SS 2020 23.7.2020

Name, Vorname:
Matrikelnummer:
Studienrichtung:

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	Z	$\sum$
Soll-Punkte:	6	2	7	5	7	3	5	+5	35
Ist-Punkte:									

Klausur Analysis II

Vorbemerkung: Alle Antworten sind ausreichend zu begründen und alle Rechnungen nachvollziehbar aufzuschreiben.

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr $\boxed{\text{W}}$ oder falsch $\boxed{\text{F}}$ sind, und begründen oder widerlegen Sie (z.B. mit einem Gegenbeispiel) **genau drei** Ihrer Behauptungen:

   - [ ] Die Taylorreihe der Funktion $f(x) = x^6 - 3x^5 + 2x - 1$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ hat maximal 7 Summanden.
   - [ ] Jede Regelfunktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist stetig.
   - [ ] Für Mengen $M \subset \mathbb{R}^n$ gilt: ∂M ist kompakt $\implies$ M ist kompakt.
   - [ ] Wenn $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ im Punkt a partielle Ableitungen nach allen Variablen hat, dann ist f in a stetig.
   - [ ] Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Menge D unendlich oft differenzierbar, dann gilt $\partial_i\partial_j f(x) = \partial_j\partial_i f(x)$ für jedes $x \in D$.
   - [ ] Die Jacobi-Matrix einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist eine $(n \times m)$-Matrix.

2. Beweisen Sie mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, dass $\sin x \le x$ für alle $x \ge 0$ gilt.

3. Für geeignete $x, y \in \mathbb{R}$ heißt das Integral

$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \qquad \textit{Eulersche Betafunktion.} \qquad (*)$$

   a) Für welche $x, y \in \mathbb{R}$ ist $(*)$ ein Regelintegral, für welche $x, y \in \mathbb{R}$ konvergiert es als uneigentliches Integral (Begründung!)?
   b) Bestimmen Sie $B(3, 2)$.
   c) Zeigen Sie für $x, y \ge 2$, dass
      - B symmetrisch ist, also $B(x, y) = B(y, x)$ gilt;
      - $B(x,y) = \frac{(x-1)}{y} B(x-1, y+1)$ ist.

4. Sei $D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 5, |y| < 2 \text{ mit } |x| \ge 1 \text{ oder } |y| \ge 1\Big\}$, oder anders geschrieben $D = \Big((-5, 5) \times (-2, 2)\Big) \setminus \Big((-1, 1) \times (-1, 1)\Big)$.

   a) Skizzieren Sie D.
   b) Ist D offen, abgeschlossen, zusammenhängend, beschränkt? Begründen Sie **zwei** dieser Aussagen.

5. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y > x, \\ x^2 & \text{für } y \leq x. \end{cases}$$

Untersuchen Sie f in allen Punkten des $\mathbb{R}^2$ auf Stetigkeit und in $(0,0)$ auf Differenzierbarkeit.

6. Sei

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad r \geq 0,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

die Transformation von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten im $\mathbb{R}^2$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft $y\,\partial_x f(x,y) = x\,\partial_y f(x,y)$. Zeigen Sie, dass f rotationssymmetrisch ist, d.h. $\partial_\varphi(f \circ g) = 0$ ist.

7. Untersuchen Sie die auf $\mathbb{R}^2$ definierte Funktion $f(x,y) = x^3 + x^2 + y^2 - xy$ auf die Existenz lokaler Minima und Maxima.

Zusatzaufgabe

Z. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_2 f$ zweiter Ordnung der Funktion $f(x,y) = \cos(x+2y)$ im Entwicklungspunkt $a = (0,0)$, und zeigen Sie, dass im Quadrat $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\big\}$ die Abschätzung

$$\Big|\cos(x+2y) - T_2 f\big((x,y);(0,0)\big)\Big| = \Big|R_2\big((x,y);(0,0)\big)\Big| \leq \frac{27}{6} \qquad \forall\, |x|, |y| \leq 1$$

gilt.