HMF 1 - Stochastik (Pool 1)

Für ein Zufallsexperiment mit den beiden Ereignissen A und B gilt
$P(A) = 0{,}6$ und $P(\overline{B}) = 0{,}3$ sowie $P(A \cap \overline{B}) = 0{,}2$.

1.1 Erstellen Sie für die beschriebene Situation eine vollständige Vierfeldertafel.

(3 P)

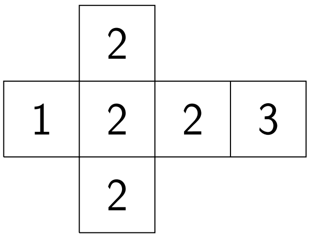
1.2 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P_A(\overline{B})$.

(2 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 1 - Stochastik (Pool 1)
1.1	<table><tr><td></td><td>A</td><td>$\overline{A}$</td><td></td></tr><tr><td>B</td><td>0,4</td><td>0,3</td><td>0,7</td></tr><tr><td>$\overline{B}$</td><td>0,2</td><td>0,1</td><td>0,3</td></tr><tr><td></td><td>0,6</td><td>0,4</td><td>1</td></tr></table> 3 P
1.2	Es ist $P_A(\overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)} = \dfrac{0{,}2}{0{,}6} = \dfrac{1}{3}$. 2 P

HMF 2 - Stochastik (Pool 1)

Die Abbildung zeigt das Netz eines Würfels.



2.1 Der Würfel wird zweimal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der beiden geworfenen Zahlen 4 ist.

(2 P)

2.2 Die Zahlen „1“ und „3“ werden jeweils durch eine neue Zahl ersetzt. Das Verhältnis der beiden neuen Zahlen ist ebenfalls $1 : 3$. Betrachtet man bei einmaligem Werfen des geänderten Würfels die geworfene Zahl, so ist der zugehörige Erwartungswert 4. Ermitteln Sie die beiden neuen Zahlen.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 2 - Stochastik (Pool 1)
2.1	$2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{2}$ 2 P
2.2	$\frac{1}{6} \cdot x + \frac{4}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3x = 4 \Leftrightarrow \frac{4}{6} \cdot x = \frac{8}{3} \Leftrightarrow x = 4$ Die neuen Zahlen sind 4 und 12. 3 P

HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 1)

Gegeben ist eine Kugel K mit

$K: (x_1-4)^2+(x_2-4)^2+(x_3-1)^2=1.$

3.1 Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M und den Radius r der Kugel K sowie die Koordinaten eines Punktes P auf dieser Kugel an.

(2 P)

3.2 Gegeben sind die Punkte $A(4\,|\,4\,|\,0)$ und $B(0\,|\,8\,|\,0)$.

Zeigen Sie, dass die Gerade durch A und B die Kugel K in genau einem Punkt berührt.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 1)
3.1	$M(4\,|\,4\,|\,1)$ und $r=1$ 1 P Z.B. $P(4\,|\,4\,|\,2)$ 1 P
3.2	Die Gerade g mit $g: \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}$ verläuft durch die Punkte A und B. Das Einsetzen der Koordinaten in die Kugelgleichung liefert $(4-4s-4)^2+(4+4s-4)^2+(0-1)^2=1 \Leftrightarrow (-4s)^2+(4s)^2=0 \Leftrightarrow 32s^2=0 \Leftrightarrow s=0.$ Da die Gleichung genau eine Lösung hat, berührt die Gerade g die Kugel in genau einem Punkt. 3 P

HMF 4 - Analytische Geometrie (Pool 1)

In einem Koordinatensystem ist ein gerader Zylinder mit dem Radius 5 und der Höhe 10 gegeben, dessen Grundfläche in der x_1x_2-Ebene liegt.

$M(8\,|\,5\,|\,10)$ ist der Mittelpunkt der Deckfläche.

4.1 Weisen Sie nach, dass der Punkt $P(5|1|0)$ auf dem Rand der Grundfläche des Zylinders liegt.

(2 P)

4.2 Unter allen Punkten auf dem Rand der Deckfläche hat der Punkt S den kleinsten Abstand von P, der Punkt T den größten.

Geben Sie die Koordinaten von S an und bestimmen Sie die Koordinaten von T.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 4 - Analytische Geometrie (Pool 1)
4.1	P liegt in der x_1x_2-Ebene. Der Mittelpunkt der Grundfläche ist $N(8\,|\,5\,|\,0)$. Wegen $\lvert\overrightarrow{NP}\rvert = \left\lvert \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rvert = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$ liegt P auf dem Rand der Grundfläche des Zylinders. 2 P
4.2	$S(5\,|\,1\,|\,10)$ 1 P $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{SM} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$, d.h. T hat die Koordinaten $(11\,|\,9\,|\,10)$. 2 P

HMF 5 - Analytische Geometrie (Pool 2)

Für jedes $a \in \mathbb{R}$ sind die Geraden g_a und h_a gegeben durch

$$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} a \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Geraden g_a und h_a haben den gemeinsamen Punkt $P(1 \mid 1 \mid 1)$.

5.1 Untersuchen Sie, ob es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, für das g_a und h_a sogar identisch sind.

(2 P)

5.2 Zeigen Sie, dass es genau ein $a \in \mathbb{R}$ derart gibt, so dass g_a und h_a orthogonal zueinander sind.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 5 - Analytische Geometrie (Pool 2)
5.1	Die Geraden g_a und h_a sind identisch, wenn es ein k gibt, so dass $k \cdot \begin{pmatrix} a \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$ ist. Für $a = 8$ und $k = 2$ ist dies wegen $2 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ erfüllt. 2 P
5.2	Wegen $\begin{pmatrix} a \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 4a + 2 = 0 \Leftrightarrow 2(a+1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = -1$ sind die Geraden g_a und h_a nur für $a = -1$ orthogonal zueinander. 3 P

HMF 6 - Analysis (Pool 1)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + x^4 - \frac{8}{3}x^3$ mit $x \in \mathbb{R}$.

6.1 Berechnen Sie die lokale Änderungsrate der Funktion an der Stelle $x = -1$.

(2 P)

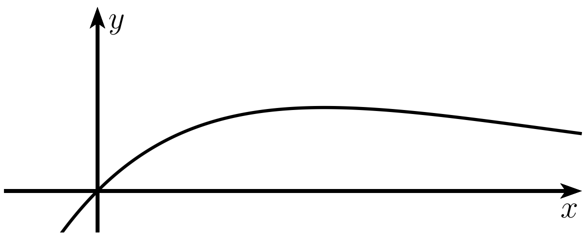
6.2 Die Funktion f hat drei Wendestellen. Bestimmen Sie diese Stellen.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 6 - Analysis (Pool 1)
6.1	$f'(x) = x^4 + 4x^3 - 8x^2$ $f'(-1) = (-1)^4 + 4 \cdot (-1)^3 - 8 \cdot (-1)^2 = 1 - 4 - 8 = -11$ 2 P
6.2	$f''(x) = 4x^3 + 12x^2 - 16x$ $4x^3 + 12x^2 - 16x = 0$ $\Leftrightarrow 4x \cdot (x^2 + 3x - 4) = 0$ $\Leftrightarrow 4x \cdot (x-1) \cdot (x+4) = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -4$ 3 P

HMF 7 - Analysis (Pool 1)

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^{-x}$ und $x \in \mathbb{R}$. Betrachtet werden die Dreiecke mit den Eckpunkten $O(0 \mid 0)$, $P(a \mid 0)$ und $Q(a \mid f(a))$ mit $a > 0$.



7.1 Begründen Sie, dass der Flächeninhalt jedes dieser Dreiecke mit dem Term $\frac{1}{2}a^2e^{-a}$ bestimmt werden kann.

(2 P)

7.2 Unter den betrachteten Dreiecken hat eines den größten Flächeninhalt.
Bestimmen Sie den zugehörigen Wert a.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 7 - Analysis (Pool 1)
7.1	Mit der Grundseite a und der Höhe $f(a)$ ergibt sich für den Flächeninhalt des Dreiecks $\frac{1}{2} \cdot a \cdot f(a) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot e^{-a} = \frac{1}{2}a^2e^{-a}$. 2 P
7.2	Betrachtet man $\frac{1}{2}a^2e^{-a}$ als Term einer Funktion A, so gilt $A'(a) = ae^{-a} - \frac{1}{2}a^2e^{-a} = a \cdot e^{-a} \cdot (1 - \frac{a}{2}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \vee a = 2.$ Wegen $a > 0$ ist 2 der gesuchte Wert für a. 3 P

HMF 8 - Analysis (Pool 2)

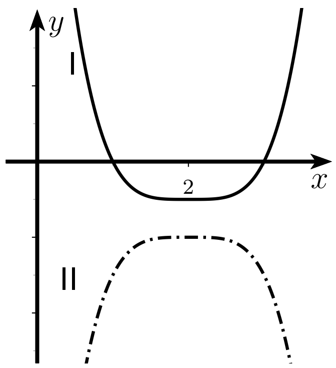
Für jeden Wert von $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist eine Funktion f_a gegeben mit $f_a(x) = a\cdot(x-2)^3$ und $x \in \mathbb{R}$.

8.1 Zeigen Sie, dass die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F mit $F(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-2)^4 + 3$ eine Stammfunktion von f_2 ist.

(1 P)

8.2 Untersuchen Sie mithilfe von Skizzen, für welche Werte von a sich unter den Stammfunktionen von f_a solche befinden, die nur negative Funktionswerte haben.

(4 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 8 - Analysis (Pool 2)
8.1	$F'(x) = 2 \cdot (x-2)^3 = f_2(x)$ 1 P
8.2	Die Terme aller Stammfunktionen von f_a lassen sich durch $F_{a,b}(x) = \frac{a}{4} \cdot (x-2)^4 + b$ mit $b \in \mathbb{R}$ darstellen. Für $a > 0$ hat $F_{a,b}$ stets Funktionswerte, die nicht negativ sind (vgl. Graph I). Für $a < 0$ gibt es stets Werte von b, sodass $F_{a,b}$ nur negative Funktionswerte hat (vgl. Graph II).  4 P

HMF-Bewertungsbogen für: ____________________

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 1 - Stochastik (Pool 1)
1.1	<table><tr><td></td><td>A</td><td>$\overline{A}$</td><td></td></tr><tr><td>B</td><td>0,4</td><td>0,3</td><td>0,7</td></tr><tr><td>$\overline{B}$</td><td>0,2</td><td>0,1</td><td>0,3</td></tr><tr><td></td><td>0,6</td><td>0,4</td><td>1</td></tr></table> 3 P
1.2	Es ist $P_A(\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)} = \frac{0{,}2}{0{,}6} = \frac{1}{3}$. 2 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 2 - Stochastik (Pool 1)
2.1	$2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{2}$ 2 P
2.2	$\frac{1}{6} \cdot x + \frac{4}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3x = 4 \Leftrightarrow \frac{4}{6} \cdot x = \frac{8}{3} \Leftrightarrow x = 4$ Die neuen Zahlen sind 4 und 12. 3 P

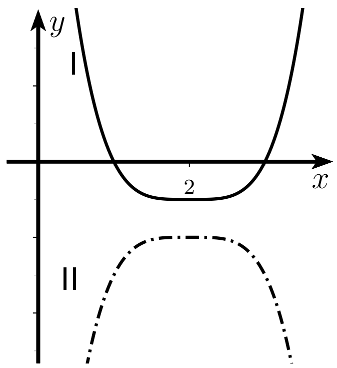
	Vorgaben für die Bewertung von HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 1)
3.1	$M(4 \mid 4 \mid 1)$ und $r = 1$ 1 P Z.B. $P(4 \mid 4 \mid 2)$ 1 P
3.2	Die Gerade g mit $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ verläuft durch die Punkte A und B. Das Einsetzen der Koordinaten in die Kugelgleichung liefert $(4-4s-4)^2+(4+4s-4)^2+(0-1)^2 = 1 \Leftrightarrow (-4s)^2+(4s)^2 = 0 \Leftrightarrow 32s^2 = 0 \Leftrightarrow s = 0.$ Da die Gleichung genau eine Lösung hat, berührt die Gerade g die Kugel in genau einem Punkt. 3 P

<table>
<tr><th></th><th>Vorgaben für die Bewertung von HMF 4 - Analytische Geometrie (Pool 1)</th></tr>
<tr><td>4.1</td><td>P liegt in der x_1x_2-Ebene. Der Mittelpunkt der Grundfläche ist $N(8 \mid 5 \mid 0)$.
Wegen $|\overrightarrow{NP}| = \left|\begin{pmatrix}-3\\-4\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-3)^2+(-4)^2} = 5$
liegt P auf dem Rand der Grundfläche des Zylinders.
2 P</td></tr>
<tr><td>4.2</td><td>$S(5 \mid 1 \mid 10)$
1 P
$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{SM} = \begin{pmatrix}8\\5\\10\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\9\\10\end{pmatrix}$,
d.h. T hat die Koordinaten $(11 \mid 9 \mid 10)$.
2 P</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>Vorgaben für die Bewertung von HMF 5 - Analytische Geometrie (Pool 2)</th></tr>
<tr><td>5.1</td><td>Die Geraden g_a und h_a sind identisch, wenn es ein k gibt, so dass $k \cdot \begin{pmatrix}a\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a\\a\\2\end{pmatrix}$
ist. Für $a = 8$ und $k = 2$ ist dies wegen $2 \cdot \begin{pmatrix}8\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16\\8\\2\end{pmatrix}$ erfüllt.
2 P</td></tr>
<tr><td>5.2</td><td>Wegen $\begin{pmatrix}a\\4\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2a\\a\\2\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2a^2+4a+2 = 0 \Leftrightarrow 2(a+1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = -1$ sind die Geraden g_a und h_a nur für $a = -1$ orthogonal zueinander.
3 P</td></tr>
</table>

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 6 - Analysis (Pool 1)
6.1	$f'(x) = x^4 + 4x^3 - 8x^2$ $f'(-1) = (-1)^4 + 4 \cdot (-1)^3 - 8 \cdot (-1)^2 = 1 - 4 - 8 = -11$ 2 P
6.2	$f''(x) = 4x^3 + 12x^2 - 16x$ $4x^3 + 12x^2 - 16x = 0$ $\Leftrightarrow 4x \cdot (x^2 + 3x - 4) = 0$ $\Leftrightarrow 4x \cdot (x - 1) \cdot (x + 4) = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -4$ 3 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 7 - Analysis (Pool 1)
7.1	Mit der Grundseite a und der Höhe $f(a)$ ergibt sich für den Flächeninhalt des Dreiecks $\frac{1}{2} \cdot a \cdot f(a) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot e^{-a} = \frac{1}{2}a^2e^{-a}$. 2 P
7.2	Betrachtet man $\frac{1}{2}a^2e^{-a}$ als Term einer Funktion A, so gilt $A'(a) = ae^{-a} - \frac{1}{2}a^2e^{-a} = a \cdot e^{-a} \cdot (1 - \frac{a}{2}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \vee a = 2.$ Wegen $a > 0$ ist 2 der gesuchte Wert für a. 3 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 8 - Analysis (Pool 2)
8.1	$F'(x) = 2 \cdot (x-2)^3 = f_2(x)$ 1 P
8.2	Die Terme aller Stammfunktionen von f_a lassen sich durch $F_{a,b}(x) = \frac{a}{4} \cdot (x-2)^4 + b$ mit $b \in \mathbb{R}$ darstellen. Für $a > 0$ hat $F_{a,b}$ stets Funktionswerte, die nicht negativ sind (vgl. Graph I). Für $a < 0$ gibt es stets Werte von b, sodass $F_{a,b}$ nur negative Funktionswerte hat (vgl. Graph II).  4 P

Erstkorrektor: Von 40 Punkten wurden erreicht: _________

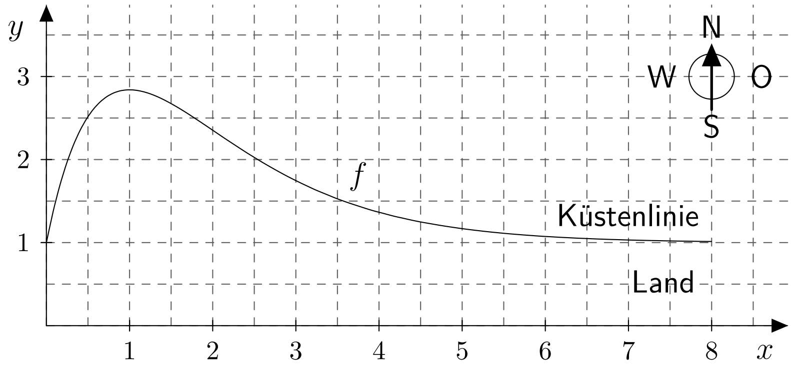
Zweitkorrektor: Von 40 Punkten wurden erreicht: _________

Aufgabe 1: Analysis

Für den Beginn des Jahres 2020 modelliert der Graph der Funktion f mit

$$f(x) = 5\,x \cdot e^{-x} + 1 \quad \text{und} \quad x \in [0; 8]$$

einen Teil einer Küstenlinie, die das Land vom Meer trennt. Die x-Achse beschreibt eine Straße in West-Ost-Richtung. Die Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse stellt das Land nördlich der Straße dar. Bei $L(0{,}5\,|\,1{,}5)$ steht ein Leuchtturm.
Eine Längeneinheit entspricht $100\,\mathrm{m}$ in der Wirklichkeit.



a) a1) Zeichnen Sie den Punkt L in die Abbildung ein.
Berechnen Sie die y-Koordinate des Punkts der Küstenlinie an der Stelle $x = 0{,}5$. (2 P)

a2) Zeichnen Sie die Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = 2$ in die Abbildung ein, und bestimmen Sie deren Steigung. (2 P)

a3) Es gibt auf dem betrachteten Teil der Küstenlinie Punkte, deren Abstand von der Straße 200 Meter beträgt.
Zeichnen Sie die entsprechenden Punkte in die Abbildung ein.
Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte. (3 P)

b) b1) Berechnen Sie die Koordinaten des nördlichsten Punkts auf dem betrachteten Teil der Küstenlinie. (5 P)
[Zur Kontrolle: $f'(x) = 5\,e^{-x} \cdot (1 - x)$]

b2) Bestimmen Sie alle Stellen $x \in [0; 8]$, für die $f''(x) = 0$ gilt. (3 P)

b3) Berechnen Sie den mittleren Abstand der Punkte des betrachteten Teils der Küstenlinie zur Straße in Metern. (3 P)

b4) Bestimmen Sie mittels Integration einen Funktionsterm für eine Stammfunktion F von f. (4 P)

Der betrachtete Teil der Küstenlinie wird sich im Laufe der Jahre verändern. In einem Rechenmodell wird der künftige Verlauf für $a \geq 20$ durch die Funktionen f_a mit

$$f_a(x) = 5\,x \cdot e^{-0{,}05\,a \cdot x} + 1 \quad \text{und} \quad x \in [0;8]$$

modelliert. Der Wert von a gibt an, wie viele Jahre seit Beginn des Jahres 2000 vergangen sind. Also entspricht $a = 20$ dem Beginn des Jahres 2020.

c) c1) Berechnen Sie, in welchem Jahr der Leuchtturm auf der Küstenlinie stehen wird. (3 P)

Für jedes a hat der Graph der Funktion f_a einen Hochpunkt an der Stelle $x = \frac{20}{a}$. Dieser Hochpunkt beschreibt den nördlichsten Punkt der jeweiligen Küstenlinie.

c2) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ortskurve, auf der die Hochpunkte liegen. (3 P)

c3) Vom Leuchtturm aus führt ein Weg genau in Nordrichtung. Zu einem bestimmten Zeitpunkt endet dieser Weg am nördlichsten Punkt der Küstenlinie.
Bestimmen Sie die Länge des Weges zu diesem Zeitpunkt. (3 P)

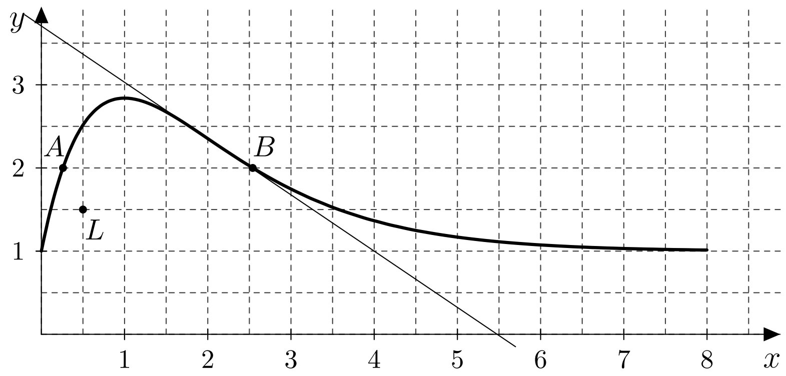
d) d1) Berechnen Sie den Inhalt der Landfläche zwischen der Küstenlinie und der Straße im Intervall $[0;8]$ zu Beginn des Jahres 2150.
Begründen Sie, dass der Inhalt der Landfläche auch in allen Jahren nach 2150 größer als 8 Hektar sein wird. (4 P)

d2) Es gibt genau einen Wert $a \geq 20$, der die folgende Gleichung erfüllt:

$$\int_0^8 \left(5\,x \cdot e^{-0{,}05\,a \cdot x} + 1\right) dx = 0{,}8 \cdot \int_0^8 \left(5\,x \cdot e^{-x} + 1\right) dx$$

Interpretieren Sie die Bedeutung dieses Wertes a im Sachzusammenhang. (2 P)

d3) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen a, für die $f_a(x) < f(x)$ für $0 < x \leq 8$ gilt. (3 P)

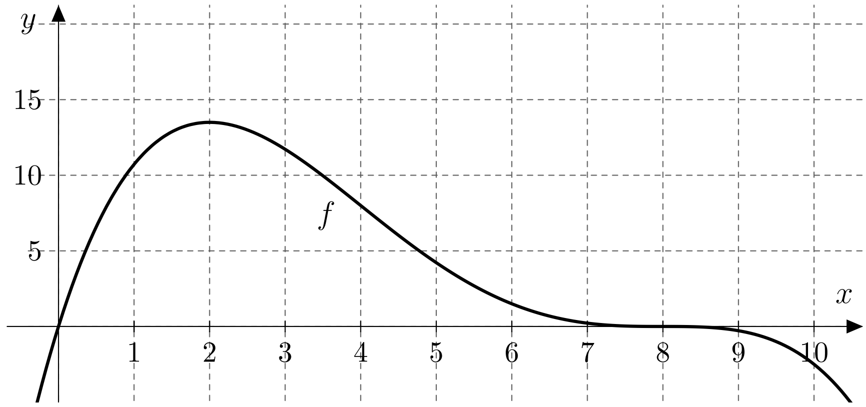
Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) Die folgende Abbildung beinhaltet alle zeichnerischen Lösungen der Teilaufgaben a1), a2) und a3).  Einzeichnen des Punkts $L(0{,}5\|1{,}5)$. Es gilt $f(0{,}5) = 2{,}5\,e^{-0{,}5} + 1 \approx 2{,}52$.	 1 1		
Einzeichnen der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = 2$ $m \approx \frac{0-2}{5{,}5-2{,}5} \approx -0{,}67$ *Alternativ kann $f'(2)$ bestimmt werden.*	1 1		
Einzeichnen der Punkte A und B auf dem Graphen von f bei $y = 2$ Die Gleichung $5x \cdot e^{-x} + 1 = 2$ liefert $x \approx 0{,}26$ oder $x \approx 2{,}54$. Mit gerundeten Koordinaten ergeben sich die Punkte $A(0{,}26 \,\|\, 2)$ und $B(2{,}54 \,\|\, 2)$.	1 2		
Teilaufgabe b) Gesucht ist das globale Maximum von f im Intervall $[0; 8]$. Es gilt $f'(x) = 5\,e^{-x} + 5x \cdot (-1) \cdot e^{-x} = 5\,e^{-x} \cdot (1 - x)$. Notwendig für ein lokales Maximum an der Stelle x ist $f'(x) = 0$. Wegen $e^{-x} \neq 0$ für alle x gilt $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5\,e^{-x}\,(1 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Da zusätzlich $f(0) = 1$, $f(1) = 5\,e^{-1} + 1 \approx 2{,}84$ und $f(8) = 40\,e^{-8} + 1 \approx 1{,}01$ gilt, ist eine hinreichende Bedingung für ein lokales Maximum von f an der Stelle $x = 1$ erfüllt. Zugleich zeigen die Funktionswerte an den Rändern, dass dieses auch das globale Maximum ist. Der nördlichste Punkt der Küstenlinie liegt somit etwa bei $(1 \,\|\, 2{,}84)$.	1 2 2		
$f''(x) = -5\,e^{-x} \cdot (1 - x) - 5\,e^{-x} = 5\,e^{-x} \cdot (x - 2)$ Wegen $e^{-x} > 0$ für alle x gilt $f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Damit ist $x = 2$ die einzige Stelle mit $f''(x) = 0$.		3	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Wegen $\frac{1}{8}\int_0^8 \left(5x\cdot e^{-x}+1\right)dx \approx 1{,}62$ beträgt der mittlere Abstand der Punkte auf der Küstenlinie von der Straße ca. $162\,\mathrm{m}$.		3	
Partielle Integration mit $u(x)=x, u'(x)=1$ und $v(x)=-e^{-x}, v'(x)=e^{-x}$ ergibt $\int x\cdot e^{-x}dx = \left[-x\cdot e^{-x}\right] + \int 1\cdot e^{-x}dx = -x\cdot e^{-x} - e^{-x} + C$ $= -e^{-x}\cdot(1+x)+C.$ Ein Term einer Stammfunktion zu $f(x)=5x\cdot e^{-x}+1$ ist damit $F(x) = -5\cdot e^{-x}\cdot(1+x)+x.$			4
Teilaufgabe c) Der Turm liegt auf der Küstenlinie, wenn $f_a(0{,}5)=1{,}5$ gilt. Damit folgt $2{,}5\,e^{-0{,}025\,a}+1=1{,}5 \Leftrightarrow a = 40\cdot\ln(5)\approx 64{,}38.$ Also steht der Leuchtturm im Verlauf des Jahres 2064 auf der Küstenlinie.		3	
Die y-Koordinate der Hochpunkte ist $f_a(\frac{20}{a}) = \frac{100}{a}\cdot e^{-1}+1.$ Mit der x-Koordinate $x=\frac{20}{a}$ folgt für die Gleichung der Ortskurve $y=\frac{100}{a}\cdot e^{-1}+1 = 5\cdot\frac{20}{a}\cdot e^{-1}+1 = 5\,e^{-1}\cdot x+1.$		3	
Zum beschriebenen Zeitpunkt müssen die x-Koordinate des Leuchtturms und des Hochpunkts übereinstimmen. Wegen $0{,}5=\frac{20}{a} \Leftrightarrow a=40$ liegt der gesuchte Zeitpunkt im Jahr 2040. Mit $f_{40}(0{,}5) = 2{,}5\,e^{-1}+1\approx 1{,}92$ und $1{,}92-1{,}5=0{,}42$ beträgt die Länge des Weges zu diesem Zeitpunkt etwa $42\,\mathrm{m}$.			3
Teilaufgabe d) Es gilt $\int_0^8 f_{150}(x)\,dx = \int_0^8 \left(5x\cdot e^{-7{,}5\,x}+1\right)dx \approx 8{,}09.$ Der Inhalt der Landfläche zu Beginn des Jahres 2150 beträgt ca. $8{,}09$ Hektar.		2	
Für wachsende Werte von a nähern sich die Werte des Terms $5\,x\cdot e^{-0{,}05\,a\cdot x}+1$ an jeder Stelle $0<x\leq 8$ dem Wert 1 an, bleiben dabei aber größer als 1. Daraus folgt $\int_0^8 f_a(x)\,dx > 8\cdot 1$. Der Inhalt der Landfläche ist also auch in den folgenden Jahren immer größer als 8 Hektar.		2	
Dieser Wert a gibt an, wie viele Jahre seit Beginn des Jahres 2000 vergangen sind, wenn nur noch $80\,\%$ der Landfläche vom Beginn des Jahres 2020 vorhanden sind.		2	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Wegen $x > 0$ gilt $f_a(x) < f(x) \Leftrightarrow 5x \cdot e^{-0{,}05\,a \cdot x} < 5x \cdot e^{-x} \Leftrightarrow e^{-0{,}05\,a \cdot x} < e^{-x}$ $\Leftrightarrow -0{,}05\,a \cdot x < -x \Leftrightarrow 0{,}05\,a > 1$ $\Leftrightarrow a > 20\,.$			3
Punktsummen	12	18	10

Aufgabe 2: Analysis

Die Abbildung zeigt den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f vierten Grades. Die Tangente im Wendepunkt $W(4\,|\,8)$ des Graphen hat die Steigung -4.



a) a1) Zeichnen Sie die beschriebene Tangente in die Abbildung ein.
Bestimmen Sie eine zugehörige Geradengleichung mit Hilfe der gegebenen Werte. (3 P)

a2) Die erste Ableitungsfunktion f' von f besitzt zwei ganzzahlige Nullstellen.
Geben Sie diese beiden Nullstellen an.

Der Graph von f' besitzt einen Tiefpunkt.
Geben Sie die Koordinaten dieses Tiefpunkts an, und begründen Sie Ihre Angabe. (5 P)

a3) Die Funktion f hat eine Gleichung der Form

$$f(x) = a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + 16\,x\,.$$

Bestimmen Sie die Werte der Parameter a, b und c. (6 P)

[Zur Kontrolle: $f(x) = -\frac{1}{32}\,x^4 + \frac{3}{4}\,x^3 - 6\,x^2 + 16\,x$]

a4) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph von f an der Stelle $x = 8$ einen Sattelpunkt, d.h. einen Wendepunkt mit waagerechter Tangente, hat. (4 P)

Am 26. April 1986 ereignete sich in der Ukraine ein Reaktorunfall, bei dem radioaktives Plutonium-241 freigesetzt wurde. Plutonium-241 zerfällt exponentiell, d.h. in jedem Jahr nimmt die Masse des vorhandenen Plutonium-241 um einen konstanten prozentualen Anteil ab. Der Zerfall einer bestimmten Menge Plutonium-241 wird im Folgenden durch die Funktion p mit

$$p(x) = 200 \cdot e^{-0{,}048x} \quad \text{und} \quad x \geq 0$$

beschrieben. Dabei ist x die Zeit in Jahren, die seit dem Reaktorunfall vergangen ist, und $p(x)$ die Masse des verbliebenen Plutonium-241 in Milligramm.

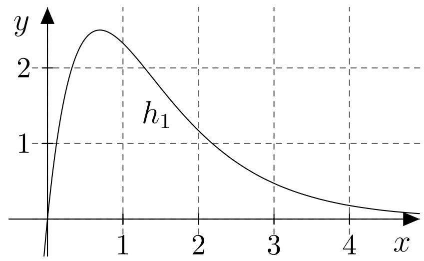
b) b1) Geben Sie die Bedeutung des Faktors 200 im Sachzusammenhang an.
Berechnen Sie den prozentualen Anteil, um den die Masse des Plutonium-241 in jedem Jahr abnimmt. (3 P)

b2) Bestimmen Sie das Jahr, in dessen Verlauf erstmals weniger als ein Milligramm des Plutonium-241 vorhanden sein wird. (4 P)

Beim Zerfall eines radioaktiven Stoffs kann ein weiterer radioaktiver Stoff entstehen, der ebenfalls exponentiell zerfällt.
Für ein geeignetes $k > 0$ modelliert die Funktion h_k mit

$$h_k(x) = 10 \cdot (1 - e^{-kx}) \cdot e^{-x} \quad \text{und} \quad x \geq 0$$

die zur Zeit x vorhandene Masse des neu entstandenen Stoffs. Die Abbildung zeigt den Graphen von h_1.



c) c1) Zeigen Sie, dass h_k nur die Nullstelle $x = 0$ hat. (2 P)

c2) Der Graph der Funktion h_k hat genau einen Hochpunkt. Für die erste Ableitungsfunktion h_k' gilt

$$h_k'(x) = 10 \cdot \left((k+1) \cdot e^{-kx} - 1\right) \cdot e^{-x}\,.$$

Bestimmen Sie die x-Koordinate des Hochpunkts in Abhängigkeit von k. (3 P)

d) Beim Zerfall von Plutonium-241 entsteht als weiterer radioaktiver Stoff Americium-241. Die Funktion a mit

$$a(x) = 207 \cdot \left(1 - e^{-0{,}0464x}\right) \cdot e^{-0{,}0016x} \quad \text{und} \quad x \geq 0$$

gibt für jedes Jahr x die Masse des vorhandenen Americium-241 in Milligramm an.

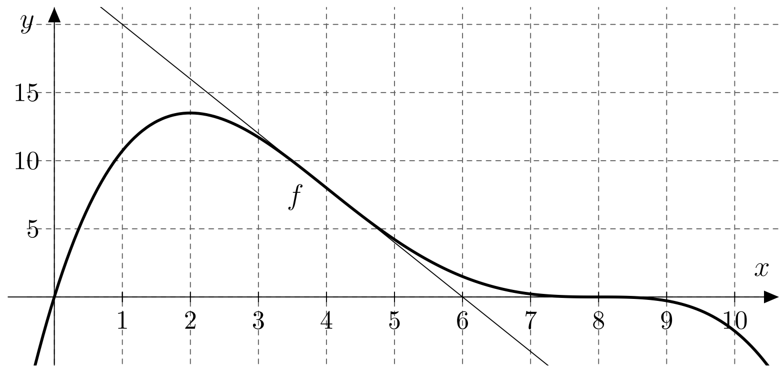
d1) Der Graph von a kann für einen Wert von k aus dem Graphen der Funktion h_k erzeugt werden, indem man diesen in x-Richtung und in y-Richtung streckt.
Geben Sie die beiden Streckungsfaktoren an und bestimmen Sie den passenden Wert von k. (3 P)

d2) Im Funktionsterm von a beschreibt der Faktor $1 - e^{-0{,}0464x}$ die Zunahme der Masse des vorhandenen Americium-241 und der Faktor $e^{-0{,}0016x}$ den Zerfall des vorhandenen Americium-241.
Begründen Sie, dass es einen Zeitpunkt gibt, zu dem beide Faktoren den gleichen Wert annehmen, ohne diesen Zeitpunkt zu berechnen. (3 P)

e) Für jeden Wert von k gibt es zu der Funktion h_k eine Stammfunktion H_k mit

$$H_k(x) = -10 \cdot e^{-x} + \frac{10}{k+1} \cdot e^{-(k+1)x}.$$

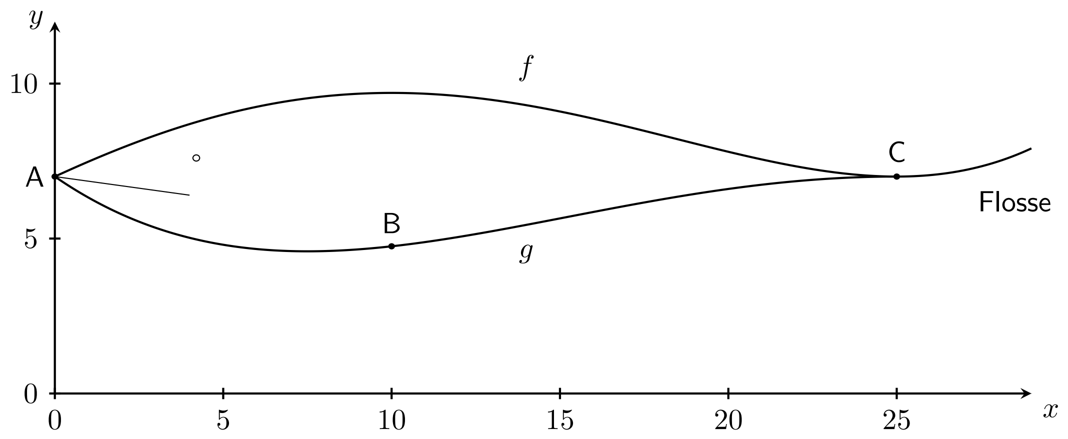
Zeigen Sie, dass $\displaystyle\int_0^\infty h_k(x)\,dx < 10$ für alle $k > 0$ gilt. (4 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe a) 	1		
Aus der Steigung -4 und $W(4\,\vert\,8)$ folgt z.B. mit Hilfe der Punkt-Steigungs-Form die Gleichung der Tangente $y = -4\,(x-4)+8 = -4\,x+24$.	2		
Die Nullstellen von f' sind $x = 2$ und $x = 8$. Der Graph von f' hat einen Tiefpunkt $T(4\,\vert\,-4)$.	2		
Begründung: Der Tiefpunkt des Graphen von f' liegt an der Stelle eines Wendepunkts von f. Die Steigung des Graphen von f im Wendepunkt $W(4\,\vert\,8)$ ist -4. In unmittelbarer Umgebung von W ist die Steigung des Graphen von f größer als -4. Damit hat der Graph von f' den Tiefpunkt $T(4\,\vert\,-4)$.		3	
Aus $f(x) = a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + 16\,x$ folgt $f'(x) = 4a\,x^3 + 3b\,x^2 + 2c\,x + 16$ und $f''(x) = 12a\,x^2 + 6b\,x + 2c$.	1		
Die Auswertung der Informationen zu f ergibt: $\left\vert\begin{array}{rcr} f(4) & = & 8 \\ f''(4) & = & 0 \\ f'(4) & = & -4 \end{array}\right\vert \Leftrightarrow \left\vert\begin{array}{rcr} 256a+64b+16c & = & -56 \\ 192a+24b+2c & = & 0 \\ 256a+48b+8c & = & -20 \end{array}\right\vert$		4	
$\Leftrightarrow \left\vert\begin{array}{rcr} a & = & -\frac{1}{32} \\ b & = & \frac{3}{4} \\ c & = & -6 \end{array}\right\vert$ *Alternativ dürfen auch $f'(2) = 0$ oder $f'(8) = 0$ aus a2) verwendet werden.*		1	
Es gilt $f'(x) = -\frac{1}{8}\,x^3 + \frac{9}{4}\,x^2 - 12\,x + 16$ und $f''(x) = -\frac{3}{8}\,x^2 + \frac{9}{2}\,x - 12$.	1		
Wegen $f'(8) = 0$, $f''(8) = 0$ und $f'''(8) = -\frac{3}{2} \neq 0$ liegt bei $x = 8$ ein Sattelpunkt vor.		3	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe b) 200 ist die Masse des Plutonium-241 zum Unfallzeitpunkt in Milligramm. Wegen $e^{-0{,}048} \approx 0{,}953$ nimmt die Masse in jedem Jahr etwa um $4{,}7\,\%$ ab.	1 2		
$200 \cdot e^{-0{,}048\,x} < 1 \Leftrightarrow -0{,}048\,x < -\ln(200)$ liefert $x > \dfrac{\ln(200)}{0{,}048} \approx 110{,}4$. Damit wird im Jahr 2096 erstmals weniger als ein Milligramm Plutonium-241 vorhanden sein.		4	
Teilaufgabe c) Wegen $e^{-x} \neq 0$ für alle x gilt $h_k(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-kx} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.	2		
Wegen $e^{-x} \neq 0$ für alle x gilt $h'_k(x) = 0 \Leftrightarrow (k+1) \cdot e^{-kx} - 1 = 0$ $\Leftrightarrow e^{-kx} = \dfrac{1}{k+1} \Leftrightarrow -kx = \ln\left(\dfrac{1}{k+1}\right) \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{k}\ln\left(\dfrac{1}{k+1}\right)$.		3	
Teilaufgabe d) Streckungsfaktor in x-Richtung: $\dfrac{1}{0{,}0016} = 625$ Streckungsfaktor in y-Richtung: $\dfrac{207}{10} = 20{,}7$ $k = \dfrac{-0{,}0464}{-0{,}0016} = 29$			3
Der Faktor $1 - e^{-0{,}0464\,x}$ hat für $x = 0$ den Wert 0 und $\lim\limits_{x\to\infty}(1 - e^{-0{,}0464\,x}) = 1$. Der Faktor $e^{-0{,}0016\,x}$ hat für $x = 0$ den Wert 1 und $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-0{,}0016\,x} = 0$. Stellt man die Werte der beiden Faktoren für $x \geq 0$ graphisch dar, so gibt es eine Stelle, an der sich die beiden Graphen (aufgrund ihrer Stetigkeit) schneiden.			3
Teilaufgabe e) Es gilt $\displaystyle\int_0^a h_k(x)\,dx = -10 \cdot e^{-a} + \frac{10}{k+1} \cdot e^{-(k+1)a} - \left(-10 + \frac{10}{k+1}\right)$. Für $a \to \infty$ ergibt sich $\displaystyle\int_0^\infty h_k(x)\,dx = 10 - \frac{10}{k+1}$. Wegen $k > 0$ ist $\frac{10}{k+1} > 0$, und damit gilt $10 - \frac{10}{k+1} < 10$.			4
Punktsummen	12	18	10

Aufgabe 1: Analysis-CAS

a) Die folgende Abbildung zeigt den Längsschnitt durch das Modell eines Blauwals. Eine Längeneinheit beträgt 1 Meter in der Wirklichkeit.



Die obere Begrenzung inklusive Flosse wird durch den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{25\,000}x^4 - \frac{3}{2500}x^3 - \frac{3}{200}x^2 + \frac{1}{2}x + 7$$

im Intervall $[0; 29]$ beschrieben.
Die untere Begrenzung wird im Intervall $[0; 25]$ durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion g vierten Grades modelliert. Der Graph von g verläuft durch die Punkte $A(0\,|\,7)$, $B(10\,|\,\frac{19}{4})$ und $C(25\,|\,7)$. Seine Tangente an der Stelle $x = 7{,}5$ ist waagerecht. Im Punkt C erfolgt ein knickfreier Anschluss an den Graphen von f.

a1) Bestimmen Sie einen Funktionsterm von g. (7 P)
$\left[\text{Zur Kontrolle: } g(x) = \frac{1}{50\,000}x^4 - \frac{11}{5000}x^3 + \frac{29}{400}x^2 - \frac{3}{4}x + 7\right]$

a2) Für jedes x aus dem Intervall $[0; 25]$ wird die Dicke des Längsschnitts durch die Differenz der Funktionswerte von f und g an dieser Stelle x beschrieben.
Berechnen Sie die maximale Dicke des Längsschnitts. (6 P)

b) Ein Blauwal ist bei der Geburt $6\,\mathrm{m}$ lang. Seine Wachstumsrate wird modelliert durch die Funktion w mit

$$w(x) = \frac{120 \cdot \mathrm{e}^{0{,}9\cdot(x-5)}}{\left(\mathrm{e}^{0{,}9\cdot(x-5)} + 6\right)^2}.$$

Dabei steht x für die Zeit in Jahren seit der Geburt und $w(x)$ für den Längenzuwachs in Meter pro Jahr.

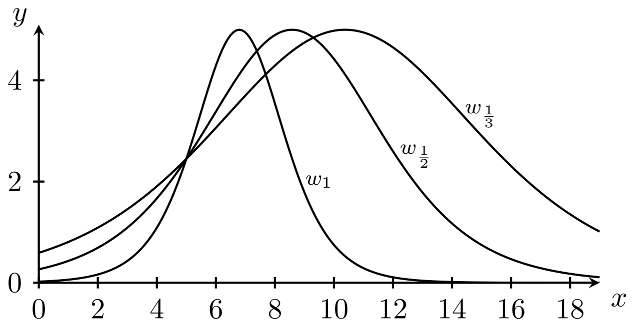
b1) Ermitteln Sie die Körperlänge des Blauwals nach acht Jahren. (2 P) b2) Zeigen Sie, dass ein Blauwal, dessen Wachstumsrate durch die Funktion w modelliert wird, immer weiter wachsen würde, aber eine Körperlänge von $29\,\mathrm{m}$ nie erreichen könnte. (4 P)

b3) Ein Blauwal ist nach diesem Modell ausgewachsen, wenn er eine Körperlänge von $27{,}6\,\mathrm{m}$ erreicht hat.
Bestimmen Sie das Alter, ab dem der Blauwal ausgewachsen ist. (3 P)

c) Die Funktion w ist in der Schar w_k mit

$$w_k(x) = \frac{120 \cdot \mathrm{e}^{k\cdot(x-5)}}{\left(\mathrm{e}^{k\cdot(x-5)} + 6\right)^2}$$

mit $k > 0$ enthalten.
Die nebenstehende Abbildung zeigt die Graphen von w_1, $w_{\frac{1}{2}}$ und $w_{\frac{1}{3}}$.



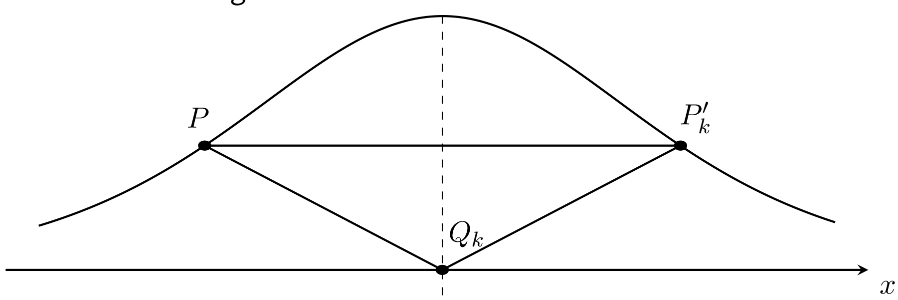
c1) Beschreiben Sie anhand der dargestellten Graphen den Einfluss des Parameters k auf die Koordinaten des Hochpunktes und auf den y-Achsenabschnitt. (3 P)

c2) Zeigen Sie, dass der Punkt $P\left(5 \,|\, \frac{120}{49}\right)$ für alle $k > 0$ auf dem Graphen von w_k liegt.
Weisen Sie nach, dass P für kein $k > 0$ ein Wendepunkt sein kann. (5 P)

c3) Zeigen Sie rechnerisch, dass alle Hochpunkte der Graphen von w_k auf einer Geraden liegen.
Bestimmen Sie einen Wert für k, so dass w_k an der Stelle $x = 6$ ein lokales Maximum annimmt. (6 P)

c4) Jeder Graph der Funktionenschar w_k ist symmetrisch zu einer Parallelen zur y-Achse durch den Punkt $Q_k\left(5 + \frac{\ln(6)}{k} \,|\, 0\right)$. Der Punkt $P\left(5 \,|\, \frac{120}{49}\right)$ besitzt somit auf jedem Funktionsgraphen einen Spiegelpunkt P_k'. Die Punkte P, Q_k und P_k' bilden die Eckpunkte eines Dreiecks.
Bestimmen Sie den Parameter k so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks genau 1 beträgt. (4 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe a) Aus dem Ansatz $g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ folgt mit den Bedingungen $g(0) = 7$, $g(10) = \frac{19}{4}$, $g(25) = 7$, $g'(7{,}5) = 0$ und $g'(25) = f'(25)$ für die Parameter a, b, c, d und e $a = \frac{1}{50\,000} \;\wedge\; b = -\frac{11}{5000} \;\wedge\; c = \frac{29}{400} \;\wedge\; d = -\frac{3}{4} \;\wedge\; e = 7$ und somit $g(x) = \frac{1}{50\,000}x^4 - \frac{11}{5000}x^3 + \frac{29}{400}x^2 - \frac{3}{4}x + 7$.	1 5 1		
Gesucht ist das globale Maximum der Funktion d mit $d(x) = f(x) - g(x)$ im Intervall $[0; 25]$. Notwendig für ein lokales Maximum von d an der Stelle x ist $d'(x) = 0$. Damit gilt $d'(x) = 0 \iff x \approx 8{,}77 \vee x = 25$. *(Der Wert $x \approx -71{,}3$ entfällt als Lösung, da er nicht im betrachteten Intervall liegt.)* Offensichtlich ist die Dicke an den Rändern des Intervalls null. Da zusätzlich $d(8{,}77) \approx 5{,}03 > 0$ gilt, ist eine hinreichende Bedingung für ein globales Maximum an der Stelle $x \approx 8{,}77$ erfüllt. Die maximale Dicke des Längsschnitts beträgt somit ca. $5{,}03\,\mathrm{m}$.		3 1 1 1	
Teilaufgabe b) Da $6 + \int_0^8 w(x)\,\mathrm{d}x \approx 21{,}80$ ist, beträgt die Länge des Wals nach acht Jahren ca. $21{,}8\,\mathrm{m}$.		2	
Da für alle $x \in \mathbb{R}^+$ sowohl $120 \cdot \mathrm{e}^{0{,}9\cdot(x-5)} > 0$ als auch $\left(\mathrm{e}^{0{,}9\cdot(x-5)} + 6\right)^2 > 0$ ist, ist auch der Quotient $w(x)$ aus beiden Termen größer als null. Da $6 + \lim\limits_{z\to\infty} \int_0^z w(x)\,\mathrm{d}x \approx 28{,}18$ ist, erreicht der Wal im Modell nie eine Körperlänge von $29\,\mathrm{m}$.		2 2	
Zu lösen ist die Gleichung $6 + \int_0^z w(x)\,\mathrm{d}x = 27{,}6$. Man erhält $z \approx 11{,}01$. Der Wal ist also mit gut elf Jahren ausgewachsen.		3	
Teilaufgabe c) Man sieht, dass bei größeren Werten von k die x-Koordinate des Maximums kleiner wird. Anhand der Zeichnung lässt sich zudem vermuten, dass alle Hochpunkte den gleichen y-Wert besitzen. Der y-Achsenabschnitt nimmt für zunehmende Werte von k ab.	3		

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Für alle $k > 0$ ist $w_k(5) = \frac{120}{49}$. Also liegt der Punkt P auf allen Graphen der Funktionenschar. Damit P auch ein Wendepunkt des Graphen von w_k ist, muss die Bedingung $w_k''(x) = 0$ notwendigerweise erfüllt sein. Es gilt $w_k''(5) = \frac{1560 \cdot k^2}{2401} \approx 0{,}65 \cdot k^2$. Da laut Aufgabenstellung $k > 0$ gilt, ist $w_k''(5)$ stets größer als null. Daher besitzt kein Graph der Funktionenschar an der Stelle $x = 5$ einen Wendepunkt.	2	3	
Für jedes $k > 0$ liegt wegen $w_k'(x) = 0 \iff x = \frac{5k + \ln(6)}{k}$ und $w_k''\left(\frac{5k+\ln(6)}{k}\right) = -2{,}5k^2 < 0$ an der Stelle $x = \frac{5k+\ln(6)}{k}$ ein lokales Maximum von w_k vor. Da zudem $w_k\left(\frac{5k+\ln(6)}{k}\right) = 5$ ist, hat der Hochpunkt die Koordinaten $H_k\left(\frac{5k+\ln(6)}{k} \mid 5\right)$. Somit liegen alle Hochpunkte auf der Geraden mit der Gleichung $y = 5$. w_k hat an der Stelle $x = 6$ ein lokales Maximum, wenn $\frac{5k+\ln(6)}{k} = 6$ gilt. Daraus folgt $k = \ln(6)$.			2 2 2
Die folgende Skizze dient nur zur Veranschaulichung der Situation und wird nicht vom Prüfling erwartet.  Mit $P\left(5 \mid \frac{120}{49}\right)$ und $Q_k\left(5 + \frac{ln(6)}{k} \mid 0\right)$ ergibt sich aufgrund der Symmetrie für die Grundseite $\overline{PP_k'}$ des Dreiecks die Länge $2 \cdot \frac{\ln(6)}{k}$. Die Höhe des Dreiecks beträgt dann $\frac{120}{49}$, so dass der Flächeninhalt durch $A(k) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\ln(6)}{k} \cdot \frac{120}{49} = \frac{\ln(6)}{k} \cdot \frac{120}{49}$ beschrieben wird. Aus dem Ansatz $A(k) = 1$ folgt $k = \frac{120}{49} \cdot \ln(6) \approx 4{,}39$. Somit besitzt das Dreieck PQ_kP_k' für $k \approx 4{,}39$ einen Flächeninhalt von 1.			4
Punktsummen	12	18	10

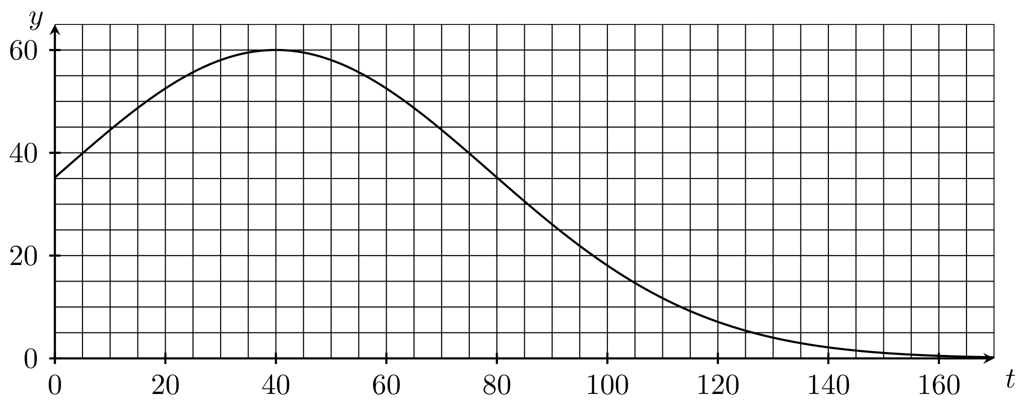
Aufgabe 2: Analysis-CAS

Auf einer Waldfläche wurden neue Fichten gepflanzt. Alle Fichten hatten zum Zeitpunkt der Pflanzung eine Höhe von $50\,\mathrm{cm}$.

a) Betrachtet wird die Rate des Höhenwachstums der Fichten in Abhängigkeit von der Zeit. Diese Wachstumsrate wird durch die Funktion w mit

$$w(t) = 60 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{3000}\cdot(t-40)^2} \qquad \text{und } t \geq 0$$

modellhaft beschrieben. Dabei ist t die seit der Pflanzung vergangene Zeit in Jahren und $w(t)$ die Wachstumsrate in der Einheit Zentimeter pro Jahr ($\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{a}}$). Die Abbildung zeigt den Graphen von w.



a1) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Wachstumsrate 40 Jahre nach Pflanzung am größten ist. Berechnen Sie den Zeitraum, in dem die Fichten mehr als $50\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{a}}$ wachsen. (5 P)

a2) Ein bestimmter Wert der Wachstumsrate wiederholt sich nach genau 30 Jahren.
Berechnen Sie die beiden zugehörigen Zeitpunkte.
Veranschaulichen Sie den Sachverhalt in der obigen Abbildung. (4 P)

a3) Geben Sie die Bedeutung des Terms $\frac{1}{100} \cdot \left(50 + \int\limits_0^{60} w(t)\,\mathrm{d}t\right)$ im Sachzusammenhang an und begründen Sie Ihre Angabe.
Skizzieren Sie die Höhe der Fichten in Abhängigkeit von der Zeit für die ersten 160 Jahre nach der Pflanzung. (5 P)

b) In einem anderen Modell wird die Höhe der Fichten in Abhängigkeit von der Zeit mit Hilfe der Funktion h mit

$$h(t) = 50 \cdot \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{10}\cdot t}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{10}\cdot t} + 99} \qquad \text{und } t \geq 0$$

beschrieben. Dabei ist t die seit der Pflanzung vergangene Zeit in Jahren und $h(t)$ die Höhe in der Einheit Meter. Der Graph von h hat genau einen Wendepunkt W.

b1) Bestimmen Sie die Koordinaten von W. (3 P)
[Zur Kontrolle: $W(10\ln(99)\,|\,25)$]

b2) Eine Zeitschrift aus dem Jahr 1911 enthält folgenden Textabschnitt:

Von unseren einheimischen Bäumen steht die Fichte hinsichtlich ihres Höhenwachstums obenan, und zwar mit 37 Zentimeter durchschnittlich im Jahre. Doch sind von Forstbeamten Ausnahmen beobachtet worden, in denen Fichten in einem Jahre bis zu 150 Zentimeter ihrer Länge zusetzten.

(Quelle: Walther Kabel: Wachstumsgeschwindigkeit bei Pflanzen. In: Das Buch für Alle. Jahrgang 1911, Heft 1, Union Deutsche Verlagsgesellschaft. Stuttgart 1911, S. 23.)

Vergleichen Sie die durch die Funktion h bestimmte maximale Wachstumsgeschwindigkeit mit der entsprechenden Angabe in diesem Textabschnitt. (3 P)

b3) Geben Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von h im Punkt W an.
Die Höhe der Fichten kann im Zeitintervall von 40 bis 50 Jahren nach Pflanzung näherungsweise durch diese Tangente beschrieben werden.
Bestimmen Sie die maximale prozentuale Abweichung im Vergleich zur Beschreibung mit Hilfe von h. (4 P)

Um den Verkaufswert eines Baumstamms zu bestimmen, wird dessen Durchmesser in einer Höhe von $1{,}3\,\mathrm{m}$ verwendet. Dieser wird als Brusthöhendurchmesser (BHD) bezeichnet.

c) Für einen BHD ab $15\,\mathrm{cm}$ kann der Verkaufspreis von Fichtenstämmen in Abhängigkeit vom BHD näherungsweise mithilfe einer quadratischen Funktion bestimmt werden. Die nebenstehende Tabelle stellt für drei BHD den jeweiligen Preis dar.
Ermitteln Sie den Preis für einen Fichtenstamm mit einem BHD von $66\,\mathrm{cm}$.

BHD	**Preis**
$15\,\mathrm{cm}$	$6{,}25$ €
$40\,\mathrm{cm}$	100 €
$60\,\mathrm{cm}$	250 €

(4 P)

d) Der BHD einer Fichte in Abhängigkeit von der Zeit t wird durch die Funktion d mit

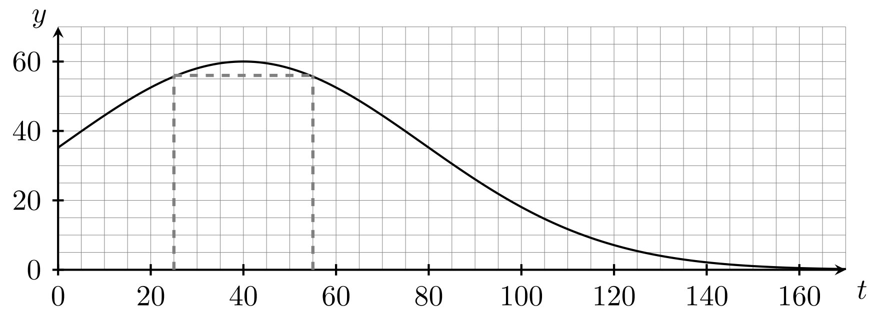
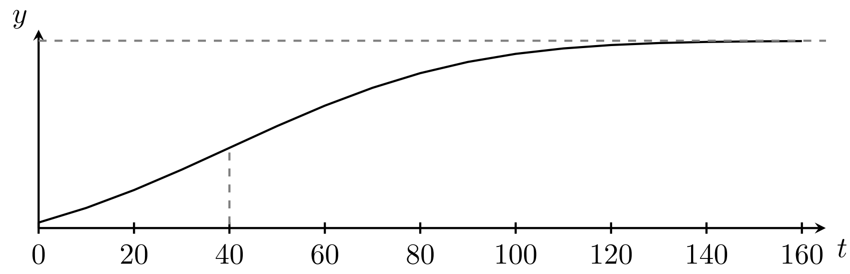
$$d(t) = 0{,}7 \cdot \frac{\mathrm{e}^{\frac{t+125}{40}}}{\mathrm{e}^{\frac{t+125}{40}} + 250} \qquad \text{und } t \geq 15$$

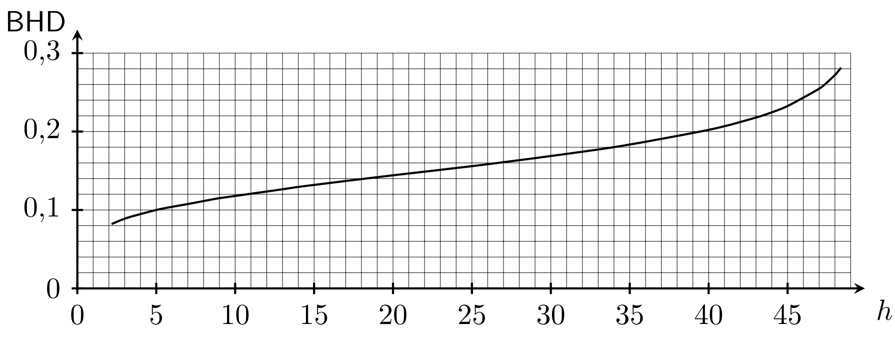
modelliert. Dabei ist t die seit der Pflanzung vergangene Zeit in Jahren und $d(t)$ der BHD in Metern.

d1) Begründen Sie, dass der BHD im Modell stets geringer als $70\,\mathrm{cm}$ ist. (2 P)

d2) Zeichnen Sie für den Zeitraum zwischen 15 und 80 Jahren nach der Pflanzung einen Graphen, der den BHD in Abhängigkeit von der Höhe darstellt.
Verwenden Sie für die Höhe der Fichte das Modell aus der Aufgabe b). (4 P)

e) Ein Fichtenstamm hat einen BHD von $40\,\mathrm{cm}$. Sein Volumen vom Boden bis zu einer Höhe von $1{,}3\,\mathrm{m}$ beträgt $0{,}17\,\mathrm{m}^3$. Es soll davon ausgegangen werden, dass der Durchmesser des Stamms mit zunehmender Höhe linear abnimmt. Berechnen Sie den Durchmesser des Stamms in einer Höhe von $15\,\mathrm{m}$. (6 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe a) Notwendig für eine lokale Extremstelle t von w ist $w'(t)=0$. $w'(t)=0 \iff t=40$ Wegen $w''(40)=-\frac{1}{25}<0$ liegt bei $t=40$ ein lokales Maximum vor. Da $t=40$ die einzige Extremstelle ist und zudem der Graph von w an der Stelle $t=40$ rechtsgekrümmt ist, muss $t=40$ auch das globale Maximum der Funktion w sein. $w(t)>50$ liefert näherungsweise $16{,}6<t<63{,}4$. Der Zeitraum liegt zwischen $16{,}6$ und $63{,}4$ Jahren nach Pflanzung.	1 2 2		
Die Wachstumsrate w soll zu den Zeitpunkten t und $t+30$ den gleichen Wert annehmen. Aus dem Ansatz $w(t)=w(t+30)$ folgt $t=25$, so dass die gesuchten Zeitpunkte bei 25 und 55 Jahren nach Pflanzung liegen. 		3 1	
Der Term gibt die Höhe der Fichten 60 Jahre nach Pflanzung in Metern an. Begründung: 50 ist die Anfangshöhe in Zentimetern, der Wert des Integrals gibt die Änderung der Höhe innerhalb der ersten 60 Jahre nach dem Pflanzen in Zentimetern an. Der Faktor $\frac{1}{100}$ führt zu einem Wert in Metern.  *Es muss erkennbar sein, dass der Graph qualitativ den dargestellten Verlauf hat, das heißt, dass der Graph die y-Achse oberhalb von $(0\|0)$ schneidet, einen Wendepunkt bei $t=40$ und eine waagerechte Asymptote besitzt.*		2 3	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe b) Notwendig für eine lokale Wendestelle t von h ist $h''(t) = 0$. $h''(t) = 0 \iff t = 10\ln(99)$ Da laut Aufgabenstellung genau ein Wendepunkt existiert und $h(10\ln(99)) = 25$ gilt, besitzt der Graph der Funktion seinen Wendepunkt bei $W(10\ln(99)\,\vert\,25)$.	3		
Es gilt $h'(10\ln(99)) = 1{,}25$. Die maximale Wachstumsgeschwindigkeit beträgt $125\,\frac{\text{cm}}{\text{a}}$. Somit ist die berechnete maximale Wachstumsgeschwindigkeit geringer als die beobachtete maximale Wachstumsgeschwindigkeit von $150\,\frac{\text{cm}}{\text{a}}$.		3	
Die Tangente wird durch die Funktion g mit $g(t) = \frac{5}{4}t + 25 - \frac{25}{2}\cdot\ln(99)$ dargestellt. Das Maximum der Funktion a mit $a(t) = \frac{\vert h(t)-g(t)\vert}{h(t)}$ für $40 \leq t \leq 50$ befindet sich an einer der beiden Randstellen. Da $a(40) \approx 0{,}012$ größer als $a(50) \approx 0{,}0023$ ist, beträgt die maximale Abweichung etwa $1{,}2\%$.		1 3	
Teilaufgabe c) Der Ansatz $p(x) = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$ mit $p(15) = 6{,}25$, $p(40) = 100$ und $p(60) = 250$ liefert $a = \frac{1}{12}$, $b = -\frac{5}{6}$ und $c = 0$. Da $p(66) = 308$, beträgt der Preis 308 €.	3 1		
Teilaufgabe d) Wegen $\mathrm{e}^{\frac{t+125}{40}} + 250 > \mathrm{e}^{\frac{t+125}{40}}$ ist $0{,}7\cdot\frac{\mathrm{e}^{\frac{t+125}{40}}}{\mathrm{e}^{\frac{t+125}{40}}+250} < 0{,}7$. Somit ist der BHD im Modell immer kleiner als 70 cm.		2	
Den folgenden Graphen erhält man zum Beispiel mit Hilfe zweier Wertetabellen. 			4

<table>
<tr><th rowspan="2">Erwartete Schülerleistung</th><th colspan="3">Bewertung Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>Teilaufgabe e)
Mit Hilfe der Formel zur Berechnung des Volumens eines Kegelstumpfes $V = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)$ erhält man durch Einsetzen der gegebene Werte die Gleichung $\frac{\pi \cdot 1{,}3}{3} \cdot (r^2 + 0{,}2 \cdot r + 0{,}2^2) = 0{,}17$,</td><td></td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td>wobei $r > 0$ der Radius der Grundfläche ist. Als Lösung ergibt sich $r \approx 0{,}208$.</td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>Der Radius des Stamms nimmt somit pro Meter Höhe um $\frac{0{,}208\,\mathrm{m} - 0{,}2\,\mathrm{m}}{1{,}3\,\mathrm{m}} \approx 0{,}00615$ ab. In $15\,\mathrm{m}$ Höhe ergibt sich dann ein Radius von $0{,}208\,\mathrm{m} - 15\,\mathrm{m} \cdot 0{,}00615 \approx 0{,}116\,\mathrm{m}$, was einem ungefähren Durchmesser von $23\,\mathrm{cm}$ entspricht.</td><td></td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td>Alternativ ist auch eine Lösung mit Hilfe des Rotationsvolumens möglich.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Punktsummen</td><td>12</td><td>18</td><td>10</td></tr>
</table>

Aufgabe 3: Analytische Geometrie

Gegeben sind der Punkt $L(-\frac{25}{4} \mid -8 \mid 6)$ und die Gerade

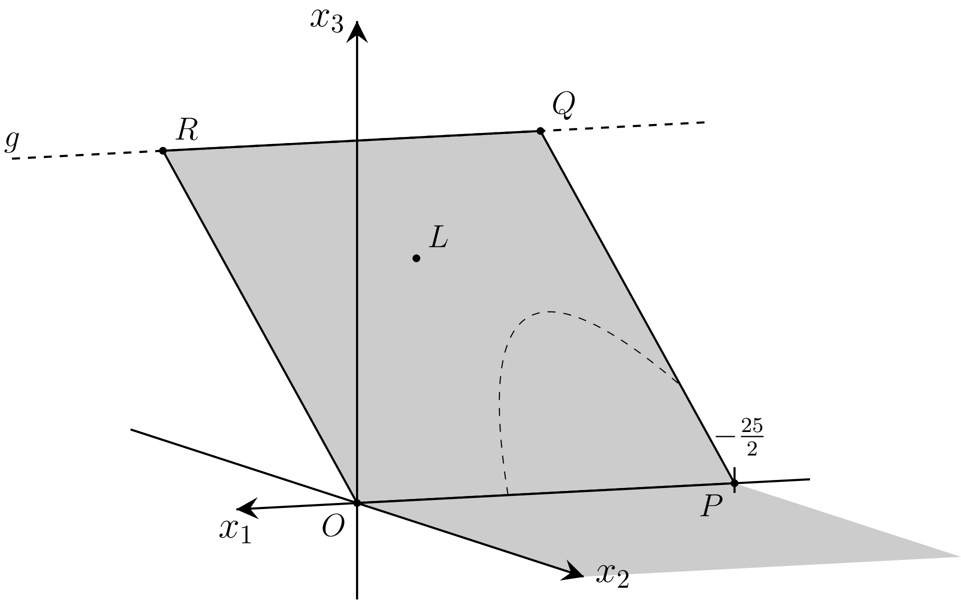
$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } r \in \mathbb{R}.$$

a) a1) Begründen Sie, dass g parallel zur x_1-Achse verläuft, aber nicht durch den Punkt L. (2 P)

a2) L und g liegen in der Ebene E.
Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. (4 P)

[Zur Kontrolle: $E: 3\,x_2 + 4\,x_3 = 0$]

In der Abbildung ist neben L und g das Viereck $OPQR$ dargestellt, dessen Eckpunkte $O(0|0|0)$, $P(-\frac{25}{2} \mid 0 \mid 0)$, $Q(-\frac{25}{2} \mid -12 \mid 9)$ und $R(0 \mid -12 \mid 9)$ in E liegen. Q und R liegen außerdem auf g.



b) b1) Markieren Sie auf der x_2-Achse die Stelle -12 und auf der x_3-Achse die Stelle 9. (2 P)

b2) Begründen Sie, dass $OPQR$ ein Rechteck ist.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Rechtecks. (5 P)

b3) Geben Sie eine Gleichung der Geraden h an, die durch die Punkte P und R verläuft. (1 P)

b4) O' ist der Punkt in der Ebene E, der durch Spiegelung des Punktes O an der Geraden h entsteht. Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die Koordinaten des Punktes O' ermitteln könnte. (3 P)

Das Viereck $OPQR$ stellt modellhaft den geneigten Teil einer Minigolfbahn dar, der Punkt L das Loch dieser Bahn. Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x_1x_2-Ebene den horizontalen Untergrund, eine Längeneinheit entspricht 10 cm in der Realität.

c) c1) Berechnen Sie die Größe des Winkels, den der geneigte Teil der Bahn mit dem Untergrund einschließt. (3 P)

Im Punkt $A(-5 \mid 8 \mid 24)$ befindet sich eine Lichtquelle.

c2) Berechnen Sie den Punkt F der Ebene E, der den kürzesten Abstand zur Beleuchtung A aufweist. (5 P)

[Zur Kontrolle: $F(-5 \mid -6{,}4 \mid 4{,}8)$]

c3) Zeigen Sie, dass der Punkt F innerhalb des Vierecks $OPQR$ liegt. (3 P)

c4) Der geneigte Teil der Bahn wirft durch die Beleuchtung einen viereckigen Schatten $OPQ'R'$ auf den horizontalen Untergrund.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Eckpunktes R'. (3 P)

d) Im Folgenden wird der in der Abbildung gestrichelt dargestellte Teil des Weges eines Minigolfballs auf der Bahn betrachtet. Der Ball soll im Folgenden als punktförmig angenommen werden. Seine Positionen auf dem dargestellten Teil des Weges können durch Punkte

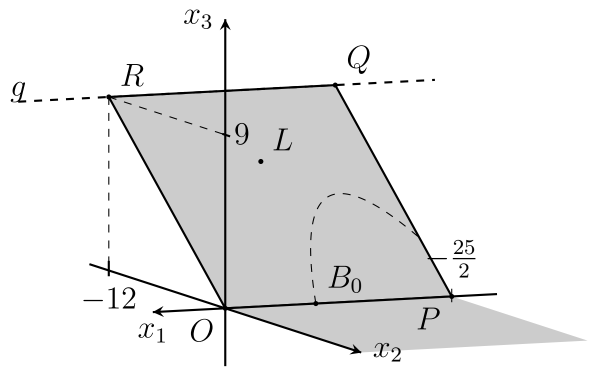
$$B_t\left(-5-3t \mid -8t+\frac{8}{3}t^2 \mid 6t-2t^2\right)$$

mit geeigneten Werten $t \in \mathbb{R}$ beschrieben werden.

d1) Geben Sie die Koordinaten des Punktes B_0 an und zeichnen Sie den Punkt in die Abbildung ein. (2 P)

d2) Berechnen Sie im Modell die Koordinaten des Punktes, in dem der Weg des Balls auf die seitliche Begrenzung der Minigolfbahn trifft. (4 P)

d3) Ermitteln Sie die maximale Höhe über dem Untergrund, die der Ball erreicht, und geben Sie diese Höhe in Zentimetern an. (3 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe a) Der Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ von g gibt auch die Richtung der x_1-Achse an. Wegen $-12+r\cdot 0\neq -8$ für alle $r\in\mathbb{R}$ verläuft g nicht durch L.	1 1		
Die Richtungsvektoren $\begin{pmatrix}0\\-12\\9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-\frac{25}{4}\\-8\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{25}{4}\\-4\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ spannen die Ebene E auf. Somit ist $\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}\frac{25}{4}\\-4\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E. Wegen $3\cdot(-12)+4\cdot 9=0$ ist $3x_2+4x_3=0$ eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform.		3 1	
Teilaufgabe b) Die folgende Abbildung enthält auch die Lösung zu Teilaufgabe d1).  	2		
Wegen $\overrightarrow{OR}=\begin{pmatrix}0\\-12\\9\end{pmatrix}=\overrightarrow{PQ}$ ist $OPQR$ ein Parallelogramm. Da zudem $\overrightarrow{OP}\circ\overrightarrow{OR}=\begin{pmatrix}-\frac{25}{2}\\0\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\-12\\9\end{pmatrix}=0$ gilt, ist $OPQR$ ein Rechteck. Der Flächeninhalt des Rechtecks $OPQR$ ist $\lvert\overrightarrow{OP}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{OR}\rvert=\frac{25}{2}\cdot\sqrt{12^2+9^2}=187{,}5$.	3 2		
$h:\vec{x}=\begin{pmatrix}-\frac{25}{2}\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}\frac{25}{2}\\-12\\9\end{pmatrix}$	1		

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Man bestimmt den Lotfußpunkt T vom Punkt O auf die Gerade h. Dafür berechnet man den Schnittpunkt von h mit der Ebene, die senkrecht zu h steht und den Punkt O enthält. Dann liefert $\overrightarrow{OO'} = 2 \cdot \overrightarrow{OT}$ die Koordinaten von O'.		3	
Teilaufgabe c) Es ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der x_1x_2-Ebene. Der geneigte Teil der Bahn liegt in der Ebene E. Für den gesuchten Winkel α gilt $\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\lvert \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rvert \cdot \left\lvert \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rvert} = \frac{4}{5}$. Daraus folgt $\alpha \approx 36{,}9°$. *(Die Berechnung des Ergänzungswinkels $180° - \alpha \approx 143{,}1°$ soll ebenfalls anerkannt werden.)*		1 2	
Zu berechnen ist der Lotfußpunkt von A auf E. Die Gerade $l : \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 24 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ enthält A und verläuft senkrecht zu E. Mit $3 \cdot (8 + 3r) + 4 \cdot (24 + 4r) = 0 \Leftrightarrow 120 + 25r = 0 \Leftrightarrow r = -4{,}8$ folgt $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 24 \end{pmatrix} + (-4{,}8) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6{,}4 \\ 4{,}8 \end{pmatrix}$. Die Koordinaten des Lotfußpunktes F sind $F(-5 \mid -6{,}4 \mid 4{,}8)$.		2 3	
$\overrightarrow{OF} = \vec{O} + r \cdot \overrightarrow{OP} + s \cdot \overrightarrow{OR} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 \\ -6{,}4 \\ 4{,}8 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -\frac{25}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow r = \frac{2}{5} \wedge s = \frac{8}{15}$ Wegen $0 < r < 1$ und $0 < s < 1$ liegt F innerhalb des Vierecks $OPQR$.		2 1	
Der Eckpunkt R' des Schattens ist der Schnittpunkt der Geraden $k : \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 24 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -20 \\ -15 \end{pmatrix}$ mit der x_1x_2-Ebene $E_{1,2}$. Mit der Koordinatenform $E_{1,2} : x_3 = 0$ folgt $0 = 24 + r \cdot (-15) \Leftrightarrow r = \frac{8}{5}$. Damit ergeben sich die Koordinaten des Punktes R' zu $R'(3 \mid -24 \mid 0)$.			3

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe d) $B_0(-5 \mid 0 \mid 0)$ Zeichnung: siehe b1)	 1 1		
Der Ball trifft auf die seitliche Begrenzung, wenn die x_1-Koordinate den Wert $-\frac{25}{2}$ annimmt. Wegen $-5-3t=-\frac{25}{2} \Leftrightarrow t=2{,}5$ ist der gesuchte Punkt $B_{2,5}(-\frac{25}{2} \mid -\frac{10}{3} \mid \frac{5}{2})$.			4
Die Höhe des Balls über dem Untergrund kann mithilfe der Funktion h mit $h(t)=6t-2t^2$ beschrieben werden. Wegen $h'(t)=6-4t=0 \Leftrightarrow t=\frac{3}{2}$ liegt ein mögliches Extremum bei $t=\frac{3}{2}$ vor. Dieses ist aufgrund des parabelförmigen Weges zugleich das Maximum. Da $h\left(\frac{3}{2}\right)=4{,}5$ ist, erreicht der Ball eine maximale Höhe von 45 cm über dem Untergrund. *Alternativ: Der Scheitelpunkt der zu h gehörenden Parabel liegt bei $\left(\frac{3}{2}\middle|\frac{9}{2}\right)$. Also beträgt die größte Höhe 45 cm.*			3
Punktsummen	12	18	10

Aufgabe 4: Stochastik

Alle in Ihren Lösungen verwendeten Zufallsgrößen müssen explizit eingeführt werden. Machen Sie auch Angaben über die Verteilung der jeweiligen Zufallsgrößen.

Ein Fahrradhändler hat festgestellt, dass es sich bei $40\,\%$ aller von ihm verkauften Fahrräder um Mountainbikes handelt. Es soll davon ausgegangen werden, dass in einer zufälligen Auswahl verkaufter Fahrräder die Anzahl der Mountainbikes binomialverteilt ist.

a) a1) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in einer zufälligen Auswahl von 100 verkauften Fahrrädern

- genau 30 Mountainbikes befinden;
- mindestens 35 und weniger als 45 Mountainbikes befinden. (5 P)

a2) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer zufälligen Auswahl von 250 verkauften Fahrrädern die Anzahl der Mountainbikes um mindestens $10\,\%$ größer ist als der Erwartungswert für diese Anzahl. (3 P)

a3) Beschreiben Sie im Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dem Term

$$1 - 0{,}6^{10} - 10 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^{9}$$

berechnet werden kann. Geben Sie dieses Ereignis an. (3 P)

a4) Der Händler hat berechnet, dass er im September des Jahres 2020 mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als $96\,\%$ mehr als 800 Mountainbikes verkaufen wird.
Ermitteln Sie, von welcher Anzahl verkaufter Fahrräder er bei seiner Berechnung mindestens ausgegangen ist. (4 P)

b) Der Anteil der Mountainbikes unter allen verkauften Fahrrädern beträgt weiterhin $40\,\%$. $20\,\%$ aller verkauften Fahrräder haben einen Rahmen aus Aluminium. $45\,\%$ aller verkauften Fahrräder sind weder Mountainbikes noch haben sie einen Rahmen aus Aluminium.
Bestimmen Sie den Anteil der Fahrräder mit einem Rahmen aus Aluminium unter den verkauften Mountainbikes. (4 P)

c) Die Abbildung 1 (siehe Beiblatt) zeigt für einige Monate des Jahres 2019 jeweils den Anteil der Mountainbikes unter allen verkauften Fahrrädern.

c1) Im April wurden 810 Mountainbikes verkauft. Bestimmen Sie für diesen Monat die Anzahl aller verkauften Fahrräder. (2 P)

c2) Der Anteil der Mountainbikes lag im Mai und Juni insgesamt bei $46\,\%$; im Juli war er größer als im Mai und im August größer als im Juni. Entscheiden Sie, ob es dennoch möglich ist, dass der Anteil der Mountainbikes im Juli und August insgesamt kleiner war als insgesamt im Mai und Juni. Begründen Sie Ihre Entscheidung. (3 P)

d) Der Händler verkauft $70\,\%$ der von ihm verkauften Fahrräder über sein Ladengeschäft (L), den Rest über sein Onlineportal (O). In beiden Fällen bietet er an, für das gekaufte Fahrrad eine Garantieverlängerung abzuschließen (G).

d1) Vervollständigen Sie zu diesem Sachverhalt das Baumdiagramm in Abbildung 2 (siehe Beiblatt).
Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass für ein zufällig ausgewähltes verkauftes Fahrrad eine Garantieverlängerung abgeschlossen wird, kleiner als $70\,\%$ ist.
(5 P)

d2) Nach einer Neugestaltung seines Onlineportals vermutet der Händler, dass der Anteil der Fahrräder, für die beim Onlinekauf eine Garantieverlängerung abgeschlossen wird, auf über $45\,\%$ gestiegen ist.
Erstellen Sie einen Hypothesentest mit einer Stichprobengröße von 80 Fahrrädern, der geeignet ist, die Vermutung des Händlers auf einem Signifikanzniveau von $5\,\%$ zu stützen. Geben Sie auch die entsprechende Entscheidungsregel an. (8 P)

e) Betrachtet werden zwei Ereignisse A und B eines Zufallsexperiments, deren Wahrscheinlichkeit jeweils ungleich Null ist.
Beweisen Sie die folgende Aussage:
Wenn $P(A) \cdot P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B})$ ist, dann ist auch $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$. (3 P)

Beiblatt zu Teilaufgabe c) und d)

Abbildung 1:

Anteil der Mountainbikes unter allen verkauften Fahrrädern für einige Monate des Jahres 2019

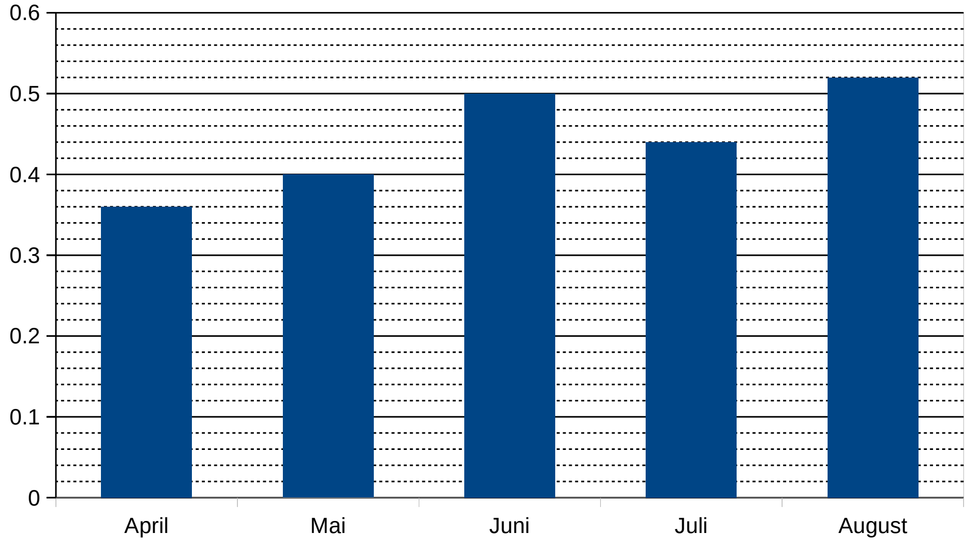
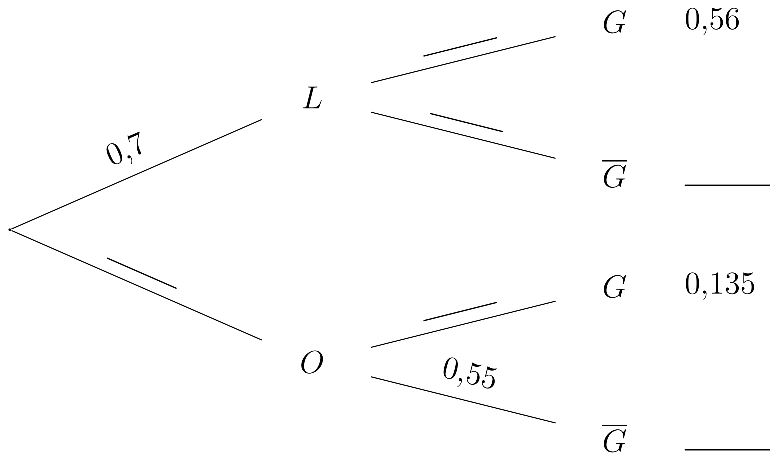
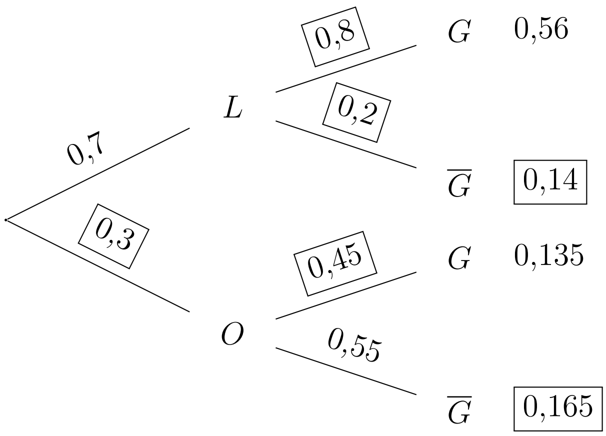


Abbildung 2



<table>
<tr><th rowspan="2">Erwartete Schülerleistung</th><th colspan="3">Bewertung Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>Teilaufgabe a)
Die Zufallsgröße X_n beschreibt die Anzahl der Mountainbikes.
Sie ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 100$ und $p = 0{,}4$.
$P(X_{100} = 30) \approx 0{,}0100 = 1\,\%$
$P(35 \leq X_{100} < 45) = P(X_{100} \leq 44) - P(X_{100} \leq 34)$
$\approx 0{,}8211 - 0{,}1303 = 0{,}6908 = 69{,}08\,\%$</td><td>1
1
3</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>X_n ist nun binomialverteilt mit den Parametern $n = 250$ und $p = 0{,}4$.
Es ist $\mu = 0{,}4 \cdot 250 = 100$ und
$P(X_{250} \geq 110) = 1 - P(X_{250} \leq 109) \approx 1 - 0{,}8896 = 0{,}1104 = 11{,}04\,\%$.</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
<tr><td>Zufallsexperiment: Zehn verkaufte Fahrräder werden zufällig ausgewählt.
Ereignis: „Mindestens zwei der Fahrräder sind Mountainbikes.“</td><td></td><td>1
2</td><td></td></tr>
<tr><td>X_n ist nun binomialverteilt mit unbekanntem n und $p = 0{,}4$.
Es ist $P(X_n > 800) > 0{,}96 \Leftrightarrow P(X_n \leq 800) < 0{,}04$.
Systematisches Probieren mit dem Taschenrechner liefert
$P(X_{2099} \leq 800) \approx 4{,}05\,\%$ und $P(X_{2100} \leq 800) \approx 3{,}90\,\%$.
Der Händler ist von mindestens 2100 verkauften Fahrrädern ausgegangen.</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td>Teilaufgabe b)
M: Ein zufällig ausgewähltes verkauftes Fahrrad ist ein Mountainbike.
A: Ein zufällig ausgewähltes verkauftes Fahrrad hat einen Rahmen aus Aluminium.
<table><tr><td></td><td>M</td><td>$\overline{M}$</td><td></td></tr><tr><td>A</td><td>$5\,\%$</td><td></td><td>$20\,\%$</td></tr><tr><td>$\overline{A}$</td><td>$35\,\%$</td><td>$45\,\%$</td><td>$80\,\%$</td></tr><tr><td></td><td>$40\,\%$</td><td></td><td>$100\,\%$</td></tr></table>Der gesuchte Anteil ist $\frac{5\,\%}{40\,\%} = 12{,}5\,\%$.</td><td></td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>Teilaufgabe c)
Die gesuchte Anzahl ist $\frac{810}{0{,}36} = 2250$.</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Es ist möglich. Wurden beispielsweise im Juli 10000 Fahrräder verkauft und im August 1000, so ergibt sich für diese beiden Monate insgesamt für den Anteil der verkauften Mountainbikes $\frac{0{,}44 \cdot 10000 + 0{,}52 \cdot 1000}{11000} < 0{,}46$.
(Eine vollständige sprachliche Begründung ist ebenfalls zulässig.)</td><td></td><td></td><td>3</td></tr>
</table>

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe d)  	3		
Zu prüfen ist, ob $P(G) < 0{,}7$ ist. $P(G) = 0{,}56 + 0{,}135 = 0{,}695 < 0{,}7$		2	
Die Zufallsgröße X_p beschreibt die Anzahl der Fahrräder, für die beim Onlinekauf eine Garantieverlängerung abgeschlossen wird. X_p ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 80$ und p.	1		
Da die Hypothese $H_1 : p > 0{,}45$ gestützt werden soll, wird $H_0 : p \leq 0{,}45$ als Nullhypothese gewählt.	1		
Wenn die Hypothese $H : p = 0{,}45$ rechtsseitig verworfen werden kann, so auch die Hypothese H_0.		1	
Zu bestimmen ist die kleinste natürliche Zahl k mit $P(X_p \geq k) \leq 0{,}05 \Leftrightarrow 1 - P(X_p \leq k-1) \leq 0{,}05 \Leftrightarrow P(X_p \leq k-1) \geq 0{,}95$ Aus $P(X_{0{,}45} \leq 42) \approx 0{,}9276$ und $P(X_{0{,}45} \leq 43) \approx 0{,}9537$ ergibt sich $k - 1 = 43$. Somit ist $k = 44$.		4	
Wird also für mindestens 44 der 80 Fahrräder beim Onlinekauf eine Garantieverlängerung abgeschlossen, so wird die Nullhypothese abgelehnt und die Vermutung des Händlers gestützt.		1	
Teilaufgabe e) *Verschiedene Beweise sind möglich.* Mit $P(A) \cdot P(\overline{B}) = P(A \cap \overline{B})$ folgt $\begin{aligned} P(A) \cdot P(B) &= P(A) \cdot \big(1 - P(\overline{B})\big) \\ &= P(A) - P(A) \cdot P(\overline{B}) \\ &= P(A) - P(A \cap \overline{B}) \\ &= \big(P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})\big) - P(A \cap \overline{B}) \\ &= P(A \cap B)\,. \end{aligned}$			3
Punktsummen	12	18	10