Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1:** (hilfsmittelfreier Teil)

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	30
Erstkorrektur							
Zweitkorrektur							

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

a) Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = -2x^3 + 2x$$

a1) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

a2) Berechnen Sie:

$$\int_0^1 f(x)dx$$

a3) Beurteilen Sie ohne Rechnung, ob die folgende Gleichung gilt:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$$

b) In Abbildung 1.1 sind die Graphen von drei verschiedenen natürlichen Exponentialfunktionen der Form $f(x) = a \cdot e^{b \cdot (x-c)}$ dargestellt.

b1) Ordnen Sie begründet der Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{2 \cdot (x-2)}$$

den zugehörigen Graphen f_1, f_2 oder f_3 zu.

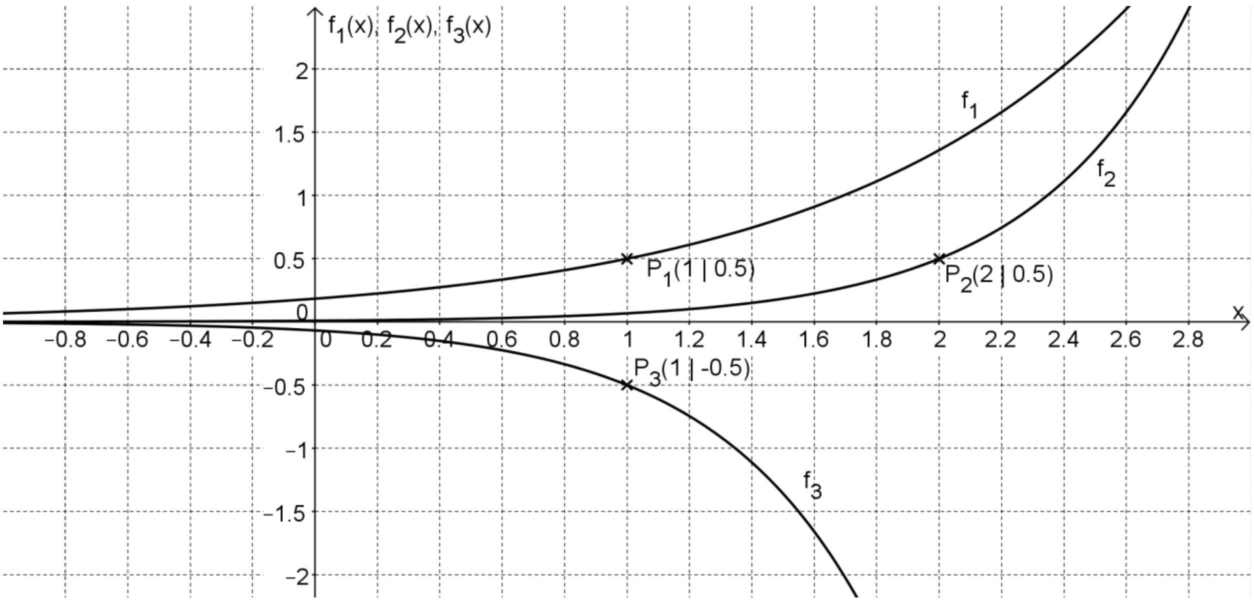

Abbildung 1.1

b2) Geben Sie die Funktionsgleichung des Graphen der Funktion g an, der aus dem Graphen der Funktion f durch Verschiebung um -2 in Abszissenrichtung und um 1 in Ordinatenrichtung hervorgeht.

b3) Leiten Sie die 1. Ableitung der Funktion k mit der Gleichung

$$k(x) = \frac{1}{2} x \cdot e^{x}$$

her.

c) In Abbildung 1.2 ist der Graph f einer ganzrationalen Funktion vierten Grades abgebildet.

c1) Skizzieren Sie den Ableitungsgraphen der Funktion f in das Koordinatensystem in Abbildung 1.3.

c2) Beurteilen Sie die folgenden Aussage:

Die Stammfunktion F der Funktion f besitzt mindestens eine Nullstelle und genau drei Wendepunkte.

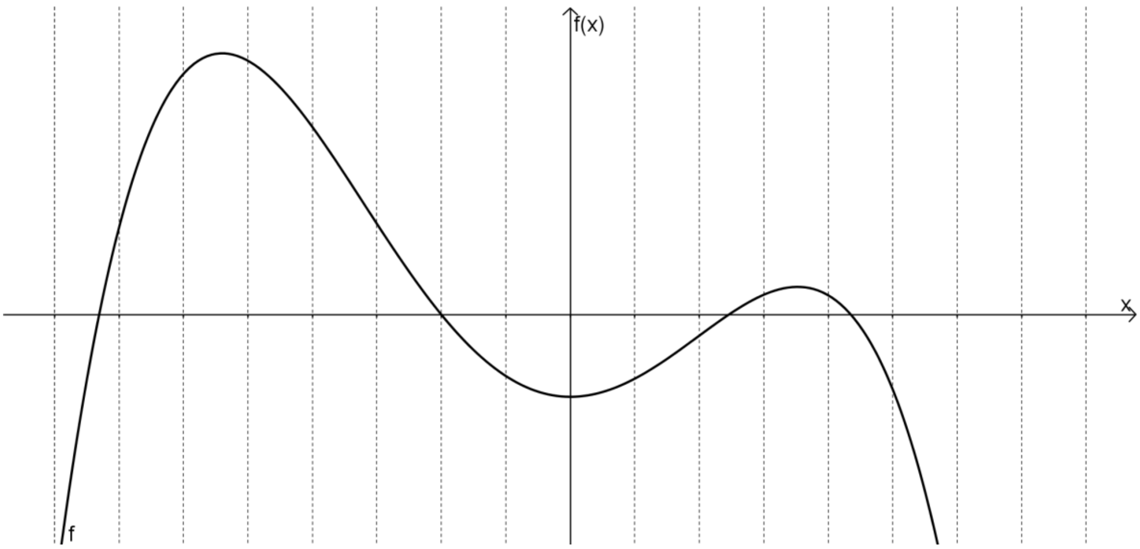

Abbildung 1.2

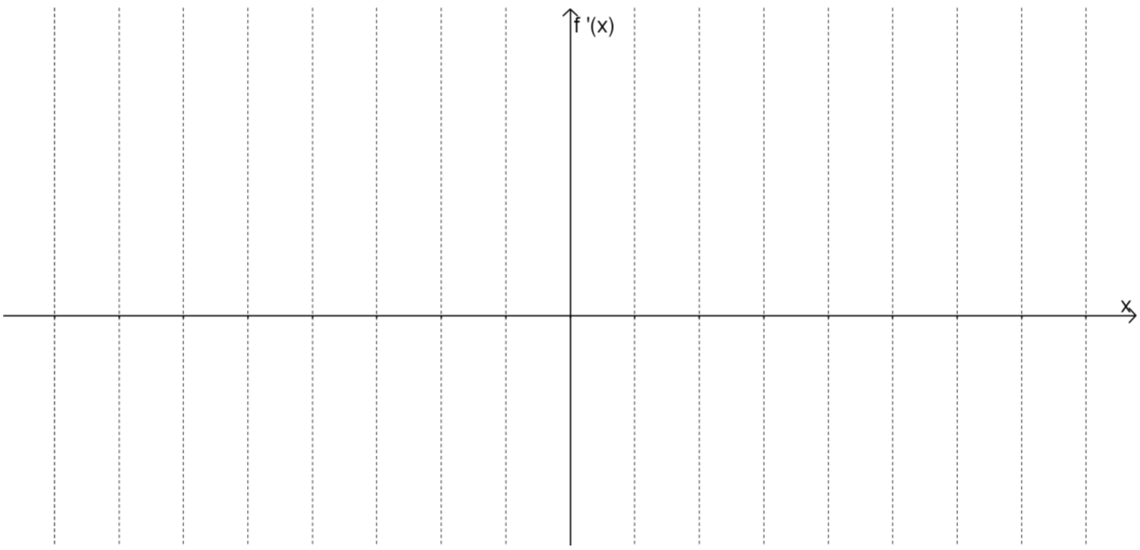

Abbildung 1.3

d) Gegeben sind die beiden Ansichten des gleichen Dreiecks ABC in den Abbildungen 1.4 und 1.5.

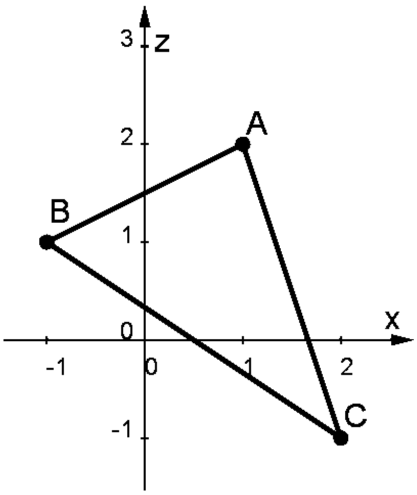

Abbildung 1.4

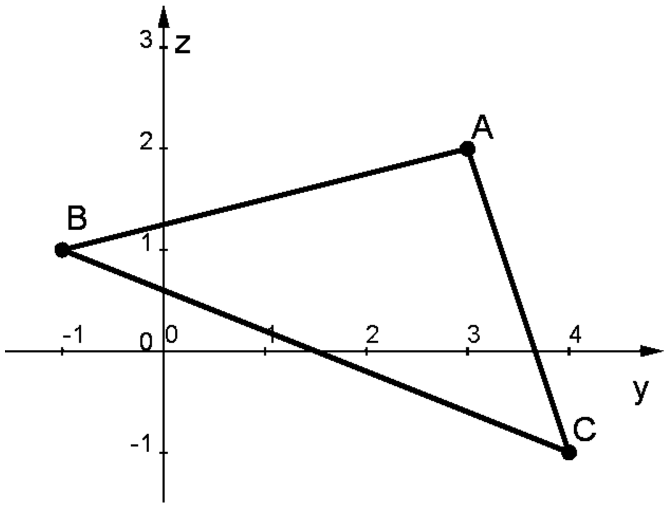

Abbildung 1.5

d1) Geben Sie die ganzzahligen Koordinaten der Punkte A, B und C an.

A(___|___|___) B(___|___|___) C(___|___|___)

d2) Zeichnen Sie die beiden weiteren Ansichten des Dreiecks ABC in die Koordinatensysteme (Abbildung 1.6).

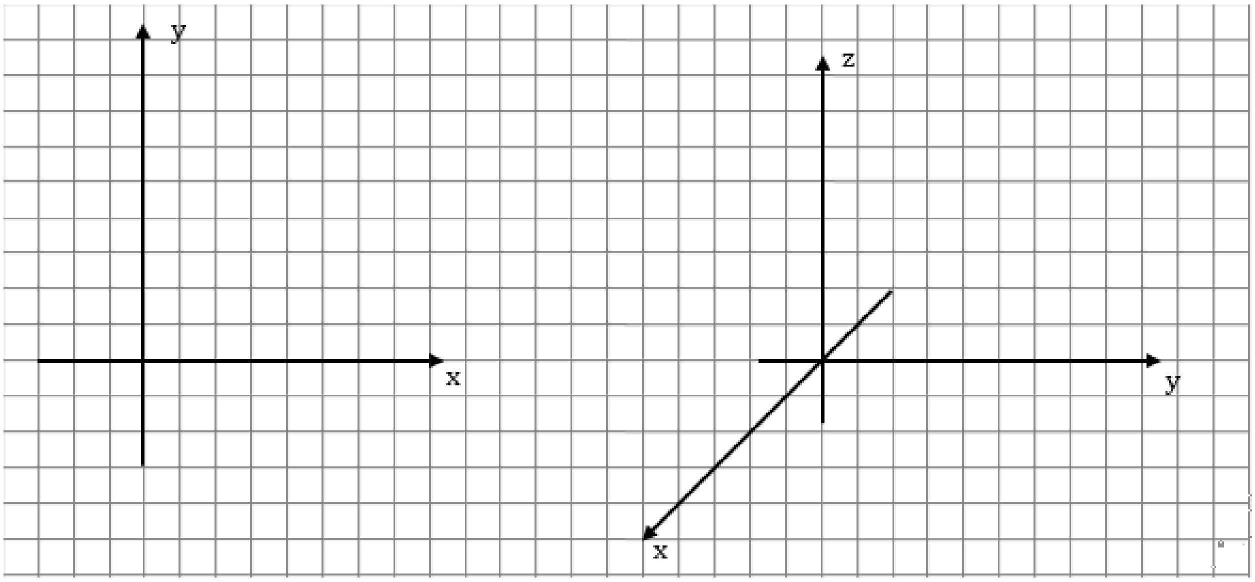

Abbildung 1.6

e) Gegeben sind die drei Punkte $A(-4 \mid -1 \mid 0)$, $B(-1 \mid 2 \mid -6)$ und $C(7 \mid 6 \mid 2)$ sowie die Gerade g_1 mit $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

e1) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene, in der die Punkte A, B und C liegen.

e2) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Der Punkt C liegt auf der Geraden g_1.		
Die Gerade g_2 mit $g_2: \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ verläuft parallel zur Geraden g_1.		

f) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

f1) Prüfen Sie, ob die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig (kollinear) sind.

f2) Berechnen Sie den Vektor $\vec{v}$ mit $\vec{v} = \vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$.

f3) Berechnen Sie den Ausdruck:

$$4 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-3) + (-1) \cdot 5$$

Erläutern Sie die Bedeutung des Ergebnisses in Bezug auf die Lage der Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 2**(Analytische Geometrie)**:** (Seilbahn)

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	gesamt
Erreichbar	6	4	5	4	3	4	4	30
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: a, b, c, … $\in \mathbb{R}$ und die Variablen: x, t, … $\in \mathbb{R}$.

Zur Steigerung der touristischen Attraktivität beschließt eine Gemeinde, einen nahe gelegenen Berghang zu einem Skigebiet auszubauen. Der Berghang lässt sich als Teil der Ebene E_w darstellen, ein Ausschnitt der Ebene ist in Abbildung 2.1 eingezeichnet. Eine Seilbahn soll die Touristen von der Talstation zur Bergstation hin- und zurückbefördern. Das Tragseil der Seilbahn ist im Tal im Punkt A(90 | 420 | 5) sowie im Berghang im Punkt B(30 | 30 | 78) befestigt. Der Abstand der Gondeln zum Tragseil ist vernachlässigbar. Um den Bau der Seilbahn zu planen, wird der Verlauf des Tragseils vom Ingenieurbüro als geradlinig angesehen. Die Seilbahn ist Teil der Geraden g_s mit

$$g_s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 90 \\ 420 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -60 \\ -390 \\ 73 \end{pmatrix}.$$

Der prinzipielle Verlauf der Seilbahn sowie ein Ausschnitt des Berghangs sind in Abbildung 2.1 dargestellt. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.

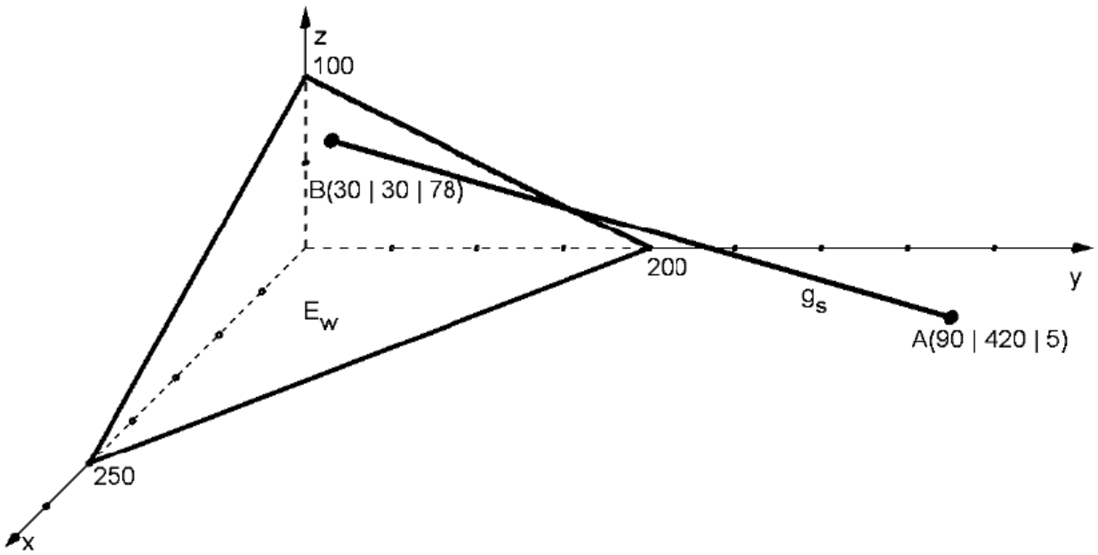

Abbildung 2.1

a) Leiten Sie die Gleichung der Geraden g_s aus den Vorgaben her.

Geben Sie einen im Sachzusammenhang sinnvollen Definitionsbereich für den Parameter t an.

Bestimmen Sie die Position der Gondel, wenn die Hälfte der Strecke zurückgelegt wurde.

Umfragen haben ergeben, dass Seilbahnen häufig von Touristen gemieden werden, wenn der Steigungswinkel mehr als $\alpha = 30°$ beträgt. Außerdem sollte die Fahrt auf der ca. 400 m langen Strecke nicht länger als fünf Minuten dauern.

b) Weisen Sie nach, dass der Steigungswinkel von $\alpha = 30°$ nicht überschritten wird.

Zeigen Sie, dass die zurückzulegende Strecke näherungsweise 400 m beträgt.

Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit sich die Seilbahn mindestens bewegen muss, damit die gewünschte Fahrtzeit nicht überschritten wird.

Zur Versorgung der Bergstation mit Elektrizität und Wasser soll im Berghang eine oberirdische Versorgungsleitung zwischen dem Fußpunkt $B_F(30 \mid 30 \mid 73)$ der Bergstation und dem Punkt $R(50 \mid 160 \mid 0)$ am Rand des Berghanges verlegt werden.
Pro laufenden Meter Versorgungsleitung müssen Kosten von 45,00 EUR veranschlagt werden. Die Gemeinde stellt einen Betrag von 7 000,00 EUR zur Verfügung.
Außerdem berichtet der Förster den Ingenieuren von einem Granitfelsen, der sich im Berghang befindet. Bei der Vermessung wird ermittelt, dass der Granitfelsen im Punkt $G(28 \mid 17 \mid 80{,}3)$ im Berghang liegt.

c) Beurteilen Sie, ob der Granitfelsen beim Verlegen der Versorgungsleitung im Weg sein wird.

Untersuchen Sie, ob die von der Gemeinde zur Verfügung gestellte Summe ausreicht, um die entstehenden Kosten zu tragen.

Bei der Planung der Seilbahn muss auch die Sicherheit der Touristen, die die Seilbahn nutzen, berücksichtigt werden. In einem möglichen Unfallszenario bleibt die Gondel im Punkt $S(42 \mid 108 \mid 63{,}4)$ stehen. Die Fahrgäste würden in einem solchen Szenario, unterstützt von Bergrettern, von der Gondel aus abgeseilt werden. Den Berghang modellieren die Ingenieure als Teil der Ebene E_w mit

$$E_w: 4x + 5y + 10z = 1\,000.$$

d) Weisen Sie nach, dass der Berghang durch einen Ausschnitt der Ebene E_w modelliert werden kann.

Bestimmen Sie, aus welcher lotrechten Höhe über dem Berghang die Fahrgäste abgeseilt werden müssten.

Am Berghang steht eine sturmgefährdete, senkrechte Tanne. Da zukünftig mit erhöhtem Personenverkehr in der Nähe der Tanne zu rechnen ist, muss zur Stabilisierung ein Stahlseil an der Tanne im Punkt $T(100 \mid 20 \mid 55)$ angebracht und am Berghang im Punkt $H(96{,}25 \mid 21 \mid 51)$ verankert werden. Die Ingenieure berechnen zunächst folgenden Ausdruck:

$$\arccos\left(\frac{\left|\begin{pmatrix}3{,}75\\-1\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}3{,}75\\-1\\4\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}\right)$$

e) Geben Sie das Ergebnis des Ausdrucks an und

erläutern Sie, was mit diesem Ausdruck im Sachzusammenhang berechnet wurde.

Ein kleiner Vorsprung an einer Felswand in V(30 | 0,5 | 200) dient Fallschirmspringern mit einem Wingsuit (Flügelanzug) als Startpunkt für spektakuläre Flüge. Die Fallschirmspringer springen in y-Achsenrichtung ab und legen auf einem Meter Sinkflug zwei Meter Horizontalflug zurück. Die Flugbahn kann als geradlinig angesehen werden.

f) Prüfen Sie, ob sich das geplante Tragseil der Seilbahn und die Flugbahn der Fallschirmspringer schneiden.

Tatsächlich verläuft das Tragseil der Seilbahn nicht wie ursprünglich angenommen linear. Das Tragseil beschreibt einen parabelförmigen Bogen zwischen den Punkten C und D (Abbildung 2.2, die Achsen bilden ein von Abbildung 2.1 unabhängiges, neues Koordinatensystem). Im Punkt D hat das Tragseil keine Steigung.

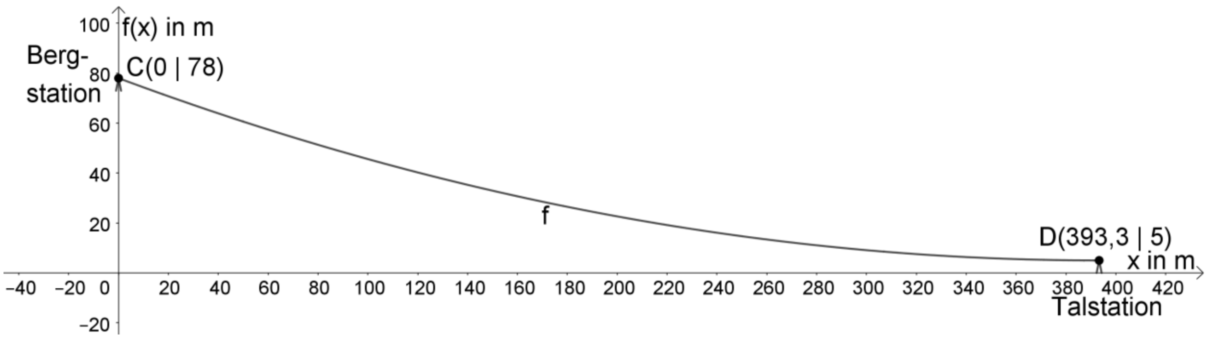

Abbildung 2.2

g) Bestimmen Sie die Gleichung einer Funktion f der Form

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

durch die der Verlauf des Tragseils modelliert wird.

Erläutern Sie, warum sich aus $|\overline{CD}| = 400$ der Definitionsbereich $D(f) = [0; 393{,}3]$ ergibt.

Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1:**(hilfsmittelfreier Teil)

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	30
Erstkorrektur							
Zweitkorrektur							

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter:
$a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

a) Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = -2x^3 + 2x$$

a1) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

a2) Berechnen Sie:

$$\int_0^1 f(x)dx$$

a3) Beurteilen Sie ohne Rechnung, ob die folgende Gleichung gilt:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$$

b) In Abbildung 1.1 sind die Graphen von drei verschiedenen natürlichen Exponentialfunktionen der Form $f(x) = a \cdot e^{b \cdot (x-c)}$ dargestellt.

b1) Ordnen Sie begründet der Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{2 \cdot (x-2)}$$

den zugehörigen Graphen f_1, f_2 oder f_3 zu.

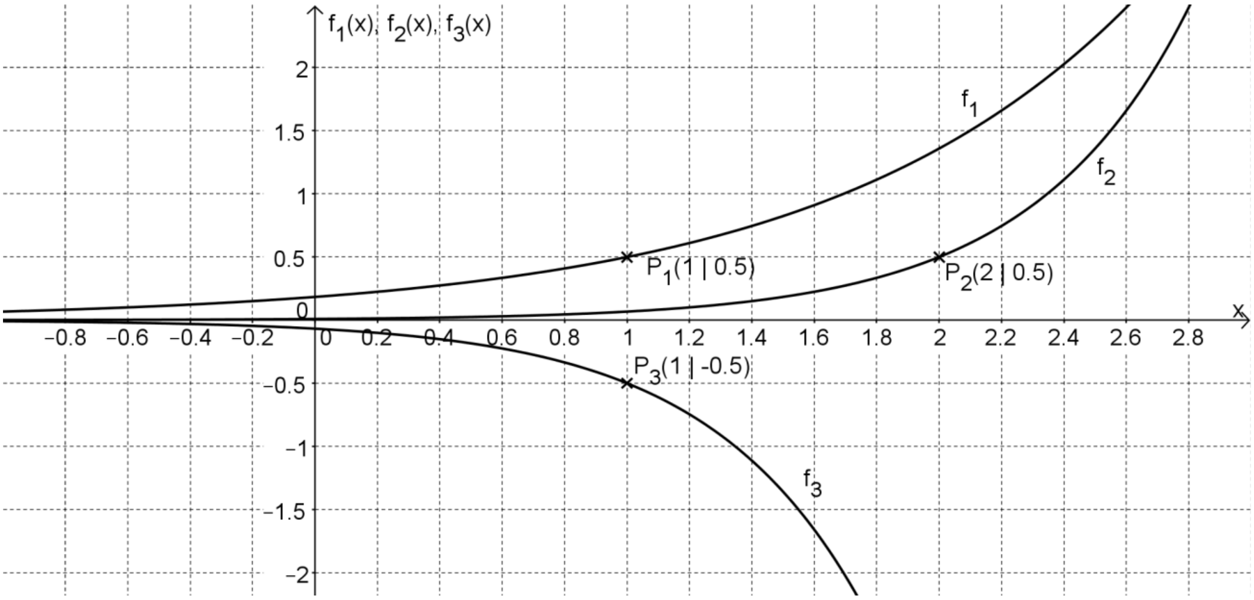

Abbildung 1.1

b2) Geben Sie die Funktionsgleichung des Graphen der Funktion g an, der aus dem Graphen der Funktion f durch Verschiebung um −2 in Abszissenrichtung und um 1 in Ordinatenrichtung hervorgeht.

b3) Leiten Sie die 1. Ableitung der Funktion k mit der Gleichung

$$k(x) = \frac{1}{2} x \cdot e^x$$

her.

c) In Abbildung 1.2 ist der Graph f einer ganzrationalen Funktion vierten Grades abgebildet.

c1) Skizzieren Sie den Ableitungsgraphen der Funktion f in das Koordinatensystem in Abbildung 1.3.

c2) Beurteilen Sie die folgenden Aussage:

Die Stammfunktion F der Funktion f besitzt mindestens eine Nullstelle und genau drei Wendepunkte.

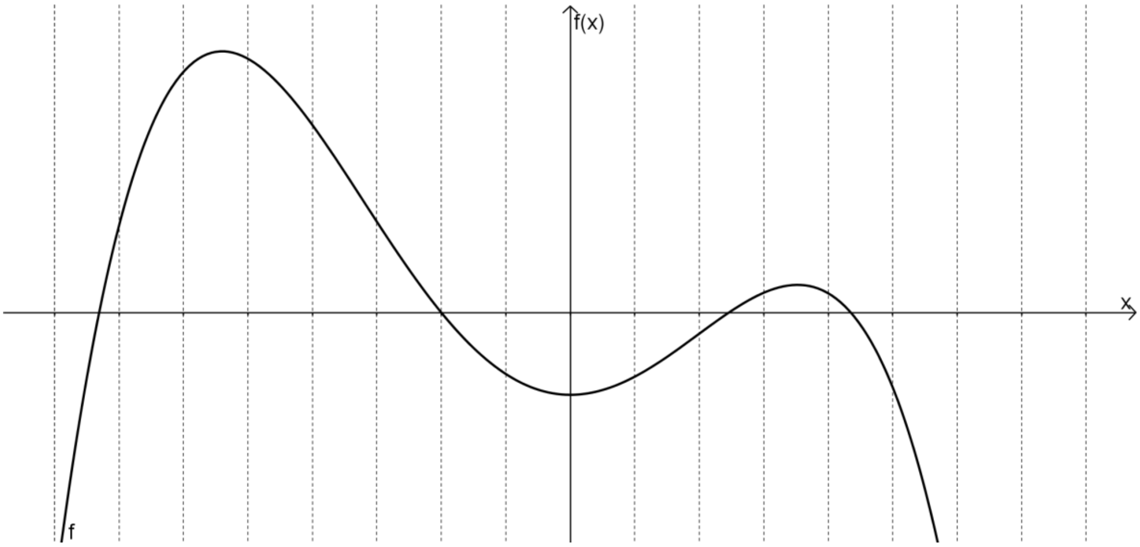

Abbildung 1.2

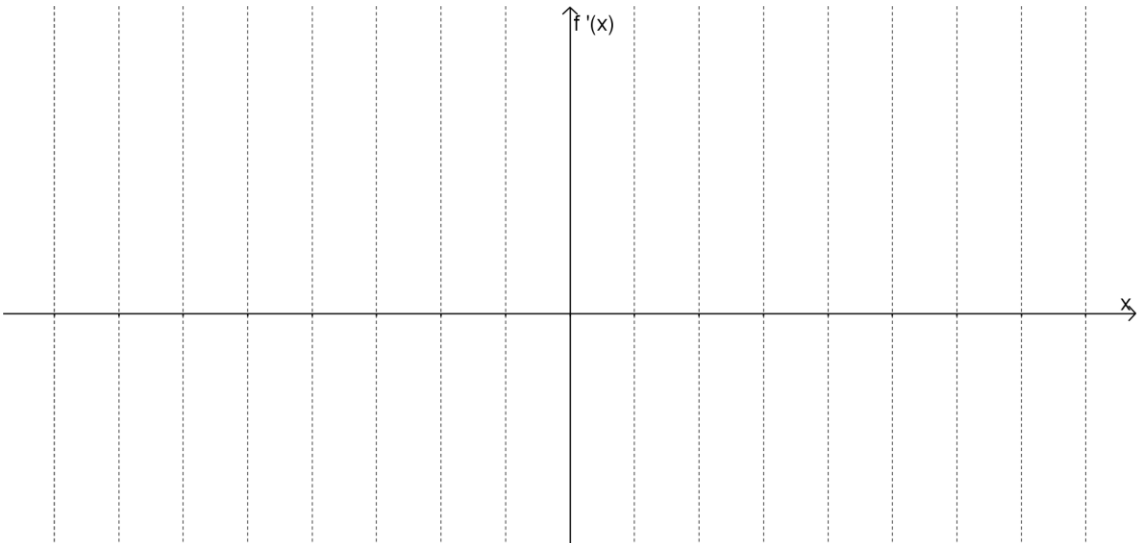

Abbildung 1.3

d) Gegeben ist das folgende Gleichungssystem.

$$\left| \begin{array}{cccccc} x & -y & & = & -1 \\ x & +y & -4z & = & 7 \\ x & -3y & +2z & = & -7 \end{array} \right|$$

d1) Geben Sie für das Gleichungssystem eine Matrizengleichung an.

d2) Berechnen Sie die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

e) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Hinweis: **Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).**	wahr	falsch
Durch Addition einer 2 x 4-Matrix mit einer 4 x 3-Matrix ergibt sich eine 2 x 3-Matrix.		
Wenn das Produkt $A \cdot B$ definiert ist, dann gilt: $A \cdot B = A^T \cdot B^T$.		
Für die Multiplikation einer quadratischen Matrix D mit der Einheitsmatrix E und einem Skalar a gilt $D \cdot E \cdot a = a \cdot D$.		
Wenn für zwei Matrizen A und B gilt $A + B = B + A$, dann folgt daraus $A \cdot B = B \cdot A$.		
Wenn gilt: $A \cdot B = E$, dann ist B invers zu A.		

f) Ein Übergangsprozess wird mit der Übergangsmatrix $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}75 \\ 0{,}5 & 0{,}25 \end{pmatrix}$ beschrieben, für die Startverteilung gilt: $\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$.

Ermitteln Sie die Verteilung $\vec{p}_1$ nach einem Übergang und erläutern Sie die Bedeutung des Vektors $\vec{p}_0$.

Name des Prüflings	
Zeitpunkt der Abgabe	

Punkteverteilung **Aufgabe 2** (Lineare Algebra)**: Schweinswale**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	gesamt
Erreichbar	5	5	4	4	4	4	4	30
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: a, b, c, ... $\in \mathbb{R}$ und die Variablen: x, t, ... $\in \mathbb{R}$.

In einem Projekt untersucht eine Klasse eines Beruflichen Gymnasiums die Populationsentwicklung von Schweinswalen in einem begrenzten Gebiet. Dieses Gebiet kann aufgrund der geografischen Lage als abgeschlossenes Biotop betrachtet werden, so dass keine Schweinswale zu- oder abwandern. Nach ihrer Recherche gehen die Schülerinnen und Schüler davon aus, dass sich Schweinswale in die vier Altersstufen Kälber (K), Jungtiere (J), erwachsene Tiere (E) und Alttiere (A) einteilen lassen, in der die Tiere unterschiedlich lange verbleiben. Die jährliche Populationsentwicklung lässt sich durch die Matrix M darstellen.

Wechselverhalten innerhalb eines Jahres		von			
		K	**J**	**E**	**A**
nach	**K**	0	0	0,45	0
	J	0,75	0,45	0	0
	E	0	0,33	0,75	0
	A	0	0	0,05	0,6

Tabelle 2.1

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}45 & 0 \\ 0{,}75 & 0{,}45 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}33 & 0{,}75 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Verschiedene Zählungen zu Beginn des Jahres 2006 ließen auf einen Bestand von etwa 40 Kälbern, 60 Jungtieren, 200 erwachsenen Tieren und 30 Alttieren schließen. Sinkt der Bestand einer Schweinswalpopulation unter 30 Tiere, gilt sie unter Biologen als Restpopulation, die aufgrund der geringen genetischen Vielfalt vom Aussterben bedroht ist.

Eine Schülerin der Klasse behauptet, dass

- nur die erwachsenen Tiere (E) fortpflanzungsfähig sind,
- die Sterberate bei den Jungtieren (J) am höchsten ist und
- die Population in 20 Jahren vom Aussterben bedroht sein wird.

a) Stellen Sie das Wechselverhalten durch einen geeigneten Graphen dar.

Beurteilen Sie die drei Aussagen der Schülerin.

Da eine Zählung der Tiere auf Grund der Größe des Biotops sehr aufwändig ist, existieren für die meisten Jahre nur von Experten geschätze Werte. Eine solche Expertenschätzung prognostizierte, ausgehend von den Daten der Zählung zu Beginn des Jahres 2006, einen Gesamtbestand von etwa 320 bis 350 Tieren für den Beginn des Jahres 2008.

b) Zeigen Sie, dass die von den Schülerinnen und Schülern erstellte Matrix M zu einer ähnlichen Prognose für das Jahr 2008 führt wie die Prognose der Experten.

   Geben Sie für $M^2 = S$ die Matrizenelemente s_{12} und s_{41} an und

   interpretieren Sie diese Werte im Sachzusammenhang.

Für die Jahre vor 2006 findet die Klasse keine Daten zum Bestand der Schweinswale in diesem Biotop. Ein Schüler behauptet, dass man die Verteilung auf die Altersstufen zu Beginn des Jahres 2005 mit folgendem Ansatz berechnen kann:

$$M^{-1} \cdot \vec{p}_0 \quad \text{mit } \vec{p}_0 = (40 \quad 60 \quad 200 \quad 30)^T$$

c) Geben Sie an, unter welcher Voraussetzung der Rechenansatz des Schülers für die Rekonstruktion der Daten des Vorjahres verwendet werden kann und

   begründen Sie anhand des Kälberbestands, dass das Ergebnis in diesem Fall nicht verwendet werden kann.

Während ihrer Projektarbeit erfahren die Schülerinnen und Schüler von einem Biologen der Universität Kiel, dass die betrachtete Population seit Beginn des Jahres 2018 von einem besonders hartnäckigen Krankheitserreger befallen ist. Die Zählung zu Beginn des Jahres 2019 ergab einen reduzierten Bestand von 32 Kälbern, 55 Jungtieren, 131 erwachsenen Tieren und 19 Alttieren. Außerdem informiert der Biologe die Klasse darüber, dass nach der Zählung eine Gruppe Schweinswale eingewandert ist und sich der bestehenden Population angeschlossen hat. Aus den verschiedenen Beobachtungen konnte rekonstruiert werden, dass es sich um vier Kälber, acht Jungtiere und sechs Alttiere handelt. Die Angaben zur Anzahl der erwachsenen Tiere (E) schwanken zwischen 82 und 102 Tieren.

Die Biologen der Universität Kiel hoffen, dass durch die eingewanderten Tiere der Bestandsverlust durch den Erregerbefall kompensiert werden kann und der Bestand zu Beginn des Jahres 2020 über 300 Tieren liegen wird. Die Auswirkung des Erregers auf den Bestand wird durch die Matrix M_{neu} beschrieben. Sie gehen dabei davon aus, dass der Erreger sich auf die neu eingewanderten Tiere genauso auswirkt wie auf den bisherigen Bestand.

$$M_{neu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}23 & 0 \\ 0{,}54 & 0{,}45 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}33 & 0{,}75 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

d) Prüfen Sie, ob die eingewanderten erwachsenen Tieren (E) nach diesem Modell zu einem Gesamtbestand zu Beginn des Jahres 2020 von über 300 Tieren führen könnten.

Der Bestand der Schweinswale wird durch Stellnetzfischerei zunehmend bedroht. Daher werden zum Schutz der Schweinswale sogenannte „Pinger“ eingesetzt. Sie warnen die Schweinswale vor den Netzen mit akustischen Signalen. Zu ihrer Herstellung werden die unterschiedlichen, vorgefertigten Metallstangen M_1 und M_2 sowie Metallblöcke M_3 verwendet. Die daraus hergestellten Rohbehälter und Deckel sind die Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4, aus denen schließlich die drei für einen Pinger benötigten Bauteile B_1, B_2 und B_3 gefertigt werden. Ein Pinger besteht aus jeweils einem Bauteil B_1, B_2 und B_3. Die Produktionsmatrizen für die verschiedenen Produktionsstufen können den Tabellen 2.2 bis 2.4 entnommen werden.

Ausgangsprodukt-Zwischenprodukt-Tabelle

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
M_1	0	0		1
M_2		0	0	
M_3	0	2	1	0

Tabelle 2.2

Zwischenprodukt-Bauteile-Tabelle

	B_1	B_2	B_3
Z_1	2	2	1
Z_2	1	3	5
Z_3	2	0	3
Z_4	0	4	2

Tabelle 2.3

Ausgansprodukt-Bauteile-Tabelle

	B_1	B_2	B_3
M_1	4	4	8
M_2	2	6	3
M_3	4	6	13

Tabelle 2.4

Ein Produktionsbetrieb wird von einem Fischerei-Verband beauftragt, 30 Pinger zu fertigen. Die Metallstangen M_1 und M_2 sind in ausreichender Menge im Lager vorhanden. Von den Metallblöcken M_3 befinden sich jedoch nur 20 Stück im Lager. Der Produktionsleiter bestellt die zusätzlich benötigte Menge an Metallblöcken bei einem Lieferanten.

e) Vervollständigen Sie die Ausgangsprodukt-Zwischenprodukt-Tabelle und

ermitteln Sie, wie viele Metallblöcke M_3 für die Herstellung der 30 Pinger mindestens bestellt werden müssen.

Einige Wochen später überprüft der Produktionsleiter den Lagerbestand und stellt fest, dass sich 60 Metallstangen M_1, 44 Metallstangen M_2 sowie 78 Metallblöcke M_3 im Lager befinden. Da das Lager geschlossen werden soll, gibt er den Auftrag an die Produktionsstraße, so viele Pinger zu produzieren, dass der Lagerbestand restlos aufgebraucht wird.

f) Entscheiden Sie begründet, wie viele Pinger maximal mit dem Lagerbestand produziert werden können.

In den Tabellen 2.5 und 2.6 werden die Einkaufsstückkosten für die Metallbauteile bzw. die Fertigungsstückkosten für die Zwischenprodukte angegeben.

	M_1	M_2	M_3
Einkaufskosten in EUR pro Stück	5	2	1

Tabelle 2.5

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
Fertigungskosten in EUR pro Stück	2	4	4	4

Tabelle 2.6

g) Zeigen Sie, dass die Gesamtkosten für die Herstellung eines Pingers 215,00 EUR betragen.

Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1:**(hilfsmittelfreier Teil)

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	30
Erstkorrektur							
Zweitkorrektur							

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter:
$a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

a) Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = -2x^3 + 2x$$

a1) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

a2) Berechnen Sie:

$$\int_0^1 f(x)dx$$

a3) Beurteilen Sie ohne Rechnung, ob die folgende Gleichung gilt:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$$

b) In Abbildung 1.1 sind die Graphen von drei verschiedenen natürlichen Exponentialfunktionen der Form $f(x) = a \cdot e^{b \cdot (x-c)}$ dargestellt.

b1) Ordnen Sie begründet der Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{2 \cdot (x-2)}$$

den zugehörigen Graphen f_1, f_2 oder f_3 zu.

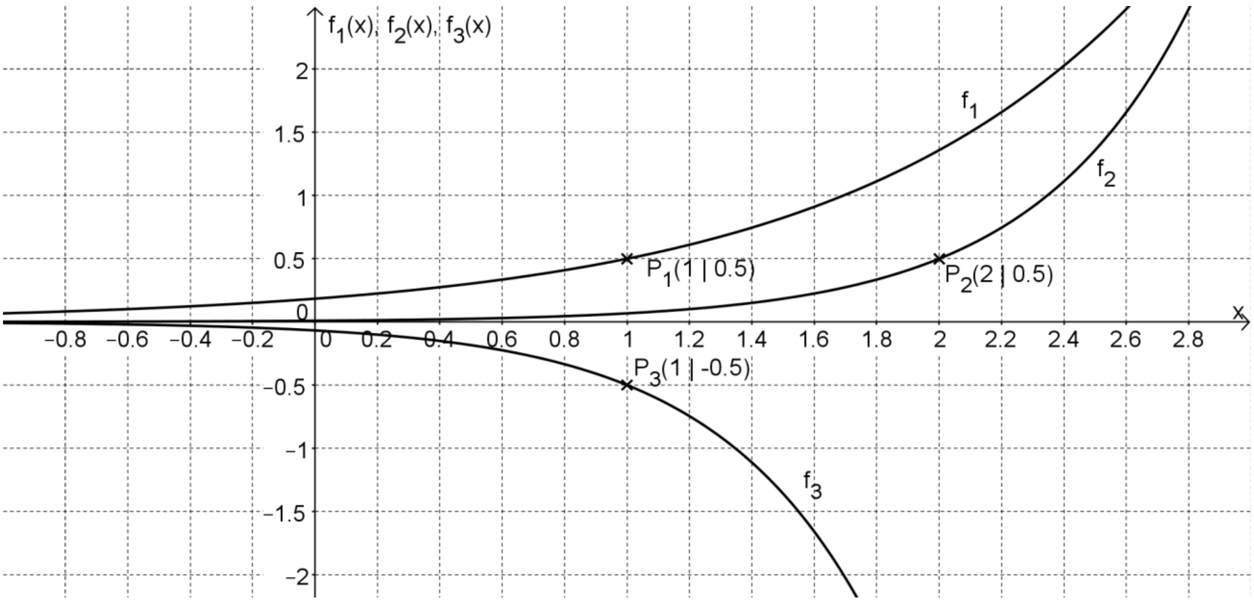

Abbildung 1.1

b2) Geben Sie die Funktionsgleichung des Graphen der Funktion g an, der aus dem Graphen der Funktion f durch Verschiebung um -2 in Abszissenrichtung und um 1 in Ordinatenrichtung hervorgeht.

b3) Leiten Sie die 1. Ableitung der Funktion k mit der Gleichung

$$k(x) = \frac{1}{2} x \cdot e^{x}$$

her.

c) In Abbildung 1.2 ist der Graph f einer ganzrationalen Funktion vierten Grades abgebildet.

c1) Skizzieren Sie den Ableitungsgraphen der Funktion f in das Koordinatensystem in Abbildung 1.3.

c2) Beurteilen Sie die folgenden Aussage:

Die Stammfunktion F der Funktion f besitzt mindestens eine Nullstelle und genau drei Wendepunkte.

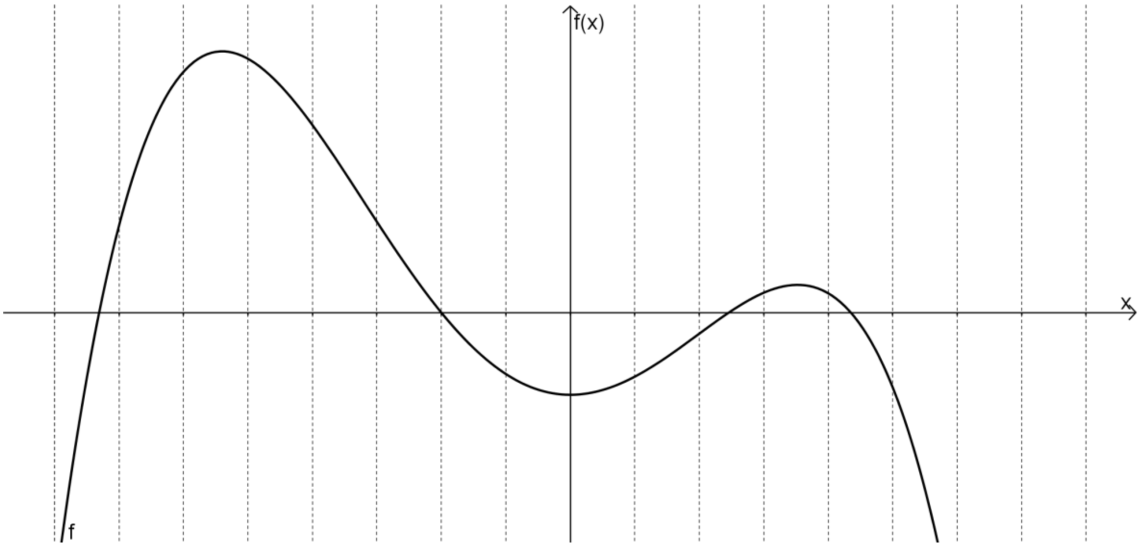

Abbildung 1.2

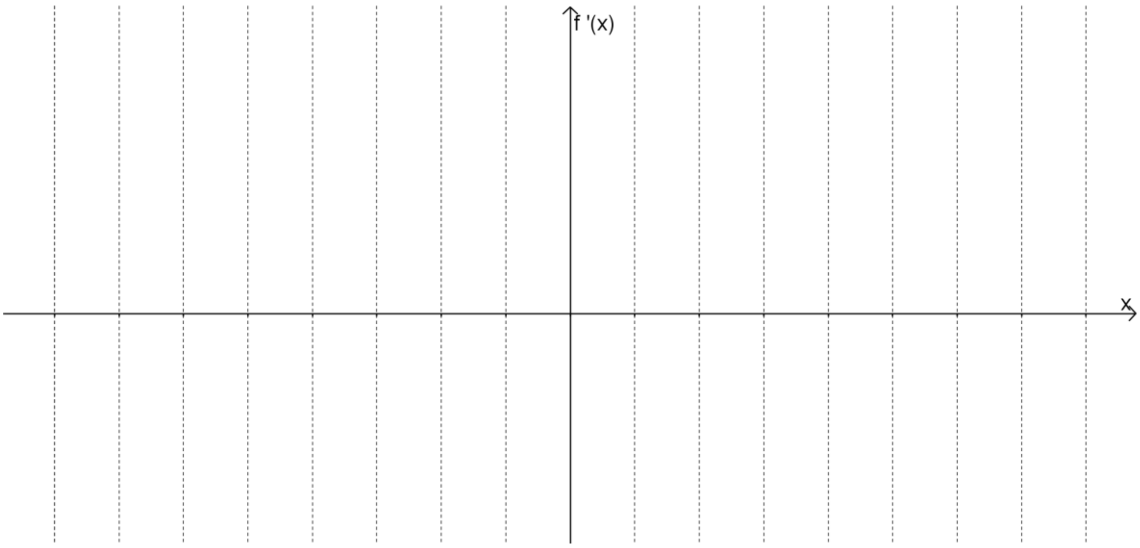

Abbildung 1.3

d) In Abbildung 1.4 ist eine Binomialverteilung X mit der Kettenlänge $n = 5$ und einer Eintrittswahrscheinlichkeit von $p = 0{,}4$ dargestellt. Folgende Wahrscheinlichkeiten sind bekannt:

$$P(X \leq 2) = 0{,}68256 \text{ und } P(X < 2) = 0{,}33696$$

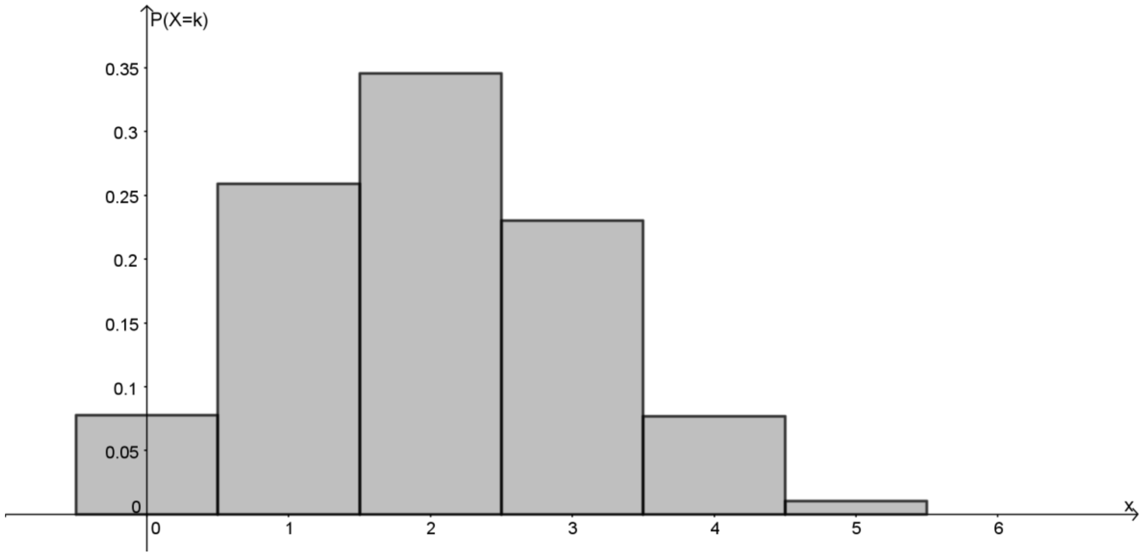

Abbildung 1.4

d1) Geben Sie den Erwartungswert μ sowie die Wahrscheinlichkeit $P(X = \mu)$ an.

d2) Markieren Sie die Säulen, die zur Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 3)$ im Säulendiagramm (Abbildung 1.4) gehören.

Eine zweite Binomialverteilung Y hat eine Kettenlänge von $n = 100$ und eine Trefferwahrscheinlichkeit von 10 %.

d3) Berechnen Sie die Standardabweichung dieser Binomialverteilung.

e) Ein idealer Würfel hat die in Abbildung 1.5 abgebildeten Seitenflächen, auf denen jeweils zwei der Symbole (Karo (♢), Herz (♡), Pik (♠) und Kreuz (♣)) abgebildet sind.

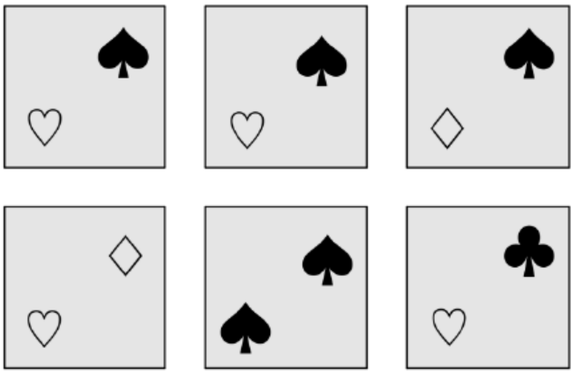

Abbildung 1.5

Der Würfel wird einmal geworfen. Für die Ereignisse A und B gilt:

- Ereignis A: „Maximal ein Pik"
- Ereignis B: „Ein Herz".

e1) Vergleichen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und B miteinander.

In einem weiteren Experiment wird der Würfel zweimal geworfen. Erfasst wird die Anzahl der Pik-Symbole. Dieses zweite Experiment liegt dem in Abbildung 1.6 unvollständig gezeichneten Baumdiagramm zugrunde.

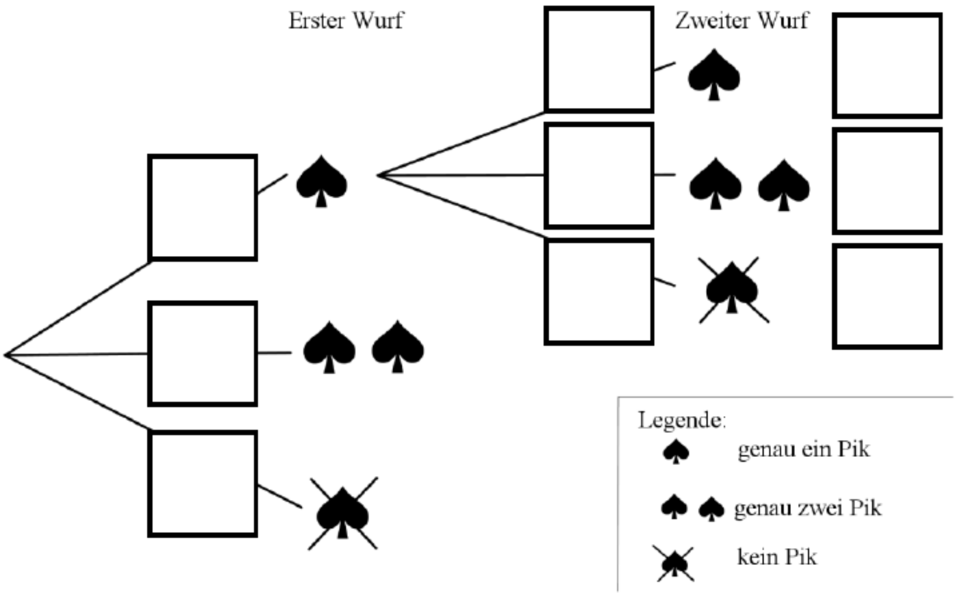

Abbildung 1.6

e2) Ergänzen Sie die in Abbildung 1.6 fehlenden Wahrscheinlichkeiten.

e3) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei keinem der beiden Würfe ein oder mehrere Pik zu sehen sind.

f) Für das Merkmal X ist die folgende Urliste gegeben:

8	7	10	3	8	6	8	6

Tabelle 1.1

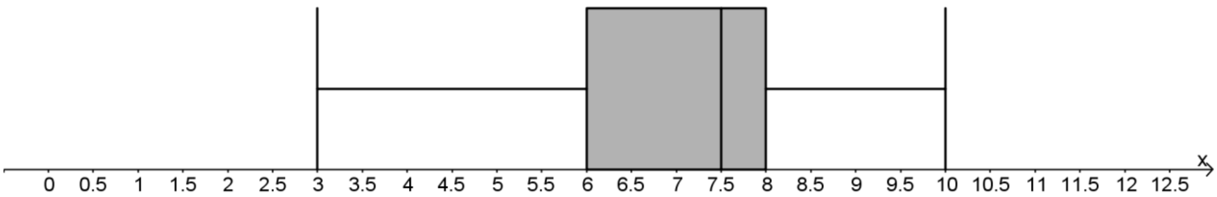

Abbildung 1.7

f1) Geben Sie das arithmetische Mittel an: $\bar{x} = \boxed{}$

f2) Erstellen Sie eine sortierte Urliste und

prüfen Sie, ob dem Boxplot (Abbildung 1.7) die Urliste (Tabelle 1.1) zugrunde liegen könnte.

Name des Prüflings	

Punkteverteilung **Aufgabe 2** (Stochastik)**: Gummibärchen**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	gesamt
Erreichbar	3	3	6	6	4	4	4	30
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Ob Schokolade, Bonbons oder Lakritz, verschiedenste Leckereien versüßen vielen von uns den Tag und dies nicht nur zu Weihnachten oder zu Ostern. Lilli und Max favorisieren unter allen Süßigkeiten Gummibärchen. Natürlich hat jeder dabei eine andere Lieblingsgeschmacksrichtung. Bei Lilli ist dies Zitrone und Max mag eher Himbeere.
Als Lilli und Max sich eine Tüte Gummibärchen teilen, ärgert sich Lilli darüber, dass die Zitronenbärchen in der Tüte immer viel zu schnell leer sind und äußert die Vermutung, dass Zitronenbärchen bestimmt am wenigsten in der Tüte vorkommen. Max vermutet eher, dass alle Geschmacksrichtungen gleich häufig in einer Tüte vorhanden sind.
Um die Vermutungen zu überprüfen, schüttet Max eine Tüte auf einem Tisch aus und sortiert die Gummibärchen nach ihrer Geschmacksrichtung. Zur übersichtlicheren Ergebnisbetrachtung möchte Max die Sortierung in der folgenden Tabelle 2.1 zusammenfassen.

Geschmacks-richtung x_i	Himbeere	Zitrone	Apfel	Erdbeere	Saftorange	Ananas	Summe
Absolute Häufigkeit x_i in Stück	18		30		36	27	150
Relative Häufigkeit $h(x_i)$ in Prozent	12			14		18	

Tabelle 2.1

a) Ergänzen Sie die fehlenden Werte in der Tabelle 2.1.

Im Internet hat Max einen Bericht des Schülers Leon gefunden, der eine XL-Tüte Gummibärchen mit 200 Gummibärchen untersucht hat. Leon hat seine Ergebnisse mithilfe eines Kreisdiagramms (Abbildung 2.1) dargestellt. Aufgrund ihrer farblichen Ähnlichkeit wurden Zitronen- und Ananasgummibärchen zusammengefasst dargestellt. Er schreibt in seinem Bericht, dass er sich später noch einmal beide Sorten genauer angeschaut habe und es fünf Ananasgummibärchen mehr gab als Zitronengummibärchen.

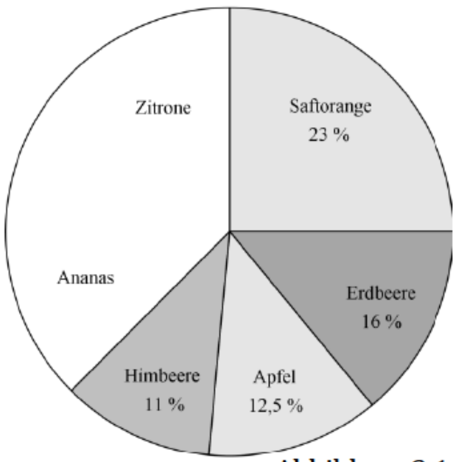

Abbildung 2.1

b) Vervollständigen Sie das Kreisdiagramm (Abbildung 2.1) und ergänzen Sie die beiden fehlenden relativen Häufigkeiten.

Lilli findet, dass der Inhalt einer Tüte Gummibärchen für eine statistische Betrachtung nicht ausreichend ist. Aus Ihrer Vorratsschublade holt sie 10 Tüten Gummibärchen und sortiert deren Inhalt auf dem Tisch. Dabei erfasst Lilli jeweils immer die Gesamtanzahl an Gummibärchen sowie die Anzahl an Zitronengummibärchen je Tüte. Ihre Ergebnisse hält sie in der Tabelle 2.2 fest.

Tüte	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Zitronengummibärchen in Stück	17	27	29	22	25	26	30	20	21	23
Gummibärchen in Stück	155	153	150	151	153	152	154	152	155	152

Tabelle 2.2

c) Erläutern Sie aus mathematischer Sicht, warum Lilli die Betrachtung von nur einer Tüte Gummibärchen nicht ausreicht,

bestimmen Sie die Standardabweichung der Datenreihe „Zitronengummibärchen“,

geben Sie den Modalwert (Modus) der Datenreihe „Gummibärchen“ in den von Lilli untersuchten 10 Tüten Gummibärchen an und

erläutern Sie die Bedeutung dieses Modalwertes im Sachzusammenhang.

Max und Lilli möchten wissen, ob in ihrer Klasse, in der alle Schülerinnen und Schüler Gummibärchen mögen, die Vorliebe für Zitronengummibärchen vom Geschlecht abhängt. 16 der insgesamt 28 Schülerinnen und Schüler bevorzugen Zironengummibärchen. Sechs von den insgesamt zehn Schülerinnen geben an, dass sie Zitronengummibärchen bevorzugen.

d) Erstellen Sie eine vollständige Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten und

prüfen Sie, ob die Vorliebe für Zitronengummibärchen in dieser Klasse vom Geschlecht der Schülerinnen und Schüler abhängig ist.

Max organisiert für sich und Lilli eine Werksbesichtigung bei ihrem Lieblingsgummibärchenhersteller. Bei der Besichtigung berichten Lilli und Max dem Werksmitarbeiter von ihren getätigten Auszählungen. Dieser gibt an, dass versucht wird, alle sechs Geschmacksrichtungen bei der Abfüllung zu gleichen Anteilen in die Gummibärchentüten zu füllen. Abweichungen sind der Automatisierung geschuldet.

An einem Förderband, auf dem alle Gummibärchen gut durchmischt an Lilli und Max vorbeifahren, fragt Lilli, ob sie ein paar Gummibärchen probieren dürfte, woraufhin der Mitarbeiter einen automatischen Auswurf aktiviert. Lilli hofft natürlich vor allem auf Zitronengummibärchen.

e) Erläutern Sie, unter welchen Bedingungen die Anzahl der Zitronengummibärchen am automatischen Auswurf vom Förderband als binomialverteilte Zufallsvariable betrachtet werden kann.

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass die Zufallsvariable X: „Anzahl der Zitronengummibärchen“ binomialverteilt ist. Bei der einmaligen Betätigung des Auswurfs am Förderband werden 300 Gummibärchen ausgeworfen.

Der Mitarbeiter behauptet, dass mehr als 100 Zitronengummibärchen nicht möglich seien und zeigt folgende Rechnung:

$$P(X > 100) = \sum_{i=101}^{300} \binom{300}{i} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{i} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{300-i} = 0\ \%.$$

f) Beweisen oder widerlegen Sie die Behauptung des Mitarbeiters.

Der Mitarbeiter behauptet weiter, dass in weniger als 80 % der Fälle maximal 54 Zitronengummibärchen in solch einem Auswurf vorhanden seien.

g) Prüfen Sie mit Hilfe der Binomialverteilung den Wahrheitsgehalt dieser Behauptung.

Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 3: Spielplatz**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	gesamt
Erreichbar	4	5	4	6	5	3	3	30
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Die Stadt Kiel möchte die Attraktivität eines Neubaugebietes steigern und plant, in dessen unmittelbarer Nähe auf einer großen öffentlichen Grünfläche einen Spielplatz zu errichten.

Interessierte Schülerinnen und Schüler eines beruflichen Gymnasiums beteiligen sich im Rahmen eines Projektes an der Planung und Gestaltung dieses Spielplatzes.

Vom Grünflächenamt der Stad Kiel bekommen die Schülerinnen und Schüler die Vorgabe, dass dieser öffentliche Spielplatz eine Mindestgrundfläche von 2 500 m^2 haben muss und aus Sicherheitsgründen vollständig eingezäunt werden soll. In der Budgetplanung der Stadt Kiel ist ein maximaler Betrag von 5 000,00 EUR für die Materialkosten der Einzäunung vorgesehen. Der geplante Einstabmattenzaun kostet je laufenden Meter komplett ca. 25,00 EUR.

Die Schülerinnen und Schüler gehen aus Erfahrung davon aus, dass eine annähernd quadratische Grundfläche eine Lösung wäre und wollen die folgende Tabelle ergänzen.

a) Ergänzen Sie die fehlenden Werte in der Tabelle 3.1.

Fläche des Spielplatzes in m^2	Umfang der Fäche des Spielplatzes in m	Materialkosten für den Zaun in EUR
2 500		
	190	
	220	

Tabelle 3.1

Bei näherer Betrachtung des Lageplans erkennen die Schülerinnen und Schüler, dass es möglich wäre, die Spielplatzfläche an die bereits vorhandene 40 m lange eingezäunte Seite einer Kindertagesstätte anzuschließen. Ein nicht maßstabsgetreuer Lageplan ist in Abbildung 3.1 dargestellt.

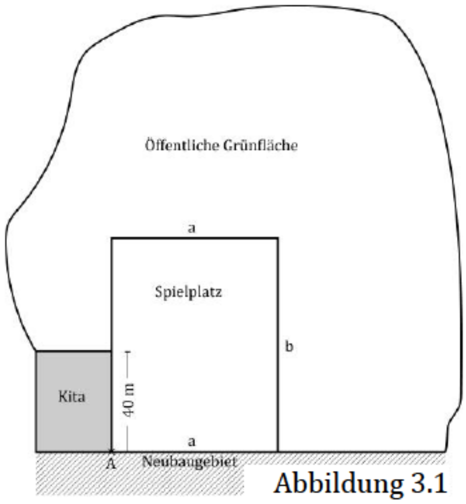

Abbildung 3.1

Für einen Gesamtumfang von 240 m und die Spielplatzfläche f gelten folgende Gleichungen:

(1) $240 = 2 \cdot a + 2 \cdot b$ (2) $f(a) = -a^2 + 120 \cdot a$

mit $0 \leq a \leq 100$.

Dabei sind die Seiten a und b sowie der Umfang in Metern (m) und die rechteckige Spielplatzfläche f in Quadratmetern (m^2) angegeben.

b) Berechnen Sie die Abmessungen des Spielplatzes mit maximaler Fläche mit Hilfe der Funktion f und

prüfen Sie, ob die Mindestfläche und die Kostenvorgabe der Stadt Kiel in diesem Fall eingehalten werden können.

Aufgrund landschaftlicher Gegebenheiten hat sich die Stadt Kiel für einen Spielplatz mit einer quadratischen Fläche von 2 500 m^2 entschieden.

Das Grünflächenamt der Stadt Kiel fordert bei so großen öffentlichen Spielplätzen eine räumliche Abtrennung des Spielbereichs für Kleinkinder zum Beispiel durch eine Hecke.

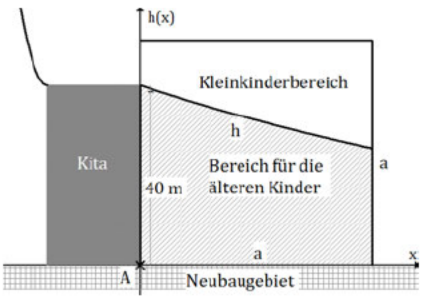

Abb. 3.2 (nicht maßstabsgetreu)

Der Bereich für die älteren Kinder soll dabei ca. $\frac{2}{3}$ der gesamten Spielplatzfläche einnehmen und direkt an die Kindertagesstätte angrenzen.

Die Projektgruppe vermutet, dass eine auf dem Gelände bereits vorhandene ca. 80 cm hohe Buchsbaumhecke als Abgrenzung verwendet werden kann und modelliert den Verlauf der Hecke näherungsweise durch den Graphen einer Exponentialfunktion mit der Gleichung

$$h(x) = 40 \cdot e^{-0{,}0085 \cdot x} \quad \text{mit } 0 \leq x \leq 50 \text{ und e ist die Eulersche Zahl.}$$

Der Ursprung des verwendeten Koordinatensystems liegt im Punkt A und h(x) und x sind in Metern (m) angegeben.

c) Prüfen Sie, ob die Hecke als Abgrenzung des Bereiches für die älteren Kinder verwendet werden kann.

Im weiteren Verlauf beteiligen sich die Schülerinnen und Schüler auch an der Planung einzelner Spielgeräte.

Im Bereich des Spielplatzes für die älteren Kinder soll eine Rutschbahn errichtet werden, deren Profilkurve mithilfe der Funktion p mit der Gleichung

$$p(x) = \begin{cases} -0{,}65 \cdot x^3 + 0{,}15 \cdot x^2 + 3{,}5 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 3 \cdot e^{-0{,}55 \cdot (x-1)} & \text{für } 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$ und e ist die Eulersche Zahl

modelliert werden kann. Dabei sind x und p(x) in Metern (m) angegeben.

d) Zeichnen Sie den zweiten Teil des Verlaufs der Rutsche in Abbildung 3.3 und

zeigen Sie, dass die Teilabschnitte der Funktion p bei $x = 1$ sprung- und knickfrei ineinander übergehen.

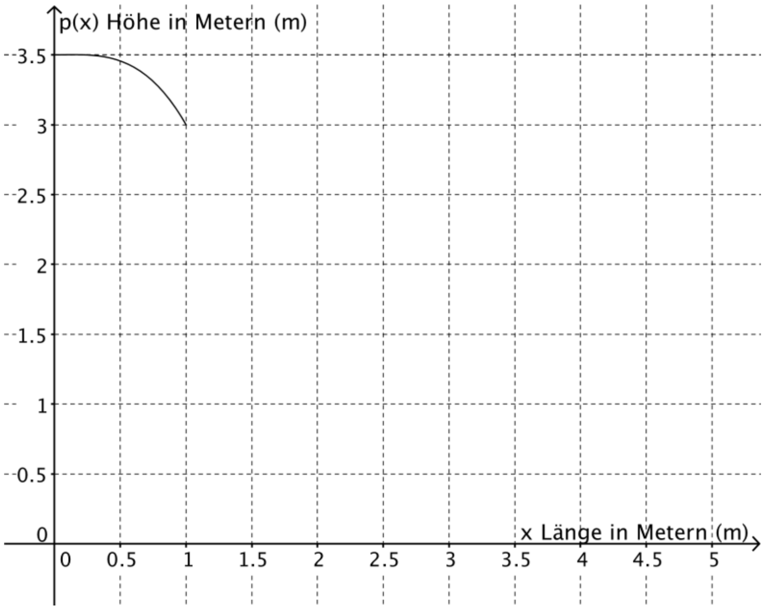

Abbildung 3.3: Verlauf (Profilkurve) der Rutschbahn

In einer Broschüre der Unfallkasse finden sich folgende Sicherheitsbestimmungen über Rutschen für ältere Kinder:

(1) Das Gefälle darf durchschnittlich 85 % nicht überschreiten.
(2) Winkel zur Horizontalen über 60° sind unzulässig.

e) Untersuchen Sie, ob im gesamten Rutschenverlauf p im Bereich $0 \leq x \leq 5$ die Sicherheitsbestimmungen eingehalten werden.

Am Tag der Spielplatzeröffnung beobachten die Schülerinnen und Schüler die Nutzung des Spielplatzes. Ihre Beobachtungen zeigen, dass sich der Besucherstrom der ankommenden Besucher am Eingang des Spielplatzes durch folgende Funktion b mit der Gleichung

$$b(t) = 0{,}1 \cdot e^{0{,}1 \cdot t} \cdot (t^2 - 8 \cdot t)^2 \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 8 \text{ und e ist die Eulersche Zahl}$$

darstellen lässt, wobei t der Zeit in Stunden (h) ab 10:00 Uhr morgens und b(t) der momentanen Änderungsrate in Besuchern pro Stunde $\left(\frac{\text{Besucher}}{\text{h}}\right)$ entspricht.

f) Berechnen Sie die Uhrzeit, bei der der Besucherstrom am größten ist.

g) Interpretieren Sie den Ausdruck

$$\int_0^8 b(t)dt \approx 164{,}8$$

im Sachzusammenhang.

Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 3: Gestaltung**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	gesamt
Erreichbar	6	3	4	4	6	3	4	30
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter:
a, b, c, ... $\in \mathbb{R}$ und die Variablen: x, t, ... $\in \mathbb{R}$.

Die Schülerinnen und Schüler des Profils Gestaltungstechnik sollen in einem fächerübergreifenden Projekt die Entwicklung fiktiver Modellunternehmen analysieren und für ein ausgewähltes Produkt dieser Unternehmen Werbeartikel entwerfen.

Eine Schülergruppe analysiert die Daten zum Getränkeabsatz der fiktiven mittelgroßen Familienbrauerei Hansebräu GmbH & Co. KG. Den Schülerinnen und Schülern liegen einige unvollständige Informationen zu den (momentanen) Absatzraten in den Jahresmitten der letzten 18 Jahre vor.

- In den 8 Jahren von 2000 bis 2007 sind die betrachteten Absatzraten um jährlich 1 % auf ca. 81 400 $\frac{\text{hl}}{\text{Jahr}}$ gesunken.
- Von 2007 bis 2011 blieben die betrachteten Absatzraten annähernd konstant bei ca. 81 400 $\frac{\text{hl}}{\text{Jahr}}$.

In Tabelle 3.1 und Abbildung 3.1 sind einige der Absatzraten in 1 000 Hektolitern pro Jahr $\left(1\,000\ \frac{\text{hl}}{\text{Jahr}}\right)$ angegeben. Dabei gibt t die Zeit in Jahren nach dem Beobachtungsbeginn Anfang des Jahres 2000 ($t = 0$) und a_k die Absatzrate in der Jahresmitte des Jahres k an.

Jahr k	2000	2007	2011	2013	2015	2017
Absatzrate a_k in der Jahresmitte des Jahres k in 1 000 Hektolitern pro Jahr			$\approx 81{,}4$	$\approx 84{,}1$	$\approx 90{,}3$	$\approx 92{,}0$

Tabelle 3.1

a) Ergänzen Sie die fehlenden Werte in Tabelle 3.1 und

vervollständigen Sie die Abbildung 3.1 um die fehlenden zwei Punkte aus der Tabelle 3.1. Beachten Sie, dass die Ordinatenachse in einem Teilbereich gestaucht ist.

Begründen Sie, inwieweit aufgrund der gesamten Datenlage zur Modellierung der Entwicklung der Absatzraten der letzten 18 Jahre eine aus drei unterschiedlichen Funktionstypen abschnittsweise definierte Funktion geeignet sein könnte.

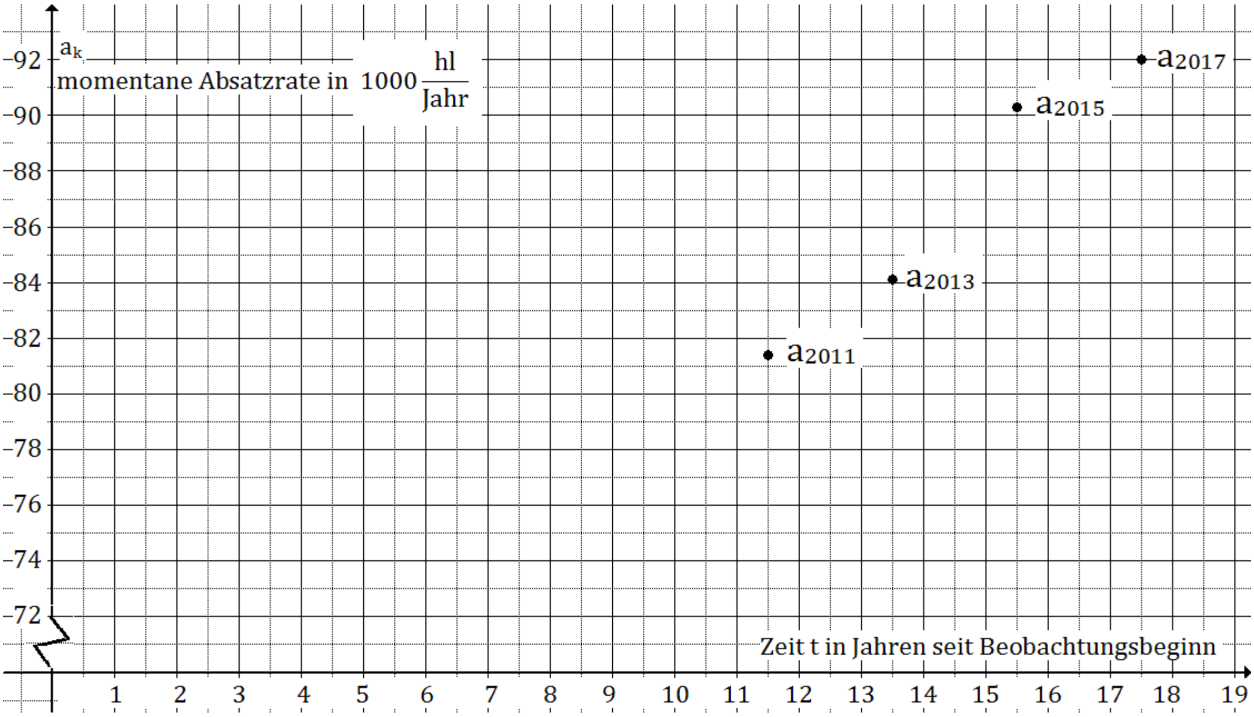

Abbildung 3.1

Auf Grund der Datenlage folgern die Schülerinnen und Schüler, dass die betrachtete Absatzrate a_k in der Zeit von 2011 bis 2017 im Mittel jährlich um ca. $1\,770\,\frac{\text{hl}}{\text{Jahr}}$ gestiegen ist.

b) Prüfen Sie diese Schlussfolgerung.

Die Schülerinnen und Schüler modellieren den Verlauf der momentanen Absatzrate ab dem Jahr 2011 ($t = 11$) näherungsweise durch die Funktion g mit der Gleichung:

$$g(t) = -\frac{1}{6} \cdot t^3 + \frac{115}{16} \cdot t^2 - \frac{24\,011}{240} \cdot t + \frac{34\,231}{64} \qquad \text{für } t \geq 11$$

Dabei gibt $g(t)$ näherungsweise die momentane Absatzrate in 1 000 Hektolitern pro Jahr $\left(1\,000\,\frac{\text{hl}}{\text{Jahr}}\right)$ abhängig von der Zeit t in Jahren seit Beobachtungsbeginn an ($t = 11$ entspricht hier dem 01.01.2011 um 0:00 Uhr).

c) Leiten Sie die Gleichung einer Stammfunktion G der Funktion g unter Angabe der Zwischenschritte her und

berechnen Sie näherungsweise die Gesamtgetränkeabsatzmenge in Litern (l) für die Jahre 2011 bis einschließlich 2017.

Im Internet findet die Schülergruppe zum Vergleich den Verlauf der Absatzrate h der Weldebräu GmbH & Co. KG in Kiel. In Abbildung 3.2 sind die Graphen der beiden Funktionen g und h für den Zeitraum von 2011 bis einschließlich 2017 dargestellt. Beachten Sie, dass die Abszissen- und die Ordinatenachse in Teibereichen gestaucht sind.

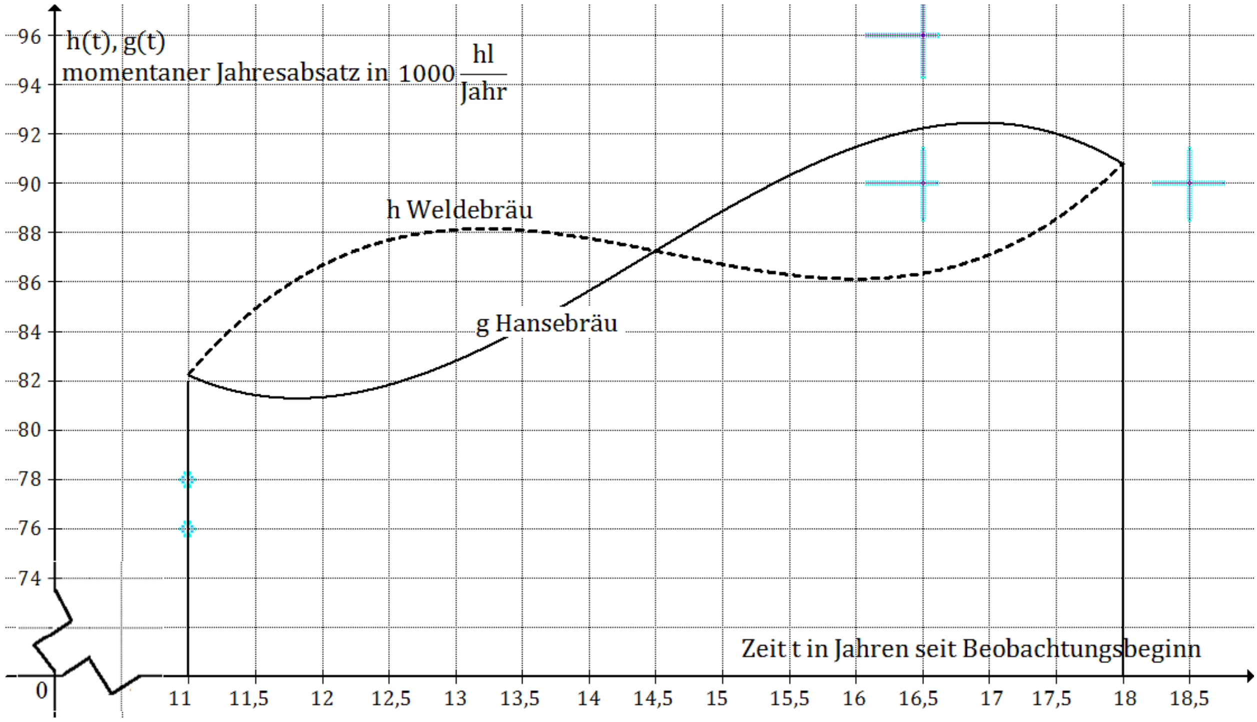

Abbildung 3.2

Die Schülergruppe diskutiert darüber, ob die Weldebräu in diesem Zeitraum insgesamt mehr Getränke abgesetzt hat, als die Hansebräu.

d) Vergleichen Sie, die beiden Verläufe anhand von zwei Aspekten. Berücksichtigen Sie dabei auch die Gesamtgetränkeabsatzmengen der beiden Brauereien über den betrachteten Zeitraum.

Die Schülerinnen und Schüler entwerfen für ein hochpreisiges Getränk als Werbemaßnahme neue extravagante Flaschenformen. Einen der Flaschenentwürfe sehen Sie liegend im Schrägbild in Abbildung 3.3. Die Innenkontur der liegenden Flasche entsteht durch Rotation des Graphen der Funktion f um die Abszissenachse.

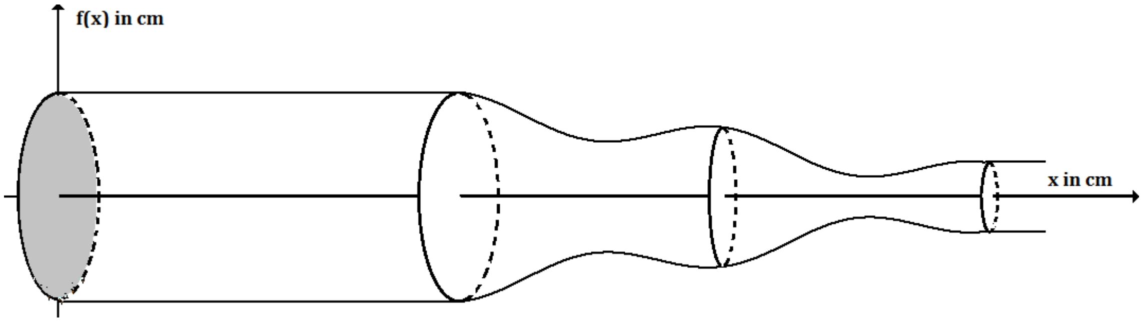

Abbildung 3.3 Schrägbild der liegenden Flasche

Die Innenkontur der Flasche kann näherungsweise durch die abschnittsweise definierte Funktion f mit der folgenden Gleichung modelliert werden:

$$f(x) = \begin{cases} 2{,}72 & \text{für } 0 \leq x < 10 \\ 0{,}4 \cdot \cos\left(\frac{4}{13}\pi \cdot (x-10)\right) - 0{,}14 \cdot x + 3{,}72 & \text{für } 10 \leq x \leq 23 \\ 0{,}9 & \text{für } 23 < x \leq 24{,}5 \end{cases}$$

Alle Längenangaben sind in Zentimetern angegeben.

Um in der automatischen Abfüllanlage befüllt werden zu können, muss die Flasche die im Betriebshandbuch zu findenden Anforderungen erfüllen. Einen Ausschnitt aus dem Betriebshandbuch finden Sie in Abbildung 3.4 wieder.

e) Beurteilen Sie unter Berücksichtigung der Wanddicke von 2 mm, ob die neue Flasche die Anforderungen erfüllt.

maximaler Außendurchmesser D:	$D \leq 61$ mm
minimaler Innendurchmesser d:	$10 \text{ mm} \leq d \leq 20 \text{ mm}$

Abbildung 3.4

Geben Sie den tatsächlichen Außendurchmesser und den minimalen Innendurchmesser an.

Während des Füllvorganges entstehen Verwirbelungen, insbesondere an nicht knickfreien Übergängen der Innenkontur und an den Übergängen mit Krümmungswechseln.

f) Untersuchen Sie daher den Graphen der Funktion f an der Stelle $x = 10$ auf Knickfreiheit (Sprungfreiheit können Sie voraussetzen).

g) Berechnen Sie alle Wendestellen für $10 \leq x \leq 23$ und

geben Sie die zugehörigen Innenradien der neu entworfenen Flasche an.