Name: ____________________

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Ein Medikament kann in unterschiedlich hoher Wirkstoffdosis und in verschiedenen Darreichungsformen verabreicht werden. Es können beispielsweise Tropfen eingenommen werden, bei denen der Wirkstoff nach der Einnahme nahezu sofort beginnt, ins Blut überzugehen. Es kann auch in Kapseln verabreicht werden, deren Umhüllungen sich erst auflösen müssen, so dass der Übergang ins Blut verzögert erfolgt.
Der zeitliche Verlauf der Wirkstoffkonzentration eines Medikaments im Blut des Patienten kann durch die Funktionenschar $K_{a\,;\,b}$ mit

$$K_{a\,;\,b}(t) = a \cdot (t-b) \cdot e^{-(t-b)} \quad \text{mit } t \geq b,\ a > 0,\ b \geq 0$$

beschrieben werden. Die Zeit t wird in Stunden seit der Einnahme des Medikaments und die Wirkstoffkonzentration $K_{a\,;\,b}(t)$ in Milligramm pro Liter (mg/l) gemessen.
Der Parameter a berücksichtigt die Wirkstoffmenge. Der Parameter b gibt den Zeitpunkt in Stunden an, ab dem eine Wirkstoffkonzentration im Blut festgestellt werden kann.

a) *Beschreiben Sie unter Bezugnahme auf verschiedene Skizzen den Einfluss des Parameters a (z. B. für $a = 2$ und $a = 4$) und des Parameters b (z. B. für $b = 1$ und $b = 3$) auf den Verlauf der zugehörigen Funktionsgraphen.* (9 Punkte)

b) (1) *Bestimmen Sie für $K_{a\,;\,b}(t)$ den Zeitpunkt, an dem die Wirkstoffkonzentration am schnellsten abgebaut wird.*

(2) Die Funktion $K_{27{,}183\,;\,0}(t)$ beschreibt die Wirkstoffkonzentration der ersten Verabreichung. Das Medikament ist wirksam, wenn die Konzentration mindestens 2,5 mg/l beträgt.

Bestimmen Sie die Wirkungsdauer für den Fall $b = 0$. (10 Punkte)

Name: ____________________

c) (1) *Berechnen Sie* $\frac{1}{r-b}\int_b^r K_{a;b}(t)\,dt$ *mit* $r \geq b$ *und beschreiben Sie die Bedeutung des Integrals im Sachzusammenhang.*

(2) Mediziner interessiert der Wert des AUC („Area Under the Curve“), der mathematisch der Größe der Fläche zwischen Graph und horizontaler Achse entspricht. In der Medizin wird der AUC zur Darstellung der Konzentration eines Wirkstoffes im Blut im Bezug zum zeitlichen Verlauf verwendet.
Bestimmen Sie den Wert des AUC für $K_{a\,;\,b}(t)$. (15 Punkte)

d) Bei einer Behandlung soll das Medikament in zwei Verabreichungen mit verschiedenen Darreichungsformen und Dosierungen zur gleichen Zeit eingenommen werden. Ziel der Behandlung ist, dass die Gesamtkonzentration beider Verabreichungen im Bereich von 5 bis 10 mg/l liegt. Die erste Verabreichung wirkt sofort, d. h. $b = 0$. Die Funktion $K_{27{,}183\,;\,0}(t)$ beschreibt die Wirkstoffkonzentration der ersten Verabreichung und erreicht den Maximalwert von 10 mg/l (ohne Nachweis).
Die zweite Verabreichung soll erst dann wirken, wenn die Wirkstoffkonzentration der ersten Verabreichung auf 5 mg/l abgesunken ist.

(1) *Begründen Sie, dass für die zweite Verabreichung diese Bedingung dann erfüllt ist, wenn für ihre zugehörige Funktion* $K_{a\,;\,b}$ *gilt:* $b = 2{,}678$.

(2) *Bestimmen Sie den Zeitpunkt der maximalen Wirkstoffkonzentration für die Funktion* $S_a(t) = K_{27{,}183\,;\,0}(t) + K_{a\,;\,2{,}678}(t)$ *in Abhängigkeit von a.*

(16 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2011

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen (mit CAS einschließlich Funktionenscharen) und Exponentialfunktionen einschließlich notwendiger Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Untersuchungen von Wirkungen (Änderungsrate)
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

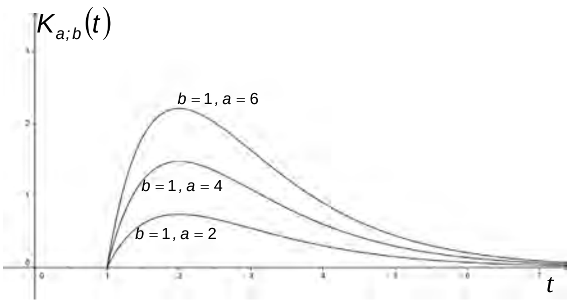
6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

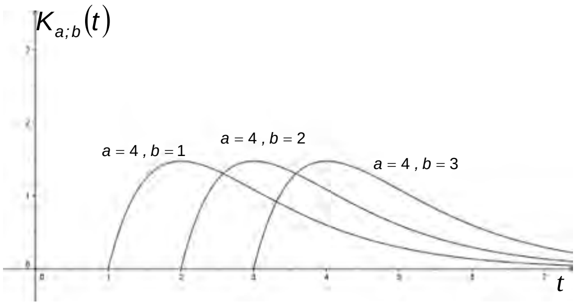
6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Der Parameter *a* streckt den Graphen mit dem Faktor *a* in Richtung der $K_{\mathrm{a\,;\,b}}(t)$-Achse.

Der Parameter *b* verschiebt den Graphen um den Wert von *b* in Richtung der *t*-Achse.
An der Stelle $t = b$ befindet sich eine Nullstelle der zugehörigen Funktion.
Die Wirkstoffkonzentration setzt zum Zeitpunkt $t = b$ ein, weist ein Maximum in Abhängigkeit von *a* auf und geht langfristig gegen Null.
Zur Lösung dieses Aufgabenteils sind Darstellungen mehrerer Funktionsgraphen sinnvoll. Beispielhaft sind hier mögliche Graphen skizziert.





Modelllösung b)

(1) $K''_{\mathrm{a\,;\,b}}(t) = a\cdot(t-b-2)\cdot e^{-(t-b)}$ hat die einzige Nullstelle bei $t = b+2$.

Mit $K''_{\mathrm{a\,;\,b}}(b+2) = 0$ und $K'''_{\mathrm{a\,;\,b}}(b+2) = a\cdot e^{-2} > 0$ für $a > 0$ liegt an der Stelle $t = b+2$ eine Wendestelle vor. Zu diesem Zeitpunkt nimmt die Wirkstoffkonzentration am schnellsten ab.

(2) Es sei $b = 0$.

Aus $K_{27{,}183;\,0}(t) = 2{,}5 \Leftrightarrow 27{,}183\cdot t\cdot e^{-t} = 2{,}5$ folgen die Lösungen $t_1 \approx 0{,}102$ und $t_2 \approx 3{,}693$. Somit erhält man für die Wirkungsdauer $t_{\mathrm{w}} = t_2 - t_1 = 3{,}591$.

(Hier ist auch möglich, das Ergebnis nur angenähert anzugeben.)
Die Wirkungsdauer beträgt somit rund 3 Stunden und 35 Minuten.
(Es reicht auch die reine Stundendarstellung.)

Modelllösung c)

(1) Es ist $\frac{1}{r-b}\int_b^r K_{\mathrm{a;b}}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{r-b}\cdot a\cdot\left(e^r - e^b\cdot(r-b+1)\right)\cdot e^{-r}$. Das Integral beschreibt die mittlere Wirkstoffkonzentration des Medikaments ab der Freisetzung des Wirkstoffes $t_0 = b$ bis zum Zeitpunkt $t_1 = r$.

(2) Zur Berechnung des AUC ist das uneigentliche Integral $\int_b^\infty K_{\mathrm{a;b}}(t)\,\mathrm{d}t$ zu bestimmen.

Es ist $\int_b^\infty K_{\mathrm{a;b}}(t)\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{r\to\infty}\left(a\cdot\left(e^r - e^b\cdot(r-b+1)\right)\cdot e^{-r}\right) = a$.

Modelllösung d)

(1) Bestimmung von *b*:

Aus $K_{27{,}183\,;\,0}(t) = 5 \quad\Leftrightarrow\quad 5000\cdot e^t - 27183\cdot t = 0$ folgen als numerische Lösungen $t_1 \approx 0{,}232 \vee t_2 \approx 2{,}678$.

(Alternative: Analyse des Funktionsgraphen mit CAS im Trace-Modus.)

Da die zweite Verabreichung erst dann einsetzt, wenn die erste auf 5 mg/l absinkt, ist $b = t_2$.

(2) Bestimmung von t_0 in Abhängigkeit von *a*:

Aus $S_{\mathrm{a}}'(t) = \left(K_{27{,}183\,;\,0}(t_0) + K_{\mathrm{a}\,;\,2{,}678}(t_0)\right)' = 0$ folgt: $t_0 \approx \frac{3{,}678\cdot(a+0{,}508)}{a+1{,}868}$.

Es ist $S_{\mathrm{a}}''(t_0) = \left(K_{27{,}183\,;\,0}(t_0) + K_{\mathrm{a}\,;\,2{,}678}(t_0)\right)'' < 0$ für $a > 0$.

Somit liegt an der Stelle t_0 ein lokales Maximum vor. Der Nachweis des absoluten Maximums kann mit Hilfe von Randbetrachtungen oder über den Verlauf des Graphen im Kontext der Aufgabe erfolgen oder mit den Überlegungen aus Teil a).

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	beschreibt den Verlauf der Wirkstoffkonzentration.	4
2	beschreibt den Einfluss der Parameter *a* und *b*.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) bestimmt den Zeitpunkt, an dem die Wirkstoffkonzentration am schnellsten abgebaut wird.	6
2	(2) bestimmt die Wirkungsdauer für den Fall $b = 0$.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) berechnet $\frac{1}{r-b}\int_b^r K_{a;b}(t)\,dt$.	5
2	(1) beschreibt die Bedeutung des Integrals im Sachzusammenhang.	5
3	(2) bestimmt den Wert des uneigentlichen Integrals.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) begründet, dass gilt: $b = 2,678$.	5
2	(2) bestimmt t_0 in Abhängigkeit von a.	7
3	(2) weist das absolute Maximum für t_0 nach.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	beschreibt den Verlauf …	4			
2	beschreibt den Einfluss …	5			
sachlich richtige Alternativen: (9) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**9**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt den Zeitpunkt …	6			
2	(2) bestimmt die Wirkungsdauer …	4			
sachlich richtige Alternativen: (10) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**10**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet $\frac{1}{r-b}\int_b^r K_{\mathrm{a;b}}(t)\,\mathrm{d}t$.	5			
2	(1) beschreibt die Bedeutung …	5			
3	(2) bestimmt den Wert …	5			
sachlich richtige Alternativen: (15) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**15**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass gilt …	5			
2	(2) bestimmt t_0 in …	7			
3	(2) weist das absolute …	4			
sachlich richtige Alternativen: (16) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**16**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

In der *Abbildung* auf Seite 3 ist – eingebettet in ein Koordinatensystem – ein Ausschnitt aus dem Flussverlauf der Ruhr zu sehen. Die Karte ist aus einem Luftbild entstanden. **Der Einheit 1 cm in der Karte entsprechen 50 m in der Natur.**

In den folgenden Aufgaben werden mit den Mitteln der Analysis, anders als bei realen Vermessungen üblich, in der Karte dargestellte Landschaftsmerkmale beschrieben.

a) (1) *Berechnen Sie eine Gleichung der ganzrationalen Funktion f dritten Grades, deren Graph durch die Punkte A, B, C und D verläuft. Die Werte der gesuchten Koeffizienten sind auf die 5. Nachkommastelle gerundet anzugeben.*

[Kontrollergebnis mit geringerer Genauigkeit:
$f(x) \approx -0{,}0035 \cdot x^3 + 0{,}053 \cdot x^2 - 0{,}31 \cdot x + 6{,}52$]

(2) *Skizzieren Sie den Graphen von f in der Abbildung auf Seite 3.* (12 Punkte)

Im Gegensatz zur recht genauen Modellierung der nördlichen Uferlinie durch den Graphen der Funktion *f* im Abschnitt *B* bis *D* wird die Uferlinie im Flussabschnitt von *A* bis *B* nur ungenau beschrieben. Der Graph schneidet einen Teil des Uferbereichs der Ruhr ab.

Name: ____________________

b) Zur besseren Beschreibung dieses Abschnitts ist daher eine ganzrationale Funktion g gesucht, deren Graph durch die Punkte A, Q und B verläuft und im Punkt B zusätzlich dieselbe Steigung und Krümmung wie der Graph von f hat, d. h., die Funktionen f und g sollen dort in den Werten ihrer 1. und 2. Ableitung übereinstimmen.

Bestimmen Sie eine Gleichung der ganzrationalen Funktion vierten Grades g, die diese Bedingungen erfüllt. Die Werte der gesuchten Koeffizienten sind auf die 5. Nachkommastelle gerundet anzugeben.

[Kontrollergebnis mit geringerer Genauigkeit:
$g(x) \approx 0,0019 \cdot x^4 - 0,040 \cdot x^3 + 0,29 \cdot x^2 - 0,83 \cdot x + 6,52$]

(12 Punkte)

c) Das in der Karte abgebildete Teilstück eines *Naturschutzgebiets* im Flussabschnitt von B bis D wird einerseits durch die Ruhr und andererseits zwischen den Punkten E und F durch einen geradlinigen Zaun entlang des dort verlaufenden Dammes begrenzt.

(1) *Berechnen Sie eine Gleichung der Geraden z, die durch die Punkte E und F verläuft.*

[Zur Kontrolle: $z(x) \approx 8,88824 - 0,30588 \cdot x$]

(2) *Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Naturschutzgebiets zwischen dem Zaun und der Uferlinie im Flussabschnitt von B bis D.* (15 Punkte)

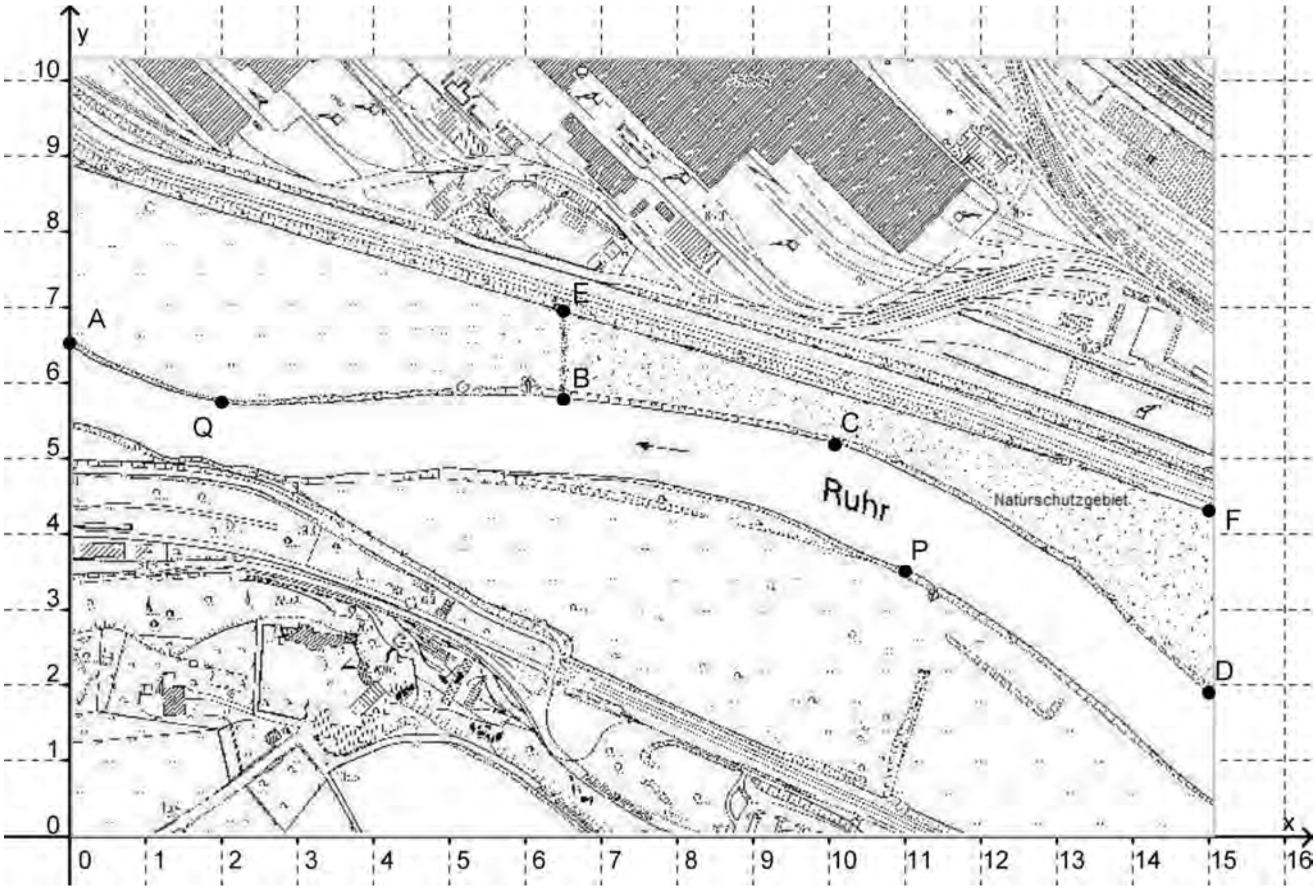
d) Vom Punkt P am südlichen Ufer der Ruhr aus soll durch eine Brücke ein Zugang zum Naturschutzgebiet nördlich der Ruhr geschaffen werden. Dazu wird derjenige Punkt R auf der Uferlinie zwischen C und D gesucht, der vom Punkt P den kleinsten Abstand hat.

Durch $q(x) = (x-11)^2 + (f(x) - 3,5)^2$, $c_C \leq x \leq x_D$, ist das Quadrat des Abstands eines beliebigen Punktes $(x \mid f(x))$ auf der Uferlinie zwischen C und D vom Punkt $P(11 \mid 3,5)$ gegeben. Ohne Nachweis darf vorausgesetzt werden, dass der Abstand dieses Punktes vom Punkt P genau dann minimal ist, wenn $q(x)$ minimal ist.

Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten des gesuchten Punktes R. (11 Punkte)

Name: ____________________

Abbildung:



Die in die Karte eingezeichneten Punkte besitzen folgende Koordinaten:

$$A(0|6{,}52),\ B(6{,}5|5{,}78),\ C(10{,}07|5{,}18),\ D(15|1{,}9),$$
$$E(6{,}5|6{,}9),\ F(15|4{,}3),$$
$$P(11|3{,}5),\ Q(2|5{,}74).$$

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- Kartenausschnitt (Erscheinungsbild leicht verändert): Geobasisdaten der Kommunen und des Landes NRW © Geobasis NRW 2011

4. Bezüge zu den Vorgaben 2011

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen (mit CAS einschließlich Funktionenscharen) und Exponentialfunktionen einschließlich notwendiger Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Die Punkte *A*, *B*, *C* und *D* liegen auf dem Graphen der gesuchten Funktion *f* . Diese hat die Gleichung

$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

und muss folgende vier Bedingungen erfüllen:

$f(0) = 6{,}52$, $f(6{,}5) = 5{,}78$, $f(10{,}07) = 5{,}18$ und $f(15) = 1{,}9$.

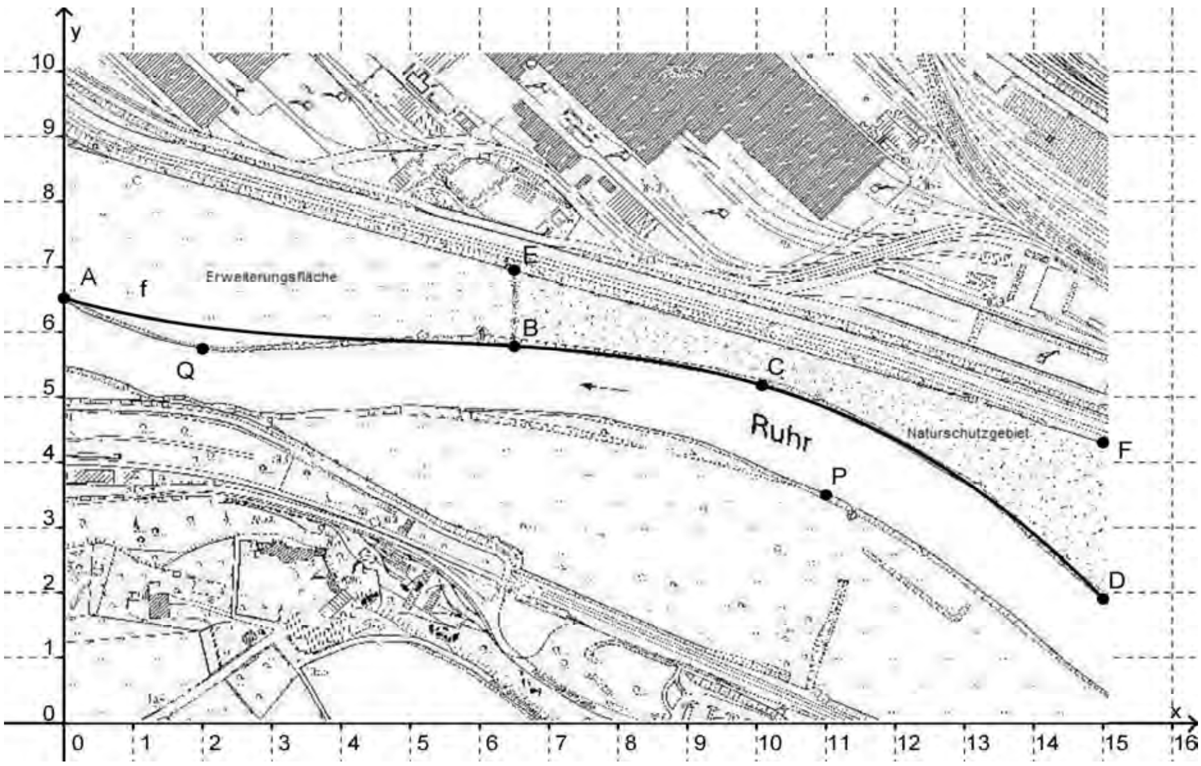
Mit CAS ergeben sich für die Koeffizienten bei Rundung auf die 5. Nachkommastelle die Werte:

$a \approx -0{,}00354;\ b \approx 0{,}05329;\ c \approx -0{,}31062;\ d = 6{,}52$.

Die Funktionsgleichung von *f* lautet:

$f(x) \approx -0{,}00354 \cdot x^3 + 0{,}05329 \cdot x^2 - 0{,}31062 \cdot x + 6{,}52$.

(2) Verlauf des Graphen von *f* :



Modelllösung b)

Die gesuchte ganzrationale Funktion vierten Grades g hat die Gleichung

$$g(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$$

mit $g'(x) = 4a \cdot x^3 + 3b \cdot x^2 + 2c \cdot x + d$ und $g''(x) = 12a \cdot x^2 + 6b \cdot x + 2c$ und muss die folgenden Bedingungen erfüllen:

$g(0) = 6{,}52$, $g(2) = 5{,}74$, $g(6{,}5) = 5{,}78$, $g'(6{,}5) = f'(6{,}5)$ und $g''(6{,}5) = f''(6{,}5)$.

Mit CAS ergeben sich für die Koeffizienten bei Rundung auf die 5. Nachkommastelle die Werte:

$a \approx 0{,}00189$; $b \approx -0{,}04030$; $c \approx 0{,}29224$; $d \approx -0{,}82836$; $e = 6{,}52$.

Die Funktionsgleichung von g lautet:

$$g(x) \approx 0{,}00189 \cdot x^4 - 0{,}04030 \cdot x^3 + 0{,}29224 \cdot x^2 - 0{,}82836 \cdot x + 6{,}52.$$

Modelllösung c)

(1) Die Gerade $z = EF$ hat die Gleichung

$$\begin{aligned} z(x) &= \frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} \cdot (x - x_E) + y_E \\ &= \frac{4{,}3 - 6{,}9}{15 - 6{,}5} \cdot (x - 6{,}5) + 6{,}9 \\ &\approx 8{,}88824 - 0{,}30588 \cdot x \end{aligned}$$

(2) Der Flächeninhalt des Naturschutzgebiets im Flussabschnitt von B bis D auf der Karte hat die Maßzahl $A = \int_{6{,}5}^{15} \left(z(x) - f(x)\right) \mathrm{d}x \approx 8{,}726$.

Dem Kartenwert von ca. 8,726 Flächeneinheiten entsprechen ca. 21800 m^2 in der Natur.
[Bei Verwendung der Kontrollergebnisse ergeben sich abweichende Werte.]

Modelllösung d)

Gesucht ist das absolute Minimum der Funktion *q* mit der Gleichung

$q(x)=(x-11)^2+(f(x)-3{,}5)^2,\ c_{\mathrm{C}}\le x\le x_{\mathrm{D}}$.

Die notwendige Bedingung $q'(x)=0$ hat die einzige Lösung $x_1\approx 11{,}54$. Wegen

$q''(x_1)\approx 2{,}19$ ist $q(x_1)\approx 1{,}48$ lokales und wegen $q(x_C)=q(10{,}07)\approx 3{,}69$ sowie

$q(x_{\mathrm{D}})=q(15)\approx 18{,}56$ auch globales Minimum der Funktion *q*.

Die Koordinaten des gesuchten Punktes *R* sind $x_{\mathrm{R}}=x_1\approx 11{,}54$ und

$y_{\mathrm{R}}=f(x_1)\approx 4{,}59:\ R(11{,}54\,|\,4{,}59)$.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) berechnet eine Gleichung der ganzrationalen Funktion *f* dritten Grades.	8
2	(2) skizziert den Graphen von *f*.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	ermittelt einen Ansatz.	5
2	bestimmt eine Gleichung der ganzrationalen Funktion vierten Grades *g*.	7
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) berechnet eine Gleichung der Geraden *z*.	6
2	(2) ermittelt einen Ansatz.	4
3	(2) bestimmt den Flächeninhalt des Naturschutzgebietes.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	ermittelt rechnerisch das lokale Minimum der Funktion *q*.	6
2	vergleicht das lokale Minimum von *q* mit den beiden Randminima und gibt die Koordinaten des Punktes *R* an.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet eine Gleichung …	8			
2	(2) skizziert den Graphen …	4			
sachlich richtige Alternativen: (12) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**12**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt einen Ansatz.	5			
2	bestimmt eine Gleichung …	7			
sachlich richtige Alternativen: (12) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**12**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet eine Gleichung …	6			
2	(2) ermittelt einen Ansatz.	4			
3	(2) bestimmt den Flächeninhalt …	5			
sachlich richtige Alternativen: (15) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**15**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt rechnerisch das …	6			
2	vergleicht das lokale …	5			
sachlich richtige Alternativen: (11) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe d)	**11**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(9\,|\,-4\,|\,-2)$, $B(-3\,|\,8\,|\,-2)$, $C(-3\,|\,-4\,|\,10)$, $P(3\,|\,2\,|\,4)$ und $Q(-2\,|\,-3\,|\,-1)$ gegeben.

a) (1) *Zeigen Sie rechnerisch, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist.*

(2) *Berechnen Sie je eine Gleichung der Ebene E_{ABC}, die A, B und C enthält, in Parameter- und Koordinatenform.*

[Zur Kontrolle: $E_{\mathrm{ABC}}:\ x_1 + x_2 + x_3 = 3$] (11 Punkte)

b) Der Punkt $S(1\,|\,0\,|\,2)$ ist der Schwerpunkt des Dreiecks *ABC*.

Zeigen Sie, dass die Gerade g, die durch P und Q verläuft, die Ebene E_{ABC} in S senkrecht schneidet. *(9 Punkte)*

c) Das Dreieck *ABC* soll Seitenfläche eines **regelmäßigen**[1] Tetraeders *ABCD* sein.

(1) *Bestimmen Sie die beiden Punkte der Geraden g aus Teilaufgabe b), die als vierter Eckpunkt D des Tetraeders ABCD in Frage kommen.*

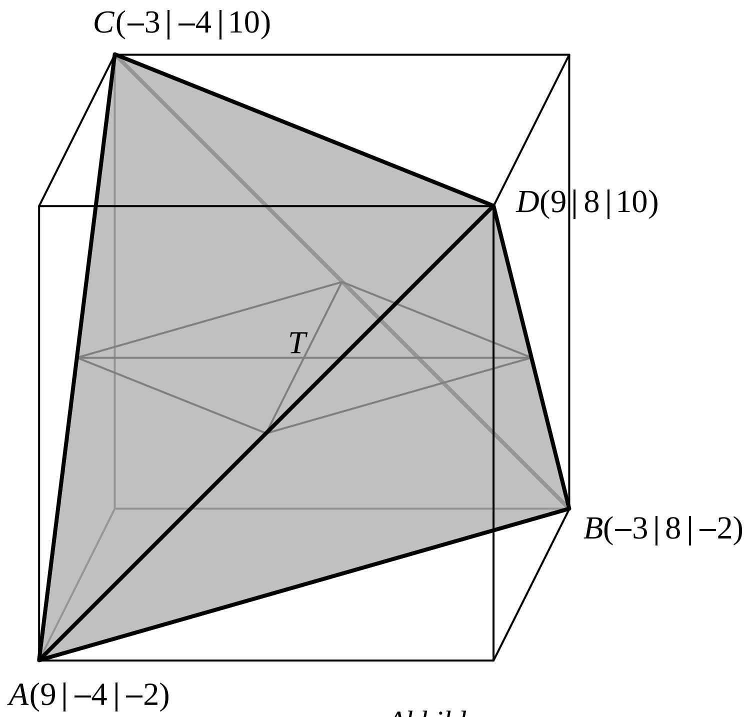
Das regelmäßige Tetraeder *ABCD* mit $D(9\,|\,8\,|\,10)$ als viertem Eckpunkt ist einem Würfel einbeschrieben, wie in der Abbildung auf Seite 2 dargestellt.

(2) *Berechnen Sie den Abstand des Punktes D von der Ebene E_{ABC} und das Volumen des Tetraeders ABCD.* (15 Punkte)

---

[1] Alle vier Flächen eines **regelmäßigen** Tetraeders sind **gleichseitige** Dreiecke.

Name: ____________________



Abbildung

d) (1) *Geben Sie die Koordinaten der Mittelpunkte* M_{AD}, M_{DB}, M_{BC} *und* M_{CA} *der Strecken* $\overline{AD}$, $\overline{DB}$, $\overline{BC}$ *und* $\overline{CA}$ *an.*

(2) *Zeigen Sie, dass das Viereck* $M_{AD}M_{DB}M_{BC}M_{CA}$ *ein Quadrat ist.*

(3) Der Punkt $T(3\,|\,2\,|\,4)$ ist der Mittelpunkt des Quadrates $M_{\mathrm{AD}}M_{\mathrm{DB}}M_{\mathrm{BC}}M_{\mathrm{CA}}$.

Ermitteln Sie den Abstand dieses Punktes T von der Kante $\overline{CD}$ *des Tetraeders.*

(15 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie ohne Alternative

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2011

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
   - Geraden- und Ebenengleichungen in Parameterform und Koordinatenform, Lagebeziehung von Geraden und Ebenen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität und Länge von Vektoren

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Es gilt: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$ [LE].

$\Rightarrow$ Das Dreieck ABC ist gleichseitig.

(2) Die Vektoren $\overrightarrow{AB} = 12 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = 12 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängige Richtungsvektoren der Ebene E_{ABC}. Eine Parametergleichung ist

$$E_{\text{ABC}}:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ r, s \in \mathbb{R}.$$

Eliminierung der Parameter:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{lclll} x_1 & = & 9 & -r & \\ x_2 & = & -4 & +r & -s \\ x_3 & = & -2 & & +s \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{lclll} x_1 & = & 9 & -r & \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 3 & & \\ x_3 & = & -2 & & +s \end{array} \right|$$

Koordinatenform: $E_{\text{ABC}}:\ x_1 + x_2 + x_3 = 3$.

Modelllösung b)

Es gilt: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$ bzw. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $r \in \mathbb{R}$.

$S \in E_{\text{ABC}}$, da 1 + 0 + 2 = 3 gilt.

$S \in g$, da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ wahr ist für $r = -2$.

[Eine mögliche Alternative ist die Berechnung des Schnittpunktes von E_{ABC} und *g*.]

Da ein Normalenvektor von E_{ABC} identisch zu einem Richtungsvektor von *g* ist, schneidet *g* die Ebene E_{ABC} senkrecht.

Modelllösung c)

(1) In einem gleichseitigen Dreieck ist der Schwerpunkt von den Eckpunkten gleich weit entfernt. Da *g* die Ebene E_{ABC} senkrecht schneidet, ist jeder Punkt auf *g* von den Eckpunkten des Dreiecks *ABC* gleich weit entfernt (Satz des Pythagoras). Deswegen ist ein möglicher Ansatz zur Berechnung der Koordinaten des (der) gesuchten Punkte(s) *D*:

$\left|\overline{AD}\right| = \left|\overline{AB}\right|$. Mit $D = (3+r\,|\,2+r\,|\,4+r)$ erhält man

$\sqrt{(r-6)^2+(r+6)^2+(r+6)^2} = \sqrt{288} \Leftrightarrow 3r^2+12r+108 = 288 \Leftrightarrow r = 6 \vee r = -10$.

Die gesuchten Punkte sind: $D_1(9\,|\,8\,|\,10)$ $[=D]$ und $D_2(-7\,|\,-8\,|\,-6)$.

(2) Für den Abstand *d* des Punktes *D* von der Ebene E_{ABC} ergibt sich:

Da *D* auf *g* liegt und *g* die Ebene E_{ABC} senkrecht schneidet, gilt $d(D, E_{\text{ABC}}) = |\overrightarrow{DS}|$.

$$|\overrightarrow{DS}| = \left|\begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix}\right| = 8\sqrt{3} \approx 13{,}86 \text{ [LE].}$$

Für das Volumen des Tetraeders gilt: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot A_{\Delta\text{ABC}} \cdot d(D, E_{\text{ABC}})$.

Für den Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks *ABC* erhält man:

$$A_{\Delta\text{ABC}} = \frac{\left|\overline{AB}\right|^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{288}{4} \cdot \sqrt{3} = 72 \cdot \sqrt{3}\,. \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 72\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{3} = 576 \text{ [VE].}$$

Modelllösung d)

(1) [Die Koordinaten der Punkte M_{AD}, M_{DB}, M_{BC} und M_{CA} sind jeweils das arithmetische Mittel der Koordinaten der entsprechenden Eckpunkte des Tetraeders.]

$M_{\mathrm{AD}}(9|2|4)$, $M_{\mathrm{DB}}(3|8|4)$, $M_{\mathrm{BC}}(-3|2|4)$ und $M_{\mathrm{CA}}(3|-4|4)$

(2) Die Punkte M_{AD}, M_{DB}, M_{BC} und M_{CA} liegen alle in der Ebene mit der Gleichung $x_3 = 4$.

Es gilt: $\overrightarrow{M_{\mathrm{AD}}M_{\mathrm{DB}}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{M_{\mathrm{DB}}M_{\mathrm{BC}}} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{M_{\mathrm{BC}}M_{\mathrm{CA}}} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{M_{\mathrm{CA}}M_{\mathrm{AD}}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Wegen $\left|\overrightarrow{M_{\mathrm{AD}}M_{\mathrm{DB}}}\right| = \left|\overrightarrow{M_{\mathrm{DB}}M_{\mathrm{BC}}}\right| = \left|\overrightarrow{M_{\mathrm{BC}}M_{\mathrm{CA}}}\right| = \left|\overrightarrow{M_{\mathrm{CA}}M_{\mathrm{AD}}}\right| = 6\sqrt{2}$ [LE] ist das Viereck $M_{\mathrm{AD}}M_{\mathrm{DB}}M_{\mathrm{BC}}M_{\mathrm{CA}}$ eine Raute, wegen $\overrightarrow{M_{\mathrm{AD}}M_{\mathrm{DB}}} \cdot \overrightarrow{M_{\mathrm{DB}}M_{\mathrm{BC}}} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{M_{\mathrm{AD}}M_{\mathrm{DB}}} \perp \overrightarrow{M_{\mathrm{DB}}M_{\mathrm{BC}}}$ ein Quadrat.

(3) Der Punkt $T(3|2|4)$ ist als Mittelpunkt des Quadrates $M_{\mathrm{AD}}M_{\mathrm{DB}}M_{\mathrm{BC}}M_{\mathrm{CA}}$ zugleich der Mittelpunkt des Würfels und liegt daher [lotrecht] unter dem Mittelpunkt $M_{\mathrm{CD}}(3|2|10)$ der Würfelseitendiagonalen $\overline{CD}$.

Deswegen ist der Abstand des Punktes T von der Tetraederkante $\overline{CD}$ gleich dem Abstand des Punktes T von deren Mittelpunkt M_{CD}: $|\overrightarrow{TM_{\mathrm{CD}}}| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = 6$ [LE].

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) zeigt rechnerisch, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist.	5
2	(2) berechnet eine Gleichung der Ebene E_{ABC} in Parameterform.	3
3	(2) berechnet eine Gleichung der Ebene E_{ABC} in Koordinatenform.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	zeigt, dass S auf der Geraden g und in der Ebene E_{ABC} liegt.	5
2	zeigt, dass g die Ebene E_{ABC} senkrecht schneidet.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) bestimmt die Punkte der Geraden g, die als vierter Eckpunkt D des regelmäßigen Tetraeders $ABCD$ in Frage kommen.	5
2	(2) berechnet den Abstand des Punktes D von der Ebene E_{ABC}.	4
3	(2) berechnet das Volumen des Tetraeders $ABCD$.	6
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) gibt die Koordinaten der Streckenmittelpunkte M_{AD}, M_{DB}, M_{BC} und M_{CA} an.	5
2	(2) zeigt, dass das Viereck $M_{\text{AD}}M_{\text{DB}}M_{\text{BC}}M_{\text{CA}}$ ein Quadrat ist.	5
3	(3) ermittelt den Abstand dieses Punktes T von der Kante $\overline{CD}$ des Tetraeders.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt rechnerisch, dass …	5			
2	(2) berechnet eine Gleichung …	3			
3	(2) berechnet eine Gleichung …	3			
sachlich richtige Alternativen: (11) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**11**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	zeigt, dass S …	5			
2	zeigt, dass g …	4			
sachlich richtige Alternativen: (9) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**9**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die Punkte …	5			
2	(2) berechnet den Abstand …	4			
3	(2) berechnet das Volumen …	6			
sachlich richtige Alternativen: (15) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**15**			

---

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt die Koordinaten …	5			
2	(2) zeigt, dass das …	5			
3	(3) ermittelt den Abstand …	5			
sachlich richtige Alternativen: (15) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe d)	**15**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Drei Kaffeeröstereien konkurrieren mit ihren Kaffeesorten A, B und C um die Gunst der Käufer, wobei folgendes monatliche Wechselverhalten der Käufer zu beobachten ist:

20 % der Käufer der Sorte A wechseln zu Sorte C,
10 % der Käufer der Sorte B wechseln zu Sorte A,
10 % der Käufer der Sorte B wechseln zu Sorte C,
10 % der Käufer der Sorte C wechseln zu Sorte A,
20 % der Käufer der Sorte C wechseln zu Sorte B.

Gehen Sie davon aus, dass die übrigen Käufer bei der gewählten Kaffeesorte bleiben und sich das Wechselverhalten über längere Zeit nicht ändert.

a) *Skizzieren Sie das monatliche Wechselverhalten der Käufer in einem Übergangsdiagramm und beschreiben Sie, inwiefern die Übergangsmatrix* $P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ *das dargestellte Wechselverhalten der Käufer abbildet.* (8 Punkte)

b) *Berechnen Sie die Verteilung nach einem Monat, wenn vorher 150 000 Sorte A, 300 000 Sorte B und 450 000 Sorte C gekauft haben.* (3 Punkte)

c) *Berechnen Sie* P^6 *und interpretieren Sie die Komponente in der dritten Zeile und ersten Spalte im Sachzusammenhang.* (5 Punkte)

Name: ____________________

d) Die Matrix P aus Teil a) hat die besondere Eigenschaft, dass alle Komponenten größer oder gleich Null sind und alle Spalten die Summe 1 haben. Eine solche Matrix wird stochastisch genannt.

Interpretieren Sie diese Eigenschaft im Sachzusammenhang und beurteilen Sie die Angemessenheit der dahinter liegenden Modellannahme für das Wechselverhalten der Käufer zwischen den drei Kaffeesorten. (6 Punkte)

Eine weitere Kaffeerösterei bietet eine vierte Kaffeesorte D an. Das Wechselverhalten der Käufer wird durch die Matrix $Q = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}9 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}7 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ beschrieben, wobei eine Verteilung der Käufer auf die Sorten A, B, C und D durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \\ v_D \end{pmatrix}$ gegeben ist.

e) (1) *Skizzieren Sie das monatliche Wechselverhalten der Käufer in einem Übergangsdiagramm.*

(2) *Zeigen Sie, dass keine Käufer innerhalb von zwei Monaten von Sorte A zu B wechseln.*

(3) *Bestimmen Sie für die Übergangsmatrix Q die prozentuale Verteilung der Käufer, die sich im Folgemonat nicht ändert.*
Interpretieren Sie diese Verteilung im Hinblick auf das langfristige Käuferverhalten.

(19 Punkte)

Name: ____________________

f) Durch mangelnde Betreuung der Stammkunden verliert die Rösterei, die Sorte C anbietet, Käufer an die übrigen Röstereien, so dass sich die entsprechenden Übergangsquoten ändern. Alle anderen Übergangsquoten bleiben gleich.

Die Verteilung ändert sich in einem Monat von (400 000|200 000|400 000|100 000) zu (400 000|300 000|200 000|200 000).

(1) *Begründen Sie, dass dieses Verhalten durch eine Matrix des Typs*

$$Q' = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & x & 0,2 \\ 0 & 0,9 & y & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 1-(x+y+z) & 0 \\ 0 & 0 & z & 0,4 \end{pmatrix}$$ *beschrieben werden kann.*

(2) *Ermitteln Sie die neuen Übergangsquoten.* (9 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie mit Alternative 2 (Übergangsmatrizen)

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2011

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

   Alternative 2:
   - Übergangsmatrizen, Matrizenmultiplikation als Verkettung von Übergängen

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

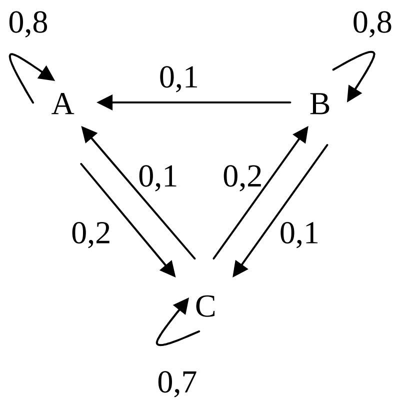
[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Übergangsdiagramm:



Begründung: In der Diagonalen stehen die Prozentsätze der Käufer, die bei der Kaffeesorte bleiben, d. h., 80 % bei A, 80 % bei B und 70 % bei C, in der 1. Zeile die Anteile der zu A wechselnden Käufer (10 % von B und 10 % von C), in der 2. Zeile die Anteile der zu B wechselnden Käufer (0 % von A und 20 % von C) und in der 3. Zeile die Anteile der zu C wechselnden Käufer (20 % von A und 10 % von B).

Modelllösung b)

Aus der Ausgangsverteilung $\vec{x}_{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} 150000 \\ 300000 \\ 450000 \end{pmatrix}$ ergibt sich nach einem Monat die Verteilung

$$\vec{x}_{\mathrm{E}} = P \cdot \vec{x}_{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 150000 \\ 300000 \\ 450000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 195000 \\ 330000 \\ 375000 \end{pmatrix}.$$

Modelllösung c)

$$P^6 = \begin{pmatrix} 0{,}411766 & 0{,}294117 & 0{,}294117 \\ 0{,}223124 & 0{,}411766 & 0{,}36511 \\ 0{,}36511 & 0{,}294117 & 0{,}340773 \end{pmatrix} \text{ [oder } P^6 \approx \begin{pmatrix} 0{,}412 & 0{,}294 & 0{,}294 \\ 0{,}223 & 0{,}412 & 0{,}365 \\ 0{,}365 & 0{,}294 & 0{,}341 \end{pmatrix}\text{]} \quad \text{(CAS)}$$

Die Matrix P^6 gibt das Wechselverhalten der Käufer bezogen auf 6 Monate an.
Ungefähr 36,5 % wechseln in dieser Zeit von A nach C.

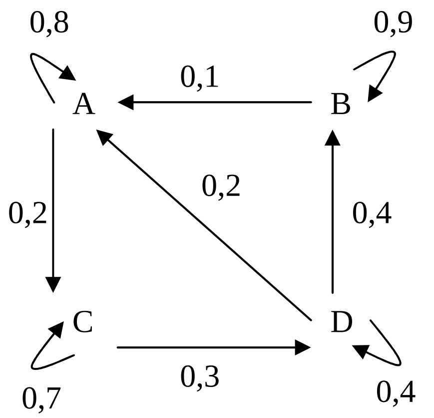
Modelllösung d)

Spaltensumme 1: Alle Käufer bleiben bei der Kaffeesorte bzw. wechseln zu einer der beiden anderen Sorten. Keiner verlässt das „System“ und niemand kommt hinzu. Es handelt sich um einen Austauschprozess.

Modellkritik: Die Annahme eines geschlossenen Systems ist nicht realistisch, da ausscheidende Kaffeekäufer (Tod, Änderung der bevorzugten Getränkeart etc.) ebenso wenig berücksichtigt werden wie neu hinzukommende.

Modelllösung e)

(1) Übergangsdiagramm:



(2)

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 0,64 & 0,17 & 0,06 & 0,28 \\ 0 & 0,81 & 0,12 & 0,52 \\ 0,3 & 0,02 & 0,49 & 0,04 \\ 0,06 & 0 & 0,33 & 0,16 \end{pmatrix} \text{ (CAS)}$$

Die Komponente in der ersten Spalte und zweiten Zeile von Q^2 ist gleich 0, gleichbedeutend damit, dass keine Käufer innerhalb von zwei Monaten von Sorte A zu B wechseln.

(3) Gesucht ist hier eine stationäre Verteilung: $Q \cdot \vec{x} = \vec{x} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

Damit ergibt sich als prozentuale Verteilung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,4 \\ 0,2 \\ 0,1 \end{pmatrix}$.

Langfristig bedeutet das: 30 % aller Käufer kaufen Sorte A, 40 % Sorte B, 20 % Sorte C und 10 % Sorte D.

Modelllösung f)

(1) Neue Matrix: $Q' = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & x & 0,2 \\ 0 & 0,9 & y & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 1-(x+y+z) & 0 \\ 0 & 0 & z & 0,4 \end{pmatrix}$

Da nur Käufer der Sorte C ihr Wechselverhalten ändern, unterscheidet sich die neue Matrix Q' nur in der dritten Spalte von der Matrix *Q*. Die neuen Wechselquoten von C zu A, B und D werden mit *x*, *y* und *z* bezeichnet, die Quote der bei C bleibenden Käufer ist dann $1-(x+y+z)$.

(2) [Vereinfachte] Ausgangsverteilung: (40|20|40|10)

Verteilung nach einem Monat: (40|30|20|20)

Bestimmung der neuen Übergangsquoten:

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & x & 0,2 \\ 0 & 0,9 & y & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 1-(x+y+z) & 0 \\ 0 & 0 & z & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 40 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 40 \cdot 0,8 + 20 \cdot 0,1 + 40x + 10 \cdot 0,2 = 40 \\ 20 \cdot 0,9 + 40y + 10 \cdot 0,4 = 30 \\ 40 \cdot 0,2 + 40 \cdot (1-(x+y+z)) = 20 \\ 40z + 10 \cdot 0,4 = 20 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{matrix} 20 = 20 \\ x = 0,1 \\ y = 0,2 \\ z = 0,4 \end{matrix}$$

Damit ergibt sich als neue Übergangsmatrix: $Q' = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0,9 & 0,2 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}$

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	skizziert die monatliche Entwicklung in einem Übergangsdiagramm.	4
2	beschreibt, inwiefern die Übergangsmatrix das Wechselverhalten der Käufer abbildet.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	berechnet die Verteilung nach einem Monat.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	berechnet P^6.	3
2	interpretiert die Komponente in der dritten Zeile und ersten Spalte im Sachzusammenhang.	2
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	interpretiert die Eigenschaft im Sachzusammenhang.	3
2	beurteilt die Angemessenheit der Modellannahme.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) skizziert das Wechselverhalten der Käufer in einem Übergangsdiagramm.	5
2	(2) zeigt, dass keine Käufer innerhalb von zwei Monaten von Sorte A zu B wechseln.	4
3	(3) bestimmt die prozentuale Verteilung der Käufer, die sich im Folgemonat nicht ändert.	6
4	(3) interpretiert diese Verteilung im Hinblick auf das langfristige Käuferverhalten.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe f)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) begründet, dass das angegebene Verhalten durch die Matrix Q' beschrieben werden kann.	3
2	(2) ermittelt die neuen Übergangsquoten.	6
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK[2]**	**ZK**	**DK**
1	skizziert die monatliche …	4			
2	beschreibt, inwiefern die …	4			
sachlich richtige Alternativen: (8) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**8**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet die Verteilung …	3			
sachlich richtige Alternativen: (3) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**3**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet P^6.	3			
2	interpretiert die Komponente …	2			
sachlich richtige Alternativen: (5) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**5**			

---

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	interpretiert die Eigenschaft …	3			
2	beurteilt die Angemessenheit …	3			
sachlich richtige Alternativen: (6) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe d)	**6**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) skizziert das Wechselverhalten …	5			
2	(2) zeigt, dass keine …	4			
3	(3) bestimmt die prozentuale …	6			
4	(3) interpretiert diese Verteilung …	4			
sachlich richtige Alternativen: (19) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe e)	**19**			

Teilaufgabe f)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass das …	3			
2	(2) ermittelt die neuen …	6			
sachlich richtige Alternativen: (9) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe f)	**9**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Seit dem 18. März 2009 ist das Aus für die herkömmliche Glühlampe beschlossene Sache. Die EU-Kommission hat in einem bis zum Jahr 2016 angelegten 6-Stufen-Plan den Ersatz von Glühlampen durch Energiesparlampen verordnet.
Ein Großhändler bezieht Energiesparlampen mit einer Energieaufnahme von 11 W von drei unterschiedlichen Herstellern A, B und C, die baugleiche Lampen herstellen. Diese Lampen verpackt er unabhängig vom Hersteller in einer einheitlichen Verpackung und verkauft sie dann weiter.
Nach umfangreichen Prüfzyklen stellt sich heraus, dass 4 % der Energiesparlampen von Hersteller A, 7 % der Lampen von B und 10 % der Lampen von C schon nach 300 Brennstunden deutlich weniger hell leuchten. Zur Vereinfachung werden diese Lampen „Mondlampen" genannt.

Der Großhändler beliefert regelmäßig einen Supermarkt mit Energiesparlampen: 50 % der Lampen stammen von Hersteller A, 30 % von B und 20 % von C. Im Folgenden sollen die oben genannten relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten des Auftretens von Mondlampen in den entsprechenden Lieferungen betrachtet werden.

Name: ____________________

a) Ein Kunde kauft eine zufällig ausgewählte Lampe aus dem Supermarkt.

(1) *Stellen Sie den Zufallsversuch „Kunde wählt zufällig eine Lampe“ mit Hilfe eines vollständigen Baumdiagramms grafisch dar.*

(2) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die gekaufte Lampe*

(2.1) *nicht von Hersteller C stammt,*

(2.2) *eine Mondlampe ist,*
[Kontrollergebnis: 0,061]

(2.3) *keine Mondlampe ist und nicht von Hersteller C stammt.*

(3) Der Kunde stellt nach 300 Betriebsstunden fest, dass seine im Supermarkt gekaufte Lampe eine Mondlampe ist.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Mondlampe von Hersteller A stammt.
Entscheiden Sie, von welchem der drei Hersteller A, B oder C sie am wahrscheinlichsten geliefert wurde. (19 Punkte)

b) (1) Ein Kunde kauft 50 Lampen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens 2 Mondlampen darunter sind, wenn die Lampen alle aus einer Lieferung von Hersteller A stammen.

(2) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als die erwartete Anzahl von Mondlampen darunter sind, wenn die Lampen alle aus einer Lieferung von Hersteller B stammen.*

(3) *Bestimmen Sie die maximale Anzahl von Lampen, die ein Kunde im Supermarkt kaufen kann, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50 % keine Mondlampe darunter ist, wenn alle Lampen aus einer Lieferung von Hersteller C stammen.*
(13 Punkte)

Name: _____________________

Ein Mitarbeiter bei Hersteller B führt auf eigene Initiative eine Änderung in der Produktion durch; er stellt dazu eine Maschine neu ein. Er behauptet, dass so der Anteil der Mondlampen auf unter 7 % gesenkt würde.

c) Um dies nachzuweisen, werden 200 Lampen zufällig aus der Produktion entnommen und es wird untersucht, wie viele Mondlampen darunter sind. Hersteller B bestimmt zur Hypothese $H_0 : p \geq 7\ \%$ folgende Entscheidungsregel:
H_0 wird genau dann abgelehnt, wenn die Anzahl der Mondlampen in der Stichprobe höchstens 7 beträgt.

(1) *Begründen Sie die Wahl der Hypothese im Sachzusammenhang.*
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art und zeigen Sie, dass die Entscheidungsregel für einen Hypothesentest mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 5\%$ optimal geeignet ist.

(2) Der Hersteller will seinem Mitarbeiter eine Belohnung zahlen, wenn der Hypothesentest aus (1) eine Senkung des Anteils der Mondlampen anzeigt.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Mitarbeiter irrtümlich keine Belohnung erhält, obwohl der Anteil der Mondlampen tatsächlich auf 6,5 % gesenkt wurde. Beurteilen Sie hiermit das Ergebnis des Tests aus der Sicht des Mitarbeiters.

(18 Punkte)

Name: ______________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Tabelle 1: σ-Regeln für Binomialverteilungen

Eine mit den Parametern n und p binomialverteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.
Wenn die LAPLACE-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist, gelten die σ-Regeln:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}683$	$P(\mu - 1{,}64\sigma < X < \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}90$
$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$	$P(\mu - 1{,}96\sigma < X < \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}95$
$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$	$P(\mu - 2{,}58\sigma < X < \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}99$

Name: ______________________

Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 10 und *n* = 20

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

					p					
n	*k*	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,5		*n*
10	0	0,8171	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010	9	10
	1	0,9838	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107	8	
	2	0,9991	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547	7	
	3		0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719	6	
	4		0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770	5	
	5			0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230	4	
	6				0,9991	0,9965	0,9894	0,8281	3	
	7				0,9999	0,9996	0,9984	0,9453	2	
	8	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000					0,9999	0,9893	1	
	9							0,9990	0	
20	0	0,6676	0,3585	0,1216	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	19	20
	1	0,9401	0,7358	0,3917	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000	18	
	2	0,9929	0,9245	0,6769	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002	17	
	3	0,9994	0,9841	0,8670	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013	16	
	4		0,9974	0,9568	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059	15	
	5		0,9997	0,9887	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207	14	
	6			0,9976	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577	13	
	7			0,9996	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316	12	
	8			0,9999	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517	11	
	9				0,9974	0,9861	0,9520	0,4119	10	
	10				0,9994	0,9961	0,9829	0,5881	9	
	11				0,9999	0,9991	0,9949	0,7483	8	
	12					0,9998	0,9987	0,8684	7	
	13						0,9997	0,9423	6	
	14							0,9793	5	
	15							0,9941	4	
	16	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000						0,9987	3	
	17							0,9998	2	
n		0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,7	0,5	*k*	*n*
					p					

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ______________________

Tabelle 3: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 50

$$F(n;p;k)=B(n;p;0)+...+B(n;p;k) \;=\; \binom{n}{0}p^0(1-p)^{n-0}+...+\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

n	*k*	*p* = 0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		*n*
	0	0,3642	0,0769	0,0052	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	49	
	1	0,7358	0,2794	0,0338	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	48	
	2	0,9216	0,5405	0,1117	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	47	
	3	0,9822	0,7604	0,2503	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	46	
	4	0,9968	0,8964	0,4312	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	45	
	5	0,9995	0,9622	0,6161	0,0480	0,0070	0,0007	0,0000	0,0000	44	
	6	0,9999	0,9882	0,7702	0,1034	0,0194	0,0025	0,0000	0,0000	43	
	7		0,9968	0,8779	0,1904	0,0453	0,0073	0,0001	0,0000	42	
	8		0,9992	0,9421	0,3073	0,0916	0,0183	0,0002	0,0000	41	
	9		0,9998	0,9755	0,4437	0,1637	0,0402	0,0008	0,0000	40	
	10			0,9906	0,5836	0,2622	0,0789	0,0022	0,0000	39	
	11			0,9968	0,7107	0,3816	0,1390	0,0057	0,0000	38	
	12			0,9990	0,8139	0,5110	0,2229	0,0133	0,0002	37	
	13			0,9997	0,8894	0,6370	0,3279	0,0280	0,0005	36	
	14			0,9999	0,9393	0,7481	0,4468	0,0540	0,0013	35	
	15				0,9692	0,8369	0,5692	0,0955	0,0033	34	
	16				0,9856	0,9017	0,6839	0,1561	0,0077	33	
	17				0,9937	0,9449	0,7822	0,2369	0,0164	32	
50	18				0,9975	0,9713	0,8594	0,3356	0,0325	31	50
	19				0,9991	0,9861	0,9152	0,4465	0,0595	30	
	20				0,9997	0,9937	0,9522	0,5610	0,1013	29	
	21				0,9999	0,9974	0,9749	0,6701	0,1611	28	
	22					0,9990	0,9877	0,7660	0,2399	27	
	23					0,9996	0,9944	0,8438	0,3359	26	
	24					0,9999	0,9976	0,9022	0,4439	25	
	25						0,9991	0,9427	0,5561	24	
	26						0,9997	0,9686	0,6641	23	
	27						0,9999	0,9840	0,7601	22	
	28							0,9924	0,8389	21	
	29							0,9966	0,8987	20	
	30							0,9986	0,9405	19	
	31							0,9995	0,9675	18	
	32							0,9998	0,9836	17	
	33							0,9999	0,9923	16	
	34								0,9967	15	
	35								0,9987	14	
	36	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000							0,9995	13	
	37								0,9998	12	
n		0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	*k*	*n*
		p									

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ______________________

Tabelle 4: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 100

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	*k*	0,02	0,05	0,1	1/6	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		*n*
	0	0,1326	0,0059	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	99	
	1	0,4033	0,0371	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	98	
	2	0,6767	0,1183	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	97	
	3	0,8590	0,2578	0,0078	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	96	
	4	0,9492	0,4360	0,0237	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	95	
	5	0,9845	0,6160	0,0576	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	94	
	6	0,9959	0,7660	0,1172	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	93	
	7	0,9991	0,8720	0,2061	0,0038	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	92	
	8	0,9998	0,9369	0,3209	0,0095	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	91	
	9		0,9718	0,4513	0,0213	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	90	
	10		0,9885	0,5832	0,0427	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	89	
	11		0,9957	0,7030	0,0777	0,0126	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	88	
	12		0,9985	0,8018	0,1297	0,0253	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	87	
	13		0,9995	0,8761	0,2000	0,0469	0,0025	0,0001	0,0000	0,0000	86	
	14		0,9999	0,9274	0,2874	0,0804	0,0054	0,0002	0,0000	0,0000	85	
	15			0,9601	0,3877	0,1285	0,0111	0,0004	0,0000	0,0000	84	
	16			0,9794	0,4942	0,1923	0,0211	0,0010	0,0000	0,0000	83	
	17			0,9900	0,5994	0,2712	0,0376	0,0022	0,0000	0,0000	82	
	18			0,9954	0,6965	0,3621	0,0630	0,0045	0,0000	0,0000	81	
	19			0,9980	0,7803	0,4602	0,0995	0,0089	0,0000	0,0000	80	
	20			0,9992	0,8481	0,5595	0,1488	0,0165	0,0000	0,0000	79	
	21			0,9997	0,8998	0,6540	0,2114	0,0288	0,0000	0,0000	78	
	22			0,9999	0,9369	0,7389	0,2864	0,0479	0,0001	0,0000	77	
	23				0,9621	0,8109	0,3711	0,0755	0,0003	0,0000	76	
	24				0,9783	0,8686	0,4617	0,1136	0,0006	0,0000	75	
	25				0,9881	0,9125	0,5535	0,1631	0,0012	0,0000	74	
	26				0,9938	0,9442	0,6417	0,2244	0,0024	0,0000	73	
	27				0,9969	0,9658	0,7224	0,2964	0,0046	0,0000	72	
	28				0,9985	0,9800	0,7925	0,3768	0,0084	0,0000	71	
	29				0,9993	0,9888	0,8505	0,4623	0,0148	0,0000	70	
	30				0,9997	0,9939	0,8962	0,5491	0,0248	0,0000	69	
	31				0,9999	0,9969	0,9307	0,6331	0,0398	0,0001	68	
	32					0,9984	0,9554	0,7107	0,0615	0,0002	67	
	33					0,9993	0,9724	0,7793	0,0913	0,0004	66	
100	34					0,9997	0,9836	0,8371	0,1303	0,0009	65	100
	35					0,9999	0,9906	0,8839	0,1795	0,0018	64	
	36					0,9999	0,9948	0,9201	0,2386	0,0033	63	
	37						0,9973	0,9470	0,3068	0,0060	62	
	38						0,9986	0,9660	0,3822	0,0105	61	
	39						0,9993	0,9790	0,4621	0,0176	60	
	40						0,9997	0,9875	0,5433	0,0284	59	
	41						0,9999	0,9928	0,6225	0,0443	58	
	42						0,9999	0,9960	0,6967	0,0666	57	
	43							0,9979	0,7635	0,0967	56	
	44							0,9989	0,8211	0,1356	55	
	45							0,9995	0,8689	0,1841	54	
	46							0,9997	0,9070	0,2421	53	
	47							0,9999	0,9362	0,3086	52	
	48							0,9999	0,9577	0,3822	51	
	49								0,9729	0,4602	50	
	50								0,9832	0,5398	49	
	51								0,9900	0,6178	48	
	52								0,9942	0,6914	47	
	53								0,9968	0,7579	46	
	54								0,9983	0,8159	45	
	55								0,9991	0,8644	44	
	56								0,9996	0,9033	43	
	57								0,9998	0,9334	42	
	58								0,9999	0,9557	41	
	59									0,9716	40	
	60									0,9824	39	
	61									0,9895	38	
	62									0,9940	37	
	63									0,9967	36	
	64									0,9982	35	
	65									0,9991	34	
	66									0,9996	33	
	67									0,9998	32	
	68									0,9999	31	
n		0,98	0,95	0,9	5/6	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	*k*	*n*
						p						

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ______________________

Tabelle 5: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 200

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

					p						
n	*k*	0,02	0,05	0,06	0,065	0,07	0,1	1/6	0,2		*n*
	0	0,0176	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	199	
	1	0,0894	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	198	
	2	0,2351	0,0023	0,0004	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	197	
	3	0,4315	0,0090	0,0018	0,0008	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	196	
	4	0,6288	0,0264	0,0064	0,0030	0,0014	0,0000	0,0000	0,0000	195	
	5	0,7867	0,0623	0,0177	0,0090	0,0044	0,0000	0,0000	0,0000	194	
	6	0,8914	0,1237	0,0413	0,0225	0,0119	0,0001	0,0000	0,0000	193	
	7	0,9507	0,2133	0,0829	0,0485	0,0274	0,0005	0,0000	0,0000	192	
	8	0,9798	0,3270	0,1470	0,0922	0,0556	0,0014	0,0000	0,0000	191	
	9	0,9925	0,4547	0,2343	0,1570	0,1010	0,0035	0,0000	0,0000	190	
	10	0,9975	0,5831	0,3407	0,2430	0,1661	0,0081	0,0000	0,0000	189	
	11	0,9992	0,6998	0,4580	0,3463	0,2508	0,0168	0,0000	0,0000	188	
	12	0,9998	0,7965	0,5760	0,4594	0,3513	0,0320	0,0000	0,0000	187	
	13	0,9999	0,8701	0,6849	0,5731	0,4606	0,0566	0,0000	0,0000	186	
	14		0,9219	0,7777	0,6787	0,5705	0,0929	0,0000	0,0000	185	
	15		0,9556	0,8512	0,7697	0,6731	0,1431	0,0001	0,0000	184	
	16		0,9762	0,9054	0,8428	0,7623	0,2075	0,0003	0,0000	183	
	17		0,9879	0,9429	0,8979	0,8351	0,2849	0,0006	0,0000	182	
	18		0,9942	0,9672	0,9368	0,8907	0,3724	0,0013	0,0000	181	
	19		0,9973	0,9821	0,9627	0,9308	0,4655	0,0027	0,0000	180	
	20		0,9988	0,9907	0,9790	0,9582	0,5592	0,0052	0,0001	179	
	21		0,9995	0,9953	0,9887	0,9758	0,6484	0,0094	0,0002	178	
	22		0,9998	0,9978	0,9942	0,9866	0,7290	0,0163	0,0005	177	
	23		0,9999	0,9990	0,9971	0,9929	0,7983	0,0269	0,0010	176	
	24			0,9996	0,9986	0,9964	0,8551	0,0426	0,0020	175	
	25			0,9998	0,9994	0,9982	0,8995	0,0648	0,0036	174	
	26			0,9999	0,9997	0,9992	0,9328	0,0945	0,0064	173	
	27				0,9999	0,9996	0,9566	0,1329	0,0110	172	
	28					0,9998	0,9729	0,1803	0,0179	171	
	29					0,9999	0,9837	0,2366	0,0283	170	
	30						0,9905	0,3007	0,0430	169	
200	31						0,9946	0,3711	0,0632	168	200
	32						0,9971	0,4454	0,0899	167	
	33						0,9985	0,5210	0,1239	166	
	34						0,9992	0,5953	0,1656	165	
	35						0,9996	0,6658	0,2151	164	
	36						0,9998	0,7305	0,2717	163	
	37						0,9999	0,7877	0,3345	162	
	38							0,8369	0,4019	161	
	39							0,8777	0,4718	160	
	40							0,9106	0,5422	159	
	41							0,9362	0,6108	158	
	42							0,9556	0,6758	157	
	43							0,9699	0,7355	156	
	44							0,9801	0,7887	155	
	45							0,9872	0,8349	154	
	46							0,9919	0,8738	153	
	47							0,9950	0,9056	152	
	48							0,9970	0,9310	151	
	49							0,9983	0,9506	150	
	50							0,9990	0,9655	149	
	51							0,9995	0,9764	148	
	52							0,9997	0,9843	147	
	53							0,9998	0,9897	146	
	54							0,9999	0,9934	145	
	55								0,9959	144	
	56								0,9975	143	
	57								0,9985	142	
	58								0,9991	141	
	59								0,9995	140	
	60								0,9997	139	
	61								0,9998	138	
	62								0,9999	137	
n		0,98	0,95	0,94	0,935	0,93	0,9	5/6	0,8	*k*	*n*
					p						

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 6: Normalverteilung

$\phi(z) = 0,...$

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$\phi(2,32) = 0,9898$

$\phi(-0,9) = 1 - \phi(0,9) = 0,1841$

$\phi(z) = 0,994 \Rightarrow z = 2,51$

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Stochastik mit Alternative 1 (ein- und zweiseitiger Hypothesentest)

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2011

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
   - Binomialverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung

   Alternative 1:
   - Ein- und zweiseitiger Hypothesentest

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

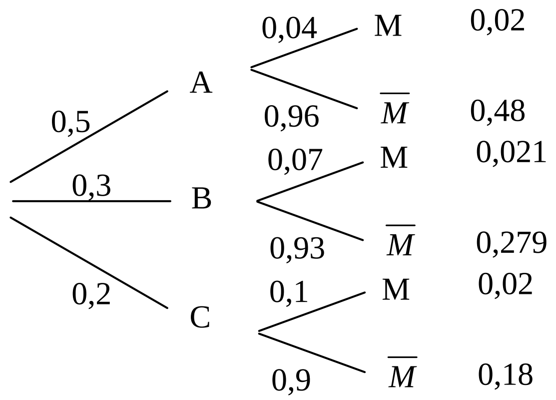
6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Bezeichne mit A das Ereignis: „Lampe ist von Hersteller A“, B, C analog,

M: „Lampe ist eine Mondlampe“, $\overline{M}$ bezeichne das Gegenereignis.



(2.1) $P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 0,8$

(2.2) $P(M) = 0,02 + 0,021 + 0,02 = 0,061$

(2.3) $P(\overline{M} \cap \overline{C}) = 0,48 + 0,279 = 0,759$

(3) $P_{\mathrm{M}}(A) = \dfrac{P(M \cap A)}{P(M)} = \dfrac{0,02}{0,061} = \dfrac{20}{61} \approx 0,3279 = 32,79\ \%$

Gesucht: Der Hersteller $H \in \{A, B, C\}$, für den $P_{\mathrm{M}}(H) = \dfrac{P(M \cap H)}{P(M)}$ maximal wird.

Das Maximum ist für $H = B$ erreicht, da $P(M \cap H)$ für diese Setzung maximal wird.

Modelllösung b)

Bezeichne X die Anzahl der Mondlampen, wenn ein Kunde n Lampen kauft. Dann ist X binomialverteilt, mit Trefferwahrscheinlichkeit p und Stichprobenumfang n.

(1) $n = 50$, $p = 0,04$

$$P(X \le 2) = \sum_{i=0}^{2} \binom{50}{i} \cdot 0,04^i \cdot 0,96^{50-i} \approx 0,6767 = 67,67\ \%$$

(2) Hier sind $n = 50$ und $p = 0,07$. Für den Erwartungswert gilt: $\mu = 50 \cdot 0,07 = 3,5$.

Damit folgt

$$P(X \ge 4) = 1 - P(X \le 3) = 1 - \sum_{i=0}^{3} \binom{50}{i} \cdot 0,07^i \cdot 0,93^{50-i} \approx 0,4673 = 43,73\ \%.$$

(3) p = 0,1. Gesucht ist ein maximales n, für das gilt: $P(X = 0) \geq 0,5$.

$$P(X = 0) \geq 0,5 \Leftrightarrow (1-0,1)^n \geq 0,5 \Leftrightarrow 0,9^n \geq 0,5 \Leftrightarrow n \leq \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,9)} \approx 6,58$$

Man darf also maximal 6 Lampen kaufen.

Modelllösung c)

(1) Der Hersteller will prüfen, ob die Änderung des Mitarbeiters zu einer Senkung des Anteils von Mondlampen geführt hat. Dabei will er mit möglichst geringer Wahrscheinlichkeit irrtümlich von einer Verbesserung (p < 7 %) ausgehen, wenn sich tatsächlich nichts geändert hat $(p \geq 0,07)$. Daher ist als Nullhypothese $H_0 : p \geq 0,07$ zu wählen.

Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Mondlampen in der Stichprobe von 200 Lampen an. Wird H_0 als gültig angenommen, so kann X als binomialverteilt angenommen werden mit Trefferwahrscheinlichkeit p = 7 % und Stichprobenanzahl n = 200.

Die maximale Irrtumswahrscheinlichkeit beträgt dann:

$$P_{\text{p}=0,07}(X \leq 7) = \sum_{i=0}^{7} \binom{200}{i} \cdot 0,07^i \cdot 0,93^{200-i} \approx 0,0274 = 2,74\ \%.$$

Aufgrund der H_0-Hypothese handelt es sich um einen linksseitigen Hypothesentest.

Zusätzlich gilt:

$$P_{\text{p}=0,07}(X \leq 8) = \sum_{i=0}^{8} \binom{200}{i} \cdot 0,07^i \cdot 0,93^{200-i} \approx 0,0556 = 5,56\ \% > 5\ \%.$$

Also ist die Entscheidungsregel für das gegebene Signifikanzniveau optimal geeignet.

(2) Es ist die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art zu berechnen. Daher ist $p = 0,065$ und gesucht ist $P(X \geq 8)$.

Hierfür gilt:

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - \sum_{i=0}^{7} \binom{200}{i} \cdot 0,065^i \cdot 0,935^{200-i} \approx 1 - 0,0485 = 95,15\ \%.$$

Da die Absenkung auf 6,5 % noch zu dicht bei 7 % liegt und der Stichprobenumfang noch zu klein ist, wird mit einer hohen Wahrscheinlichkeit irrtümlicherweise keine Belohnung ausgezahlt. Der Test ist also aus Sicht des Mitarbeiters als ungünstig einzustufen.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) stellt den Versuch mit einem Baumdiagramm dar.	6
2	(2.1) berechnet *P*(„Lampe stammt nicht von Hersteller C“).	2
3	(2.2) berechnet *P*(„Lampe ist Mondlampe“).	2
4	(2.3) berechnet *P*(„keine Mondlampe und nicht von Hersteller C“).	3
5	(3) ermittelt die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit.	3
6	(3) entscheidet begründet, dass die Lampe am wahrscheinlichsten von B stammt.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3
2	(2) berechnet den Erwartungswert und bestimmt damit die Wahrscheinlichkeit.	4
3	(3) ermittelt einen Ansatz zur Bestimmung der gesuchten Anzahl.	3
4	(3) berechnet die gesuchte Anzahl.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) begründet die Wahl der Hypothese.	3
2	(1) bestimmt die gesuchte Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art.	3
3	(1) begründet die Eignung der Entscheidungsregel.	4
4	(2) berechnet die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art.	4
5	(2) beurteilt das Ergebnis des Tests für den Mitarbeiter.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) stellt den Versuch …	6			
2	(2.1) berechnet *P*(„Lampe …	2			
3	(2.2) berechnet *P*(„Lampe …	2			
4	(2.3) berechnet *P*(„keine …	3			
5	(3) ermittelt die gesuchte …	3			
6	(3) entscheidet begründet, dass …	3			
sachlich richtige Alternativen: (19) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**19**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die gesuchte …	3			
2	(2) berechnet den Erwartungswert …	4			
3	(3) ermittelt einen Ansatz …	3			
4	(3) berechnet die gesuchte …	3			
sachlich richtige Alternativen: (13) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**13**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet die Wahl …	3			
2	(1) bestimmt die gesuchte …	3			
3	(1) begründet die Eignung …	4			
4	(2) berechnet die Wahrscheinlichkeit …	4			
5	(2) beurteilt das Ergebnis …	4			
sachlich richtige Alternativen: (18) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**18**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Schmuggel von Zigaretten verursacht jedes Jahr hohe Steuerausfälle für den deutschen Fiskus. Um einen Überblick darüber zu bekommen, wie hoch der Anteil an unversteuerten Zigaretten ist, wird eine große Anzahl leerer Zigarettenschachteln in bundesweit 22 Verwertungsstellen des dualen Systems gesammelt und auf das Vorhandensein von Steuerbanderolen überprüft.

a) In einer süddeutschen Großstadt hatten 10,7 % der Zigarettenschachteln keine Steuerbanderole. Im Folgenden soll diese relative Häufigkeit als Wahrscheinlichkeit angenommen werden.

(1) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dort von 40 zufällig in der Entsorgungsstation gesammelten Zigarettenschachteln*

(1.1) *genau 4 Schachteln keine Steuerbanderole haben,*

(1.2) *mehr als die erwartete Anzahl Schachteln keine Steuerbanderole hat,*

(1.3) *mindestens 3 und höchstens 5 Schachteln keine Steuerbanderole haben.*

(2) Bestimmen Sie, wie viele Zigarettenschachteln man in der Entsorgungsstation mindestens einsammeln muss, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 % mindestens eine Schachtel ohne Steuerbanderole erhält. (15 Punkte)

Name: ____________________

b) In einer Lieferung von 100 Stangen Zigaretten befinden sich 8 Stangen unverzollter Zigaretten. Bei einer Kontrolle entnimmt der Zoll zufällig 5 Stangen nacheinander und untersucht diese. Wird dabei unverzollte Ware gefunden, wird die gesamte Lieferung beschlagnahmt.

(1) *Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lieferung beschlagnahmt wird.*

(2) *Bestimmen Sie (z. B. durch systematisches Probieren) die Anzahl der Stangen, die der Zoll mindestens hätte entnehmen müssen, damit diese Lieferung mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 50 % beschlagnahmt worden wäre.* (10 Punkte)

c) Um einen Überblick über den Steuerausfall durch unverzollte Zigaretten zu bekommen, soll in einer Stadt nach folgendem Verfahren vorgegangen werden:
Es werden 200 leere Zigarettenschachteln markiert und in öffentlichen Mülltonnen entsorgt. Nach einem Tag sind diese Schachteln in der Entsorgungsstation angekommen. Aus dem an diesem Tag angelieferten Hausmüll werden 1000 leere Zigarettenschachteln zufällig ausgewählt. Die Anzahlen unverzollter, verzollter und markierter Zigarettenschachteln werden durch Auszählen ermittelt:

unverzollt	verzollt	markiert
146	840	14

(1) *Bestimmen Sie aus den obigen Daten eine Schätzung für die Anzahl aller unverzollten Schachteln, die an diesem Tag in der Entsorgungsstation angeliefert wurden. Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.*

(2) *Berechnen Sie auf der Grundlage von (1) eine Schätzung für den Steuerausfall, der dem Staat durch die unverzollten Zigaretten an diesem Tag entstanden ist, wenn zugrunde gelegt wird, dass pro Schachtel Zigaretten im Durchschnitt 2,73 € Steuern bezahlt werden müssen.* (10 Punkte)

Name: ____________________

d) In einer großen Hafenstadt werden 200 leere Zigarettenschachteln zufällig dem Hausabfall entnommen und untersucht. Dabei werden 22 unverzollte Schachteln gefunden.

(1) *Bestimmen Sie aufgrund der Stichprobe ein 90 %-Konfidenzintervall für den unbekannten Anteil p der unverzollten Zigarettenschachteln im Abfall.*

(2) Im Vorjahr lag der Anteil der unverzollten Zigarettenschachteln in der Hafenstadt bei 8,1 %. Auf Grundlage der obigen Stichprobe soll eine Pressemeldung herausgegeben werden, ob sich im aktuellen Jahr dieser Anteil verringert oder erhöht hat oder ob er gleich geblieben ist.

Entscheiden Sie mit Hilfe des in (1) ermittelten Konfidenzintervalls, welche der Pressemeldungen sinnvollerweise veröffentlicht werden kann. *(15 Punkte)*

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Tabelle 1: σ-Regeln für Binomialverteilungen

Eine mit den Parametern n und p binomialverteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.
Wenn die LAPLACE-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist, gelten die σ-Regeln:

$P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) \approx 0{,}683$	$P(\mu-1{,}64\sigma < X < \mu+1{,}64\sigma) \approx 0{,}90$
$P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) \approx 0{,}954$	$P(\mu-1{,}96\sigma < X < \mu+1{,}96\sigma) \approx 0{,}95$
$P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma) \approx 0{,}997$	$P(\mu-2{,}58\sigma < X < \mu+2{,}58\sigma) \approx 0{,}99$

Name: ____________________

Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 10 und *n* = 20

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

					p					
n	*k*	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,5		*n*
10	0	0,8171	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010	9	10
	1	0,9838	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107	8	
	2	0,9991	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547	7	
	3		0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719	6	
	4		0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770	5	
	5			0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230	4	
	6				0,9991	0,9965	0,9894	0,8281	3	
	7				0,9999	0,9996	0,9984	0,9453	2	
	8	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000					0,9999	0,9893	1	
	9							0,9990	0	
20	0	0,6676	0,3585	0,1216	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	19	20
	1	0,9401	0,7358	0,3917	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000	18	
	2	0,9929	0,9245	0,6769	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002	17	
	3	0,9994	0,9841	0,8670	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013	16	
	4		0,9974	0,9568	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059	15	
	5		0,9997	0,9887	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207	14	
	6			0,9976	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577	13	
	7			0,9996	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316	12	
	8			0,9999	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517	11	
	9				0,9974	0,9861	0,9520	0,4119	10	
	10				0,9994	0,9961	0,9829	0,5881	9	
	11				0,9999	0,9991	0,9949	0,7483	8	
	12					0,9998	0,9987	0,8684	7	
	13						0,9997	0,9423	6	
	14							0,9793	5	
	15							0,9941	4	
	16	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000						0,9987	3	
	17							0,9998	2	
n		0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,7	0,5	*k*	*n*
					p					

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 3: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 50

$$F(n;p;k)=B(n;p;0)+...+B(n;p;k) \;=\; \binom{n}{0}p^0(1-p)^{n-0}+...+\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

n	*k*	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		*n*
	0	0,3642	0,0769	0,0052	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	49	
	1	0,7358	0,2794	0,0338	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	48	
	2	0,9216	0,5405	0,1117	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	47	
	3	0,9822	0,7604	0,2503	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	46	
	4	0,9968	0,8964	0,4312	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	45	
	5	0,9995	0,9622	0,6161	0,0480	0,0070	0,0007	0,0000	0,0000	44	
	6	0,9999	0,9882	0,7702	0,1034	0,0194	0,0025	0,0000	0,0000	43	
	7		0,9968	0,8779	0,1904	0,0453	0,0073	0,0001	0,0000	42	
	8		0,9992	0,9421	0,3073	0,0916	0,0183	0,0002	0,0000	41	
	9		0,9998	0,9755	0,4437	0,1637	0,0402	0,0008	0,0000	40	
	10			0,9906	0,5836	0,2622	0,0789	0,0022	0,0000	39	
	11			0,9968	0,7107	0,3816	0,1390	0,0057	0,0000	38	
	12			0,9990	0,8139	0,5110	0,2229	0,0133	0,0002	37	
	13			0,9997	0,8894	0,6370	0,3279	0,0280	0,0005	36	
	14			0,9999	0,9393	0,7481	0,4468	0,0540	0,0013	35	
	15				0,9692	0,8369	0,5692	0,0955	0,0033	34	
	16				0,9856	0,9017	0,6839	0,1561	0,0077	33	
	17				0,9937	0,9449	0,7822	0,2369	0,0164	32	
50	18				0,9975	0,9713	0,8594	0,3356	0,0325	31	50
	19				0,9991	0,9861	0,9152	0,4465	0,0595	30	
	20				0,9997	0,9937	0,9522	0,5610	0,1013	29	
	21				0,9999	0,9974	0,9749	0,6701	0,1611	28	
	22					0,9990	0,9877	0,7660	0,2399	27	
	23					0,9996	0,9944	0,8438	0,3359	26	
	24					0,9999	0,9976	0,9022	0,4439	25	
	25						0,9991	0,9427	0,5561	24	
	26						0,9997	0,9686	0,6641	23	
	27						0,9999	0,9840	0,7601	22	
	28							0,9924	0,8389	21	
	29							0,9966	0,8987	20	
	30							0,9986	0,9405	19	
	31							0,9995	0,9675	18	
	32							0,9998	0,9836	17	
	33							0,9999	0,9923	16	
	34								0,9967	15	
	35								0,9987	14	
	36	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000							0,9995	13	
	37								0,9998	12	
n		0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	*k*	*n*

p (Spaltenköpfe oben: p = 0,02 … 0,5; grau unterlegte Zeile unten: p = 0,98 … 0,5)

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 - \text{abgelesener Wert}$

Name: ______________________

Tabelle 4: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 100

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

						p						
n	*k*	0,02	0,05	0,1	1/6	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		*n*
	0	0,1326	0,0059	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	99	
	1	0,4033	0,0371	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	98	
	2	0,6767	0,1183	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	97	
	3	0,8590	0,2578	0,0078	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	96	
	4	0,9492	0,4360	0,0237	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	95	
	5	0,9845	0,6160	0,0576	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	94	
	6	0,9959	0,7660	0,1172	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	93	
	7	0,9991	0,8720	0,2061	0,0038	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	92	
	8	0,9998	0,9369	0,3209	0,0095	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	91	
	9		0,9718	0,4513	0,0213	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	90	
	10		0,9885	0,5832	0,0427	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	89	
	11		0,9957	0,7030	0,0777	0,0126	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	88	
	12		0,9985	0,8018	0,1297	0,0253	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	87	
	13		0,9995	0,8761	0,2000	0,0469	0,0025	0,0001	0,0000	0,0000	86	
	14		0,9999	0,9274	0,2874	0,0804	0,0054	0,0002	0,0000	0,0000	85	
	15			0,9601	0,3877	0,1285	0,0111	0,0004	0,0000	0,0000	84	
	16			0,9794	0,4942	0,1923	0,0211	0,0010	0,0000	0,0000	83	
	17			0,9900	0,5994	0,2712	0,0376	0,0022	0,0000	0,0000	82	
	18			0,9954	0,6965	0,3621	0,0630	0,0045	0,0000	0,0000	81	
	19			0,9980	0,7803	0,4602	0,0995	0,0089	0,0000	0,0000	80	
	20			0,9992	0,8481	0,5595	0,1488	0,0165	0,0000	0,0000	79	
	21			0,9997	0,8998	0,6540	0,2114	0,0288	0,0000	0,0000	78	
	22			0,9999	0,9369	0,7389	0,2864	0,0479	0,0001	0,0000	77	
	23				0,9621	0,8109	0,3711	0,0755	0,0003	0,0000	76	
	24				0,9783	0,8686	0,4617	0,1136	0,0006	0,0000	75	
	25				0,9881	0,9125	0,5535	0,1631	0,0012	0,0000	74	
	26				0,9938	0,9442	0,6417	0,2244	0,0024	0,0000	73	
	27				0,9969	0,9658	0,7224	0,2964	0,0046	0,0000	72	
	28				0,9985	0,9800	0,7925	0,3768	0,0084	0,0000	71	
	29				0,9993	0,9888	0,8505	0,4623	0,0148	0,0000	70	
	30				0,9997	0,9939	0,8962	0,5491	0,0248	0,0000	69	
	31				0,9999	0,9969	0,9307	0,6331	0,0398	0,0001	68	
	32					0,9984	0,9554	0,7107	0,0615	0,0002	67	
	33					0,9993	0,9724	0,7793	0,0913	0,0004	66	
100	34					0,9997	0,9836	0,8371	0,1303	0,0009	65	100
	35					0,9999	0,9906	0,8839	0,1795	0,0018	64	
	36					0,9999	0,9948	0,9201	0,2386	0,0033	63	
	37						0,9973	0,9470	0,3068	0,0060	62	
	38						0,9986	0,9660	0,3822	0,0105	61	
	39						0,9993	0,9790	0,4621	0,0176	60	
	40						0,9997	0,9875	0,5433	0,0284	59	
	41						0,9999	0,9928	0,6225	0,0443	58	
	42						0,9999	0,9960	0,6967	0,0666	57	
	43							0,9979	0,7635	0,0967	56	
	44							0,9989	0,8211	0,1356	55	
	45							0,9995	0,8689	0,1841	54	
	46							0,9997	0,9070	0,2421	53	
	47							0,9999	0,9362	0,3086	52	
	48							0,9999	0,9577	0,3822	51	
	49								0,9729	0,4602	50	
	50								0,9832	0,5398	49	
	51								0,9900	0,6178	48	
	52								0,9942	0,6914	47	
	53								0,9968	0,7579	46	
	54								0,9983	0,8159	45	
	55								0,9991	0,8644	44	
	56								0,9996	0,9033	43	
	57								0,9998	0,9334	42	
	58								0,9999	0,9557	41	
	59									0,9716	40	
	60									0,9824	39	
	61									0,9895	38	
	62									0,9940	37	
	63									0,9967	36	
	64									0,9982	35	
	65									0,9991	34	
	66									0,9996	33	
	67									0,9998	32	
	68									0,9999	31	
n		0,98	0,95	0,9	5/6	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	*k*	*n*
						p						

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ______________________

Tabelle 5: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 200

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

				p				
n	*k*	0,02	0,05	0,1	1/6	0,2		*n*
	0	0,0176	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	199	
	1	0,0894	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	198	
	2	0,2351	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	197	
	3	0,4315	0,0090	0,0000	0,0000	0,0000	196	
	4	0,6288	0,0264	0,0000	0,0000	0,0000	195	
	5	0,7867	0,0623	0,0000	0,0000	0,0000	194	
	6	0,8914	0,1237	0,0001	0,0000	0,0000	193	
	7	0,9507	0,2133	0,0005	0,0000	0,0000	192	
	8	0,9798	0,3270	0,0014	0,0000	0,0000	191	
	9	0,9925	0,4547	0,0035	0,0000	0,0000	190	
	10	0,9975	0,5831	0,0081	0,0000	0,0000	189	
	11	0,9992	0,6998	0,0168	0,0000	0,0000	188	
	12	0,9998	0,7965	0,0320	0,0000	0,0000	187	
	13	0,9999	0,8701	0,0566	0,0000	0,0000	186	
	14		0,9219	0,0929	0,0000	0,0000	185	
	15		0,9556	0,1431	0,0001	0,0000	184	
	16		0,9762	0,2075	0,0003	0,0000	183	
	17		0,9879	0,2849	0,0006	0,0000	182	
	18		0,9942	0,3724	0,0013	0,0000	181	
	19		0,9973	0,4655	0,0027	0,0000	180	
	20		0,9988	0,5592	0,0052	0,0001	179	
	21		0,9995	0,6484	0,0094	0,0002	178	
	22		0,9998	0,7290	0,0163	0,0005	177	
	23		0,9999	0,7983	0,0269	0,0010	176	
	24			0,8551	0,0426	0,0020	175	
	25			0,8995	0,0648	0,0036	174	
	26			0,9328	0,0945	0,0064	173	
	27			0,9566	0,1329	0,0110	172	
	28			0,9729	0,1803	0,0179	171	
	29			0,9837	0,2366	0,0283	170	
	30			0,9905	0,3007	0,0430	169	
200	31			0,9946	0,3711	0,0632	168	200
	32			0,9971	0,4454	0,0899	167	
	33			0,9985	0,5210	0,1239	166	
	34			0,9992	0,5953	0,1656	165	
	35			0,9996	0,6658	0,2151	164	
	36			0,9998	0,7305	0,2717	163	
	37			0,9999	0,7877	0,3345	162	
	38				0,8369	0,4019	161	
	39				0,8777	0,4718	160	
	40				0,9106	0,5422	159	
	41				0,9362	0,6108	158	
	42				0,9556	0,6758	157	
	43				0,9699	0,7355	156	
	44				0,9801	0,7887	155	
	45				0,9872	0,8349	154	
	46				0,9919	0,8738	153	
	47				0,9950	0,9056	152	
	48				0,9970	0,9310	151	
	49				0,9983	0,9506	150	
	50				0,9990	0,9655	149	
	51				0,9995	0,9764	148	
	52				0,9997	0,9843	147	
	53				0,9998	0,9897	146	
	54				0,9999	0,9934	145	
	55					0,9959	144	
	56					0,9975	143	
	57					0,9985	142	
	58					0,9991	141	
	59					0,9995	140	
	60					0,9997	139	
	61					0,9998	138	
	62					0,9999	137	
n		0,98	0,95	0,9	5/6	0,8	*k*	*n*
				p				

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dezimalen) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ______________________

Tabelle 6: Normalverteilung

$\phi(z) = 0,...$

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$\phi(2,32) = 0,9898$

$\phi(-0,9) = 1 - \phi(0,9) = 0,1841$

$\phi(z) = 0,994 \Rightarrow z = 2,51$

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Stochastik mit Alternative 2 (Schätzen von Parametern für binomialverteilte Zufallsgrößen)

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2011

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
   - Binomialverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung

   Alternative 2:
   - Schätzen von Parametern für binomialverteilte Zufallsgrößen
2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Die Zufallsgröße X bezeichne die Anzahl der unverzollten Zigarettenschachteln in der Stichprobe von 40 Schachteln. Dann ist X binomialverteilt mit $p = 0{,}107$.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt

(1.1) $P(X=4) = \binom{40}{4} \cdot 0{,}107^4 \cdot 0{,}893^{36} \approx 0{,}2037 = 20{,}37\ \%$

(1.2) $E(X) = 0{,}107 \cdot 40 = 4{,}28$

$$P(X > 4{,}28) = P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4)$$
$$= 1 - \sum_{k=0}^{4} \binom{40}{k} \cdot 0{,}107^k \cdot 0{,}893^{40-k}$$
$$\approx 1 - 0{,}5713 = 0{,}4287 = 42{,}87\ \%$$

(1.3) $P(3 \leq X \leq 5) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$

$$= \binom{40}{3} \cdot 0{,}107^3 \cdot 0{,}893^{37} + \binom{40}{4} \cdot 0{,}107^4 \cdot 0{,}893^{36} + \binom{40}{5} \cdot 0{,}107^5 \cdot 0{,}893^{35}$$
$$\approx 0{,}5633 = 56{,}33\ \%$$

(2) Die Wahrscheinlichkeit, in einer Stichprobe der Größe n mindestens eine Schachtel ohne Steuerbanderole zu finden, beträgt:

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}893^n$.

Das gesuchte n erhält man also mit dem Ansatz:

$1 - 0{,}893^n \geq 0{,}8 \Leftrightarrow 0{,}893^n \leq 0{,}2 \Leftrightarrow n \geq \log_{0{,}893}(0{,}2) \approx 14{,}22.$

Man muss also mindestens 15 Schachteln einsammeln.

Modelllösung b)

(1) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter den 5 ausgewählten Zigarettenstangen keine unverzollten Stangen befinden, beträgt

$\frac{92}{100} \cdot \frac{91}{99} \cdot \frac{90}{98} \cdot \frac{89}{97} \cdot \frac{88}{96} \approx 0{,}6532 = 65{,}32\ \%.$

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also 1 – 0,6532 = 0,3468 = 34,68 %.

(2) Die Lösung wird durch Probieren ermittelt; die Wahrscheinlichkeiten werden nach demselben Muster wie in (1) bestimmt.

Testet der Zoll 6 Stangen, so ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von 40,18 %.

Testet der Zoll 7 Stangen, so ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von 45,27 %.

Testet der Zoll 8 Stangen, so ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von 49,98 %.

Testet der Zoll 9 Stangen, so ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von 54,33 %.

Der Zoll müsste also mindestens 9 Stangen testen.

Modelllösung c)

(1) Es ist plausibel anzunehmen, dass die Anteile der jeweiligen in der Stichprobe gefundenen Zigarettenschachteln an der Gesamtzahl der Zigarettenschachteln bei den drei „Arten“ von Schachteln (verzollt, unverzollt, markiert) näherungsweise gleich groß sind, da sich jede Schachtel unabhängig von ihrer „Art“ mit der gleichen Wahrscheinlichkeit in der Stichprobe befindet. Da sich 14 markierte Schachteln in der Stichprobe befinden, d. h. 7 % aller markierten Schachteln, kann man also näherungsweise annehmen, dass 146 auch 7 % aller unverzollten Schachteln sind. Die Anzahl der unverzollten Schachteln beträgt demnach schätzungsweise: $146 / 0{,}07 \approx 2086$.

(2) Dem Staat entgehen ca. $\frac{146}{0{,}07} \cdot 2{,}73\ € = 5694\ €$ an Steuern.

(Wenn mit 2086 gerechnet wird, sind es 5694,78 €.)

Modelllösung d)

(1) Es bezeichne p den Anteil der unverzollten Schachteln. Es bezeichne X die Anzahl der unverzollten Zigarettenschachteln in einer Stichprobe von 200 Schachteln, die in der Hafenstadt eingesammelt werden. Dann kann X als binomialverteilt angenommen werden (mit unbekanntem $p,\ n = 200,\ \mu = 200p,\ \sigma = \sqrt{200 \cdot p \cdot (1-p)}$.

Für das kleinste p, welches mit dem Ergebnis $x = 22$ verträglich ist, gilt:

$\mu + 1{,}64\sigma = 22$, d. h. $p + 1{,}64 \cdot \frac{\sigma}{200} = \frac{22}{200}$ bzw. $p - \frac{22}{200} = -1{,}64 \cdot \frac{\sigma}{200}$.

Für das größte p, welches mit dem Ergebnis $x = 22$ verträglich ist, gilt:

$\mu - 1{,}64\sigma = 22$, d. h. $p - 1{,}64 \cdot \frac{\sigma}{200} = \frac{22}{200}$ bzw. $p - \frac{22}{200} = 1{,}64 \cdot \frac{\sigma}{200}$.

Insgesamt lassen sich die beiden Gleichungen zusammenfassen zu:

$$\left| p - \frac{22}{200} \right| = 1{,}64 \cdot \frac{\sigma}{200} .$$

Durch Quadrieren erhält man:

$$\left(p - \frac{22}{200} \right)^2 = 1{,}64^2 \cdot \frac{\sigma^2}{200^2} = 1{,}64^2 \cdot \frac{p \cdot (1-p)}{200} .$$

Diese Gleichung löst man nach p auf:

$$p^2 - 0{,}22p + 0{,}11^2 = \frac{1{,}64^2}{200} p(1-p)$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 0{,}22p + 0{,}11^2 = \frac{1{,}64^2}{200} p - \frac{1{,}64^2}{200} p^2$$

$$\Leftrightarrow p^2 \cdot \left(1 + \frac{1{,}64^2}{200} \right) + \left(-0{,}22 - \frac{1{,}64^2}{200} \right) p + 0{,}11^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 0{,}23035p + 0{,}0119394 = 0$$

$$\Leftrightarrow p = 0{,}115175 - \sqrt{0{,}115175^2 - 0{,}0121} \approx 0{,}0788 = 7{,}88\ \%$$

$$\textit{oder} \quad p = 0{,}115175 + \sqrt{0{,}115175^2 - 0{,}01194} \approx 0{,}1516 = 15{,}16\ \%$$

Also erhält man als Konfidenzintervall: K = [0,0788;0,1516].

(2) Der Wert 0,081 befindet sich innerhalb des in (1) bestimmten Konfidenzbereichs. Daher kann man die Pressemitteilung, dass sich der Anteil unverzollter Schachteln erhöht oder verringert hat, nicht aufgrund dieses Konfidenzintervalls treffen.
Die Pressemitteilung „der Wert ist gleich geblieben“ ist allerdings ebenfalls nicht gerechtfertigt, da das Konfidenzintervall Werte bis zu 15 % als mit der Stichprobe verträglich feststellt, und diese Werte liegen erheblich oberhalb des Vorjahreswertes von 8,1 %.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1.1) berechnet die Wahrscheinlichkeit.	2
2	(1.2) berechnet den Erwartungswert und berechnet hiermit die Wahrscheinlichkeit.	4
3	(1.3) berechnet die Wahrscheinlichkeit.	4
4	(2) bestimmt die gesuchte minimale Anzahl der Schachteln.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) ermittelt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lieferung beschlagnahmt wird.	5
2	(2) bestimmt durch systematisches Probieren die Anzahl der Stangen mit einer Wahrscheinlichkeit für die Beschlagnahmung von mindestens 50 %.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) ermittelt eine Schätzung für die Anzahl der unverzollten Schachteln.	4
2	(1) erläutert die gewählte Vorgehensweise.	4
3	(2) berechnet den Steuerausfall.	2
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) ermittelt die quadratische Gleichung und bestimmt damit das Konfidenzintervall.	10
2	(2) entscheidet sich begründet gegen die Aussagen.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_____________________________ Kursbezeichnung:__________

Schule: _____________________________________

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1.1) berechnet die Wahrscheinlichkeit.	2			
2	(1.2) berechnet den Erwartungswert …	4			
3	(1.3) berechnet die Wahrscheinlichkeit.	4			
4	(2) bestimmt die gesuchte …	5			
sachlich richtige Alternativen: (15) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**15**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt die Wahrscheinlichkeit …	5			
2	(2) bestimmt durch systematisches …	5			
sachlich richtige Alternativen: (10) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**10**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt eine Schätzung …	4			
2	(1) erläutert die gewählte …	4			
3	(2) berechnet den Steuerausfall.	2			
sachlich richtige Alternativen: (10) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**10**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt die quadratische …	10			
2	(2) entscheidet sich begründet …	5			
sachlich richtige Alternativen: (15) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe d)	**15**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ____________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: ______________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: __________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0