Für $n = 15$ gilt: $\vec{x}_{15} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}0137 \\ 0{,}9863 \end{pmatrix}$ und für $n = 16$ gilt: $\vec{x}_{16} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}0091 \\ 0{,}9909 \end{pmatrix}$.

Anna muss den Anmeldevorgang mindestens 16-mal beobachten, um den Code mit mindestens 99 % Wahrscheinlichkeit vollständig zu kennen.

Teilaufgabe c)

(1) Wenn ein Diagonalelement in der *k*-ten Spalte und Zeile den Wert 1 besitzt, bedeutet dies, dass der Prozess mit Sicherheit (Wahrscheinlichkeit = 1) in diesem Zustand z_k verbleibt, wenn dieser einmal erreicht ist.

(2) Es nähert sich

$A^{30} \cdot \overrightarrow{v_s} \approx A^{31} \cdot \overrightarrow{v_s} \approx \begin{pmatrix} 0{,}19 \\ 0{,}00 \\ 0{,}81 \end{pmatrix}$ der sich stabilisierenden Verteilung $\begin{pmatrix} 0{,}19 \\ 0 \\ 0{,}81 \end{pmatrix}$.

(3) Auf lange Sicht, d. h. für große Werte von n gilt:

$$A^{30} \approx A^{31} \approx A^n \approx \begin{pmatrix} 1 & 0{,}29 & 0 \\ 0 & 0{,}00 & 0 \\ 0 & 0{,}71 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für hohe Potenzen n stabilisiert sich die Matrix A^n. A^n nähert sich für hohe Potenzen der Matrix A_G:

$$A^{30} \approx A^{31} \approx A_G = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}29 & 0 \\ 0 & 0{,}00 & 0 \\ 0 & 0{,}71 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ ergibt sich: $A_G \cdot \vec{v} \approx \begin{pmatrix} a+0{,}29b \\ 0 \\ 0{,}71b+c \end{pmatrix}$.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf lange Sicht ist bei dem durch A beschriebenen Prozess abhängig von der Startverteilung, es ergibt sich keine eindeutige Grenzverteilung, sondern eine Verteilung in Abhängigkeit von a, b und c. Damit kann es nicht für jeden stochastischen Prozess eine sich stabilisierende Wahrscheinlichkeitsverteilung geben, die unabhängig von der Startverteilung ist.

Teilaufgabe d)

(1) Jeder Anmeldevorgang wird angegriffen (mit $p = 0{,}001$) oder nicht, kann also als Bernoulli-Versuch betrachtet werden. Die Wahrscheinlichkeiten für einen Angriff sind jeweils unabhängig voneinander und immer gleich. [Die Registrierung von 25000 Anmeldevorgängen kann folglich als Bernoulli-Kette der Länge $n = 25000$ modelliert werden.]

(2) Zufallsgröße X: Anzahl der Angriffe, $n = 25000$, $p = 0{,}001$

$P(X > 25) = 1 - P(X \leq 25) \approx 1 - 0{,}553 = 0{,}447$.

(3) Es gilt : $\mu = n \cdot p = 25000 \cdot 0{,}001 = 25$ und $\sigma = \sqrt{25000 \cdot 0{,}001 \cdot 0{,}999} \approx 4{,}9975$.

$\mu - 3\sigma \approx 25 - 3 \cdot 4{,}9975 = 10{,}0075$.

$\mu + 3\sigma \approx 25 + 3 \cdot 4{,}9975 = 39{,}9925$.

Werden weniger als 11 oder mehr als 39 Angriffe registriert, spricht man von einem extrem ungewöhnlichen Ergebnis.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) zeichnet das zugehörige Übergangsdiagramm.	4			
2	(2) erklärt im Sachzusammenhang die Einträge mit dem Wert Null in der zweiten Spalte der Matrix *U*.	2			
3	(2) leitet die von Null verschiedenen Werte der zweiten Spalte her.	4			
	(3) begründet, dass $U^2 \cdot \vec{s}$ die 2. Spalte der Matrix *U* ergibt.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (12) ……………………………………………………………… ………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**12**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dass Anna nach einem Monat den Code vollständig kennt.	3			
2	(2) bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dass Anna in Kenntnis von zwei Ziffern nach dreimaligem Zuschauen den Code vollständig kennt.	3			
3	(3) ermittelt die gesuchte Anzahl der Anmeldevorgänge.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (10) ……………………………………………………………… ………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**10**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) erklärt die Bedeutung des Diagonalelementes 1.	2			
2	(2) ermittelt die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf lange Sicht für den gegebenen Startvektor.	3			
3	(3) bestimmt die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf lange Sicht für den allgemeinen Startvektor.	3			
4	(3) beurteilt, ob es auf lange Sicht für jeden stochastischen Prozess genau eine sich stabilisierende Wahrscheinlichkeits-verteilung gibt, die unabhängig von der Startverteilung ist.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (10) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**10**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) erläutert die Annahmen der Modellierung.	2			
2	(2) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	2			
3	(3) ermittelt, wie viele Angriffe registriert werden müssen, um von einem extrem ungewöhnlichen Ergebnis zu sprechen.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (8) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**8**			

	Summe insgesamt	**40**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil A	**24**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: erste Aufgabe	**40**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: zweite Aufgabe	**40**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: dritte Aufgabe	**40**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**144**			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

Berechnung der Endnote nach Anlage 4 der Abiturverfügung auf der Grundlage von § 34 APO-GOSt

Die Klausur wird abschließend mit der Note _________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	144 – 137
sehr gut	14	136 – 130
sehr gut minus	13	129 – 123
gut plus	12	122 – 116
gut	11	115 – 108
gut minus	10	107 – 101
befriedigend plus	9	100 – 94
befriedigend	8	93 – 87
befriedigend minus	7	86 – 80
ausreichend plus	6	79 – 72
ausreichend	5	71 – 65
ausreichend minus	4	64 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 48
mangelhaft	2	47 – 39
mangelhaft minus	1	38 – 29
ungenügend	0	28 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2017

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

In Deutschland liegt bei 1 % der Bevölkerung eine Glutenunverträglichkeit vor. Die betroffenen Personen reagieren auf den Verzehr von bestimmten Getreidesorten mit körperlichen Beschwerden. Ob eine Glutenunverträglichkeit vorliegt oder nicht, kann mithilfe eines Schnelltests diagnostiziert werden. Zeigt das Ergebnis dieses Tests die Glutenunverträglichkeit an, so bezeichnet man es als positiv.

a) Liegt bei einer Person eine Glutenunverträglichkeit vor, so ist das Testergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von 98 % positiv. Liegt bei einer Person keine Glutenunverträglichkeit vor, so beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Testergebnis dennoch positiv ist, 4 %.
Bei einer Person, die aus der Bevölkerung Deutschlands zufällig ausgewählt wurde, wird der Test durchgeführt.

(1) *Erstellen Sie zu dem beschriebenen Sachzusammenhang ein beschriftetes Baumdiagramm.*

(2) *Ermitteln Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:*
A: „Bei der Person liegt eine Glutenunverträglichkeit vor und das Testergebnis ist positiv.“
B: „Das Testergebnis ist negativ.“

(3) *Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Glutenunverträglichkeit vorliegt, wenn das Testergebnis positiv ist.*

(4 + 4 + 4 Punkte)

Name: ____________________

b) Im Rahmen einer Studie sollen aus der Bevölkerung Deutschlands 20 000 Personen zufällig ausgewählt werden. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der ausgewählten Personen an, bei denen eine Glutenunverträglichkeit vorliegt.

(1) *Erläutern Sie, warum das Modell der binomialverteilten Zufallsgröße zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten hier geeignet ist.*

(2) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der ausgewählten Personen, bei denen eine Glutenunverträglichkeit vorliegt, um mehr als* 10 % *vom Erwartungswert von X abweicht.*

(3 + 5 Punkte)

c) Der Test wird mithilfe eines Teststreifens durchgeführt, auf dem eine Substanz als Indikator aufgebracht ist. Ist die Indikatormenge auf einem Teststreifen zu gering, so ist dieser unbrauchbar.
Der Hersteller der Teststreifen verfolgt das Ziel, dass höchstens 10 % der hergestellten Teststreifen unbrauchbar sind, und führt deshalb regelmäßig eine Qualitätskontrolle durch. Dazu wird der laufenden Produktion eine Stichprobe von 100 Teststreifen entnommen. Nur wenn sich darunter mindestens 16 unbrauchbare Teststreifen befinden, entscheidet man sich dafür, das Herstellungsverfahren zu verbessern.

(1) *Beschreiben Sie, welche Fehlentscheidungen bei dieser Qualitätskontrolle auftreten können.*

(2) *Bestimmen Sie, wie hoch die Fehlerwahrscheinlichkeit höchstens ist, dass der Hersteller sich aufgrund seiner Entscheidungsregel irrtümlich um eine Verbesserung des Herstellungsverfahrens bemüht.*
[Kontrolllösung: 3,99 %]

(3) Der Hersteller entschließt sich, die Kontrolle künftig mit einer größeren Stichprobe von 200 Teststreifen durchzuführen. Die Wahrscheinlichkeit für eine unnötige Verbesserung des Herstellungsverfahrens soll durch diese Änderung nur noch ein Drittel der ursprünglichen Wahrscheinlichkeit für eine unnötige Verbesserung des Verfahrens betragen.
Ermitteln Sie, wie groß die Anzahl unbrauchbarer Teststreifen, ab der man sich dafür entscheidet, das Herstellungsverfahren zu verbessern, nun mindestens sein muss.

Name: ____________________

(4) Von einer früheren Qualitätskontrolle mit nicht mehr bekanntem Stichprobenumfang weiß man, dass der Erwartungswert für die binomialverteilte Anzahl unbrauchbarer Teststreifen bei 18 und die Standardabweichung bei 4 lag.
Bestimmen Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit für einen unbrauchbaren Teststreifen und der Stichprobenumfang bei dieser Qualitätskontrolle waren.

(4 + 3 + 4 + 3 Punkte)

d) Die Indikatormenge auf den Teststreifen ist normalverteilt mit einem Erwartungswert von 20 mg und einer Standardabweichung von 4,0 mg. Ein Teststreifen ist unbrauchbar, wenn die Indikatormenge auf dem Teststreifen kleiner als 15 mg ist.

(1) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teststreifen unbrauchbar ist.*
[Kontrolllösung: 10,56 %]

(2) Durch eine Verbesserung konnte die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Teststreifen aufgrund der Indikatormenge unbrauchbar ist, halbiert werden. Der Erwartungswert für die Indikatormenge blieb dabei unverändert.
Bestimmen Sie die geänderte Standardabweichung auf eine Nachkommastelle genau.

(3 + 3 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2017

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Stochastik

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2017

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf. Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Stochastik
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung und Normalverteilung
   - Testen von Hypothesen

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

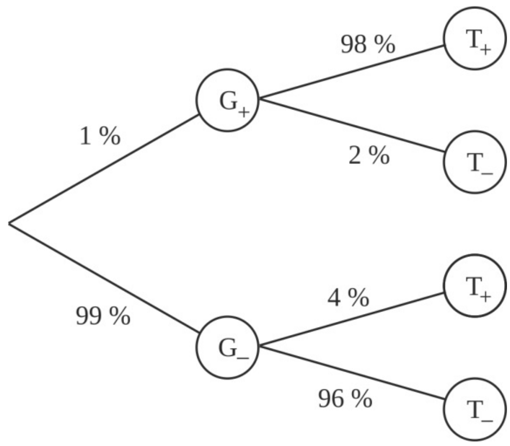
Teilaufgabe a)

(1) G_+: „Bei der Person liegt eine Glutenunverträglichkeit vor."

G_-: „Bei der Person liegt keine Glutenunverträglichkeit vor."

T_+: „Das Testergebnis ist positiv."

T_-: „Das Testergebnis ist negativ."



(2) $P(A) = P(G_+ \wedge T_+) = 0{,}01 \cdot 0{,}98 = 0{,}0098 = 0{,}98\,\%$.

$P(B) = P(G_+ \wedge T_-) + P(G_- \wedge T_-) = 0{,}01 \cdot 0{,}02 + 0{,}99 \cdot 0{,}96 = 0{,}9506 = 95{,}06\,\%$.

(3) $P(T_+) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}9506 = 0{,}0494 = 4{,}94\,\%$.

$P(G_+ \wedge T_+) = P(A) = 0{,}0098 = 0{,}98\,\%$.

$$P_{T_+}(G_+) = \frac{P(G_+ \wedge T_+)}{P(T_+)} = \frac{0{,}0098}{0{,}0494} \approx 0{,}1984 = 19{,}84\,\%.$$

Teilaufgabe b)

(1) Das Modell der binomialverteilten Zufallsgröße ist hier geeignet, da es sich um eine diskrete Zufallsgröße handelt und ein Bernoulli-Prozess mit genau zwei möglichen Ergebnissen („krank“ und „gesund“) vorliegt. Darüber hinaus kann man aufgrund der großen Grundgesamtheit (82 Millionen) und der kleinen Stichprobe (20 000) von einer annähernd gleichbleibenden Wahrscheinlichkeit für die Auswahl einer von Glutenunverträglichkeit betroffenen Person ausgehen.

(2) X ist B(20 000; 0,01)-verteilt. $E(X) = n \cdot p = 20000 \cdot 0{,}01 = 200$.

$1 - P(0{,}9 \cdot 200 \leq X \leq 1{,}1 \cdot 200) \approx 0{,}1450 = 14{,}50\ \%$.

Teilaufgabe c)

(1) Folgende Fehlentscheidungen können auftreten:

- Obwohl höchstens 10 % der hergestellten Teststreifen unbrauchbar sind, entscheidet man sich aufgrund des Ergebnisses der Kontrolle dafür, das Herstellungsverfahren zu verbessern.
- Obwohl mehr als 10 % der hergestellten Teststreifen unbrauchbar sind, entscheidet man sich aufgrund des Ergebnisses der Kontrolle nicht dafür, das Herstellungsverfahren zu verbessern.

(2) Die Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der Teststreifen in der Stichprobe, die unbrauchbar sind. Y ist B(100; 0,1)-verteilt.

$P(16 \leq Y \leq 100) \approx 0{,}0399 = 3{,}99\ \%$.

(3) Y ist nun B(200; 0,1)-verteilt. Gesucht ist die Anzahl k unbrauchbarer Teststreifen, ab der das Herstellungsverfahren verbessert wird, wenn die Wahrscheinlichkeit für eine Verbesserung nun maximal 1,33 % beträgt.

$P(k \leq Y \leq 200) \leq 0{,}0133 = 1{,}33\ \% \quad \Rightarrow \quad k \geq 31$.

Ab einer Anzahl von mindestens 31 unbrauchbaren Teststreifen wird das Herstellungsverfahren verbessert.

(4) $\mu = n \cdot p = 18$.

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 4 \quad \Rightarrow \quad n \cdot p \cdot (1-p) = 16$.

Lösen des Gleichungssystems ergibt $p = \frac{1}{9} \approx 0{,}1111 = 11{,}11\ \%$ und $n = 162$.

Einsetzen bestätigt diese Lösung.

Die Wahrscheinlichkeit für einen unbrauchbaren Teststreifen lag somit bei

$p = \frac{1}{9} \approx 0{,}1111 = 11{,}11\ \%$ und der Stichprobenumfang betrug 162 Teststreifen.

Teilaufgabe d)

(1) Die Zufallsgröße Z beschreibt die Indikatormenge auf einem Teststreifen in mg.

Für einen Erwartungswert von 20 mg und eine Standardabweichung von 4,0 mg gilt:

$P(Z < 15) \approx 0{,}1056 = 10{,}56\ \%$.

(2) Die Gleichung $P(Z < 15) = 5{,}28\ \%$, wobei σ unbekannt ist, wird gelöst.

Das Lösen der Gleichung mit dem CAS ergibt $\sigma \approx 3{,}1$ mg.

[Hinweis: Die Lösung kann auch durch systematisches Probieren ermittelt werden.]

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) erstellt zu dem beschriebenen Sachzusammenhang ein beschriftetes Baumdiagramm.	4			
2	(2) ermittelt die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.	4			
3	(3) ermittelt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Gluten-unverträglichkeit vorliegt, wenn das Testergebnis positiv ist.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (12) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**12**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) erläutert, warum das Modell der Binomialverteilung hier geeignet ist.	3			
2	(2) bestimmt den Erwartungswert.	2			
3	(2) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (8) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**8**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) beschreibt die beiden möglichen Fehlentscheidungen, die bei der Qualitätskontrolle auftreten können.	4			
2	(2) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3			
3	(3) ermittelt einen Ansatz zur Bestimmung der Entscheidungsregel.	2			
4	(3) ermittelt die gesuchte Anzahl.	2			
5	(4) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit *p* und den Stichprobenumfang *n*.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (14) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**14**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit der normalverteilten Zufallsgröße.	3			
2	(2) bestimmt die geänderte Standardabweichung auf eine Nachkommastelle genau.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**6**			

	Summe insgesamt	**40**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil A	**24**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: erste Aufgabe	**40**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: zweite Aufgabe	**40**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: dritte Aufgabe	**40**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**144**			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

Berechnung der Endnote nach Anlage 4 der Abiturverfügung auf der Grundlage von § 34 APO-GOSt

Die Klausur wird abschließend mit der Note ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	144 – 137
sehr gut	14	136 – 130
sehr gut minus	13	129 – 123
gut plus	12	122 – 116
gut	11	115 – 108
gut minus	10	107 – 101
befriedigend plus	9	100 – 94
befriedigend	8	93 – 87
befriedigend minus	7	86 – 80
ausreichend plus	6	79 – 72
ausreichend	5	71 – 65
ausreichend minus	4	64 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 48
mangelhaft	2	47 – 39
mangelhaft minus	1	38 – 29
ungenügend	0	28 – 0