Name: ____________________

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Bei einem medizinischen Test leert eine Versuchsperson ein Glas Wein in einem Zug. Anschließend wird der zeitliche Verlauf der Blutalkoholkonzentration (in Promille) aufgezeichnet. Diese wird im hier verwendeten Modell zunächst durch eine Funktion f_a mit der Gleichung

$$f_a(t) = \frac{a}{60}\left(1 - e^{-\frac{1}{20}t}\right) - \frac{1}{600}t$$

beschrieben. Dabei ist *a* die Alkoholmenge im Wein in Gramm und *t* die Zeit in Minuten, die seit der Alkoholaufnahme vergangen ist. Die Funktion f_a ist für alle $a \in \mathbb{R}$ und alle $t \in \mathbb{R}$ definiert. Zur Modellierung ist die Funktion für $a > 2$ und eine gewisse Zeitspanne geeignet.[1] In der *Abbildung 1* ist der Graph der Funktion f_{20} dargestellt.

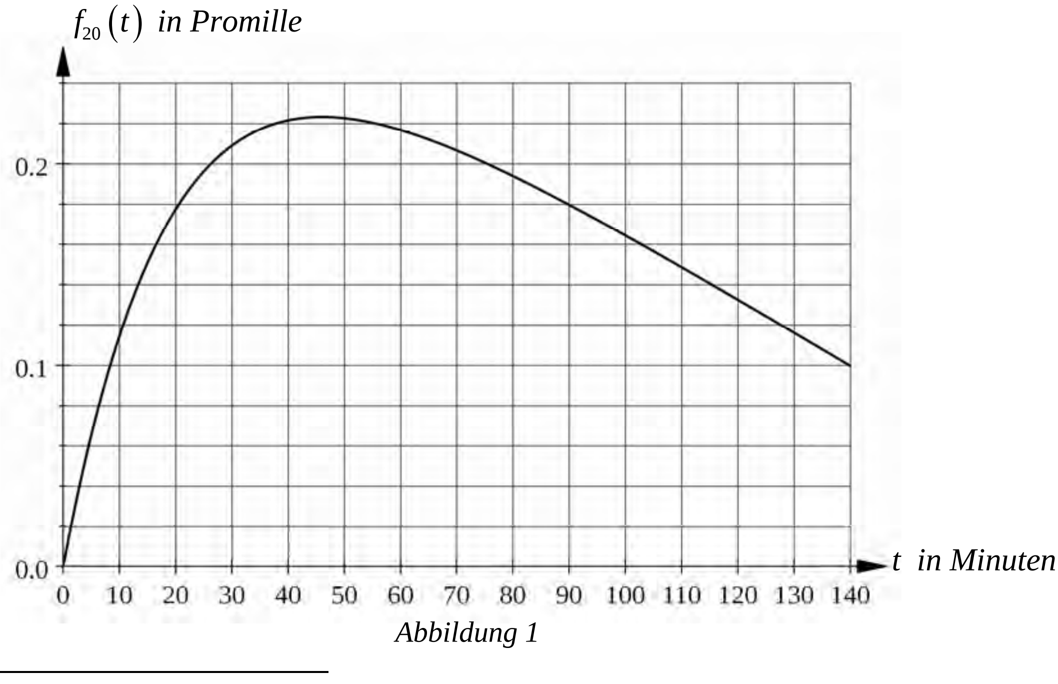


Abbildung 1

[1] Der Einfachheit halber enthält ihr Funktionsterm $f_a(t)$ nur die Maßzahlen der Größen *a* und *t* bezogen auf die genannten Einheiten. Beispielsweise bedeutet $f_a(t) = 0{,}2$ eine Blutalkoholkonzentration von 0,2 Promille.

Name: ____________________

a) *Bestimmen Sie die globale Maximalstelle* t_{m} *der Funktion* f_a *in Abhängigkeit von a. Begründen Sie den Einfluss des Parameters a auf die Lage der Maximalstelle und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Sachzusammenhang.*

[Zur Kontrolle: $f_{\mathrm{a}}'(t) = \frac{1}{600}\left(\frac{a}{2}e^{-\frac{1}{20}t} - 1\right)$; $t_{\mathrm{m}} = 20\ln\left(\frac{a}{2}\right)$]

(14 Punkte)

Das Glas Wein, das die Versuchsperson in einem Zug leert, enthält 20 g reinen Alkohol. Die Blutalkoholkonzentration der Versuchsperson zur Zeit *t* nach dem Leeren des Glases wird nun für $0 \le t \le 140$ durch die Funktion *f* mit der Gleichung

$$f(t) = f_{20}(t) = \frac{1}{3}\cdot\left(1 - e^{-\frac{1}{20}t}\right) - \frac{1}{600}t$$

beschrieben.

b) (1) *Berechnen Sie die höchste Blutalkoholkonzentration der Versuchsperson nach dem Leeren des Glases.*

(2) *Ermitteln Sie durch Integration eine Gleichung einer Stammfunktion F von f.*

[Zur Kontrolle: $F(t) = \frac{1}{3}\left(20e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{1}{400}t^2 + t\right)$]

(3) *Berechnen Sie* $\frac{F(140) - F(0)}{140}$ *und interpretieren Sie diesen Ausdruck im Sachzusammenhang.*

(4) *Berechnen Sie die Blutalkoholkonzentration der Versuchsperson 140 Minuten nach dem Leeren des Glases.*

(17 Punkte)

c) Aus biologischen Gründen wird nach 140 Minuten die Blutalkoholkonzentration der Versuchsperson durch die Funktion *f* nicht mehr richtig beschrieben. Für die Modellierung besser geeignet ist die an der Stelle $t = 140$ zusammengesetzte Funktion *h* mit der Gleichung

$$h(t) = \begin{cases} f(t), & 0 \le t \le 140 \\ g(t), & t > 140 \end{cases}$$

mit $g(t) = u \cdot e^{-v \cdot t}$, wobei $u > 0$ und $v > 0$ geeignet zu wählen sind (siehe *Abbildung 2*).

Name: ____________________

(1) *Bestimmen Sie die Parameter u und v so, dass die Funktion h an der Stelle* $t = 140$ *differenzierbar ist.*

[Zur Kontrolle: $u \approx 1{,}01357$, $v = 0{,}01657$]

(2) *Untersuchen Sie, ob die Funktion h an der Stelle* $t = 140$ *zweimal differenzierbar ist.*

(3) *Begründen Sie, zu welchen Zeitpunkten die Blutalkoholkonzentration der Versuchsperson bei Modellierung durch die Funktion h am schnellsten zu- bzw. abnimmt, und berechnen Sie die zugehörigen Änderungsraten.*

(19 Punkte)

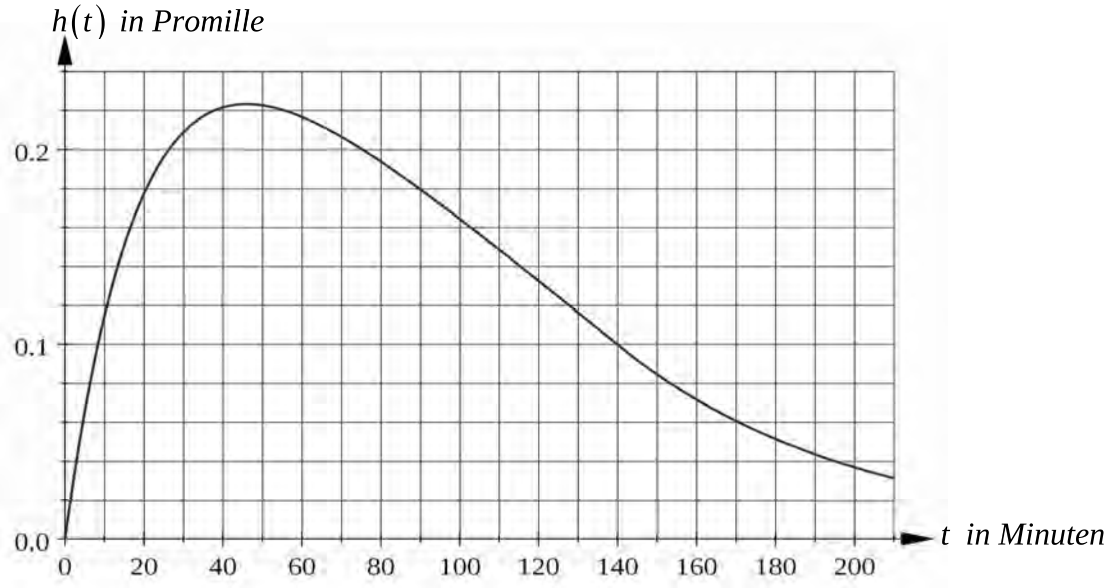


Abbildung 2

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2012

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen einschließlich Funktionenscharen und Logarithmusfunktionen sowie notwendiger Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Untersuchungen von Wirkungen (Änderungsrate)
   - Integrationsregeln (partielle Integration, Substitution)
   - Flächenberechnung durch Integration
2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

$$f_a(t) = \frac{a}{60}\left(1 - e^{-\frac{1}{20}t}\right) - \frac{1}{600}t\ ,\ t \in \mathbb{R}\ .$$

Es gilt $f_a'(t) = \frac{a}{60}\left(\frac{1}{20}e^{-\frac{1}{20}t}\right) - \frac{1}{600} = \frac{a}{1200}e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{1}{600} = \frac{1}{600}\left(\frac{a}{2}e^{-\frac{1}{20}t} - 1\right)$,

$$f_a''(t) = -\frac{a}{24000}e^{-\frac{1}{20}t}\ .$$

Für eine lokale Maximalstelle t_m gilt:

$$\begin{aligned} f_a'(t_\mathrm{m}) = 0 &\Leftrightarrow \frac{a}{2}e^{-\frac{1}{20}t_m} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{20}t_m} = \frac{2}{a} \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{20}t_m = \ln\left(\frac{2}{a}\right) \\ &\Leftrightarrow t_m = 20\ln\left(\frac{a}{2}\right) \end{aligned}$$

[Für $a > 2$ ist $t_\mathrm{m} > 0$.] Da $f_a''(t) < 0$ ist für $a > 2$ und für alle $t \in \mathbb{R}$, ist der Funktionsgraph von f_a rechtsgekrümmt. Somit hat die Funktion f_a an der Stelle $t_m = 20\ln\left(\frac{a}{2}\right)$ ihr globales Maximum.

Da die Logarithmusfunktion streng monoton steigt, ist t_m umso größer, je größer a ist.

Je größer die Menge des getrunkenen Alkohols ist, desto später wird das Maximum der Blutalkoholkonzentration erreicht.

Modelllösung b)

(1) Für $a = 20$ ist [$t_m = 20\ln(10) \approx 46{,}05$ und] $f_{20}\left(20\ln(10)\right) = \frac{3}{10} - \frac{\ln(10)}{30} \approx 0{,}223$.

Die höchste Blutalkoholkonzentration der Versuchsperson [wird 46 Minuten] nach dem Leeren des Glases [erreicht und] beträgt ca. 0,22 Promille.

(2) $$F(t) = \int \left(\frac{1}{3} \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{20}t} \right) - \frac{1}{600}t \right) dt$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(t + 20e^{-\frac{1}{20}t} \right) - \frac{1}{1200}t^2 + c$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(t - \frac{1}{400}t^2 + 20e^{-\frac{1}{20}t} \right) + c$$

(3) $\frac{F(140) - F(0)}{140} \approx 0{,}169$ [Promille].

Dieser Ausdruck gibt die mittlere Blutalkoholkonzentration innerhalb des betrachteten 140 Minuten langen Zeitintervalls an.

(4) $f(140) = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - e^{-7}\right) - \frac{140}{600} \approx 0{,}100$.

Nach 140 Minuten beträgt die Blutalkoholkonzentration ca. 0,100 Promille.

Modelllösung c)

(1) $h(t)=\begin{cases} f(t), & 0 \le t \le 140 \\ g(t), & t > 140 \end{cases}$ mit $g(t)=u\cdot e^{-v\cdot t}$, $u>0$, $v>0$.

Die Funktion *h* ist an der Stelle $t=140$ genau dann differenzierbar, wenn gilt:

$g(140)=f(140)$ und $g'(140)=f'(140)$.

$g(140)=f(140) \Leftrightarrow \qquad (*) \quad u\cdot e^{-140v}=f(140)$

Es gilt: $g'(t)=-v\cdot u\cdot e^{-v\cdot t}$ und $f'(t)=\frac{1}{60}e^{-\frac{1}{20}t}-\frac{1}{600}$ (s. Teilaufgabe a).

$g'(140)=f'(140) \Leftrightarrow \qquad (**) \quad -u\cdot v\cdot e^{-140v}=\frac{1}{60}e^{-7}-\frac{1}{600}$

Division der Gleichung (**) durch die Gleichung (*) ergibt

$v=\frac{1}{f(140)}\cdot\left(\frac{1}{600}-\frac{1}{60}e^{-7}\right)\approx 0{,}01657$. Einsetzen in (*) ergibt $u=\frac{f(140)}{e^{-140v}}\approx 1{,}01357$.

(2) Die Funktion *h* ist genau dann an der Stelle $t=140$ zweimal differenzierbar, wenn gilt:

$f''(140)=g''(140)$. Diese Bedingung ist nicht erfüllt, da für alle $t\in\mathbb{R}$ gilt:

$f''(t)=-\frac{1}{1200}e^{-\frac{1}{20}t}<0$ und $g''(t)=v^2\cdot u\cdot e^{-v\cdot t}>0$. Daher ist die Funktion *h* an der Stelle $t=140$ nicht zweimal differenzierbar.

(3) Die durch die Funktion *h* beschriebene Blutalkoholkonzentration kann nur im durch die Teilfunktion *f* abgedeckten Zeitintervall [0; 140] steigen, da die für $t>140$ verwendete Teilfunktion *g* wegen $g'(t)=-v\cdot u\cdot e^{-v\cdot t}<0$ für alle $t\in\mathbb{R}$ streng monoton fällt.

Da der Graph von *f* wegen $f''(t)=-\frac{1}{1200}e^{-\frac{1}{20}t}<0$ für alle $t\in\mathbb{R}$ rechtsgekrümmt ist, ist seine Steigung an der linken Randstelle $t=0$ des betrachteten Zeitintervalls am größten: $f'(0)=\frac{1}{60}-\frac{1}{600}=0{,}015$ [Promille pro Minute].

Da der Graph von *f* für $t\le 140$ rechtsgekrümmt und der Graph von *g* für $t>140$ linksgekrümmt ist ($g''(t)=v^2\cdot u\cdot e^{-v\cdot t}>0$ für alle $t\in\mathbb{R}$), nimmt die durch die Funktion *h* beschriebene Blutalkoholkonzentration zum Zeitpunkt $t=140$ am schnellsten ab, und zwar mit $f'(140)=\frac{1}{60}e^{-7}-\frac{1}{600}\approx -0{,}00165$ Promille pro Minute (vgl. (1)).

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	berechnet die erste und zweite Ableitung der Funktion f_a.	3
2	bestimmt die globale Maximalstelle t_{m} der Funktion f_a in Abhängigkeit von *a*.	6
3	begründet den Einfluss des Parameters *a* auf die Lage der Maximalstelle.	3
4	interpretiert die Ergebnisse im Sachzusammenhang.	2
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) berechnet die höchste Blutalkoholkonzentration der Versuchsperson.	5
2	(2) ermittelt eine Gleichung einer Stammfunktion *F* von *f*.	4
3	(3) berechnet und interpretiert den Ausdruck im Sachzusammenhang.	6
4	(4) berechnet die Blutalkoholkonzentration der Versuchsperson 140 Minuten nach Leeren des Glases.	2
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) bestimmt *u* und *v*.	7
2	(2) untersucht, ob die Funktion *h* an der Stelle $t = 140$ zweimal differenzierbar ist.	4
3	(3) begründet, zu welchen Zeitpunkten die Blutalkoholkonzentration am schnellsten zu- bzw. abnimmt.	5
4	(3) berechnet die zugehörigen Änderungsraten.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK[2]**	**ZK**	**DK**
1	berechnet die erste …	3			
2	bestimmt die globale …	6			
3	begründet den Einfluss …	3			
4	interpretiert die Ergebnisse …	2			
sachlich richtige Alternativen: (14) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**14**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die höchste …	5			
2	(2) ermittelt eine Gleichung …	4			
3	(3) berechnet und interpretiert …	6			
4	(4) berechnet die Blutalkoholkonzentration …	2			
sachlich richtige Alternativen: (17) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**17**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt *u* und …	7			
2	(2) untersucht, ob die …	4			
3	(3) begründet, zu welchen …	5			
4	(3) berechnet die zugehörigen …	3			
sachlich richtige Alternativen: (19) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**19**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Erhöhte Ozonkonzentrationen können beim Menschen Reizungen der Atemwege, Husten, Kopfschmerzen und Atembeschwerden bis hin zu Einschränkungen der Lungenfunktion und Lungenkrankheiten hervorrufen. Ihr Ausmaß wird hauptsächlich durch die Aufenthaltsdauer in der ozonbelasteten Luft bestimmt. Befindlichkeitsstörungen wie Reizerscheinungen an Augen und Schleimhäuten werden vor allem durch Begleitstoffe des Ozons (im Sommersmog) hervorgerufen.

In einer Prognose für den kommenden Tag wird die Ozonkonzentration in einer Stadt zwischen 7 Uhr ($t = 0$) und 21 Uhr ($t = 14$) durch die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(t) = 0{,}06 \cdot (0{,}25t^4 - 10{,}6t^3 + 101{,}2t^2) + 55\,,\ \ 0 \le t \le 14\,,$$ [1]

und in einer ländlichen Region für denselben Zeitraum durch die Funktion g modelliert.
(t in Stunden; $f(t)$, $g(t)$ in µg/m^3)

Die Graphen von f und g sind in der *Abbildung* auf Seite 2 dargestellt.
(t-Achse: 1 LE entspricht 1 Stunde; $f(t)$-, $g(t)$-Achse: 1 LE entspricht 1 µg/m^3)

a) (1) *Vergleichen Sie die Graphen von f und g im gegebenen Sachzusammenhang.*

(2) *Geben Sie die Ozonkonzentrationen in der Stadt zu den Zeitpunkten 7 Uhr und 21 Uhr nach dem Prognosemodell an.*

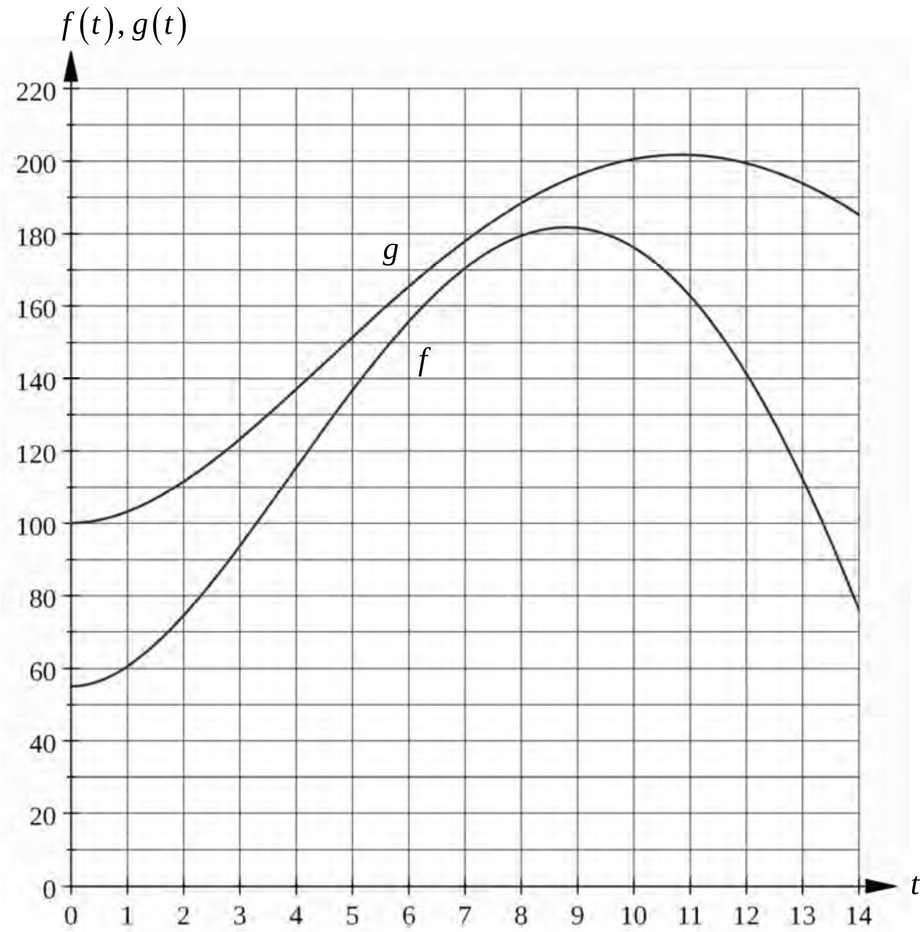
(3) *Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an dem die höchste Ozonkonzentration in der Stadt prognostiziert wird, und berechnen Sie die höchste Ozonkonzentration.*

(15 Punkte)

---

[1] Die Funktion f ist für alle $t \in \boldsymbol{R}$ definiert, wird aber nur für $0 \le t \le 14$ zur Modellierung verwendet.

Name: ____________________



Abbildung

Name: ____________________

Bei einer Ozonkonzentration von mindestens 180 µg/m^3 muss die Bevölkerung über die Medien über die Ozonbelastung informiert werden.

b) (1) Am kommenden Tag wird in der Stadt eine Ozonkonzentration von mindestens 180 µg/m^3 während eines Zeitraumes von mehr als einer Stunde prognostiziert.

Begründen Sie dies unter Verwendung geeigneter Funktionswerte.

(2) *Ermitteln Sie die Zeitpunkte, an denen die Ozonkonzentration in der Stadt am stärksten zu- und am stärksten abnimmt.*

(3) *Bestimmen Sie die durchschnittliche Ozonkonzentration zwischen 7 und 21 Uhr.*

(4) *Begründen Sie, dass die Fortsetzung der Funktion f auf das Intervall [0; 24] zur Prognose der Ozonkonzentration nicht geeignet ist.*

(22 Punkte)

Ein Prognosemodell aus der Schweiz zur Berechnung der **maximalen** Ozonkonzentration des folgenden Tages lautet:

$$O_\mathrm{m} = 0{,}25 \cdot O_\mathrm{h} + 5{,}5 \cdot T_\mathrm{m} - 40\,.$$

O_m : Maßzahl der maximalen Ozonkonzentration (in µg/m^3), die für den morgigen Tag prognostiziert wird

O_h : Maßzahl der maximalen Ozonkonzentration (in µg/m^3) am heutigen Tag

T_m : Maßzahl der maximalen Temperatur (in °C), die für den morgigen Tag prognostiziert wird

Heute betrug die maximale Ozonkonzentration 120 µg/m^3.

c) *Bestimmen Sie, welche Tageshöchsttemperatur für den nächsten Tag prognostiziert werden müsste, damit nach dem Schweizer Prognosemodell ein Ozonhöchstwert von 180 µg/m^3 prognostiziert wird.*

(4 Punkte)

Name: ____________________

Das erste Prognosemodell soll zwischen 7 Uhr (t = 0) und 21 Uhr (t = 14) auf die Funktion $f_{\mathrm{a;b}}$:

$$f_{\mathrm{a;b}}(t) = 0{,}06 \cdot (0{,}25t^4 - 10{,}6t^3 + a \cdot t^2) + b,\ 0 \le t \le 14 \ \text{ und } \ a, b > 0,$$

erweitert werden.

Im Verlauf eines Tages treten die höchsten Ozonwerte in Städten normalerweise in den Nachmittagsstunden zwischen 14 und 17 Uhr auf.

d) Es sei $a \le 125$. In diesem Fall besitzt der Graph von $f_{\mathrm{a;b}}$ genau ein relatives Maximum für $0 < t < 14$.

Bestimmen Sie, für welche Werte von $a \le 125$ das Ozonmaximum zwischen 14 und 17 Uhr liegt.

(9 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2012

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen einschließlich Funktionenscharen und Logarithmusfunktionen sowie notwendiger Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Untersuchungen von Wirkungen (Änderungsrate)
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Gemeinsamkeiten:

Die Ozonkonzentration steigt in beiden Fällen vom Morgen an und erreicht am Nachmittag ihren höchsten Stand. Danach flacht sie zum Abend hin ab.

Unterschiede:

Die Ozonkonzentration auf dem Land liegt ständig über dem städtischen Niveau, der höchste Wert wird mehr als eine Stunde später erreicht und die Zunahme bzw. die Abnahme ist geringer als in der „Stadtkurve".

(2) Ozonkonzentration um 7 Uhr: $f(0) = 55$ µg/m³

Ozonkonzentration um 21 Uhr: $f(14) = 76{,}16...$ µg/m³

(3) Ableitungen von *f*:

$f\,'(t) = 0{,}06 \cdot (t^3 - 31{,}8\,t^2 + 202{,}4\,t)$

$f\,''(t) = 0{,}06 \cdot (3\,t^2 - 63{,}6\,t + 202{,}4)$

Extremstellen von *f*:

Ein hinreichendes Kriterium für eine relative Extremstelle einer mehrfach differenzierbaren Funktion f lautet $f\,'(t) = 0 \wedge f\,''(t) \neq 0$.

$f\,'(t) = 0 \Leftrightarrow 0{,}06 \cdot (t^3 - 31{,}8\,t^2 + 202{,}4\,t) = 0 \Leftrightarrow t(t^2 - 31{,}8\,t + 202{,}4) = 0$
$\Leftrightarrow t = 0 \vee t^2 - 31{,}8\,t + 202{,}4 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 8{,}8 \vee t = 23$

0 und 23 liegen nicht im Inneren des Definitionsbereiches. Deswegen kommt höchstens 8,8 als relative Extremstelle infrage.

$f\,''(8{,}8) = 0{,}06 \cdot (-124{,}96) < 0 \;\Rightarrow$ Relatives Maximum an der Stelle 8,8.

Als einzige relative Extremstelle ist das relative Maximum zugleich absolutes Maximum.

8,8 entspricht dem Zeitpunkt 15.48 Uhr.

[Alternative Lösungswege sind denkbar.]

$f(8{,}8) = 181{,}75...$. Die höchste Ozonkonzentration beträgt ungefähr 181,75 µg/m³.

Modelllösung b)

(1) Es gilt z. B. $f(8{,}8-0{,}5)=180{,}83...>180$ und $f(8{,}8+0{,}5)=180{,}80...>180$. Zusammen mit den Ergebnissen von a) (3) folgt die zu begründende Aussage der Aufgabenstellung.

[Alternative Lösungswege sind denkbar.]

(2) Die Zeitpunkte, an denen die Ozonkonzentrationen am stärksten zu- bzw. abnehmen, werden über die Wende- bzw. Randstellen des Graphen von *f* ermittelt.

$f'''(t)=0{,}06\cdot(6t-63{,}6)$

Wendestellen von *f*:

Ein hinreichendes Kriterium für eine Wendestelle einer dreimal differenzierbaren Funktion f lautet $f''(t)=0\wedge f'''(t)\neq 0$.

$f''(t)=0 \Leftrightarrow 0{,}06\cdot(3t^2-63{,}6t+202{,}4)=0 \Leftrightarrow t^2-21{,}2t+\frac{202{,}4}{3}=0$

$\Leftrightarrow t=10{,}6\pm\sqrt{44{,}89...} \Leftrightarrow t=3{,}89...\vee t=17{,}30...$.

$t=17{,}30...>14 \Rightarrow$ Die Stelle 17,30… liegt nicht im Definitionsbereich von f und spielt deswegen bei den Überlegungen keine Rolle.

$\Rightarrow$ Die einzig mögliche Wendestelle liegt bei $t_1=3{,}89...$.

$f'''(t_1)<0 \Rightarrow$ Wendestelle bei $t_1=3{,}89...$.

Vergleich der Steigungen an der Wendestelle und den Randstellen:

$f'(0)=0$

$f'(t_1)=21{,}9... \Rightarrow$ 3,89... Stelle der größten Zunahme

$f'(14)=-39{,}3... \Rightarrow$ 14 Stelle der größten Abnahme

Um 10.53 Uhr (3,89… entspricht 3:53 h) nimmt die Ozonkonzentration am stärksten zu und um 21 Uhr am stärksten ab.

(3) Für die durchschnittliche Ozonkonzentration zwischen 7 und 21 Uhr gilt:

$$m=\frac{1}{14}\int_0^{14} f(t)\,\mathrm{d}t \quad\Rightarrow$$

$$m=\frac{1}{14}\cdot\left[0{,}06\cdot\left(0{,}05t^5-2{,}65t^4+\frac{101{,}2}{3}t^3\right)+55t\right]_0^{14}$$
$$=130{,}656$$
$$\approx 131\ [\mu g/m^3]$$

(4) Es gilt z. B. $f(24)=-262{,}95...$. Da keine negativen Ozonwerte existieren, ist eine Erweiterung des Definitionsbereiches auf das Intervall [0; 24] nicht sinnvoll.

Modelllösung c)

Mit den angegebenen Werten aus a) (3) folgt:

$$180 = 0,25 \cdot 120 + 5,5 \cdot T_m - 40 \Leftrightarrow T_m = \frac{190}{5,5} = 34,54... \ .$$

Nach dem Schweizer Prognosemodell könnte dieselbe Konzentration bei einer prognostizierten Temperatur von etwa 35 °C erreicht werden.

Modelllösung d)

Es gilt: $f'_{a;b}(t) = 0,06 \cdot (t^3 - 31,8\,t^2 + 2a \cdot t)$. Für die Nullstellen der Ableitung ergibt sich:

$t = 0 \vee t = 15,9 \pm \sqrt{15,9^2 - 2a}$. Da $t = 0$ bzw. $t = 15,9 + \sqrt{15,9^2 - 2a} > 14$ nicht im Intervall]0;14[liegen und in der Aufgabenstellung vorgegeben ist, dass $f_{a;b}$ in diesem Intervall eine relative Maximalstelle besitzt, liegt an der Stelle $t = 15,9 - \sqrt{15,9^2 - 2a}$ eine relative – und als einzige Extremalstelle einer differenzierbaren Funktion – auch absolute Maximalstelle.
Damit das Maximum zwischen 14 und 17 Uhr liegt, muss

$7 < 15,9 - \sqrt{15,9^2 - 2a} < 10$ gelten.

Es folgt:

$$8,9 > \sqrt{15,9^2 - 2a} > 5,9 \text{ bzw. } \frac{15,9^2 - 8,9^2}{2} < a < \frac{15,9^2 - 5,9^2}{2},$$

d. h. $86,8 < a < 109$.

[Alternative Lösungswege sind denkbar.]

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) vergleicht die Graphen von *f* und *g* im Sachzusammenhang.	4
2	(2) gibt die Ozonkonzentrationen um 7 und 21 Uhr nach dem Prognosemodell an.	2
3	(3) bestimmt den Zeitpunkt, an dem die höchste Ozonkonzentration prognostiziert wird, und berechnet die höchste Ozonkonzentration.	9
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) begründet, dass am kommenden Tag in der Stadt eine Ozonkonzentration von mindestens 180 $\mu g/m^3$ für einen Zeitraum von mehr als einer Stunde prognostiziert wird.	3
2	(2) bestimmt die Wendestelle von *f*.	6
3	(2) ermittelt die Zeitpunkte, an denen die Ozonkonzentration am stärksten zu- bzw. abnimmt.	5
4	(3) gibt einen Ansatz zur Berechnung der mittleren Ozonkonzentration im angegebenen Zeitraum an.	2
5	(3) ermittelt die mittlere Ozonkonzentration im angegebenen Zeitraum.	4
6	(4) begründet, dass die Fortsetzung der Funktion *f* auf das Intervall [0; 24] zur Prognose der Ozonkonzentration nicht geeignet ist.	2
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	bestimmt, welche Tageshöchsttemperatur für den nächsten Tag prognostiziert werden müsste, damit nach dem Schweizer Prognosemodell ein Ozonhöchstwert von 180 $\mu g/m^3$ prognostiziert wird.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	bestimmt die Stelle des absoluten Maximums des Graphen von $f_{a;b}$ im Intervall $[0;14]$.	5
2	bestimmt, für welche Belegungen von *a* das Ozonmaximum zwischen 14 und 17 Uhr liegt.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) vergleicht die Graphen …	4			
2	(2) gibt die Ozonkonzentrationen …	2			
3	(3) bestimmt den Zeitpunkt …	9			
sachlich richtige Alternativen: (15) ………………………………………………………………………. ……………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**15**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass am …	3			
2	(2) bestimmt die Wendestelle …	6			
3	(2) ermittelt die Zeitpunkte …	5			
4	(3) gibt einen Ansatz …	2			
5	(3) ermittelt die mittlere …	4			
6	(4) begründet, dass die …	2			
sachlich richtige Alternativen: (22) ………………………………………………………………………. ……………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**22**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt, welche Tageshöchsttemperatur …	4			
sachlich richtige Alternativen: (4) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**4**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt die Stelle …	5			
2	bestimmt, für welche …	4			
sachlich richtige Alternativen: (9) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe d)	**9**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_a durch $f_a(x) = \frac{x}{a} \cdot e^{ax}$, $x \in \mathbb{R}$, mit einer positiven reellen Zahl *a*. Der Graph der Funktion $f_{0,5}$ ist auf Seite 2 dargestellt.

a) (1) *Bestimmen Sie die Nullstellen und die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte der Funktion f_a in Abhängigkeit von a.*

(2) *Begründen Sie, dass $T_a\left(-\frac{1}{a} \,\middle|\, -a^{-2}e^{-1}\right)$ ein globaler Tiefpunkt der Funktion f_a ist.*

(17 Punkte)

b) In a) (1) ergibt sich der Wendepunkt $W_a\left(-\frac{2}{a} \,\middle|\, -2a^{-2}e^{-2}\right)$.

(1) *Zeigen Sie: Für die Länge $l(a)$ der Strecke $\overline{T_aW_a}$ gilt $\left(l(a)\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{k}{a^4}$ mit* $k = (e-2)^2 e^{-4}$.

(2) *Untersuchen Sie, ob die Länge $l(a)$ der Strecke $\overline{T_aW_a}$ extremal werden kann.*
[Hinweis: Ohne Beweis kann benutzt werden: $l(a)$ ist genau dann extremal, wenn $\left(l(a)\right)^2$ extremal ist.]

(9 Punkte)

Name: ____________________

c) (1) *Begründen Sie mit Hilfe von Integrationsverfahren, dass die Funktion F_a mit der Gleichung $F_a(x) = \frac{1}{a^2} e^{ax} \cdot \left(x - \frac{1}{a} \right)$, $x \in \mathbb{R}$, eine Stammfunktion der Funktion f_a ist.*

(2) Der Graph der Funktion f_a schließt mit der x-Achse im III. Quadranten eine unbegrenzte Fläche ein.

Zeigen Sie, dass diese Fläche den Inhalt $I_a = \frac{1}{a^3}$ besitzt.

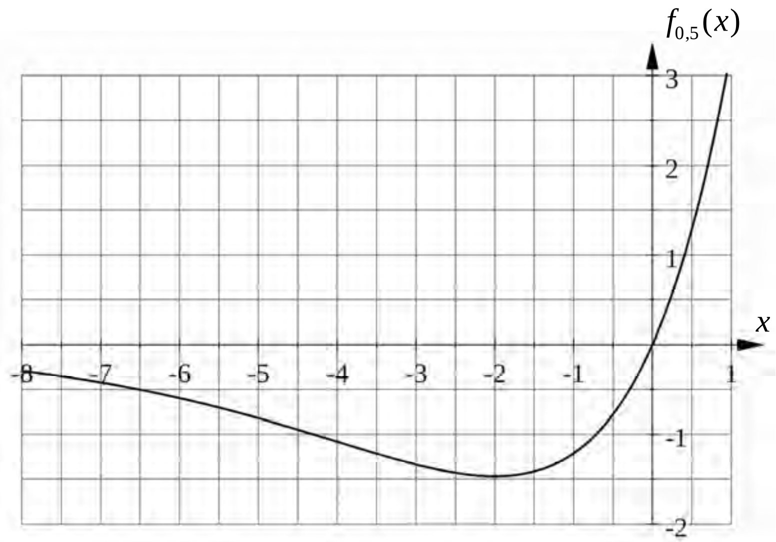
(14 Punkte)

d) (1) Es sei h die Funktion mit der Gleichung $h(x) = e^x - x$, $x \in \mathbb{R}$.

Beweisen Sie: Im Intervall $]0,\infty[$ ist die Funktion h streng monoton steigend und es gilt $h(x) \geq 1$ für alle $x \geq 0$.

(2) *Begründen Sie mit Hilfe von* d) (1)*: Die Normalparabel p mit der Gleichung $p(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, schneidet den Graphen der Funktion f_a nur im Ursprung.*

(10 Punkte)



Abbildung

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2012

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen einschließlich Funktionenscharen und Logarithmusfunktionen sowie notwendiger Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Integrationsregeln (partielle Integration, Substitution)
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Nullstellen:

Offensichtlich ist $x_0 = 0$ einzige Nullstelle der Funktion f_a.

Extrempunkte:

Es gilt $f_a'(x) = \frac{1}{a}e^{ax} + \frac{x}{a}a\,e^{ax} = e^{ax}\left(\frac{1}{a} + x\right)$.

Nun ist $f_a'(x_E) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + x_E = 0 \Leftrightarrow x_E = -\frac{1}{a}$.

Wegen $e^{ax} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ besitzt f_a' in x_E einen Vorzeichenwechsel von „minus" nach „plus". Demnach ist $f_a(x_E) = -a^{-2}e^{-1}$ ein lokales Minimum der Funktion f_a.

Insgesamt gesehen ist der lokale Tiefpunkt $T_a\left(-\frac{1}{a}\,|\,-a^{-2}e^{-1}\right)$ einziger Extrempunkt der Funktion f_a.

Wendepunkte:

Es gilt $f_a''(x) = e^{ax} + \left(\frac{1}{a} + x\right)a\,e^{ax} = e^{ax}(2 + ax)$.

Man erhält $f_a''(x_w) = 0 \Leftrightarrow 2 + ax_w = 0 \Leftrightarrow x_w = -\frac{2}{a}$.

Wegen $e^{ax} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ besitzt f_a'' in x_w einen Vorzeichenwechsel.

Damit ist $W_a\left(-\frac{2}{a}\,|\,-2a^{-2}e^{-2}\right)$ einziger Wendepunkt der Funktion f_a.

(2) Aus a) (1) ergibt sich: $T_a\left(-\frac{1}{a}\,|\,-a^{-2}e^{-1}\right)$ ist ein lokaler Tiefpunkt der Funktion f_a, wobei $x_E = -\frac{1}{a}$ einzige Lösung der Gleichung $f_a'(x) = 0$ ist. Demnach ist T_a ein globaler Tiefpunkt.

Modelllösung b)

(1) $l(a)$ ist der Abstand der Punkte T_a und W_a. Daher ergibt sich

$$\left(l(a)\right)^2 = \left(-\frac{1}{a}+\frac{2}{a}\right)^2 + \left(-a^{-2}e^{-1}+2a^{-2}e^{-2}\right)^2 = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^4}\left(\frac{1}{e}-\frac{2}{e^2}\right)^2 = \frac{1}{a^2}+\frac{k}{a^4}$$

mit $k=(e-2)^2e^{-4}$.

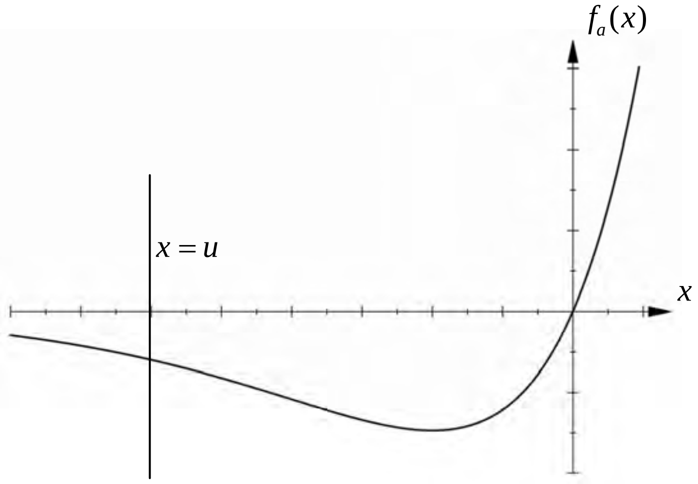
(2) Es sei $q(a)=\left(l(a)\right)^2$ für alle $a\in\mathbb{R}^+$. Nach dem Hinweis in der Aufgabenstellung ist $l(a)$ genau dann extremal, wenn $q(a)$ extremal ist. Es gilt $\lim\limits_{a\to 0} q(a)=\infty$ und $\lim\limits_{a\to\infty} q(a)=0$. Demnach kann $l(a)$ nicht extremal werden.

Modelllösung c)

(1) Mit Hilfe partieller Integration erhält man

$$\int \frac{x}{a}\cdot e^{ax}\,dx = \frac{x}{a}\cdot\frac{1}{a}\cdot e^{ax} - \int \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}\cdot e^{ax}\,dx = \frac{1}{a^2}x\,e^{ax} - \frac{1}{a^3}e^{ax} + c = \frac{1}{a^2}e^{ax}\left(x-\frac{1}{a}\right)+c\,.$$

(2)



Man betrachtet eine Parallele *k* zur *y*-Achse mit der Gleichung $x=u$, wobei $u<0$ gilt. $I_a(u)$ sei der Inhalt der Fläche, die im III. Quadranten von dem Graphen der Funktion f_a, der Geraden *k* und der *x*-Achse eingeschlossen wird. Mit Hilfe von c) (1) ergibt sich

$$I_a(u) = \int_0^u f_a(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{a^2}e^{ax}\left(x-\frac{1}{a}\right)\right]_0^u = \frac{1}{a^2}e^{au}\left(u-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{a^3}\,.$$

Also ist $I_a(u) = -\frac{1}{a^3}e^{au} - \frac{1}{a^3}\frac{-au}{e^{-au}} + \frac{1}{a^3}$.

Wegen $\lim\limits_{u\to-\infty} e^{au}=0$ und $\lim\limits_{u\to-\infty}\frac{-au}{e^{-au}}=0$ ergibt sich $I_a = \lim\limits_{u\to-\infty} I_a(u) = \frac{1}{a^3}$.

Modelllösung d)

(1) Es gilt $h'(x) = e^x - 1$. Da die *e*-Funktion streng monoton steigend ist, gilt $e^x > e^0 = 1$ für alle $x > 0$. Demnach ist $h'(x) > 0$ für alle $x > 0$. Folglich ist die Funktion *h* im Intervall $]0, \infty[$ streng monoton steigend.

Sei $x > 0$ beliebig gewählt. Dann besitzt die Funktion *h* auf dem abgeschlossenen Intervall $[0, x]$ ein absolutes Minimum *m*. Wegen des zuvor gezeigten Monotonieverhaltens der Funktion *h* ist $m = h(0) = 1$. Also gilt $h(x) \geq 1$.

(2) Es gilt: $p(x) = f_a(x) \Leftrightarrow x^2 = \frac{x}{a} e^{ax}$. Sicherlich ist $x = 0$ eine Lösung. Für $x \neq 0$ erhält man die Gleichung $e^{ax} - a\,x = 0$. Für $x < 0$ besitzt diese Gleichung wegen $a > 0$ und $e^{ax} > 0$ keine Lösung. Für $x > 0$ gilt $e^{ax} - a\,x \geq 1$ wegen d) (1). Insgesamt gesehen folgt die Behauptung.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) bestimmt die Nullstellen der Funktion f_a in Abhängigkeit von *a*.	2
2	(1) berechnet die erste und zweite Ableitung der Funktion f_a.	4
3	(1) bestimmt die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte der Funktion f_a in Abhängigkeit von *a*.	8
4	(2) begründet, dass der in der Aufgabenstellung genannte Punkt T_a ein globaler Tiefpunkt der Funktion f_a ist.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) zeigt die Behauptung aus der Aufgabenstellung.	4
2	(2) untersucht, ob die Länge der Stecke $\overline{T_a W_a}$ extremal werden kann.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) begründet mit Hilfe von Integrationsverfahren, dass die Funktion F_a eine Stammfunktion der Funktion f_a ist.	6
2	(2) zeigt die Behauptung aus der Aufgabenstellung.	8
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) beweist die Aussage aus der Aufgabenstellung.	6
2	(2) begründet mit Hilfe von d) (1) die in der Aufgabenstellung gemachte Aussage.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:______________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die Nullstellen …	2			
2	(1) berechnet die erste …	4			
3	(1) bestimmt die Koordinaten …	8			
4	(2) begründet, dass der …	3			
sachlich richtige Alternativen: (17) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**17**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt die Behauptung …	4			
2	(2) untersucht, ob die …	5			
sachlich richtige Alternativen: (9) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**9**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet mit Hilfe …	6			
2	(2) zeigt die Behauptung …	8			
sachlich richtige Alternativen: (14) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**14**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) beweist die Aussage …	6			
2	(2) begründet mit Hilfe …	4			
sachlich richtige Alternativen: (10) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**10**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Bei der Kunstausstellung „Licht und Schatten" ist in der Mitte der Ausstellungshalle eine gerade, 1 m hohe Pyramide mit quadratischer Grundfläche von 1 m Seitenlänge ausgestellt. Die Grundfläche der Pyramide befindet sich (gehalten von vier Stützen) einen Meter über dem Boden der Halle. Die quaderförmige Halle selbst ist 5 m hoch und hat eine quadratische Grundfläche von 9 m Seitenlänge.
In einem kartesischen Koordinatensystem mit Ursprung in einer Hallenecke und entlang der Hallenkanten verlaufenden Koordinatenachsen hat die Grundfläche der Pyramide die Eckpunkte $A(5\,|\,4\,|\,1)$, $B(5\,|\,5\,|\,1)$, $C(4\,|\,5\,|\,1)$ und $D(4\,|\,4\,|\,1)$.
Die Gegebenheiten sind in der ***Abbildung*** **auf Seite 3** dargestellt.

a) (1) *Zeigen Sie, dass die Pyramidenspitze die Koordinaten* $S(4{,}5\,|\,4{,}5\,|\,2)$ *hat.*

(2) *Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks ABS.*

(3) *Bestimmen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt der Pyramide.*

(11 Punkte)

b) *Ermitteln Sie, unter welchem Winkel die Seitenfläche ABS der Pyramide gegen ihre Grundfläche ABCD geneigt ist.*

[Zur Kontrolle: $E_{\text{ABS}}\ :\ 2x + z = 11$]

(7 Punkte)

Name: ____________________

c) Die Pyramide wird von einer an der rechten Hallenwand $(y=9)$ befestigten punktförmigen Lichtquelle angestrahlt (siehe *Abbildung*).

(1) Die Lichtquelle befindet sich zuerst in der Position $L_1(4{,}5\,|\,9\,|\,1)$. Der Pyramidenschatten auf der gegenüberliegenden Hallenwand $(y=0)$ hat die Form eines Dreiecks.

Ermitteln Sie die Koordinaten der Eckpunkte dieses Schattendreiecks. Zeigen Sie, dass es sich um ein gleichschenkliges Dreieck handelt, und berechnen Sie seinen Flächeninhalt.

(2) Die Lichtquelle wird nun in die Position $L_2(5\,|\,9\,|\,1)$ gebracht.

Beschreiben Sie ohne weitere Rechnung die Form des neuen Pyramidenschattens im Vergleich zum Schatten aus c) (1).

(12 Punkte)

Nachts werden die Kunstwerke in der Halle durch Laser-Lichtschranken gesichert.

d) Einer der Laserstrahlen ist auf den Schnittpunkt *M* der Mittelsenkrechten des Dreiecks *ABS* gerichtet.

(1) *Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten von M.*

[Zur Kontrolle: $M(4{,}8\,|\,4{,}5\,|\,1{,}4)$]

(2) Der Laserstrahl trifft im Punkt *M* orthogonal auf die Seitenfläche *ABS* der Pyramide.

Ermitteln Sie die Koordinaten der Position P der zugehörigen Laser-Lichtquelle an einer der Hallenwände.

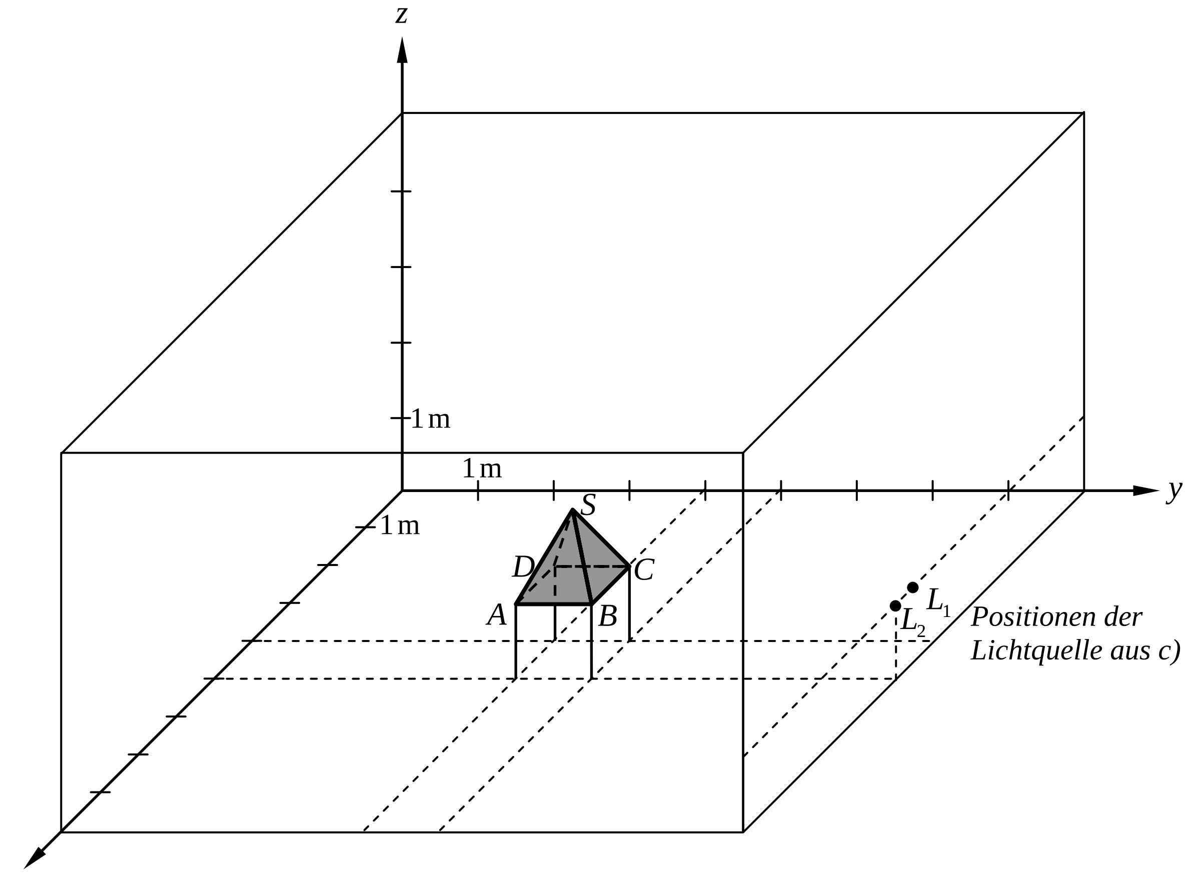
(13 Punkte)

e) Eine zweite Laser-Lichtquelle befindet sich in der Position $Q(9\,|\,7\,|\,3)$. Ihr Laserstrahl ist auf den Punkt $R(1\,|\,3\,|\,0)$ gerichtet.

Zeigen *Sie, dass dieser Laserstrahl die Seitenfläche BCS der Pyramide trifft.*

(7 Punkte)

Name: ____________________



Abbildung

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie ohne Alternative

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2012

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
   - Lineare Abhängigkeit von Vektoren, Parameterformen von Geraden- und Ebenengleichungen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität, Winkel und Länge von Vektoren
   - Normalenformen von Ebenengleichungen, Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen
   - Abstandsprobleme (Abstand Punkt – Ebene)

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Da es sich um eine gerade Pyramide mit zur *x*-*y*-Ebene parallelen Grundfläche handelt, stimmen die *x*- und *y*-Koordinaten der Pyramidenspitze *S* mit denen des Mittelpunkts $M(4{,}5\,|\,4{,}5\,|\,1)$ ihrer quadratischen Grundfläche *ABCD* überein. Zur *z*-Koordinate von *M* ist die Höhe der Pyramide zu addieren, so dass sich $S(4{,}5\,|\,4{,}5\,|\,2)$ ergibt.

(2) $|\overline{AB}| = 1\,\text{m}$ wie vorausgesetzt.

$|\overline{AS}| = |\overline{BS}| = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}5^2 + 1^2}\ \text{m} = \sqrt{1{,}5}\ \text{m}\ \ [\approx 1{,}22\,\text{m}]$.

[Das Dreieck *ABS* ist gleichschenklig.]

(3) Das Volumen der Pyramide beträgt $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1\ \text{m}^3 = \frac{1}{3}\ \text{m}^3$.

Ihre Oberfläche besteht aus der $1\,\text{m}^2$ großen Grundfläche und der Mantelfläche.

Die Mantelfläche besteht aus vier [kongruenten] Dreiecken mit der Grundseitenlänge 1 m und der Höhe $h = \sqrt{1^2 + 0{,}5^2}\ \text{m} = \sqrt{1{,}25}\ \text{m}$. Der Inhalt jeder Dreiecksfläche beträgt somit $A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{1{,}25}\ \text{m}^2$. Der Oberflächeninhalt der Pyramide ist

$O = 1\ \text{m}^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{1{,}25}\ \text{m}^2 \approx 3{,}24\ \text{m}^2$.

Modelllösung b)

Das Dreieck *ABS* liegt in der Ebene $E_{ABS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gilt $\vec{n}_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\vec{n}_1 \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$. Daher ist $\vec{n}_1$ Normalenvektor der Ebene E_{ABS}.

Die Grundfläche *ABCD* ist parallel zur *x*-*y*-Ebene, deren Normalenvektor z. B. $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist.

Da der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$

$\arccos\left(\frac{\vec{n}_1 * \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5} \cdot 1}\right) \approx 63{,}4° \; [\leq 90°]$ beträgt, ist die [in der Ebene E_{ABS} liegende] Seitenfläche *ABS* der Pyramide um ca. 63,4° gegen ihre Grundfläche *ABCD* geneigt.

Modelllösung c)

(1) Die Lichtquelle befindet sich im Punkt $L_1\left(4{,}5 \,|\, 9 \,|\, 1\right)$.

Offenbar wird nur die Pyramidenfläche *BCS* von den Lichtstrahlen getroffen.
Daher sind die Schnittpunkte B', C' und S' der Geraden L_1B, L_1C und L_1S mit der *x*-*z*-Ebene ($y = 0$) die Eckpunkte des Schattendreiecks $B'C'S'$:

$L_1B \;: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ schneidet für $t = \frac{9}{4}$ die *x*-*z*-Ebene in $B'\left(5{,}625 \,|\, 0 \,|\, 1\right)$.

$L_1C \;: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ schneidet für $u = \frac{9}{4}$ die *x*-*z*-Ebene in $C'\left(3{,}375 \,|\, 0 \,|\, 1\right)$.

$L_1S \;: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ schneidet für $v = 2$ die *x*-*z*-Ebene in $S'\left(4{,}5 \,|\, 0 \,|\, 3\right)$.

Das Dreieck $B'C'S'$ ist wegen $|\overline{B'S'}| = \sqrt{1{,}125^2 + 2^2}\ \text{m} = |\overline{C'S'}|$ gleichschenklig.
Es hat die Grundseitenlänge $|\overline{B'C'}| = 2{,}25\ \text{m}$ und die Höhe 2 m. Sein Flächeninhalt beträgt daher $2{,}25\ \text{m}^2$.

(2) Die Lichtquelle befindet sich nun im Punkt $L_2(5 \,|\, 9 \,|\, 1)$.

Auch bei dieser Position der Lichtquelle wird offenbar nur die Pyramidenfläche *BCS* von den Lichtstrahlen getroffen. Der Schatten der Pyramide ist ebenfalls ein Dreieck. Dieses ist jedoch nicht gleichschenklig wie das Schattendreieck $B'C'S'$ aus (1).

Modelllösung d)

(1) Der gesuchte Schnittpunkt M der Mittelsenkrechten ist insbesondere Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m_{AB} und m_{AS}. [M ist hier ein anderer Punkt als der Mittelpunkt der Pyramidengrundfläche aus der Lösung von a).] m_{AB} verläuft durch den Mittelpunkt $M_{AB}(5\,|\,4{,}5\,|\,1)$ der Strecke $\overline{AB}$. Ein beliebiger Richtungsvektor $\vec{v}$ von m_{AB} ist senkrecht sowohl zum Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als auch zum Normalenvektor $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Ebene E_{ABS} (siehe Teilaufgabe b)). Dies ist z. B. für $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ der Fall. Es gilt

$$m_{AB}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

m_{AS} verläuft durch den Mittelpunkt $M_{AS}(4{,}75\,|\,4{,}25\,|\,1{,}5)$ der Strecke $\overline{AS}$.

Ein beliebiger Richtungsvektor $\vec{w}$ von m_{AS} ist senkrecht sowohl zum Vektor $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ als auch zum Normalenvektor $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wie oben. Dies ist z. B. für $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ der Fall. Es gilt $m_{AS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}75 \\ 4{,}25 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$\vec{x}_M = \begin{pmatrix} 5 \\ 4{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + s_M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}75 \\ 4{,}25 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + t_M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ ergibt $t_M = 0{,}05$ und $s_M = -0{,}2$.

Der gesuchte Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist $M(4{,}8\,|\,4{,}5\,|\,1{,}4)$.

(2) Der Laserstrahl verläuft entlang der Geraden $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}8 \\ 4{,}5 \\ 1{,}4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ parallel zur x-z-Ebene. Offenbar befindet sich die gesuchte Position P der Laser-Lichtquelle an der vorderen Hallenwand (vgl. *Abbildung*). Daher gilt für die x-Koordinate von P: $x_P = 9$.

Aus $\vec{x}_P = \begin{pmatrix} 9 \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}8 \\ 4{,}5 \\ 1{,}4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt sich $r = 2{,}1$ und $z_P = 3{,}5$. [Für $x_P = 0$ ergäbe sich $r = -2{,}4$ und $z_P = -1$ und somit eine Position P unterhalb der Halle.]

$P(9\,|\,4{,}5\,|\,3{,}5)$ ist die gesuchte Position der Laser-Lichtquelle an der Wand der Halle.

[Andere Argumentationen sind möglich.]

Modelllösung e)

Der Laserstrahl verläuft entlang der Geraden $QR: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$. [Da seine Ausbreitung auf die Halle, d. h. auf die Strecke $\overline{QR}$ beschränkt ist, gilt $0 \le r \le 1$.]

Die Punkte der Ebene $E_{BCS}: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$ gehören genau dann zur Seitenfläche BCS der Pyramide, wenn gilt: $s \ge 0$, $t \ge 0$ und $s + t \le 1$. [Bei anderer Wahl der Richtungsvektoren sind die Bedingungen für die Parameter entsprechend anzupassen.]

Die Bedingung für den Schnittpunkt T der Geraden QR mit der Ebene E_{BCS} ist

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + r_T \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s_T \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_T \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} 4 - 8r_T + s_T + 0{,}5t_T & = & 0 \\ 2 - 4r_T + 0{,}5t_T & = & 0 \\ 2 - 3r_T - t_T & = & 0 \end{matrix} \right|.$$

Daraus ergibt sich $r = \frac{6}{11}$, $s = \frac{2}{11}$ und $t = \frac{4}{11}$. Da $s \ge 0$, $t \ge 0$ und $s + t \le 1$ erfüllt ist [und die Laser-Lichtquelle oberhalb der Pyramide positioniert ist], trifft der zweite Laserstrahl die Seitenfläche BCS der Pyramide.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) zeigt, dass die Pyramidenspitze die Koordinaten $S(4,5\,|\,4,5\,|\,2)$ hat.	3
2	(2) berechnet die Seitenlängen des Dreiecks *ABS*.	3
3	(3) bestimmt das Volumen und den Oberflächeninhalt der Pyramide.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	ermittelt, unter welchem Winkel die Seitenfläche *ABS* der Pyramide gegen ihre Grundfläche *ABCD* geneigt ist.	7
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) ermittelt die Koordinaten der Eckpunkte des Schattendreiecks.	6
2	(1) zeigt, dass es sich um ein gleichschenkliges Dreieck handelt.	2
3	(1) berechnet seinen Flächeninhalt.	2
4	(2) beschreibt die Form des neuen Pyramidenschattens im Vergleich zum Schatten aus b) (1).	2
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) bestimmt rechnerisch die Koordinaten von *M*.	8
2	(2) ermittelt die Koordinaten der Position der Laser-Lichtquelle an der Wand der Halle.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	zeigt, dass der zweite Laserstrahl die Seitenfläche *BCS* der Pyramide trifft.	7
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass die …	3			
2	(2) berechnet die Seitenlängen …	3			
3	(3) bestimmt das Volumen …	5			
sachlich richtige Alternativen: (11) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**11**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt, unter welchem …	7			
sachlich richtige Alternativen: (7) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**7**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt die Koordinaten …	6			
2	(1) zeigt, dass es …	2			
3	(1) berechnet seinen Flächeninhalt.	2			
4	(2) beschreibt die Form …	2			
sachlich richtige Alternativen: (12) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**12**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt rechnerisch die …	8			
2	(2) ermittelt die Koordinaten …	5			
sachlich richtige Alternativen: (13) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**13**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	zeigt, dass der …	7			
sachlich richtige Alternativen: (7) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**7**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**150**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Gegeben sind im Raum $\mathbb{R}^3$ die Punkte $A(3|0|2)$, $B(1|-2|2)$ und $C(5|-2|2)$ sowie

die Abbildung $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit der Gleichung $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$.

a) (1) *Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.*

(2) *Berechnen Sie bezüglich der Abbildung f die Koordinaten der Bildpunkte A', B' und C' zu den Punkten A, B und C und untersuchen Sie, ob das Bilddreieck $A'B'C'$ ebenfalls rechtwinklig ist.*

(3) *Prüfen Sie, ob die Dreiecke ABC sowie $A'B'C'$ bezüglich einer Grundebene des Koordinatensystems eine besondere Lage einnehmen.*

(14 Punkte)

Gegeben sei die Ebene $E^*: 2x_1 - x_2 = 0$ des $\mathbb{R}^3$.

b) *Weisen Sie nach, dass jeder Punkt der Ebene E^* durch die Abbildung f auf sich selbst abgebildet wird.*

(7 Punkte)

c) (1) *Zeigen Sie, dass $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ Eigenwerte der Abbildung f sind.*

Bestimmen Sie sämtliche Eigenvektoren zu diesen Eigenwerten.

(2) *Untersuchen Sie, welche Zusammenhänge zwischen der Ebene E^* und den Eigenvektoren der Abbildung f bestehen.*

(14 Punkte)

Name: ____________________

d) Gegeben sei eine Ebene E im $\mathbb{R}^3$, welche den Ursprung enthält.

Eine lineare Abbildung $f_E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heißt Spiegelung an der Ebene E genau dann, wenn Folgendes gilt:

1. Falls der Punkt P in E liegt und P' sein Bildpunkt ist, gilt $P = P'$.
2. Falls der Punkt P nicht in E liegt, sind P und P' verschieden und die Gerade PP' ist orthogonal zu E.
3. Für die Abstände $d(P;E)$ und $d(P';E)$ der Punkte P bzw. P' von der Ebene E gilt: $d(P';E) = d(P;E)$.

Begründen Sie, dass die Abbildung f eine Spiegelung an einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ ist.

(11 Punkte)

e) *Begründen Sie*:

Wenn f_E eine Spiegelung im $\mathbb{R}^3$ an einer Ebene E, die den Ursprung enthält, ist, dann hat f_E den Eigenwert $\lambda = 1$ mit zwei linear unabhängigen Eigenvektoren.

(4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie mit Alternative 1 (Abbildungsmatrizen)

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2012

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
   - Lineare Abhängigkeit von Vektoren, Parameterformen von Geraden- und Ebenengleichungen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität, Winkel und Länge von Vektoren
   - Normalenformen von Ebenengleichungen, Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen
   - Abstandsprobleme (Abstand Punkt – Ebene)

   Alternative 1:
   - Abbildungsmatrizen, Matrizenmultiplikation als Abbildungsverkettung, inverse Matrizen und Abbildungen, Eigenwerte und Eigenvektoren

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Aus $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Damit ist das Dreieck rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei *A*, da das Skalarprodukt der beiden obigen Vektoren gleich 0 ist.

(2) Berechnung der Ortsvektoren der Bildpunkte:

$$\begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}8 \\ 2{,}4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}2 \\ -0{,}4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4{,}6 \\ 2{,}8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aus $\overrightarrow{A'B'} = \begin{pmatrix} -0{,}4 \\ -2{,}8 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{A'C'} = \begin{pmatrix} -2{,}8 \\ 0{,}4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich $\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'} = 0$.

Damit ist auch das Bilddreieck rechtwinklig.

(3) Die Dreiecke *ABC* sowie *A'B'C'* liegen in einer Ebene parallel zur x_1x_2-Ebene mit der Gleichung $x_3 = 2$.

[Alternative Formulierungen sind hier vorstellbar.]

Modelllösung b)

Aus der gegebenen Ebenengleichung folgt $x_2 = 2x_1$ bei beliebigem x_3.

Damit ergibt sich das Bild sämtlicher Ebenenpunkte unter f durch:

$$\begin{pmatrix} -0,6 & 0,8 & 0 \\ 0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6x_1 + 1,6x_1 \\ 0,8x_1 + 1,2x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Folglich werden sämtliche Punkte der Ebene E^* durch f auf sich selbst abgebildet.

Modelllösung c)

(1) $\lambda_1 = 1$ ist genau dann ein Eigenwert der Abbildung *f*, wenn das folgende LGS eine Lösung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ besitzt: $\begin{pmatrix} -1,6 & 0,8 & 0 \\ 0,8 & -0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dieses LGS ist äquivalent zu:

$2x_1 - x_2 = 0$. Die Menge M_1 der Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$ sind also die Ortsvektoren aller Punkte der Ebene E^*, die vom Koordinatenursprung verschieden sind.

$\lambda_2 = -1$ ist genau dann ein Eigenwert der Abbildung *f*, wenn das folgende LGS eine Lösung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ besitzt: $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,8 & 0 \\ 0,8 & 1,6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dieses LGS ist äquivalent zu:

$x_1 + 2x_2 = 0 \wedge x_3 = 0$. Die Menge der Eigenvektoren zu $\lambda_2 = -1$ ist demnach

$$M_2 = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

(2) Es ist $E^* = M_1 \cup \{\vec{0}\}$ nach c) (1).

$M_2 \cup \{\vec{0}\}$ ist eine Gerade durch den Koordinatenursprung mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Diese ist orthogonal zu der Ebene E^*.

Modelllösung d)

Nach b) bildet f jeden Punkt der Ebene E^* auf sich selbst ab. Damit ist Eigenschaft (1) für E^* erfüllt.

Zu jedem Punkt P, der nicht in E^* liegt, gibt es einen Lotfußpunkt $F_P \neq P$ in der Ebene E^*, so dass $\overrightarrow{F_P P}$ orthogonal zu E^* ist und damit ein Vielfaches von $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ darstellt.

$\overrightarrow{F_P P} \neq \vec{0}$ ist nach c) ein Eigenvektor von f zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$. Damit gilt $f\left(\overrightarrow{F_P P}\right) = -\overrightarrow{F_P P}$. Sei P' der Bildpunkt von P bzgl. der Abbildung f. Dann erhält man $f\left(\overrightarrow{F_P P}\right) = f\left(\vec{x}_P - \vec{x}_{F_P}\right) = f\left(\vec{x}_P\right) - f\left(\vec{x}_{F_P}\right) = \vec{x}_{P'} - \vec{x}_{F_P} = \overrightarrow{F_P P'}$, da f durch eine Matrix gegeben ist.

Somit gilt $-\overrightarrow{F_P P} = \overrightarrow{F_P P'}$. Damit sind die Eigenschaften (2) und (3) erfüllt.

Insgesamt gesehen ist die Abbildung f eine Spiegelung an der Ebene E^*.

[Alternative Begründungen sind vorstellbar.]

Modelllösung e)

Bei der Spiegelung f_E an der Ebene E, die den Ursprung enthält, wird jeder Richtungsvektor von E auf sich selbst abgebildet. Wählt man zwei nicht kollineare Richtungsvektoren, so folgt:

Der Eigenwert $\lambda = 1$ besitzt zwei linear unabhängige Eigenvektoren.

[Andere Formen der Begründung sind hier vorstellbar.]

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) zeigt, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.	4
2	(2) berechnet die Koordinaten der Bildpunkte A', B', C'.	3
3	(2) untersucht das Bilddreieck $A'B'C'$ auf Rechtwinkligkeit.	4
4	(3) prüft, ob die Dreiecke ABC sowie $A'B'C'$ eine besondere Lage einnehmen.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	weist nach, dass jeder Punkt der Ebene E^* durch die Abbildung f auf sich selbst abgebildet wird.	7
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) zeigt, dass $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ Eigenwerte der Abbildung f sind.	4
2	(1) bestimmt sämtliche Eigenvektoren zu den beiden Eigenwerten.	6
3	(2) untersucht die Zusammenhänge zwischen der Ebene E^* und den Eigenvektoren.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	begründet die Gültigkeit der Eigenschaft (1) einer Spiegelung an einer Ebene.	3
2	begründet die Gültigkeit der Eigenschaften (2) und (3) einer Spiegelung an einer Ebene.	8
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	begründet die Aussage aus der Aufgabenstellung.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass das …	4			
2	(2) berechnet die Koordinaten …	3			
3	(2) untersucht das Bilddreieck …	4			
4	(3) prüft, ob die …	3			
sachlich richtige Alternativen: (14) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**14**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	weist nach, dass …	7			
sachlich richtige Alternativen: (7) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**7**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) zeigt, dass $\lambda_1 = 1$ …	4			
2	(1) bestimmt sämtliche Eigenvektoren …	6			
3	(2) untersucht die Zusammenhänge …	4			
sachlich richtige Alternativen: (14) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**14**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	begründet die Gültigkeit …	3			
2	begründet die Gültigkeit …	8			
sachlich richtige Alternativen: (11) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**11**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	begründet die Aussage.	4			
sachlich richtige Alternativen: (4) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**4**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**150**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Ein Reisebüro pflegt eine Datei mit Adressen von 4400 langjährigen Stammkunden, die ihren Urlaub über dieses Reisebüro buchen. Zum Ende eines jeden Jahres untersucht die Geschäftsleitung das Buchungsverhalten der Kunden im Hinblick auf die Anzahl der Urlaube, die die Kunden im abgelaufenen Jahr bei dem Reisebüro gebucht haben.
Dabei wird unterschieden zwischen den Kunden, die im abgelaufenen Jahr genau einen Urlaub bei dem Reisebüro gebucht haben (Kundengruppe E), Kunden, die im abgelaufenen Jahr mehr als einen Urlaub bei dem Reisebüro gebucht haben (Kundengruppe M), und Kunden, die im abgelaufenen Jahr keinen Urlaub bei dem Reisebüro gebucht haben (Kundengruppe K).

a) Die Geschäftsleitung hat festgestellt, dass das Buchungsverhalten der Stammkunden während eines Jahres vom Buchungsverhalten im vorangegangenen Jahr abhängt. So wurde in früheren Jahren von folgendem Buchungsverhalten der Stammkunden bei dem Reisebüro ausgegangen:
   - Von den Kunden der Gruppe E eines Jahres buchen im folgenden Jahr 75 % ebenfalls genau einen Urlaub; 10 % der Gruppe buchen mehr als einen Urlaub und 15 % keinen Urlaub.
   - Von den Kunden, die in einem Jahr mehr als einen Urlaub gebucht haben, buchen 60 % im Folgejahr ebenfalls mehr als einen Urlaub, 20 % buchen genau einen Urlaub und 20 % buchen keinen Urlaub.
   - 57 % der Kunden der Gruppe K buchen bei dem Reisebüro im nächsten Jahr genau einen Urlaub, 28 % sogar mehr als einen Urlaub, während 15 % auch im Folgejahr keinen Urlaub bei dem Reisebüro buchen.

   Dabei wird vereinfachend davon ausgegangen, dass sich die Stammkundschaft im Laufe der Zeit nicht ändert.

   Stellen Sie dieses Buchungsverhalten durch ein Übergangsdiagramm dar und bestimmen Sie eine Übergangsmatrix, die dieses Verhalten beschreibt.

   (10 Punkte)

Name: ____________________

b) Aufgrund einer Änderung des Urlaubsverhaltens gilt aktuell bei weiterhin konstanter Anzahl von Stammkunden die folgende Übergangsmatrix ***A***:

$$\begin{array}{r|cccc} & \textit{von:} & E & M & K \\ \hline \textit{nach:}\ E & & & & \\ M & \boldsymbol{A} = & \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}} \\ K & & & & \end{array}$$

(1) *Geben Sie drei Änderungen im Buchungsverhalten an, die gegenüber den früheren Jahren erkennbar sind.*

Im Jahr 2011 buchten 2624 Kunden genau einen Urlaub, 1206 Kunden buchten mehr als einen Urlaub, während 570 Kunden keine Buchung bei dem Reisebüro durchführten.

(2) *Bestimmen Sie unter den Übergangsbedingungen, die durch die Matrix **A** gegeben sind, die zu erwartende Verteilung für das Jahr 2012.*

(3) *Bestimmen Sie unter den Übergangsbedingungen, die durch die Matrix **A** gegeben sind, die Verteilung für das Jahr 2010.*

(14 Punkte)

Name: ____________________

c) Durch gezielte Werbemaßnahmen wird während des Jahres 2012 das Buchungsverhalten der Kunden der Gruppe K so beeinflusst, dass von diesem Jahr an jeweils gegenüber dem vorangegangenen Jahr nur noch 5 % der Kunden der Gruppe K keinen Urlaub buchen. Dabei wird das Buchungsverhalten der Kunden der beiden anderen Kundengruppen E und M nicht beeinflusst. Es wird weiterhin von einer konstanten Anzahl von Stammkunden ausgegangen.

(1) *Erklären Sie, dass das Buchungsverhalten dann durch eine Matrix*

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & q \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}95 - q \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}05 \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \le q \le 0{,}95$$

beschrieben werden kann.

(2) *Gehen Sie von den in Teilaufgabe b) für das Jahr 2011 angegebenen Buchungen aus und ermitteln Sie den Wert von q für den Fall, dass sich am Ende des Jahres 2012 herausstellt, dass 2699 Kunden im Jahr 2012 genau einen Urlaub gebucht haben.*

(3) *Untersuchen Sie, wie viele Buchungen das Reisebüro bei einem Übergangsverhalten, wie es unter c) (1) beschrieben ist, für das Jahr 2012 mindestens erwarten kann. Gehen Sie dabei aus von den in Teilaufgabe b) für das Jahr 2011 angegebenen Buchungszahlen.*

(14 Punkte)

Name: ____________________

d) Ein Unternehmensberater schlägt ein neues Berechnungsmodell vor: Demnach soll das Buchungsverhalten innerhalb eines Jahres in Abhängigkeit vom Buchungsverhalten des Vorjahres durch folgende Gleichung modelliert werden:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 45 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dabei bezeichnet x die Anzahl der Kunden, die im Vorjahr genau einen Urlaub gebucht haben, y die Anzahl der Kunden, die im Vorjahr mehr als einen Urlaub gebucht haben, und z die Anzahl der Kunden, die im Vorjahr keinen Urlaub gebucht haben. x', y' und z' bezeichnen die entsprechenden Kundenzahlen für das laufende Jahr.

(1) *Nennen und erklären Sie zwei Aspekte, in denen sich diese Modellierung gegenüber dem Modell aus Teilaufgabe b) (Matrix* **A***) unterscheidet.*

(2) *Zeigen Sie, dass es bei dem durch die voranstehende Gleichung beschriebenen Übergangsverhalten eine Verteilung der Kunden des Reisebüros auf die Gruppen E, M und K so gibt, dass die Anzahl der Kunden der einzelnen Gruppen E, M und K von Jahr zu Jahr gleich bleibt.*

Bestimmen Sie diese Verteilung und erklären Sie, durch welche Übergänge zwischen den Gruppen E, M und K diese Verteilung konstant bleibt.

(12 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie mit Alternative 2 (Übergangsmatrizen)

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2012

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

   Alternative 2
   - Übergangsmatrizen, Matrizenmultiplikation als Verkettung von Übergängen, Fixvektoren

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

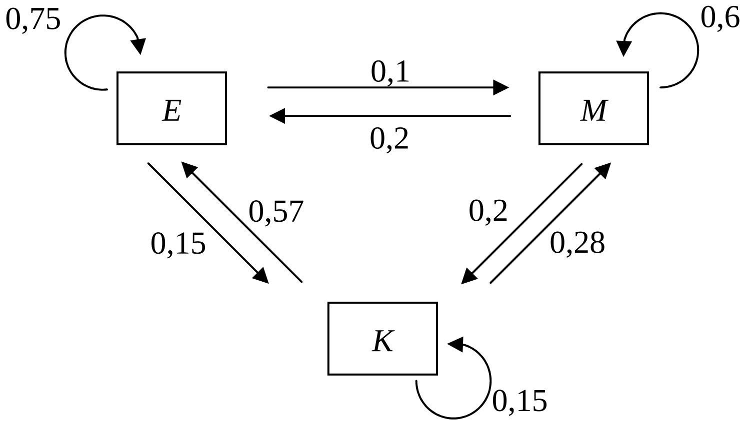
- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)



$$
\begin{array}{r|l}
 & \textit{von:}\quad E \qquad M \qquad K \\
\hline
\textit{nach:}\ E & \\
M & \boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}2 & 0{,}57 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}28 \\ 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}15 \end{pmatrix} \\
K &
\end{array}
$$

Modelllösung b)

(1) Als Änderungen können angegeben werden:

- Kunden, die in einem Jahr genau einen Urlaub gebucht haben, buchen im Folgejahr häufiger als früher auch nur einen Urlaub.
- Kunden, die in einem Jahr nur einen Urlaub gebucht haben, pausieren im Folgejahr seltener als früher.
- Kunden, die in einem Jahr pausiert haben, buchen im Folgejahr häufiger als früher genau einen Urlaub.
- Kunden, die in einem Jahr pausiert haben, buchen im Folgejahr häufiger als früher zwei oder mehr Urlaube.
- Kunden, die in einem Jahr pausiert haben, pausieren im Folgejahr seltener als früher.

[Auch kurz gefasste Antworten wie z. B. „Übergang von E nach E zugenommen“ werden als richtig akzeptiert. Es genügen drei der aufgeführten Änderungen. Quantifizierungen sind nicht erforderlich.]

(2) $\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2624 \\ 1206 \\ 570 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2682,4 \\ 1157 \\ 560,6 \end{pmatrix}$

Für das Jahr 2012 wird erwartet, dass etwa 2682 Kunden genau einen Urlaub und etwa 1157 Kunden mehr als einen Urlaub buchen; für die restlichen etwa 561 Kunden wird erwartet, dass sie pausieren.

[Hier sind auch andere sinnvolle Rundungen akzeptabel.]

(3) Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 0{,}8\,x & + & 0{,}2\,y & + & 0{,}6\,z & = & 2624 \\ 0{,}1\,x & + & 0{,}6\,y & + & 0{,}3\,z & = & 1206 \\ 0{,}1\,x & + & 0{,}2\,y & + & 0{,}1\,z & = & 570 \end{array}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2624 \\ 1206 \\ 570 \end{pmatrix}$$

ist zu lösen. Dabei bezeichnet x die Anzahl der Kunden, die im Jahr 2010 genau einen Urlaub gebucht haben, y die Anzahl der Kunden, die im Jahr 2010 mehr als einen Urlaub buchten, und z die Anzahl der Kunden, die im Jahr 2010 keinen Urlaub buchten.

Als Lösung des linearen Gleichungssystems ergibt sich: $x = 2520$, $y = 1300$, $z = 580$.

Im Jahr 2010 buchten 2520 Kunden genau einen Urlaub, 1300 Kunden mehr als einen Urlaub, während 580 Kunden gar keinen Urlaub buchten.

Modelllösung c)

(1) Die Matrix $\boldsymbol{B} = \left(b_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & q \\ 0,1 & 0,6 & 0,95-q \\ 0,1 & 0,2 & 0,05 \end{pmatrix}$ mit $0 \le q \le 0,95$ unterscheidet sich von

der Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ im Element b_{33} und in mindestens einem der

Elemente $b_{13} = q$ und $b_{23} = 0,95-q$.

Das Element $b_{33} = 0,05$ gibt an, dass (nur noch) 5 % der Kunden der Gruppe K eines Jahres im Folgejahr ebenfalls keinen Urlaub buchen.

Das Element b_{13} gibt an, welcher Anteil der Kunden der Gruppe K eines Jahres im Folgejahr genau einen Urlaub bucht; das Element b_{23} gibt an, welcher Anteil der Kunden der Gruppe K eines Jahres im Folgejahr mehr als einen Urlaub bucht. Da b_{13} und b_{23} zusammen den Anteil der Kunden der Gruppe K eines Jahres angeben, der im Folgejahr nicht schon wieder pausiert, muss $b_{13} + b_{23} = 0,95$ gelten und aus $b_{13} \ge 0$ und $b_{23} \ge 0$ folgt $0 \le q \le 0,95$.

(2) Für die Anzahl der Kunden, die 2012 genau einen Urlaub buchen, gilt dann

$0,8 \cdot 2624 + 0,2 \cdot 1206 + q \cdot 570 = 2699$, also $q = \frac{1793}{2850} \approx 0,63$.

(3) Die Verteilung auf die Kundengruppen für das Jahr 2012 lässt sich in Abhängigkeit von *q* errechnen als

$$B \cdot \begin{pmatrix} 2624 \\ 1206 \\ 570 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & q \\ 0,1 & 0,6 & 0,95-q \\ 0,1 & 0,2 & 0,05 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2624 \\ 1206 \\ 570 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2340,4 + 570 \cdot q \\ 1527,5 - 570 \cdot q \\ 532,1 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich für ein festes *q* als zu erwartende Mindestanzahl an Buchungen für das Jahr 2012:

$(2340,4 + 570 \cdot q) \cdot 1 + (1527,5 - 570 \cdot q) \cdot 2 + 532,1 \cdot 0 = 5395,4 - 570 \cdot q$

Wegen $q \le 0,95$ beträgt dieser Wert mindestens $5395,4 - 570 \cdot 0,95 = 4853,9$.

Das Reisebüro kann bei dem angenommenen Buchungsverhalten mindestens 4853 Reisebuchungen erwarten.

Modelllösung d)

(1) 1. Aspekt:

Das Matrixelement in der 3. Zeile und 3. Spalte der Matrix $\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$ ist 0.

Das bedeutet, dass die Kunden, die im Vorjahr **und** im laufenden Jahr keinen Urlaub gebucht haben, bei der Anzahl der Kunden ohne Reisebuchung im laufenden Jahr nicht mehr berücksichtigt werden. Das sind 10 % der Kunden, die im Vorjahr keinen Urlaub gebucht haben. Kunden, die 2 Jahre nacheinander keinen Urlaub gebucht haben, werden aus der Stammkundendatei herausgenommen.

2. Aspekt:

Durch die Addition des Vektors $\begin{pmatrix} 45 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Matrixprodukt $\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ wird im Modell die Anzahl der Kunden, die genau einen bzw. mehr als einen Urlaub im betrachteten Jahr buchen, zusätzlich und unabhängig vom Buchungsverhalten des Vorjahres um 45 bzw. 12 erhöht. Auf diese Weise werden Kunden neu als Stammkunden erfasst.

(2) Das Gleichungssystem $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 45 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist zu lösen.

Äquivalent dazu ist das lineare Gleichungssystem $\begin{pmatrix} -0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & -0,4 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -45 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Als Lösungsvektor ergibt sich $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3190 \\ 1255 \\ 570 \end{pmatrix}$.

Bei 3190 Kunden, die pro Jahr genau einen Urlaub buchen, 1255 Kunden, die mehr als einen Urlaub im Jahr buchen, und 570 Kunden, die pausieren, bleibt die Anzahl der Kunden der einzelnen Gruppen E, M und K von Jahr zu Jahr gleich.

Interpretation:

Bei dieser Verteilung werden jedes Jahr die 10 % der 570 Kunden, die im Vorjahr und im laufenden Jahr keinen Urlaub gebucht haben, aus der Kundendatei herausgenommen. Auf der anderen Seite werden jährlich 45 + 12, also 57 Kunden neu in die Datei aufgenommen. Damit ergibt sich eine konstante Zahl der in der Datei insgesamt geführten Stammkunden.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	stellt das Buchungsverhalten der Kunden in einem Übergangsgraphen dar.	5
2	bestimmt eine Übergangsmatrix, die das Buchungsverhalten beschreibt.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) gibt drei Änderungen im Buchungsverhalten an, die gegenüber den früheren Jahren erkennbar sind.	3
2	(2) bestimmt die zu erwartende Verteilung für das Jahr 2012.	3
3	(3) ermittelt einen Lösungsansatz für die Verteilung für das Jahr 2010.	2
4	(3) bestimmt die Verteilung für das Jahr 2010.	6
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) erklärt, dass das Buchungsverhalten durch die Matrix $\boldsymbol{B}$ beschrieben werden kann.	4
2	(2) ermittelt den Wert von q.	3
3	(3) berechnet die Verteilung auf die Kundengruppen für das Jahr 2012 in Abhängigkeit von q.	4
4	(3) ermittelt den absoluten Mindestwert.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) erklärt zwei verschiedene Aspekte, unter denen die Aktualisierung der Stammkundendatei erfolgt.	4
2	(2) ermittelt das zugehörige Gleichungssystem.	2
3	(2) berechnet die Lösung des Gleichungssystems.	4
4	(2) interpretiert die Lösung im Sachzusammenhang.	2
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	stellt das Buchungsverhalten …	5			
2	bestimmt eine Übergangsmatrix …	5			
sachlich richtige Alternativen: (10) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**10**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt drei Änderungen …	3			
2	(2) bestimmt die zu …	3			
3	(3) ermittelt einen Lösungsansatz …	2			
4	(3) bestimmt die Verteilung …	6			
sachlich richtige Alternativen: (14) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**14**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) erklärt, dass das …	4			
2	(2) ermittelt den Wert …	3			
3	(3) berechnet die Verteilung …	4			
4	(3) ermittelt den absoluten …	3			
sachlich richtige Alternativen: (14) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**14**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) erklärt zwei verschiedene …	4			
2	(2) ermittelt das zugehörige …	2			
3	(2) berechnet die Lösung …	4			
4	(2) interpretiert die Lösung …	2			
sachlich richtige Alternativen: (12) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe d)	**12**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**150**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ____________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: ______________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Sogenannte Smartphones werden immer beliebter. Ein Sechstel aller Handy-Besitzer (ca. 10 Millionen) besitzt ein Smartphone.
Im Folgenden sollen die genannten Anteile auch als Wahrscheinlichkeiten verwendet werden.

a) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:*

E_1: *Unter 100 zufällig ausgewählten Handy-Besitzern haben genau 15 ein Smartphone.*

E_2: *Unter 200 zufällig ausgewählten Handy-Besitzern besitzen mindestens 25 ein Smartphone.*

E_3: *Unter 200 zufällig ausgewählten Handy-Besitzern besitzen mindestens 32 und höchstens 38 ein Smartphone.*

(8 Punkte)

In der Produktion eines führenden Herstellers werden 4 % aller Geräte fehlerhaft hergestellt. Es wird einfachheitshalber angenommen, dass die Fehler zufällig und unabhängig voneinander auftreten.

b) *Bestimmen Sie die Anzahl von Geräten, die der laufenden Produktion mindestens entnommen werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens ein fehlerhaftes Gerät zu erhalten.*

(5 Punkte)

Name: ____________________

c) Durch eine Produktionsumstellung konnte der Fehleranteil auf 2 % gesenkt werden. Bei einer Charge, die vor zwei Wochen produziert wurde, fehlte die Information, ob es sich bereits um eine bessere mit nur 2 % Ausschuss handelt oder um eine mit 4 % Ausschuss. Um dies zu entscheiden, wurde eine Stichprobe von 200 Smartphones ausgewählt und die Anzahl der defekten Smartphones in der Stichprobe gezählt.
Als Entscheidungsregel wurde festgelegt:
Befinden sich in der Stichprobe mehr als 5 defekte Smartphones, wird angenommen, dass es sich um eine Charge aus der Produktion mit 4 % Ausschuss handelt, sonst um eine aus der Produktion mit 2 % Ausschuss.

Beschreiben Sie, welche beiden Fehler bei dieser Entscheidungsregel auftreten können, und bestimmen Sie deren Wahrscheinlichkeit.

(8 Punkte)

d) Da der Anteil der defekten Smartphones mit 2 % immer noch zu hoch ist, wird nun ein Prüfgerät eingesetzt, das defekte Smartphones mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % erkennt, allerdings auch 0,1 % der funktionsfähigen Smartphones als defekt einstuft.

(1) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein von dem Prüfgerät als defekt eingestuftes Smartphone in Wirklichkeit nicht defekt ist.*

(2) Ein Prüfgerät für Smartphones kostet 10 000 €.

Bestimmen Sie die Anzahl der Smartphones, ab der sich die Anschaffung des Prüfgerätes lohnt, wenn die Reklamation und Ersetzung eines defekten Smartphones Kosten von 110 € und ein zu Unrecht aussortiertes Smartphone Kosten von 100 € verursacht.

(12 Punkte)

Name: ____________________

e) Die Herstellerfirma rechtfertigte die letzte Preiserhöhung mit der Behauptung, dass nach einer Verbesserung der Produktion nun maximal 1 % aller Smartphones defekt sind. Ein Großhändler, der von der Preiserhöhung betroffen ist, bezweifelt diese Behauptung und möchte sie daher mit Hilfe eines Hypothesentests überprüfen. Er entnimmt dazu der Lieferung zufällig eine Stichprobe von 1000 Stück und testet die Hypothese $H_0: p \leq 0{,}01$.

(1) *Ermitteln Sie eine Entscheidungsregel für die angegebene Hypothese auf Grundlage der Stichprobe mit einem Signifikanzniveau von* $\alpha = 0{,}05$.

(2) *Beschreiben Sie im Sachzusammenhang, welchen Fehler der Großhändler durch die Wahl der Hypothese möglichst vermeiden wollte.*

(3) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers 2. Art für den Fall, dass der Ausschussanteil unverändert bei 2 % liegt.*

(4) Die Wahrscheinlichkeit aus (3) erscheint dem Großhändler unakzeptabel hoch.

Beschreiben Sie zwei unterschiedliche Möglichkeiten, diesen Test so zu verändern, dass die Wahrscheinlichkeit aus (3) bei gleichbleibender H_0*-Hypothese verringert werden kann.*

[Hinweis: Hier ist keine Rechnung verlangt.]

(17 Punkte)

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Tabelle 1: σ-Regeln für Binomialverteilungen

Eine mit den Parametern n und p binomialverteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.
Wenn die LAPLACE-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist, gelten die σ-Regeln:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}683$	$P(\mu - 1{,}64\sigma < X < \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}90$
$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$	$P(\mu - 1{,}96\sigma < X < \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}95$
$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$	$P(\mu - 2{,}58\sigma < X < \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}99$

Name: ____________________

Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 10 und *n* = 20

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

						p						
n	*k*	0,02	0,05	0,08	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,5		*n*
10	0	0,8171	0,5987	0,4344	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010	9	10
	1	0,9838	0,9139	0,8121	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107	8	
	2	0,9991	0,9885	0,9599	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547	7	
	3		0,9990	0,9942	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719	6	
	4		0,9999	0,9994	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770	5	
	5				0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230	4	
	6					0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,8281	3	
	7						0,9999	0,9996	0,9984	0,9453	2	
	8	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000							0,9999	0,9893	1	
	9									0,9990	0	
20	0	0,6676	0,3585	0,1887	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	19	20
	1	0,9401	0,7358	0,5169	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000	18	
	2	0,9929	0,9245	0,7879	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002	17	
	3	0,9994	0,9841	0,9294	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013	16	
	4		0,9974	0,9817	0,9568	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059	15	
	5		0,9997	0,9962	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207	14	
	6			0,9994	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577	13	
	7			0,9999	0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316	12	
	8				0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517	11	
	9					0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,4119	10	
	10						0,9994	0,9961	0,9829	0,5881	9	
	11						0,9999	0,9991	0,9949	0,7483	8	
	12							0,9998	0,9987	0,8684	7	
	13								0,9997	0,9423	6	
	14									0,9793	5	
	15	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000								0,9941	4	
	16									0,9987	3	
	17									0,9998	2	
n		0,98	0,95	0,92	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,5	*k*	*n*
						p						

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 3: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 50

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

						p						
n	*k*	0,02	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		*n*
	0	0,3642	0,0769	0,0052	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	49	
	1	0,7358	0,2794	0,0338	0,0029	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	48	
	2	0,9216	0,5405	0,1117	0,0142	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	47	
	3	0,9822	0,7604	0,2503	0,0460	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	46	
	4	0,9968	0,8964	0,4312	0,1121	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	45	
	5	0,9995	0,9622	0,6161	0,2194	0,0480	0,0070	0,0007	0,0000	0,0000	44	
	6	0,9999	0,9882	0,7702	0,3613	0,1034	0,0194	0,0025	0,0000	0,0000	43	
	7		0,9968	0,8779	0,5188	0,1904	0,0453	0,0073	0,0001	0,0000	42	
	8		0,9992	0,9421	0,6681	0,3073	0,0916	0,0183	0,0002	0,0000	41	
	9		0,9998	0,9755	0,7911	0,4437	0,1637	0,0402	0,0008	0,0000	40	
	10			0,9906	0,8801	0,5836	0,2622	0,0789	0,0022	0,0000	39	
	11			0,9968	0,9372	0,7107	0,3816	0,1390	0,0057	0,0000	38	
	12			0,9990	0,9699	0,8139	0,5110	0,2229	0,0133	0,0002	37	
	13			0,9997	0,9868	0,8894	0,6370	0,3279	0,0280	0,0005	36	
	14			0,9999	0,9947	0,9393	0,7481	0,4468	0,0540	0,0013	35	
	15				0,9981	0,9692	0,8369	0,5692	0,0955	0,0033	34	
	16				0,9993	0,9856	0,9017	0,6839	0,1561	0,0077	33	
	17				0,9998	0,9937	0,9449	0,7822	0,2369	0,0164	32	
50	18				0,9999	0,9975	0,9713	0,8594	0,3356	0,0325	31	50
	19					0,9991	0,9861	0,9152	0,4465	0,0595	30	
	20					0,9997	0,9937	0,9522	0,5610	0,1013	29	
	21					0,9999	0,9974	0,9749	0,6701	0,1611	28	
	22						0,9990	0,9877	0,7660	0,2399	27	
	23						0,9996	0,9944	0,8438	0,3359	26	
	24						0,9999	0,9976	0,9022	0,4439	25	
	25							0,9991	0,9427	0,5561	24	
	26							0,9997	0,9686	0,6641	23	
	27							0,9999	0,9840	0,7601	22	
	28								0,9924	0,8389	21	
	29								0,9966	0,8987	20	
	30								0,9986	0,9405	19	
	31								0,9995	0,9675	18	
	32								0,9998	0,9836	17	
	33								0,9999	0,9923	16	
	34									0,9967	15	
	35			Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000						0,9987	14	
	36									0,9995	13	
	37									0,9998	12	
n		0,98	0,95	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	*k*	*n*
						p						

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 4: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 100

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	*k*	*p* = 0,02	0,05	0,08	0,1	0,15	1/6	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		*n*
	0	0,1326	0,0059	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	99	
	1	0,4033	0,0371	0,0023	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	98	
	2	0,6767	0,1183	0,0113	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	97	
	3	0,8590	0,2578	0,0367	0,0078	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	96	
	4	0,9492	0,4360	0,0903	0,0237	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	95	
	5	0,9845	0,6160	0,1799	0,0576	0,0016	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	94	
	6	0,9959	0,7660	0,3032	0,1172	0,0047	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	93	
	7	0,9991	0,8720	0,4471	0,2061	0,0122	0,0038	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	92	
	8	0,9998	0,9369	0,5926	0,3209	0,0275	0,0095	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	91	
	9		0,9718	0,7220	0,4513	0,0551	0,0213	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	90	
	10		0,9885	0,8243	0,5832	0,0994	0,0427	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	89	
	11		0,9957	0,8972	0,7030	0,1635	0,0777	0,0126	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	88	
	12		0,9985	0,9441	0,8018	0,2473	0,1297	0,0253	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	87	
	13		0,9995	0,9718	0,8761	0,3474	0,2000	0,0469	0,0025	0,0001	0,0000	0,0000	86	
	14		0,9999	0,9867	0,9274	0,4572	0,2874	0,0804	0,0054	0,0002	0,0000	0,0000	85	
	15			0,9942	0,9601	0,5683	0,3877	0,1285	0,0111	0,0004	0,0000	0,0000	84	
	16			0,9976	0,9794	0,6725	0,4942	0,1923	0,0211	0,0010	0,0000	0,0000	83	
	17			0,9991	0,9900	0,7633	0,5994	0,2712	0,0376	0,0022	0,0000	0,0000	82	
	18			0,9997	0,9954	0,8372	0,6965	0,3621	0,0630	0,0045	0,0000	0,0000	81	
	19			0,9999	0,9980	0,8935	0,7803	0,4602	0,0995	0,0089	0,0000	0,0000	80	
	20				0,9992	0,9337	0,8481	0,5595	0,1488	0,0165	0,0000	0,0000	79	
	21				0,9997	0,9607	0,8998	0,6540	0,2114	0,0288	0,0000	0,0000	78	
	22				0,9999	0,9779	0,9369	0,7389	0,2864	0,0479	0,0001	0,0000	77	
	23					0,9881	0,9621	0,8109	0,3711	0,0755	0,0003	0,0000	76	
	24					0,9939	0,9783	0,8686	0,4617	0,1136	0,0006	0,0000	75	
	25					0,9970	0,9881	0,9125	0,5535	0,1631	0,0012	0,0000	74	
	26					0,9986	0,9938	0,9442	0,6417	0,2244	0,0024	0,0000	73	
	27					0,9994	0,9969	0,9658	0,7224	0,2964	0,0046	0,0000	72	
	28					0,9997	0,9985	0,9800	0,7925	0,3768	0,0084	0,0000	71	
	29					0,9999	0,9993	0,9888	0,8505	0,4623	0,0148	0,0000	70	
	30						0,9997	0,9939	0,8962	0,5491	0,0248	0,0000	69	
	31						0,9999	0,9969	0,9307	0,6331	0,0398	0,0001	68	
	32							0,9984	0,9554	0,7107	0,0615	0,0002	67	
	33							0,9993	0,9724	0,7793	0,0913	0,0004	66	
100	34							0,9997	0,9836	0,8371	0,1303	0,0009	65	100
	35							0,9999	0,9906	0,8839	0,1795	0,0018	64	
	36							0,9999	0,9948	0,9201	0,2386	0,0033	63	
	37								0,9973	0,9470	0,3068	0,0060	62	
	38								0,9986	0,9660	0,3822	0,0105	61	
	39								0,9993	0,9790	0,4621	0,0176	60	
	40								0,9997	0,9875	0,5433	0,0284	59	
	41								0,9999	0,9928	0,6225	0,0443	58	
	42								0,9999	0,9960	0,6967	0,0666	57	
	43									0,9979	0,7635	0,0967	56	
	44									0,9989	0,8211	0,1356	55	
	45									0,9995	0,8689	0,1841	54	
	46									0,9997	0,9070	0,2421	53	
	47									0,9999	0,9362	0,3086	52	
	48									0,9999	0,9577	0,3822	51	
	49										0,9729	0,4602	50	
	50										0,9832	0,5398	49	
	51										0,9900	0,6178	48	
	52										0,9942	0,6914	47	
	53										0,9968	0,7579	46	
	54										0,9983	0,8159	45	
	55										0,9991	0,8644	44	
	56										0,9996	0,9033	43	
	57										0,9998	0,9334	42	
	58										0,9999	0,9557	41	
	59											0,9716	40	
	60											0,9824	39	
	61											0,9895	38	
	62											0,9940	37	
	63											0,9967	36	
	64											0,9982	35	
	65											0,9991	34	
	66											0,9996	33	
	67											0,9998	32	
	68											0,9999	31	
n		*p* = 0,98	0,95	0,92	0,9	0,85	5/6	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	*k*	*n*

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ______________________

Tabelle 5: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 200

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \dots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \dots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

		p							
n	*k*	0,02	0,04	0,05	0,1	1/6	0,2		*n*
	0	0,0176	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	199	
	1	0,0894	0,0027	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	198	
	2	0,2351	0,0125	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	197	
	3	0,4315	0,0395	0,0090	0,0000	0,0000	0,0000	196	
	4	0,6288	0,0950	0,0264	0,0000	0,0000	0,0000	195	
	5	0,7867	0,1856	0,0623	0,0000	0,0000	0,0000	194	
	6	0,8914	0,3084	0,1237	0,0001	0,0000	0,0000	193	
	7	0,9507	0,4501	0,2133	0,0005	0,0000	0,0000	192	
	8	0,9798	0,5926	0,3270	0,0014	0,0000	0,0000	191	
	9	0,9925	0,7192	0,4547	0,0035	0,0000	0,0000	190	
	10	0,9975	0,8200	0,5831	0,0081	0,0000	0,0000	189	
	11	0,9992	0,8925	0,6998	0,0168	0,0000	0,0000	188	
	12	0,9998	0,9401	0,7965	0,0320	0,0000	0,0000	187	
	13	0,9999	0,9688	0,8701	0,0566	0,0000	0,0000	186	
	14		0,9848	0,9219	0,0929	0,0000	0,0000	185	
	15		0,9930	0,9556	0,1431	0,0001	0,0000	184	
	16		0,9970	0,9762	0,2075	0,0003	0,0000	183	
	17		0,9988	0,9879	0,2849	0,0006	0,0000	182	
	18		0,9995	0,9942	0,3724	0,0013	0,0000	181	
	19		0,9998	0,9973	0,4655	0,0027	0,0000	180	
	20		0,9999	0,9988	0,5592	0,0052	0,0001	179	
	21			0,9995	0,6484	0,0094	0,0002	178	
	22			0,9998	0,7290	0,0163	0,0005	177	
	23			0,9999	0,7983	0,0269	0,0010	176	
	24				0,8551	0,0426	0,0020	175	
	25				0,8995	0,0648	0,0036	174	
	26				0,9328	0,0945	0,0064	173	
	27				0,9566	0,1329	0,0110	172	
	28				0,9729	0,1803	0,0179	171	
	29				0,9837	0,2366	0,0283	170	
	30				0,9905	0,3007	0,0430	169	
200	31				0,9946	0,3711	0,0632	168	200
	32				0,9971	0,4454	0,0899	167	
	33				0,9985	0,5210	0,1239	166	
	34				0,9992	0,5953	0,1656	165	
	35				0,9996	0,6658	0,2151	164	
	36				0,9998	0,7305	0,2717	163	
	37				0,9999	0,7877	0,3345	162	
	38					0,8369	0,4019	161	
	39					0,8777	0,4718	160	
	40					0,9106	0,5422	159	
	41					0,9362	0,6108	158	
	42					0,9556	0,6758	157	
	43					0,9699	0,7355	156	
	44					0,9801	0,7887	155	
	45					0,9872	0,8349	154	
	46					0,9919	0,8738	153	
	47					0,9950	0,9056	152	
	48					0,9970	0,9310	151	
	49					0,9983	0,9506	150	
	50					0,9990	0,9655	149	
	51					0,9995	0,9764	148	
	52					0,9997	0,9843	147	
	53					0,9998	0,9897	146	
	54					0,9999	0,9934	145	
	55						0,9959	144	
	56						0,9975	143	
	57						0,9985	142	
	58						0,9991	141	
	59						0,9995	140	
	60						0,9997	139	
	61						0,9998	138	
	62						0,9999	137	
n		0,98	0,96	0,95	0,9	5/6	0,8	*k*	*n*
		p							

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dezimalen) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 6: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 1000

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

					p					
n	*k*	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04		*n*
	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	999	
	1	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	998	
	2	0,0027	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	997	
	3	0,0101	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	996	
	4	0,0287	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	995	
	5	0,0661	0,0026	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	994	
	6	0,1289	0,0073	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	993	
	7	0,2189	0,0174	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	992	
	8	0,3317	0,0364	0,0019	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	991	
	9	0,4573	0,0684	0,0047	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	990	
	10	0,5830	0,1166	0,0102	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	989	
	11	0,6974	0,1828	0,0204	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	988	
	12	0,7925	0,2657	0,0376	0,0029	0,0001	0,0000	0,0000	987	
	13	0,8656	0,3618	0,0642	0,0060	0,0003	0,0000	0,0000	986	
	14	0,9176	0,4649	0,1025	0,0116	0,0008	0,0000	0,0000	985	
	15	0,9521	0,5681	0,1539	0,0211	0,0017	0,0001	0,0000	984	
	16	0,9736	0,6649	0,2185	0,0360	0,0035	0,0002	0,0000	983	
	17	0,9862	0,7501	0,2947	0,0582	0,0066	0,0005	0,0000	982	
	18	0,9931	0,8211	0,3797	0,0893	0,0119	0,0010	0,0001	981	
	19	0,9967	0,8769	0,4694	0,1304	0,0204	0,0020	0,0001	980	
	20	0,9985	0,9186	0,5591	0,1822	0,0333	0,0038	0,0003	979	
	21	0,9993	0,9482	0,6446	0,2442	0,0519	0,0068	0,0006	978	
	22	0,9997	0,9683	0,7222	0,3149	0,0774	0,0116	0,0012	977	
	23	0,9999	0,9813	0,7895	0,3919	0,1110	0,0191	0,0022	976	
	24		0,9894	0,8455	0,4724	0,1534	0,0302	0,0039	975	
	25		0,9942	0,8901	0,5529	0,2045	0,0458	0,0067	974	
	26		0,9969	0,9242	0,6304	0,2637	0,0670	0,0110	973	
	27		0,9984	0,9493	0,7020	0,3299	0,0948	0,0175	972	
	28		0,9992	0,9671	0,7658	0,4009	0,1299	0,0270	971	
	29		0,9996	0,9793	0,8207	0,4746	0,1725	0,0402	970	
	30		0,9998	0,9874	0,8662	0,5484	0,2225	0,0580	969	
	31		0,9999	0,9925	0,9027	0,6197	0,2793	0,0812	968	
	32			0,9957	0,9311	0,6866	0,3416	0,1105	967	
	33			0,9976	0,9524	0,7472	0,4079	0,1463	966	
1000	34			0,9987	0,9680	0,8005	0,4763	0,1887	965	1000
	35			0,9993	0,9790	0,8461	0,5448	0,2374	964	
	36			0,9996	0,9865	0,8838	0,6114	0,2919	963	
	37			0,9998	0,9916	0,9142	0,6743	0,3511	962	
	38			0,9999	0,9949	0,9381	0,7321	0,4135	961	
	39				0,9969	0,9563	0,7839	0,4777	960	
	40				0,9982	0,9698	0,8289	0,5419	959	
	41				0,9990	0,9796	0,8672	0,6046	958	
	42				0,9994	0,9865	0,8989	0,6642	957	
	43				0,9997	0,9912	0,9246	0,7196	956	
	44				0,9998	0,9944	0,9448	0,7698	955	
	45				0,9999	0,9965	0,9603	0,8142	954	
	46					0,9979	0,9721	0,8526	953	
	47					0,9987	0,9807	0,8851	952	
	48					0,9993	0,9869	0,9119	951	
	49					0,9996	0,9913	0,9337	950	
	50					0,9998	0,9943	0,9509	949	
	51					0,9999	0,9964	0,9643	948	
	52					0,9999	0,9977	0,9745	947	
	53						0,9986	0,9821	946	
	54						0,9991	0,9876	945	
	55						0,9995	0,9916	944	
	56						0,9997	0,9944	943	
	57						0,9998	0,9963	942	
	58						0,9999	0,9976	941	
	59						0,9999	0,9985	940	
	60							0,9991	939	
	61							0,9994	938	
	62							0,9996	937	
	63							0,9998	936	
	64							0,9999	935	
	65							0,9999	934	
n		0,99	0,985	0,98	0,975	0,97	0,965	0,96	*k*	*n*
					p					

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$ gilt: $F(n;p;k) = 1 - \text{abgelesener Wert}$

Name: ____________________

Tabelle 7: Normalverteilung

$\phi(z) = 0,...$

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$\phi(2,32) = 0,9898$

$\phi(-0,9) = 1 - \phi(0,9) = 0,1841$

$\phi(z) = 0,994 \Rightarrow z = 2,51$

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Stochastik mit Alternative 1 (ein- und zweiseitiger Hypothesentest)

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2012

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
   - Binomialverteilung und Normalverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung

   Alternative 1:
   - Ein- und zweiseitiger Hypothesentest

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der Personen, die ein Smartphone besitzen.

X sei binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = \frac{1}{6}$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt:

$P(X=15) = \binom{100}{15} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{15} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{85} \approx 0{,}1002$ [$\approx 0{,}3877 - 0{,}2874 = 0{,}1003$ bei Verwendung der Tabelle]

Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der Personen, die ein Smartphone besitzen.

X sei binomialverteilt mit $n = 200$ und $p = \frac{1}{6}$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt:

$$P(X \geq 25) = 1 - P(X \leq 24) = 1 - \sum_{k=0}^{24} \binom{200}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{k} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{200-k}$$
$$\approx 0{,}9574.$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_3 beträgt:

$$P(32 \leq X \leq 38) = P(X \leq 38) - P(X \leq 31)$$
$$\overset{Tabelle}{\approx} 0{,}8369 - 0{,}3711 = 0{,}4658.$$

Modelllösung b)

Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der fehlerhaften Smartphones. X ist dann binomialverteilt mit den Parametern n und $p = 0{,}04$. Es soll gelten:

$$P(X \geq 1) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 0{,}96^n \leq 0{,}01$$
$$\Rightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}96)} \approx 112{,}81.$$

Es müssen also mindestens 113 Smartphones entnommen werden.

Modelllösung c)

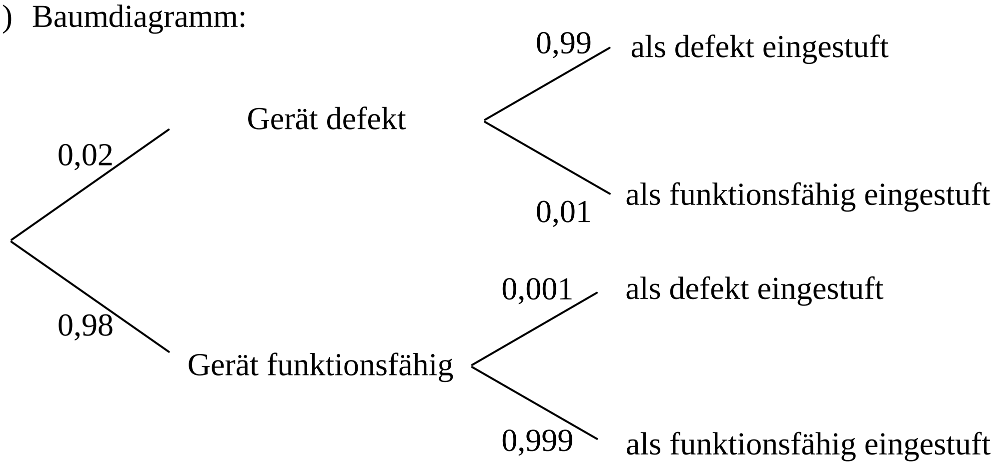
Bezeichnet die Zufallsgröße X die Anzahl der defekten Smartphones in der Lieferung, so kann man X als binomialverteilt annehmen mit $n = 200$ und unbekanntem $p \in \{0,02; 0,04\}$.

Möglich sind die beiden folgenden Fehler:

1. Es handelt sich um eine Charge aus der Produktion mit einem Ausschussanteil von 2 %. Zufällig findet man in der Stichprobe aber mehr als 5 defekte Smartphones und stuft die Charge daher fälschlich als 4 %-Ausschuss ein.
   Die Wahrscheinlichkeit für diesen Fehler beträgt:
   $$P_{p=0,02}(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) \overset{\text{Tabelle}}{\approx} 0,2133 .$$
2. Es handelt sich um eine Charge aus der Produktion mit einem Ausschussanteil von 4 %. Zufällig findet man in der Stichprobe aber weniger als 6 defekte Smartphones und stuft die Charge daher fälschlich als 2 %-Ausschuss ein.
   Die Wahrscheinlichkeit für diesen Fehler beträgt:
   $$P_{p=0,04}(X \leq 5) \overset{\text{Tabelle}}{\approx} 0,1856 .$$

Modelllösung d)

(1) Baumdiagramm:



Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also:

$$P_{\text{als defekt eingestuft}}(\text{nicht defekt}) = \frac{0,98 \cdot 0,001}{0,02 \cdot 0,99 + 0,98 \cdot 0,001} \approx 0,047 .$$

(2) Ursprünglich entstanden Kosten bei *n* Smartphones und einem Defektanteil von 2 % in Höhe von:

$K_1 = n \cdot 0{,}02 \cdot 110$ €.

Bei Einsatz des Prüfgeräts treten Fixkosten von 10.000 € auf. Die nicht erkannten defekten Smartphones haben einen Anteil an der gesamten ausgelieferten Menge von $0{,}02 \cdot 0{,}01 = 0{,}0002 = 0{,}02$ %.

Sie verursachen Kosten in Höhe von

$K_2 = n \cdot 0{,}0002 \cdot 110$ €.

Ein zu Unrecht aussortiertes Smartphone verursacht 100 € Kosten.

Also: $K_3 = n \cdot 0{,}00098 \cdot 100$ €.

Das gesuchte *n* erhält man also aus dem Ansatz:

$n \cdot 0{,}02 \cdot 110 \geq 10000 + n \cdot 0{,}0002 \cdot 110 + n \cdot 0{,}00098 \cdot 100$

$\Leftrightarrow .... \Leftrightarrow n \geq 4807{,}69$

d. h., ab der Herstellung von ca. 4 808 Smartphones lohnt sich die Anschaffung des Prüfgeräts.

Modelllösung e)

(1) Die Zufallsgröße *X* gibt die Anzahl der defekten Smartphones in der Stichprobe an. Dann kann *X* als binomialverteilt angenommen werden mit Trefferwahrscheinlichkeit *p* = 1 % und Stichprobenanzahl *n* = 1000.

Der Erwartungswert von *X* beträgt $\mu = 1000 \cdot 0{,}01 = 10$, die Standardabweichung

$\sigma = \sqrt{1000 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99} \approx 3{,}146 > 3$.

Also ist die Laplace-Bedingung erfüllt und es gilt näherungsweise:

$P_{H_0}\left(X \leq \mu + 1{,}64 \cdot \sigma\right) \geq 0{,}95$ und es ist $\mu + 1{,}64 \cdot \sigma \approx 15{,}16$.

Als Entscheidungsregel erhält man:

Die Hypothese H_0 wird genau dann abgelehnt, wenn $X \geq 16$, ansonsten wird die Hypothese beibehalten.

(2) Der Großhändler möchte den Fehler 1. Art vermeiden, nämlich dass gilt: Die Hypothese des Herstellers $p \leq 0{,}01$ ist wahr, wird aber aufgrund einer zufällig hohen Anzahl defekter Smartphones fälschlicherweise verworfen.

(3) Der Fehler 2. Art beträgt:

$$P_{p=0{,}02}(X \le 15) = \sum_{k=0}^{15} \binom{1000}{k} \cdot 0{,}02^k \cdot 0{,}98^{1000-k} \overset{Tabelle}{\approx} 0{,}1539 \,.$$

(4) Es gibt zwei Prinzipien, wie der Fehler verringert werden kann:
Entweder durch eine Vergrößerung des Stichprobenumfangs n oder durch Erhöhung des Signifikanzniveaus α (oder durch eine Kombination beider Maßnahmen).
Weitere sinnvolle Möglichkeiten (z. B. Randomisierung) werden ebenfalls akzeptiert.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass genau 15 Handy-Besitzer ein Smartphone haben.	2
2	berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 25 Handy-Besitzer ein Smartphone besitzen.	3
3	berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 32 und höchstens 38 Handy-Besitzer ein Smartphone besitzen.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	bestimmt die Anzahl der Smartphones, die der Produktion mindestens entnommen werden müssen.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	beschreibt die beiden möglichen Fehler.	4
2	bestimmt deren Wahrscheinlichkeiten.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) bestimmt die Wahrscheinlichkeit für ein fälschlicherweise als defekt aussortiertes Smartphone.	5
2	(2) ermittelt einen Ansatz zur Bestimmung der gesuchten Anzahl.	4
3	(2) berechnet die gesuchte Anzahl.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) ermittelt eine Entscheidungsregel.	5
2	(2) beschreibt den zu vermeidenden Fehler 1. Art im Sachzusammenhang.	4
3	(3) berechnet den Fehler 2. Art.	4
4	(4) beschreibt die beiden sinnvollen Möglichkeiten einer Veränderung des Tests.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK[2]	ZK	DK
1	berechnet die Wahrscheinlichkeit …	2			
2	berechnet die Wahrscheinlichkeit …	3			
3	berechnet die Wahrscheinlichkeit …	3			
sachlich richtige Alternativen: (8) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**8**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	bestimmt die Anzahl …	5			
sachlich richtige Alternativen: (5) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**5**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	beschreibt die beiden …	4			
2	bestimmt deren Wahrscheinlichkeiten.	4			
sachlich richtige Alternativen: (8) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**8**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die Wahrscheinlichkeit …	5			
2	(2) ermittelt einen Ansatz …	4			
3	(2) berechnet die gesuchte …	3			
sachlich richtige Alternativen: (12) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**12**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt eine Entscheidungsregel.	5			
2	(2) beschreibt den zu …	4			
3	(3) berechnet den Fehler …	4			
4	(4) beschreibt die beiden …	4			
sachlich richtige Alternativen: (17) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**17**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**150**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0

Name: ____________________

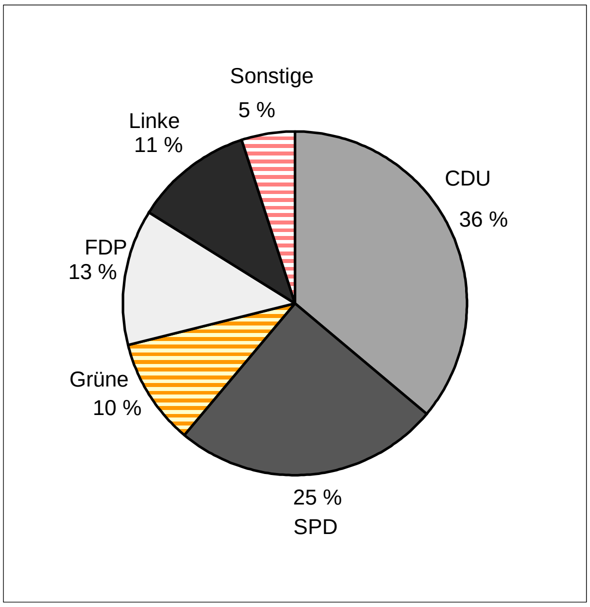
Abiturprüfung 2012

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Die sogenannte Sonntagsfrage gibt an, mit welchen Prozentanteilen die einzelnen Parteien rechnen könnten, wenn diesen Sonntag Bundestagswahl wäre.

Bei der Sonntagsfrage des ZDF-Politbarometers vom 18. September 2009 ergab sich folgendes Stichprobenergebnis (befragt wurden 1352 zufällig ausgewählte Personen, repräsentativ für die wahlberechtigte Bevölkerung in Deutschland):



(Werte gerundet)
Quelle: http://politbarometer.zdf.de

Name: ____________________

Im Folgenden sollen die genannten Anteile auch als Wahrscheinlichkeiten verwendet werden.

a) Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der Wahlberechtigten, die am auf die Umfrage folgenden Sonntag die genannte Partei wählen würden.

(1) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 100 zufällig ausgewählten wahlberechtigten Bürgern mindestens 30 die SPD wählen würden.*

(2) *Berechnen Sie mit der Binomialverteilung die Wahrscheinlichkeit, dass von 200 zufällig ausgewählten wahlberechtigten Bürgern mindestens 8 und höchstens 18 Personen die Grünen wählen würden.*

(3) *Nennen Sie eine Bedingung, die erfüllt sein muss, damit die Normalverteilung als Annäherung an die Binomialverteilung benutzt werden kann.*
Bestimmen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit aus (2) mit der Normalverteilung.

(4) *Bestimmen Sie die Anzahl der Personen, die man mindestens befragen muss, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens eine Person findet, die die CDU wählen würde.*

(5) Ein Meinungsforschungsinstitut ermittelt seine Daten durch Telefonumfragen bei einer ausgewählten großen Anzahl von Personen, repräsentativ für die wahlberechtigte Bevölkerung in Deutschland. Ein Mitarbeiter befragt nacheinander sieben zufällig ausgewählte Personen dieses Personenkreises.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich genau drei Personen unter diesen sieben befinden, die die CDU wählen würden, und diese drei auch noch unmittelbar nacheinander befragt werden.

(20 Punkte)

b) Ein Wahlkampfmanager der Grünen gibt sich mit der alleinigen Nennung des Umfrageergebnisses von 10 % nicht zufrieden. Er möchte gerne die untere und obere Grenze des Intervalls angegeben bekommen, welches mit dem Umfrageergebnis verträglich ist.

Bestimmen Sie das 95 %-Konfidenzintervall für den unbekannten Anteil der Personen, die die Grünen wählen würden.

(10 Punkte)

Name: ____________________

c) Neun Tage nach der obigen Umfrage vom 18. September 2009 fand am 27. September 2009 die letzte Bundestagswahl statt. Das tatsächliche Wahlergebnis der FDP betrug dann 14,6 %.
Jemand behauptet: „Das Wahlergebnis wird stark durch kurzentschlossene Wähler beeinflusst. Umfragewerte vor der Wahl haben daher wenig Aussagekraft bezüglich des tatsächlichen Wahlausgangs.“
Prüfen Sie die Verträglichkeit des Umfrageergebnisses (13 %) mit dem tatsächlichen Wahlergebnis (14,6 %) und beurteilen Sie obige Behauptung bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 %.

(8 Punkte)

d) Folgende Legende wurde von der Forschungsgruppe Wahlen zum Politbarometer vom 18. September 2009 veröffentlicht (Quelle: politbarometer.zdf.de).

> „Die Umfragen zum Politbarometer wurden wie immer von der Mannheimer Forschungsgruppe Wahlen durchgeführt. Die Interviews wurden in der Zeit vom 15. bis 17. September 2009 bei 1352 zufällig ausgesuchten Wahlberechtigten telefonisch erhoben. Die Befragung ist repräsentativ für die wahlberechtigte Bevölkerung in ganz Deutschland. Der Fehlerbereich beträgt bei einem Parteianteil von 40 % rund +/– 3 Prozentpunkte und bei einem Parteianteil von 10 % rund +/– 2 Prozentpunkte.“

Aus den obigen Daten lässt sich für große Parteien (40 %) eine Sicherheitswahrscheinlichkeit von 97,56 % berechnen.

Ermitteln Sie aus den Daten auch für kleine Parteien (10 %) die Sicherheitswahrscheinlichkeit, die zu dem angegebenen Fehlerbereich passt.
[Kontrollergebnis: 98,58 %]

Vergleichen und interpretieren Sie die beiden Ergebnisse.

(12 Punkte)

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Tabelle 1: σ-Regeln für Binomialverteilungen

Eine mit den Parametern n und p binomialverteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.
Wenn die LAPLACE-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist, gelten die σ-Regeln:

$P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) \approx 0{,}683$	$P(\mu-1{,}64\sigma < X < \mu+1{,}64\sigma) \approx 0{,}90$
$P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) \approx 0{,}954$	$P(\mu-1{,}96\sigma < X < \mu+1{,}96\sigma) \approx 0{,}95$
$P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma) \approx 0{,}997$	$P(\mu-2{,}58\sigma < X < \mu+2{,}58\sigma) \approx 0{,}99$

Name: ______________________

Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 10 und *n* = 20

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	*k*	*p* = 0,02	0,05	0,08	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,5		*n*
10	0	0,8171	0,5987	0,4344	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010	9	10
	1	0,9838	0,9139	0,8121	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107	8	
	2	0,9991	0,9885	0,9599	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547	7	
	3		0,9990	0,9942	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719	6	
	4		0,9999	0,9994	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770	5	
	5				0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230	4	
	6					0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,8281	3	
	7						0,9999	0,9996	0,9984	0,9453	2	
	8	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000							0,9999	0,9893	1	
	9									0,9990	0	
20	0	0,6676	0,3585	0,1887	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	19	20
	1	0,9401	0,7358	0,5169	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000	18	
	2	0,9929	0,9245	0,7879	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002	17	
	3	0,9994	0,9841	0,9294	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013	16	
	4		0,9974	0,9817	0,9568	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059	15	
	5		0,9997	0,9962	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207	14	
	6			0,9994	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577	13	
	7			0,9999	0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316	12	
	8				0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517	11	
	9					0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,4119	10	
	10						0,9994	0,9961	0,9829	0,5881	9	
	11						0,9999	0,9991	0,9949	0,7483	8	
	12							0,9998	0,9987	0,8684	7	
	13								0,9997	0,9423	6	
	14									0,9793	5	
	15	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000								0,9941	4	
	16									0,9987	3	
	17									0,9998	2	
n		*p* = 0,98	0,95	0,92	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,5	*k*	*n*

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ______________________

Tabelle 3: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 50

$$F(n;p;k)=B(n;p;0)+\ldots+B(n;p;k) \;=\; \binom{n}{0}p^0\left(1-p\right)^{n-0}+\ldots+\binom{n}{k}p^k\left(1-p\right)^{n-k}$$

n	*k*	*p* = 0,02	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		*n*
	0	0,3642	0,0769	0,0052	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	49	
	1	0,7358	0,2794	0,0338	0,0029	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	48	
	2	0,9216	0,5405	0,1117	0,0142	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	47	
	3	0,9822	0,7604	0,2503	0,0460	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	46	
	4	0,9968	0,8964	0,4312	0,1121	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	45	
	5	0,9995	0,9622	0,6161	0,2194	0,0480	0,0070	0,0007	0,0000	0,0000	44	
	6	0,9999	0,9882	0,7702	0,3613	0,1034	0,0194	0,0025	0,0000	0,0000	43	
	7		0,9968	0,8779	0,5188	0,1904	0,0453	0,0073	0,0001	0,0000	42	
	8		0,9992	0,9421	0,6681	0,3073	0,0916	0,0183	0,0002	0,0000	41	
	9		0,9998	0,9755	0,7911	0,4437	0,1637	0,0402	0,0008	0,0000	40	
	10			0,9906	0,8801	0,5836	0,2622	0,0789	0,0022	0,0000	39	
	11			0,9968	0,9372	0,7107	0,3816	0,1390	0,0057	0,0000	38	
	12			0,9990	0,9699	0,8139	0,5110	0,2229	0,0133	0,0002	37	
	13			0,9997	0,9868	0,8894	0,6370	0,3279	0,0280	0,0005	36	
	14			0,9999	0,9947	0,9393	0,7481	0,4468	0,0540	0,0013	35	
	15				0,9981	0,9692	0,8369	0,5692	0,0955	0,0033	34	
	16				0,9993	0,9856	0,9017	0,6839	0,1561	0,0077	33	
	17				0,9998	0,9937	0,9449	0,7822	0,2369	0,0164	32	
50	18				0,9999	0,9975	0,9713	0,8594	0,3356	0,0325	31	50
	19					0,9991	0,9861	0,9152	0,4465	0,0595	30	
	20					0,9997	0,9937	0,9522	0,5610	0,1013	29	
	21					0,9999	0,9974	0,9749	0,6701	0,1611	28	
	22						0,9990	0,9877	0,7660	0,2399	27	
	23						0,9996	0,9944	0,8438	0,3359	26	
	24						0,9999	0,9976	0,9022	0,4439	25	
	25							0,9991	0,9427	0,5561	24	
	26							0,9997	0,9686	0,6641	23	
	27							0,9999	0,9840	0,7601	22	
	28								0,9924	0,8389	21	
	29								0,9966	0,8987	20	
	30								0,9986	0,9405	19	
	31								0,9995	0,9675	18	
	32								0,9998	0,9836	17	
	33								0,9999	0,9923	16	
	34									0,9967	15	
	35	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000								0,9987	14	
	36									0,9995	13	
	37									0,9998	12	
n		0,98	0,95	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5 = *p*	*k*	*n*

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ______________________

Tabelle 4: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 100

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

p

n	*k*	0,02	0,05	0,08	0,1	0,15	1/6	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		*n*
	0	0,1326	0,0059	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	99	
	1	0,4033	0,0371	0,0023	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	98	
	2	0,6767	0,1183	0,0113	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	97	
	3	0,8590	0,2578	0,0367	0,0078	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	96	
	4	0,9492	0,4360	0,0903	0,0237	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	95	
	5	0,9845	0,6160	0,1799	0,0576	0,0016	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	94	
	6	0,9959	0,7660	0,3032	0,1172	0,0047	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	93	
	7	0,9991	0,8720	0,4471	0,2061	0,0122	0,0038	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	92	
	8	0,9998	0,9369	0,5926	0,3209	0,0275	0,0095	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	91	
	9		0,9718	0,7220	0,4513	0,0551	0,0213	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	90	
	10		0,9885	0,8243	0,5832	0,0994	0,0427	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	89	
	11		0,9957	0,8972	0,7030	0,1635	0,0777	0,0126	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	88	
	12		0,9985	0,9441	0,8018	0,2473	0,1297	0,0253	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	87	
	13		0,9995	0,9718	0,8761	0,3474	0,2000	0,0469	0,0025	0,0001	0,0000	0,0000	86	
	14		0,9999	0,9867	0,9274	0,4572	0,2874	0,0804	0,0054	0,0002	0,0000	0,0000	85	
	15			0,9942	0,9601	0,5683	0,3877	0,1285	0,0111	0,0004	0,0000	0,0000	84	
	16			0,9976	0,9794	0,6725	0,4942	0,1923	0,0211	0,0010	0,0000	0,0000	83	
	17			0,9991	0,9900	0,7633	0,5994	0,2712	0,0376	0,0022	0,0000	0,0000	82	
	18			0,9997	0,9954	0,8372	0,6965	0,3621	0,0630	0,0045	0,0000	0,0000	81	
	19			0,9999	0,9980	0,8935	0,7803	0,4602	0,0995	0,0089	0,0000	0,0000	80	
	20				0,9992	0,9337	0,8481	0,5595	0,1488	0,0165	0,0000	0,0000	79	
	21				0,9997	0,9607	0,8998	0,6540	0,2114	0,0288	0,0000	0,0000	78	
	22				0,9999	0,9779	0,9369	0,7389	0,2864	0,0479	0,0001	0,0000	77	
	23					0,9881	0,9621	0,8109	0,3711	0,0755	0,0003	0,0000	76	
	24					0,9939	0,9783	0,8686	0,4617	0,1136	0,0006	0,0000	75	
	25					0,9970	0,9881	0,9125	0,5535	0,1631	0,0012	0,0000	74	
	26					0,9986	0,9938	0,9442	0,6417	0,2244	0,0024	0,0000	73	
	27					0,9994	0,9969	0,9658	0,7224	0,2964	0,0046	0,0000	72	
	28					0,9997	0,9985	0,9800	0,7925	0,3768	0,0084	0,0000	71	
	29					0,9999	0,9993	0,9888	0,8505	0,4623	0,0148	0,0000	70	
	30						0,9997	0,9939	0,8962	0,5491	0,0248	0,0000	69	
	31						0,9999	0,9969	0,9307	0,6331	0,0398	0,0001	68	
	32							0,9984	0,9554	0,7107	0,0615	0,0002	67	
	33							0,9993	0,9724	0,7793	0,0913	0,0004	66	
100	34							0,9997	0,9836	0,8371	0,1303	0,0009	65	100
	35							0,9999	0,9906	0,8839	0,1795	0,0018	64	
	36							0,9999	0,9948	0,9201	0,2386	0,0033	63	
	37								0,9973	0,9470	0,3068	0,0060	62	
	38								0,9986	0,9660	0,3822	0,0105	61	
	39								0,9993	0,9790	0,4621	0,0176	60	
	40								0,9997	0,9875	0,5433	0,0284	59	
	41								0,9999	0,9928	0,6225	0,0443	58	
	42								0,9999	0,9960	0,6967	0,0666	57	
	43									0,9979	0,7635	0,0967	56	
	44									0,9989	0,8211	0,1356	55	
	45									0,9995	0,8689	0,1841	54	
	46									0,9997	0,9070	0,2421	53	
	47									0,9999	0,9362	0,3086	52	
	48									0,9999	0,9577	0,3822	51	
	49										0,9729	0,4602	50	
	50										0,9832	0,5398	49	
	51										0,9900	0,6178	48	
	52										0,9942	0,6914	47	
	53										0,9968	0,7579	46	
	54										0,9983	0,8159	45	
	55										0,9991	0,8644	44	
	56										0,9996	0,9033	43	
	57										0,9998	0,9334	42	
	58										0,9999	0,9557	41	
	59											0,9716	40	
	60											0,9824	39	
	61											0,9895	38	
	62											0,9940	37	
	63											0,9967	36	
	64											0,9982	35	
	65											0,9991	34	
	66											0,9996	33	
	67											0,9998	32	
	68											0,9999	31	
n		0,98	0,95	0,92	0,9	0,85	5/6	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	*k*	*n*

p

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ______________________

Tabelle 5: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 200

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

		p							
n	*k*	0,02	0,04	0,05	0,1	1/6	0,2		*n*
	0	0,0176	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	199	
	1	0,0894	0,0027	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	198	
	2	0,2351	0,0125	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	197	
	3	0,4315	0,0395	0,0090	0,0000	0,0000	0,0000	196	
	4	0,6288	0,0950	0,0264	0,0000	0,0000	0,0000	195	
	5	0,7867	0,1856	0,0623	0,0000	0,0000	0,0000	194	
	6	0,8914	0,3084	0,1237	0,0001	0,0000	0,0000	193	
	7	0,9507	0,4501	0,2133	0,0005	0,0000	0,0000	192	
	8	0,9798	0,5926	0,3270	0,0014	0,0000	0,0000	191	
	9	0,9925	0,7192	0,4547	0,0035	0,0000	0,0000	190	
	10	0,9975	0,8200	0,5831	0,0081	0,0000	0,0000	189	
	11	0,9992	0,8925	0,6998	0,0168	0,0000	0,0000	188	
	12	0,9998	0,9401	0,7965	0,0320	0,0000	0,0000	187	
	13	0,9999	0,9688	0,8701	0,0566	0,0000	0,0000	186	
	14		0,9848	0,9219	0,0929	0,0000	0,0000	185	
	15		0,9930	0,9556	0,1431	0,0001	0,0000	184	
	16		0,9970	0,9762	0,2075	0,0003	0,0000	183	
	17		0,9988	0,9879	0,2849	0,0006	0,0000	182	
	18		0,9995	0,9942	0,3724	0,0013	0,0000	181	
	19		0,9998	0,9973	0,4655	0,0027	0,0000	180	
	20		0,9999	0,9988	0,5592	0,0052	0,0001	179	
	21			0,9995	0,6484	0,0094	0,0002	178	
	22			0,9998	0,7290	0,0163	0,0005	177	
	23			0,9999	0,7983	0,0269	0,0010	176	
	24				0,8551	0,0426	0,0020	175	
	25				0,8995	0,0648	0,0036	174	
	26				0,9328	0,0945	0,0064	173	
	27				0,9566	0,1329	0,0110	172	
	28				0,9729	0,1803	0,0179	171	
	29				0,9837	0,2366	0,0283	170	
	30				0,9905	0,3007	0,0430	169	
200	31				0,9946	0,3711	0,0632	168	200
	32				0,9971	0,4454	0,0899	167	
	33				0,9985	0,5210	0,1239	166	
	34				0,9992	0,5953	0,1656	165	
	35				0,9996	0,6658	0,2151	164	
	36				0,9998	0,7305	0,2717	163	
	37				0,9999	0,7877	0,3345	162	
	38					0,8369	0,4019	161	
	39					0,8777	0,4718	160	
	40					0,9106	0,5422	159	
	41					0,9362	0,6108	158	
	42					0,9556	0,6758	157	
	43					0,9699	0,7355	156	
	44					0,9801	0,7887	155	
	45					0,9872	0,8349	154	
	46					0,9919	0,8738	153	
	47					0,9950	0,9056	152	
	48					0,9970	0,9310	151	
	49					0,9983	0,9506	150	
	50					0,9990	0,9655	149	
	51					0,9995	0,9764	148	
	52					0,9997	0,9843	147	
	53					0,9998	0,9897	146	
	54					0,9999	0,9934	145	
	55						0,9959	144	
	56						0,9975	143	
	57						0,9985	142	
	58						0,9991	141	
	59						0,9995	140	
	60						0,9997	139	
	61						0,9998	138	
	62						0,9999	137	
n		0,98	0,96	0,95	0,9	5/6	0,8	*k*	*n*
		p							

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dezimalen) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 - \text{abgelesener Wert}$

Name: ____________________

Tabelle 6: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 1000

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

					p					
n	*k*	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04		*n*
	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	999	
	1	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	998	
	2	0,0027	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	997	
	3	0,0101	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	996	
	4	0,0287	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	995	
	5	0,0661	0,0026	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	994	
	6	0,1289	0,0073	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	993	
	7	0,2189	0,0174	0,0007	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	992	
	8	0,3317	0,0364	0,0019	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	991	
	9	0,4573	0,0684	0,0047	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	990	
	10	0,5830	0,1166	0,0102	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	989	
	11	0,6974	0,1828	0,0204	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	988	
	12	0,7925	0,2657	0,0376	0,0029	0,0001	0,0000	0,0000	987	
	13	0,8656	0,3618	0,0642	0,0060	0,0003	0,0000	0,0000	986	
	14	0,9176	0,4649	0,1025	0,0116	0,0008	0,0000	0,0000	985	
	15	0,9521	0,5681	0,1539	0,0211	0,0017	0,0001	0,0000	984	
	16	0,9736	0,6649	0,2185	0,0360	0,0035	0,0002	0,0000	983	
	17	0,9862	0,7501	0,2947	0,0582	0,0066	0,0005	0,0000	982	
	18	0,9931	0,8211	0,3797	0,0893	0,0119	0,0010	0,0001	981	
	19	0,9967	0,8769	0,4694	0,1304	0,0204	0,0020	0,0001	980	
	20	0,9985	0,9186	0,5591	0,1822	0,0333	0,0038	0,0003	979	
	21	0,9993	0,9482	0,6446	0,2442	0,0519	0,0068	0,0006	978	
	22	0,9997	0,9683	0,7222	0,3149	0,0774	0,0116	0,0012	977	
	23	0,9999	0,9813	0,7895	0,3919	0,1110	0,0191	0,0022	976	
	24		0,9894	0,8455	0,4724	0,1534	0,0302	0,0039	975	
	25		0,9942	0,8901	0,5529	0,2045	0,0458	0,0067	974	
	26		0,9969	0,9242	0,6304	0,2637	0,0670	0,0110	973	
	27		0,9984	0,9493	0,7020	0,3299	0,0948	0,0175	972	
	28		0,9992	0,9671	0,7658	0,4009	0,1299	0,0270	971	
	29		0,9996	0,9793	0,8207	0,4746	0,1725	0,0402	970	
	30		0,9998	0,9874	0,8662	0,5484	0,2225	0,0580	969	
	31		0,9999	0,9925	0,9027	0,6197	0,2793	0,0812	968	
	32			0,9957	0,9311	0,6866	0,3416	0,1105	967	
	33			0,9976	0,9524	0,7472	0,4079	0,1463	966	
1000	34			0,9987	0,9680	0,8005	0,4763	0,1887	965	1000
	35			0,9993	0,9790	0,8461	0,5448	0,2374	964	
	36			0,9996	0,9865	0,8838	0,6114	0,2919	963	
	37			0,9998	0,9916	0,9142	0,6743	0,3511	962	
	38			0,9999	0,9949	0,9381	0,7321	0,4135	961	
	39				0,9969	0,9563	0,7839	0,4777	960	
	40				0,9982	0,9698	0,8289	0,5419	959	
	41				0,9990	0,9796	0,8672	0,6046	958	
	42				0,9994	0,9865	0,8989	0,6642	957	
	43				0,9997	0,9912	0,9246	0,7196	956	
	44				0,9998	0,9944	0,9448	0,7698	955	
	45				0,9999	0,9965	0,9603	0,8142	954	
	46					0,9979	0,9721	0,8526	953	
	47					0,9987	0,9807	0,8851	952	
	48					0,9993	0,9869	0,9119	951	
	49					0,9996	0,9913	0,9337	950	
	50					0,9998	0,9943	0,9509	949	
	51					0,9999	0,9964	0,9643	948	
	52					0,9999	0,9977	0,9745	947	
	53						0,9986	0,9821	946	
	54						0,9991	0,9876	945	
	55						0,9995	0,9916	944	
	56						0,9997	0,9944	943	
	57						0,9998	0,9963	942	
	58						0,9999	0,9976	941	
	59						0,9999	0,9985	940	
	60							0,9991	939	
	61							0,9994	938	
	62							0,9996	937	
	63							0,9998	936	
	64							0,9999	935	
	65							0,9999	934	
n		0,99	0,985	0,98	0,975	0,97	0,965	0,96	*k*	*n*
					p					

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$ gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 7: Normalverteilung

$\phi(z) = 0,...$

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$\phi(2{,}32) = 0{,}9898$

$\phi(-0{,}9) = 1 - \phi(0{,}9) = 0{,}1841$

$\phi(z) = 0{,}994 \Rightarrow z = 2{,}51$

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Stochastik mit Alternative 2 (Schätzen von Parametern für binomialverteilte Zufallsgrößen)

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2012

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
   - Binomialverteilung und Normalverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung

   Alternative 2:
   - Schätzen von Parametern für binomialverteilte Zufallsgrößen

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Es ist günstig, die Zufallsgröße X als binomialverteilt anzunehmen mit

$n = 100$ und $p = 0{,}25$.

$P(\mathrm{X} \geq 30) = 1 - P(X \leq 29) \approx 1 - 0{,}8505 = 0{,}1495$

[Alternative Verwendung der Normalverteilung ist zulässig.]

(2) Es ist günstig, die Zufallsgröße X als binomialverteilt anzunehmen mit

$n = 200$ und $p = 0{,}1$.

$P(8 \leq X \leq 18) = P(X \leq 18) - P(X \leq 7) \approx 0{,}3724 - 0{,}0005 = 0{,}3719$

(3) Um die Normalverteilung benutzen zu dürfen, muss die Laplace-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt sein.

$\sigma = \sqrt{200 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} \approx 4{,}24 > 3$, $\mu = 20$

$$\begin{aligned} P(8 \leq X \leq 18) &\approx \Phi\left(\tfrac{18-20+0{,}5}{4{,}24}\right) - \Phi\left(\tfrac{8-20-0{,}5}{4{,}24}\right) \\ &\approx \Phi(-0{,}35) - \Phi(-2{,}95) \\ &\approx 1 - 0{,}6368 - (1 - 0{,}9984) \\ &= 0{,}3616 \end{aligned}$$

[Je nach Interpolation können leicht verschiedene Werte erreicht werden. Auch eine Lösung ohne Stetigkeitskorrektur wird akzeptiert.]

(4) n ist so zu bestimmen, dass gilt:

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) \geq 0{,}9 &\Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0{,}9 \\ &\Leftrightarrow P(X = 0) \leq 0{,}1 \\ &\Leftrightarrow 0{,}64^n \leq 0{,}1 \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}64} \approx 5{,}16 \end{aligned}$$

$\Rightarrow n \geq 6$

Es müssen mindestens 6 Personen befragt werden.

(5) Es gibt 5 Möglichkeiten für die 3 Personen, die die CDU wählen würden, in einer Reihe von 7 Personen unmittelbar nacheinander angerufen zu werden (1-2-3; 2-3-4; ... ; 5-6-7). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also

$p = 5 \cdot 0{,}36^3 \cdot 0{,}64^4 = 0{,}0391$.

Modelllösung b)

Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Wahlberechtigten, die am nächsten Sonntag die Grünen wählen würden. Dann ist es günstig, X als binomialverteilt anzunehmen mit $n = 1352$ und unbekannter Trefferwahrscheinlichkeit p. Aus dem Umfrageergebnis erhält man gerundet: $\frac{X}{1352} = 0{,}1$. Der folgende Ansatz führt dann zur Ermittlung des gesuchten Konfidenzintervalls:

$$\left|\frac{X}{n} - p\right| \le z \cdot \frac{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}{n} \Leftrightarrow \left|0{,}1 - p\right| \le 1{,}96 \cdot \frac{\sqrt{1352 \cdot p \cdot (1-p)}}{1352}$$

$$\Leftrightarrow (0{,}1 - p)^2 \le \frac{1{,}96^2}{1352}(p - p^2)$$

$$\Leftrightarrow 1{,}00284p^2 - 0{,}20284p + 0{,}01 \le 0$$

Die Grenzen erhält man durch Lösen der zugehörigen quadratischen Gleichung:
$p_1 \approx 0{,}0851$, $p_2 \approx 0{,}1171$.

Das Konfidenzintervall lautet [0,0851; 0,1171].

Modelllösung c)

Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Wahlberechtigten, die am nächsten Sonntag die FDP wählen würden.

Gesucht sind die Anteile $X/1352$, die noch verträglich sind mit dem Wahlergebnis von $p = 0{,}146$. Bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % führt der folgende Ansatz zur Ermittlung des gesuchten Anteils:

$$\left|\frac{X}{1352} - 0{,}146\right| \le 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}146 \cdot (1 - 0{,}146)}{1352}},$$

wobei $z \approx 1{,}96$ der σ-Tabelle entnommen werden kann.

Durch Auflösen des Betrags erhält man gerundet:

$$0{,}146 - 1{,}96 \cdot \sqrt{0{,}000092} \le \frac{X}{1352} \le 0{,}146 + 1{,}96 \cdot \sqrt{0{,}000092}.$$

Gerundet ergibt dies:

$$0{,}1272 \le \frac{X}{1352} \le 0{,}1648.$$

Verträglich mit dem Ergebnis der Bundestagswahl ist somit das Intervall [0,1272; 0,1648]. Damit weicht das Umfrageergebnis der FDP nicht signifikant vom Wahlergebnis ab. Die Behauptung wird daher nicht bestätigt. Bei dem Umfrageergebnis von 13 % kann es sich um eine zufällige Abweichung nach unten handeln. Die Kurzentschlossenheit der Wähler muss nicht die Ursache sein.

Modelllösung d)

Für die Fehlerbereiche gilt folgender Zusammenhang:

$\left|\frac{X}{n}-p\right| \leq z\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \leq \varepsilon$, wobei hier für den Fehlerbereich $\varepsilon = 0{,}02$ gilt.

Für kleine Parteien mit p = 0,1 gilt:

$$z\cdot\sqrt{\frac{0{,}1\cdot(1-0{,}1)}{1352}} = 0{,}02$$

$z \approx 2{,}45$.

Mit Hilfe dieses z-Wertes und der Normalverteilung wird die zugehörige Sicherheitswahrscheinlichkeit anhand der Tabellendaten ermittelt.

$$\Phi(z)-\Phi(-z) = \Phi(2{,}45)-\Phi(-2{,}45) \approx 0{,}9929-(1-0{,}9929) = 0{,}9858$$

Die Sicherheitswahrscheinlichkeit für kleine Parteien (p = 0,1) beträgt also 98,58 %.
Sowohl bei kleinen als auch bei großen Parteien erkennt man, dass die Forschungsgruppe Wahlen mit hohen Sicherheitswahrscheinlichkeiten arbeitet. Bei den kleineren Parteien ist sie sogar noch höher, obwohl der Fehlerbereich kleiner ist.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) berechnet $P(X \geq 30)$.	3
2	(2) berechnet $P(8 \leq X \leq 18)$ mit der Binomialverteilung.	3
3	(3) nennt die Voraussetzung für die Annäherung mit der Normalverteilung und berechnet $P(8 \leq X \leq 18)$ mit der Normalverteilung.	5
4	(4) beschreibt einen geeigneten Lösungsansatz und bestimmt den minimalen Wert für n.	5
5	(5) ermittelt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	bestimmt einen Ansatz zur Berechnung des Konfidenzintervalls.	5
2	ermittelt die Grenzen und gibt das Konfidenzintervall an.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	ermittelt einen Ansatz für die Bestimmung der 95 %-Umgebung.	3
2	bestimmt das gesuchte Intervall.	2
3	prüft, ob das Umfrageergebnis mit dem Wahlergebnis verträglich ist, und beurteilt die Behauptung.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	ermittelt einen Ansatz für die Bestimmung der z-Werte.	3
2	bestimmt den gesuchten z-Wert für kleine Parteien.	2
3	ermittelt zu dem z-Wert die passende Sicherheitswahrscheinlichkeit.	4
4	vergleicht und interpretiert die Sicherheitswahrscheinlichkeiten im Sachzusammenhang.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet $P(X \geq 30)$.	3			
2	(2) berechnet $P(8 \leq X \leq 18)$ mit …	3			
3	(3) nennt die Voraussetzung …	5			
4	(4) beschreibt einen geeigneten …	5			
5	(5) ermittelt die gesuchte …	4			
sachlich richtige Alternativen: (20) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**20**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt einen Ansatz …	5			
2	ermittelt die Grenzen …	5			
sachlich richtige Alternativen: (10) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**10**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt einen Ansatz …	3			
2	bestimmt das gesuchte …	2			
3	prüft, ob das …	3			
sachlich richtige Alternativen: (8) ………………………………………………………………. ……………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**8**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt einen Ansatz …	3			
2	bestimmt den gesuchten …	2			
3	ermittelt zu dem …	4			
4	vergleicht und interpretiert …	3			
sachlich richtige Alternativen: (12) ………………………………………………………………. ……………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe d)	**12**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**150**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0