

Name des Prüflings	
Zeitpunkt der Abgabe	

Punkteverteilung Aufgabe 1:

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	30
Erstkorrektur							
Zweitkorrektur							

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \dots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \dots \in \mathbb{R}$.

a) Gegeben ist die Gleichung der abschnittsweise definierten Funktion f mit:

$$f(x) = \begin{cases} 1,5x^2 - 5x + 3 & \text{für } x \leq 3 \\ 4x + b & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

Der Graph der Funktion f hat im Intervall I mit $I = [1; 2]$ keine Nullstellen.

- a1) Bestimmen Sie die Gleichung der 1. Ableitung der Funktion f .
- a2) Bestimmen Sie den Koeffizienten b so, dass der Graph f sprung- und knickfrei verläuft.
- a3) Berechnen Sie den Wert des folgenden Integrals: $\int_1^2 f(x) dx$ und geben Sie die Bedeutung dieses Wertes an.

b) Entscheiden Sie ausgehend von der Funktion f mit der Gleichung:

$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d \text{ mit } a, b \neq 0,$$

ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).

	wahr	falsch
Der Wert des Parameters a ist generell doppelt so hoch wie der Wert des Parameters d .		
Wenn $a = b = 1$ und $c = d = 0$ gilt, so befindet sich eine maximale, positive Änderungsrate bei $x = \pi$.		
Wenn $a = b = 1$ und $c = d = 0$ gilt, beträgt der Integralwert über eine Periodenlänge der Funktion f null.		
Für $a = 3, b = 2$ und $c = d = 0$ gilt: Die Periodenlänge beträgt $p = 2\pi$.		
Für $b = 1$ und $c = 0$ beschreiben die Gleichungen der Funktionen f und g mit $g(x) = a \cdot \cos\left(b \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + d$ den gleichen Funktionsgraphen.		

c) Die Funktion f hat die Gleichung:

$$f(x) = -x + 8 \text{ mit } 0 \leq x \leq 8.$$

Der auf der Geraden f verschiebbare Punkt P mit unbekannten Koordinaten ist rechter oberer Eckpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks (Abb.1.1). Je nach Lage des Punktes P auf der Geraden f entstehen Dreiecke mit unterschiedlichen Flächeninhalten.

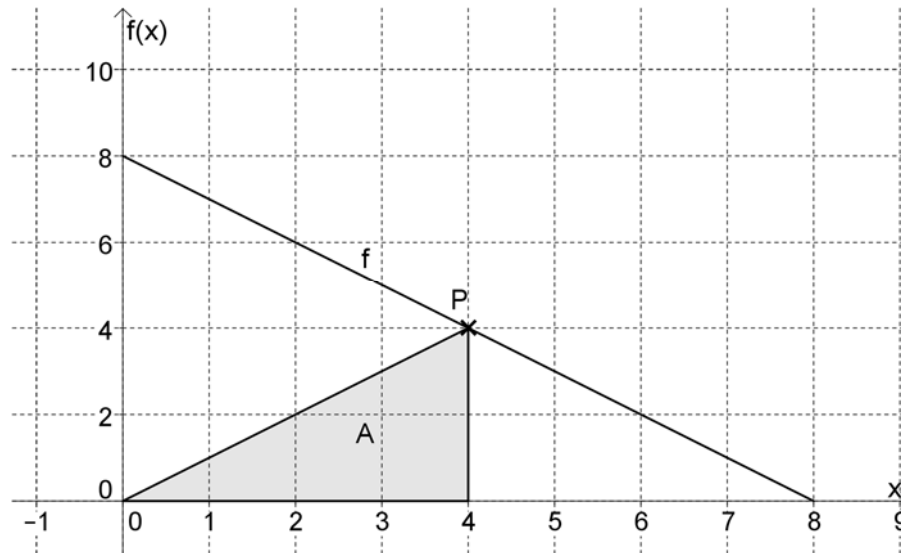


Abbildung 1.1

c1) Berechnen Sie die Fläche A des Dreiecks für $P(4|f(4))$.

c2) Zeigen Sie, dass das eingeschriebene Dreieck die maximale Fläche hat, wenn $P(4|f(4))$ gilt.

d) Gegeben ist die nachfolgende Darstellung einer Ebene (siehe Abb. 1.2).

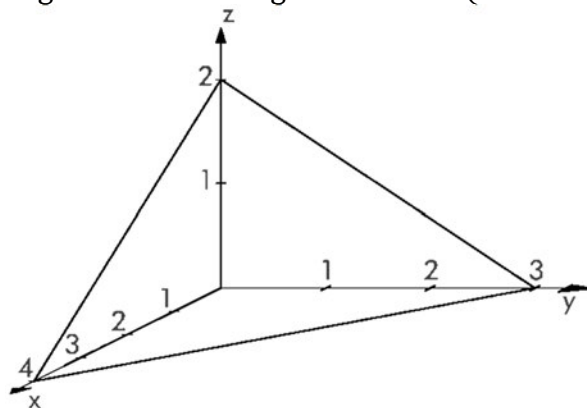


Abbildung 1.2

d1) Geben Sie eine Gleichung für die dargestellte Ebene E in Parameterform an.

d2) Ermitteln Sie die Schnittgeraden der dargestellten Ebene E mit den Ebenen, die jeweils durch zwei Koordinatenachsen aufgespannt werden.

e) Gegeben sind die Gleichungen der folgenden drei Geraden in der Parameterdarstellung:

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad g_2: \vec{x} = r_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

e1) Zeigen Sie, dass der Stützvektor der Geraden g_3 nicht auf der Geraden g_2 liegt.

e2) Zeigen Sie, dass die Geraden g_1 und g_3 parallel zueinander verlaufen, aber nicht identisch sind.

e3) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden g_1 und g_2 .

f) Gegeben sind die Ebenen E_1 und E_2 mit den Gleichungen:

$$E_1: 4x + 2y + 4z = 20 \quad \text{und} \quad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0,5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $\vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der Ebene E_2 .

f1) Geben Sie eine Gleichung der Ebene E_1 in der Parameterform an.

f2) Zeigen Sie, dass die Normalenvektoren der Ebenen E_1 und E_2 linear abhängig sind.

Name des Prüflings

Punkteverteilung Aufgabe 2: AirRace

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	gesamt
Erreichbar	4	4	5	3	5	4	5	30
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \dots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \dots \in \mathbb{R}$.

Beim AirRace geht es darum, möglichst schnell mit einem Flugzeug einen Parcours abzufliegen. Dieser wird durch sogenannte „Air Gates“, mindestens 15 m breite Tore, markiert. Die „Air Gates“ bestehen aus 20 m hohen Pylonen (aus Stoff gefertigte und mit Luft gefüllte seitliche Begrenzungen der Flugstrecke). Zusätzlich müssen die Piloten bestimmte, vorgegebene Manöver fliegen, für die anschließend von Schiedsrichtern Punkte vergeben werden. Im gesamten Rennen darf eine Flughöhe von 10 m nicht unterschritten werden, im Allgemeinen wird auf einer Höhe von 15 m geflogen. Es wird im Wettkampf nur über Wasserflächen geflogen (alle Angaben sind in Metern).

Die anschließende Graphik (Abbildung. 2.1) zeigt den Parcours und eine Flugroute.

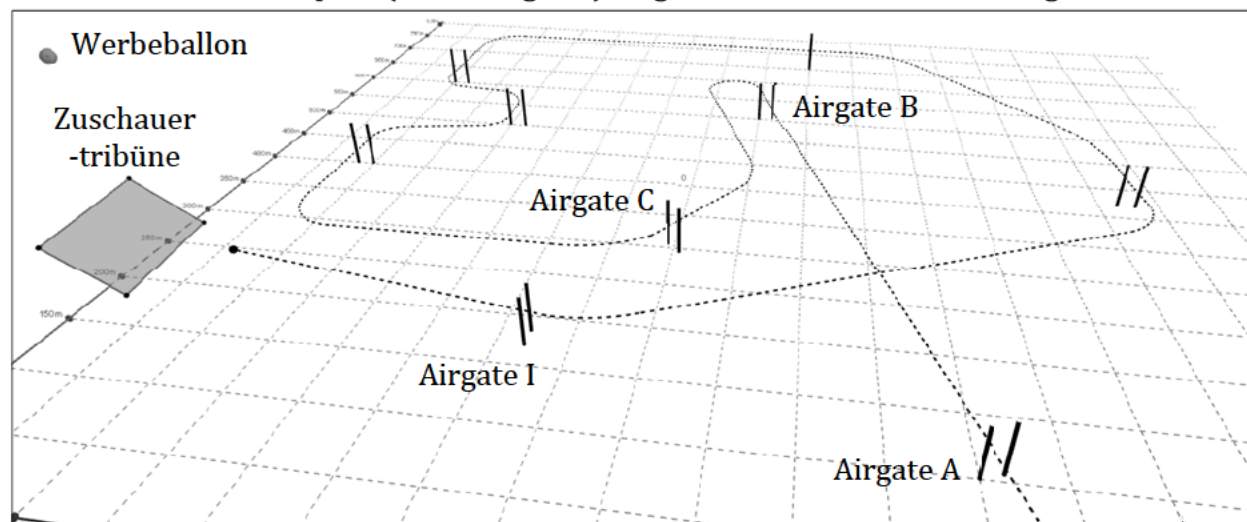


Abbildung 2.1 Ansicht des Parcours

Jedes Airgate wird durch zwei Pylonen begrenzt. Die Fußpunkte der Pylonen der Airgates A, B und C können Sie der Tabelle 2.1 entnehmen.

	1. Pylon	2. Pylon
Airgate A	$A_1(600 100 0)$	$A_2(615 105 0)$
Airgate B	$B_1(450 550 0)$	$B_2(465 555 0)$
Airgate C	$C_1(395 305 0)$	$C_2(405 295 0)$

Tabelle 2.1

Die Angaben der Punkte in Tabelle 2.1 beziehen sich auf die Mitte der Fußpunkte der Pylonen.

Als erste Aufgabe sind vom Piloten nacheinander die Airgates A und B zu durchfliegen. Dafür darf er nicht länger als 5 Sekunden benötigen.

- a) Begründen Sie, dass sich die entsprechende Flugroute mit der folgenden Gleichung

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 607,5 \\ 102,5 \\ 15 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -150 \\ 450 \\ 0 \end{pmatrix}$$

beschreiben lässt, wenn davon ausgegangen wird, dass die Airgates mittig zwischen den Pylonen durchfliegen werden.

- b) Ermitteln Sie die Geschwindigkeit in Kilometer pro Stunde, mit der der Pilot mindestens fliegen muss, um diese erste Aufgabe zu erfüllen.

Im Anschluss daran absolviert der Pilot einen Steigflug mit mehreren Pirouetten (nicht in Abbildung 2.1 dargestellt). Nach Abschluss dieser Manöver befindet er sich im Punkt $P(800|700|300)$. Von hier aus muss er das Airgate C auf einer Höhe von 15 m passieren.

Dazu fliegt er in Richtung des Vektors: $\vec{v} = \begin{pmatrix} -80 \\ -80 \\ -57 \end{pmatrix}$.

- c) Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Pilot das Airgate C auf einer Höhe von 15 m passiert.

Der Pilot kann den Sinkflug bei einer solchen Höhe nur dann abfangen, wenn der Schnittwinkel in dieser Situation gegenüber der Wasseroberfläche beim Passieren des Airgates nicht größer als 30° ist. (Die Wasseroberfläche wird in diesem Fall als plane Fläche mit der Höhe $z = 0$ betrachtet.)

- d) Prüfen Sie, ob der Pilot die Maschine noch rechtzeitig abfangen kann.

Die Zuschauertribüne lässt sich durch die Koordinaten der Eckpunkte $T_1(20|180|0)$, $T_2(10|280|0)$, $T_3(-40|275|40)$ und $T_4(-30|175|40)$ beschreiben (siehe Abb. 2.1).

- e) Begründen Sie, dass die Ebene E mit der Ebenengleichung

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 280 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -50 \\ -5 \\ 40 \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \leq s \leq 1 \text{ und } 0 \leq t \leq 1$$

die Zuschauertribüne beschreibt.

- f) Ermitteln Sie die Zuschauerkapazität der Tribüne unter der Maßgabe, dass pro Sitzplatz $0,75 \text{ m}^2$ berücksichtigt und 20% der Gesamtfläche für Aufgänge benötigt werden.

Zum Abschluss durchfliegt der Pilot mittig das Airgate I im Punkt $I(320|177,5|15)$ und fliegt dann zum Abschied in Richtung des Punktes $Q(100|200|35)$ und somit in Richtung der Zuschauertribüne.

- g) Prüfen Sie, ob es bei dem gegenwärtigen Kurs zu einer Kollision mit der Zuschauertribüne kommen könnte, wenn der Schnittpunkt der Fluggeraden und der Tribünen-ebene im Punkt $P_s(-44,32|214,76|48,12)$ liegt.

Name des Prüflings	
Zeitpunkt der Abgabe	

Punkteverteilung Aufgabe 1:

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	30
Erstkorrektur							
Zweitkorrektur							

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \dots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \dots \in \mathbb{R}$.

a) Gegeben ist die Gleichung der abschnittsweise definierten Funktion f mit:

$$f(x) = \begin{cases} 1,5x^2 - 5x + 3 & \text{für } x \leq 3 \\ 4x + b & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

Der Graph der Funktion f hat im Intervall I mit $I = [1; 2]$ keine Nullstellen.

- a1) Bestimmen Sie die Gleichung der 1. Ableitung der Funktion f .
- a2) Bestimmen Sie den Koeffizienten b so, dass der Graph f sprung- und knickfrei verläuft.
- a3) Berechnen Sie den Wert des folgenden Integrals: $\int_1^2 f(x) dx$ und geben Sie die Bedeutung dieses Wertes an.

b) Entscheiden Sie ausgehend von der Funktion f mit der Gleichung:

$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d \text{ mit } a, b \neq 0,$$

ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).

	wahr	falsch
Der Wert des Parameters a ist generell doppelt so hoch wie der Wert des Parameters d .		
Wenn $a = b = 1$ und $c = d = 0$ gilt, so befindet sich eine maximale, positive Änderungsrate bei $x = \pi$.		
Wenn $a = b = 1$ und $c = d = 0$ gilt, beträgt der Integralwert über eine Periodenlänge der Funktion f null.		
Für $a = 3, b = 2$ und $c = d = 0$ gilt: Die Periodenlänge beträgt $p = 2\pi$.		
Für $b = 1$ und $c = 0$ beschreiben die Gleichungen der Funktionen f und g mit $g(x) = a \cdot \cos\left(b \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + d$ den gleichen Funktionsgraphen.		

c) Die Funktion f hat die Gleichung:

$$f(x) = -x + 8 \text{ mit } 0 \leq x \leq 8.$$

Der auf der Geraden f verschiebbare Punkt P mit unbekannten Koordinaten ist rechter oberer Eckpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks (Abb.1.1). Je nach Lage des Punktes P auf der Geraden f entstehen Dreiecke mit unterschiedlichen Flächeninhalten.

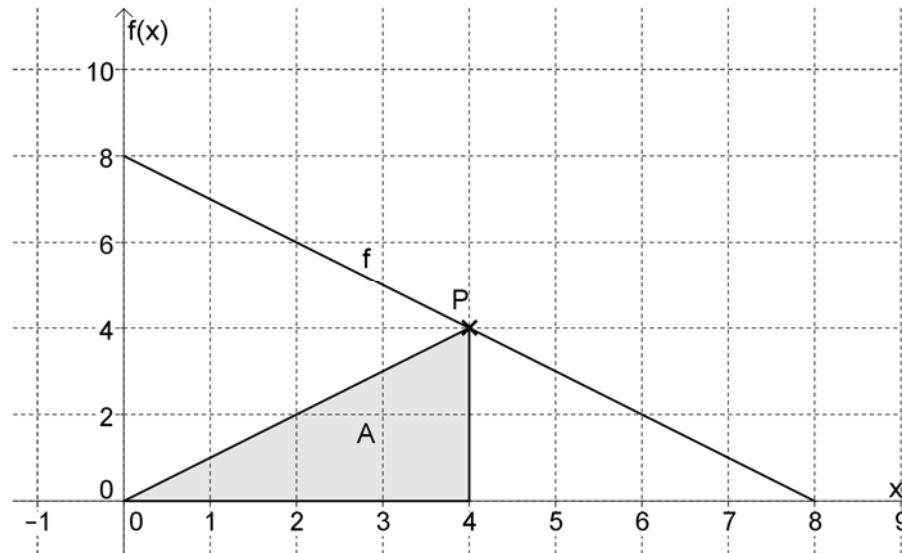


Abbildung 1.1

c1) Berechnen Sie die Fläche A des Dreiecks für $P(4|f(4))$.

c2) Zeigen Sie, dass das eingeschriebene Dreieck die maximale Fläche hat, wenn $P(4|f(4))$ gilt.

d) Gegeben sind ein lineares Gleichungssystem und eine Matrizengleichung:

I: $x + y - z = z - y$

II: $2y = 3x$

III: $z - (2x - 4) = -x - (x - y)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

d1) Geben Sie das lineare Gleichungssystem in der Form der „erweiterten Koeffizientenmatrix“ an.

d2) Ermitteln Sie den Lösungsvektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ in der Matrizengleichung.

e) Gegeben sind die Matrizen R, S und T mit:

$$R = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 0 & -k \end{pmatrix}; \quad S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2k \end{pmatrix}; \quad T = 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -k \end{pmatrix}.$$

e1) Zeigen Sie, dass genau ein Wert für k existiert, so dass $R \cdot S = T$ gilt.

e2) Bestimmen Sie für $k = 0$ die Matrix X , wenn $T \cdot X = S$ gilt.

f) Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind.

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).

	wahr	falsch
Für die Matrix D gilt: $D = A^T$.		
Die Rechenoperation $A \cdot B - B$ ist definiert.		
Zur Matrix C existiert keine inverse Matrix.		
Es gilt: $C^{2n} = E$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 1$, wobei die Matrix E die Einheitsmatrix ist.		
Die Matrix M, für die $M = B \cdot B$ gilt, ist vom gleichen Typ wie die Matrix B.		

Name des Prüflings	
--------------------	--

Punkteverteilung Aufgabe 2: Meeresschildkröten

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	gesamt
Erreichbar	4	4	3	6	4	4	5	30
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \dots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \dots \in \mathbb{R}$.

Alle Meeresschildkröten sind in ihrem Bestand vom Aussterben bedroht. So hat der WWF (World Wide Fund for Nature) schon seit mehreren Jahren festgestellt, dass die Populationsbestände der Meeresschildkröten zurückgegangen sind und dringender Handlungsbedarf besteht, diese Meeresschildkröten nachhaltig zu schützen.

In der folgenden Aufgabe soll die Entwicklung einer Meeresschildkrötenpopulation (im Folgenden Schildkrötenpopulation genannt) mathematisch modelliert werden. Dazu wird die Schildkrötenpopulation in vier Altersgruppen aufgeteilt:

Altersgruppe	Eier und Geschlüpfte	Jungtiere	fast Ausgewachsene	Brüter
Kurzzeichen	G	J	A	B
Alter in Jahren	<1	1 – 16	17 – 25	>25

Tabelle 2.1

Die Schildkrötenpopulation wird durch den Bestandsvektor $\vec{p}_n = \begin{pmatrix} G_n \\ J_n \\ A_n \\ B_n \end{pmatrix}$ beschrieben, der

die Anzahlen der Individuen der jeweiligen Altersklasse nach n Jahren angibt. Die jährliche Entwicklung dieser Schildkrötenpopulation wird durch die Tabelle 2.2 bzw. durch die Matrix M dargestellt.

	G	J	A	B
G	0	0	0	110
J	0,08	0,680	0	0
A	0	0,001	0,71	0
B	0	0	0,04	0,8

Tabelle 2.2

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 110 \\ 0,08 & 0,68 & 0 & 0 \\ 0 & 0,001 & 0,71 & 0 \\ 0 & 0 & 0,04 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Die Übergangsraten von einer zur nächsten Altersstufe sind hier als durchschnittliche Werte angegeben und berücksichtigen zusätzlich auch, dass männliche Schildkröten keine Eier legen.

- a) Erstellen Sie einen Übergangsgraphen für die in der Matrix M bzw. in der Tabelle 2.2 angegebenen Informationen anhand der Abbildung 2.1.

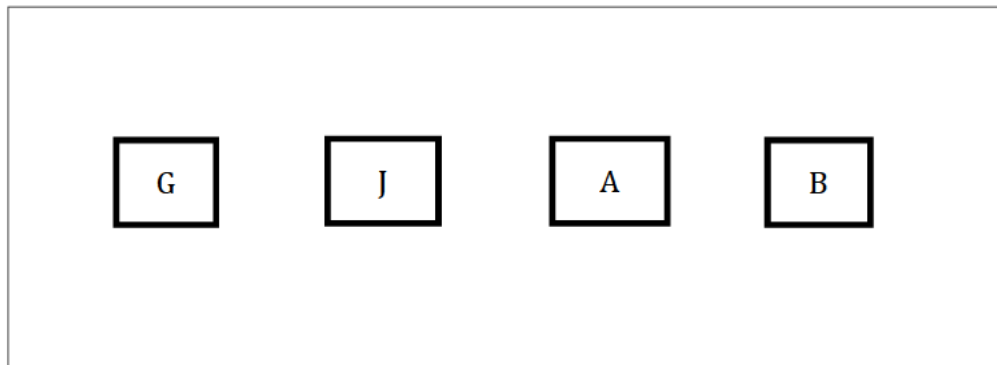


Abbildung 2.1

- b) Erläutern Sie die Bedeutung der von Null verschiedenen Elemente auf der Hauptdiagonalen der Matrix M und die Bedeutung des Matrixelementes $m_{32} = 0,001$.
- c) Begründen Sie allgemein und im Sachzusammenhang, dass die Matrix M keine stochastische Matrix ist.

Der WWF hat unter anderem festgestellt, dass z. B. die Population der Lederschildkröte im Ostpazifik in den letzten 20 Jahren um 90 % zurückgegangen ist.

Deshalb beobachtet ein Forscherteam die Schildkrötenpopulation nun besonders intensiv und kann durch ihre Beobachtungen einen Schildkrötenpopulationsbestand feststellen, der

mit Hilfe des Bestandsvektors $\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 14\,000 \\ 8\,000 \\ 4\,000 \\ 130 \end{pmatrix}$ beschrieben wird.

- d) Berechnen Sie mit Hilfe der Modellierung durch die Matrix M jeweils den Bestandsvektor der Schildkrötenpopulation nach einem, nach fünf und nach neun Jahren.

Vergleichen Sie die zukünftige Entwicklung dieser gesamten Schildkrötenpopulation seit Beobachtungsbeginn mit der Entwicklung der Population der Lederschildkröte im Ostpazifik in den letzten 20 Jahren.

Zu Beginn einer intensiven zweijährigen Untersuchung der Schildkrötenpopulation ließen statistische Erhebungen erkennen, dass es doppelt so viele Jungtiere (J) wie fast Ausgewachsene (A) gab. Von der Anzahl der Eier und der Geschlüpften (G) wird angenommen, dass sie dreimal so groß ist wie die der fast Ausgewachsenen (A). Die Zahl der Brüter (B) wird auf 10 % der fast Ausgewachsenen (A) geschätzt.

- e) Bestimmen Sie die Verteilung der Schildkrötenpopulation auf die einzelnen Altersgruppen zu Beginn der Untersuchung, wenn insgesamt von einem Bestand von 24 400 Individuen dieser Schildkrötenpopulation ausgegangen wird.

Die intensive Beobachtung der Schildkrötenpopulation ergab die folgende tabellarische Übersicht der Schildkrötenpopulation auf die verschiedenen Altersgruppen:

Altersgruppe	Eier und Geschlüpfte	Jungtiere	fast Ausgewachsene	Brüter
01.03.2014	12 000	8 000	4 000	400
01.03.2015	E_1	6 640	2 856	B_1

Tabelle 2.3

Zur Beschreibung der jährlichen Entwicklung der Schildkrötenpopulation wurde die Übergangsmatrix M_{neu} zugrunde gelegt, jedoch wurde nicht ermittelt, wie groß die Übergangswahrscheinlichkeiten für den Übergang von Eiern und Geschlüpfte zu Jungtieren und von Jungtieren zu fast Ausgewachsenen waren.

$$M_{\text{neu}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 110 \\ m_{21} & 0,68 & 0 & 0 \\ 0 & m_{32} & 0,71 & 0 \\ 0 & 0 & 0,04 & 0,8 \end{pmatrix}$$

- f) Ermitteln Sie die fehlende Werte m_{21} und m_{32} in der zugehörigen Übergangsmatrix.

Geben Sie den gesamten Schildkrötenpopulationsbestand am 01.03.2015 an.

Bei der Gründung einer Schutzorganisation für Meeresschildkröten werden drei Einsatzfelder festgelegt und es werden entsprechende Abteilungen gebildet: der Schutz der Brutbereiche (S), die Pflege und Auswilderung erwachsener Tiere (P) und die Information (I). Diese Schutzorganisation hat 40 Mitarbeiter, die nach und nach alle Abteilungen kennenlernen sollen. Deshalb soll ein jährlicher Austausch zwischen den Abteilungen nach folgendem Modell (Abb. 2.2) stattfinden:

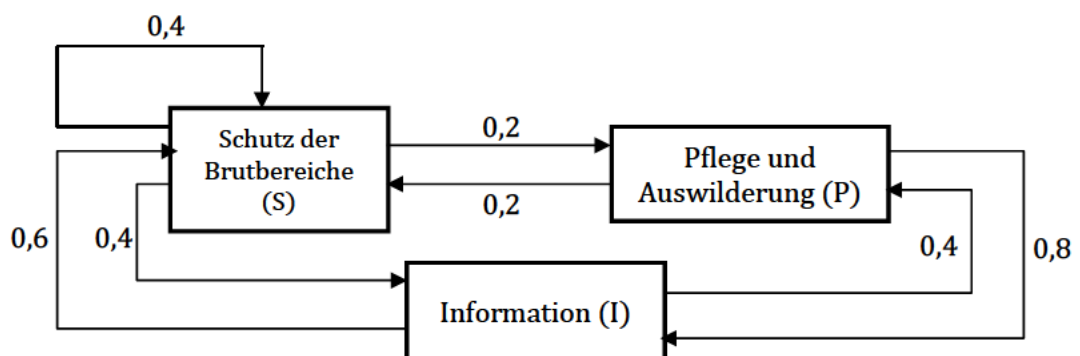


Abbildung 2.2

- g) Erstellen Sie eine zugehörige Übergangsmatrix $V =$ zu: $\begin{matrix} \text{von:} \\ \begin{matrix} S & P & I \end{matrix} \\ \begin{matrix} S \\ P \\ I \end{matrix} \end{matrix} \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}.$

Ermitteln Sie eine Anfangsverteilung für die 40 Mitarbeiter auf die Abteilungen, so dass die Anzahl der Mitarbeiter pro Abteilung jedes Jahr stabil bleibt.

Name des Prüflings	
Zeitpunkt der Abgabe	

Punkteverteilung Aufgabe 1:

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	30
Erstkorrektur							
Zweitkorrektur							

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \dots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \dots \in \mathbb{R}$.

a) Gegeben ist die Gleichung der abschnittsweise definierten Funktion f mit:

$$f(x) = \begin{cases} 1,5x^2 - 5x + 3 & \text{für } x \leq 3 \\ 4x + b & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

Der Graph der Funktion f hat im Intervall I mit $I = [1; 2]$ keine Nullstellen.

- a1) Bestimmen Sie die Gleichung der 1. Ableitung der Funktion f .
- a2) Bestimmen Sie den Koeffizienten b so, dass der Graph f sprung- und knickfrei verläuft.
- a3) Berechnen Sie den Wert des folgenden Integrals: $\int_1^2 f(x) dx$ und geben Sie die Bedeutung dieses Wertes an.

b) Entscheiden Sie ausgehend von der Funktion f mit der Gleichung:

$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d \text{ mit } a, b \neq 0,$$

ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).

	wahr	falsch
Der Wert des Parameters a ist generell doppelt so hoch wie der Wert des Parameters d .		
Wenn $a = b = 1$ und $c = d = 0$ gilt, so befindet sich eine maximale, positive Änderungsrate bei $x = \pi$.		
Wenn $a = b = 1$ und $c = d = 0$ gilt, beträgt der Integralwert über eine Periodenlänge der Funktion f null.		
Für $a = 3, b = 2$ und $c = d = 0$ gilt: Die Periodenlänge beträgt $p = 2\pi$.		
Für $b = 1$ und $c = 0$ beschreiben die Gleichungen der Funktionen f und g mit $g(x) = a \cdot \cos\left(b \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + d$ den gleichen Funktionsgraphen.		

c) Die Funktion f hat die Gleichung:

$$f(x) = -x + 8 \text{ mit } 0 \leq x \leq 8.$$

Der auf der Geraden f verschiebbare Punkt P mit unbekannten Koordinaten ist rechter oberer Eckpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks (Abb.1.1). Je nach Lage des Punktes P auf der Geraden f entstehen Dreiecke mit unterschiedlichen Flächeninhalten.

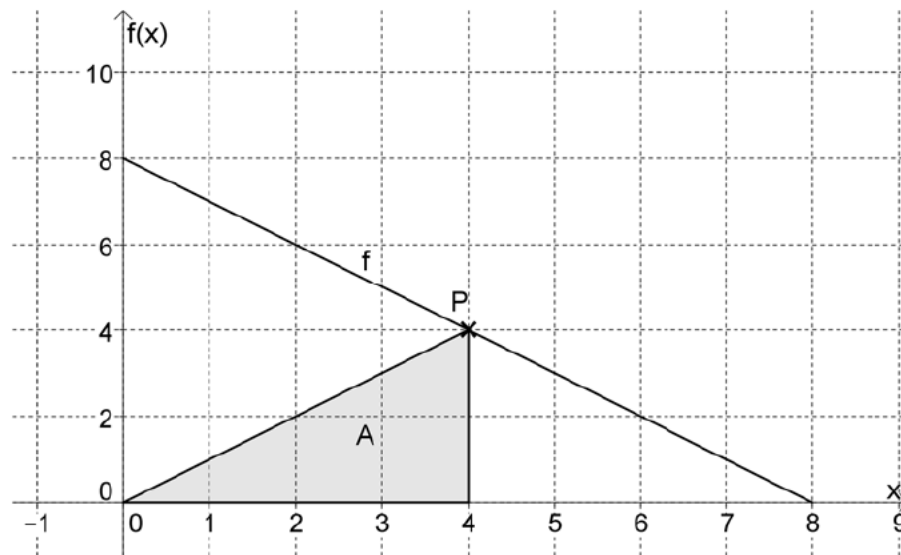


Abbildung 1.1

c1) Berechnen Sie die Fläche A des Dreiecks für $P(4|f(4))$.

c2) Zeigen Sie, dass das eingeschriebene Dreieck die maximale Fläche hat, wenn $P(4|f(4))$ gilt.

d) Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0,7$. Der Erwartungswert von X beträgt 56.

d1) Ermitteln Sie die Länge der Bernoullikette n .

$n =$

d2) Entscheiden Sie begründet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Die Standardabweichung σ ist kleiner als 4 ($\sigma < 4$).	
$P(X = 54) = P(X = 58)$	

- e) Im Folgenden sind ein unvollständiger Wahrscheinlichkeitsbaum sowie ein unvollständiges Vierfelderdiagramm mit absoluten Häufigkeiten gegeben.

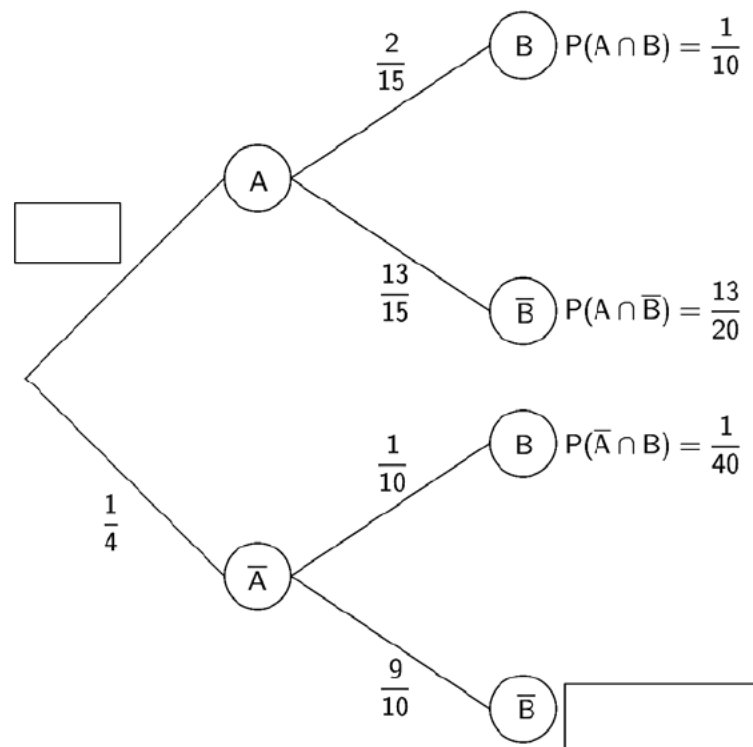


Abbildung 1.2

	A	$\bar{A}$	Summen
B			250
$\bar{B}$		450	
Summen			2 000

Tabelle 1.1

- e1) Ergänzen Sie die fehlenden Werte im Baumdiagramm (Abb. 1.2).
- e2) Ergänzen Sie alle fehlenden Werte im Vierfelderdiagramm (Tab. 1.1) so, dass diese zum abgebildeten Wahrscheinlichkeitsbaum passen.
- e3) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P_{\bar{B}}(\bar{A}) = P(\bar{A}|\bar{B}) =$.

- f) Nachfolgend ist die Lage und die Streuung eines Merkmals Z mittels eines Boxplotdiagramms dargestellt:

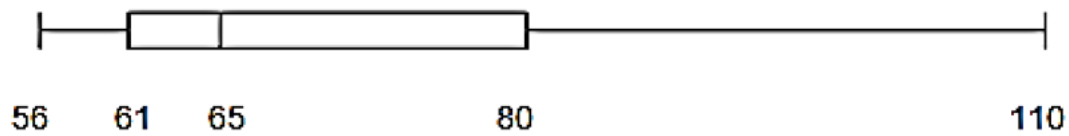


Abbildung 1.3

Folgende, leider lückenhafte Häufigkeitstabelle liegt dem Boxplot-Diagramm zugrunde:

z_i	h_i
	1
58	3
61	3
63	2
	1
70	3
80	4
110	1
Σ	18

Tabelle 1.2

- f1) Geben Sie auf Grundlage der Häufigkeitstabelle (Tab. 1.2) und des Boxplotdiagramms (Abb. 1.3) die folgenden statistischen Größen an.

(1) Median: $z_{\text{Median}} =$

(2) Modus: $z_{\text{Modus}} =$

(3) Quartilsabstand: $Q_3 - Q_1 =$

- f2) Ergänzen Sie auf Grundlage des Boxplotdiagramms die fehlenden Merkmalsausprägungen z_i in der Häufigkeitstabelle (Tab. 1.2).

Name des Prüflings	
--------------------	--

Punkteverteilung Aufgabe 2: Im Bistro

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	gesamt
Erreichbar	4	3	4	6	5	5	3	30
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \dots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \dots \in \mathbb{R}$.

An einer Beruflichen Schule in Schleswig-Holstein haben die Schülerinnen und Schüler sowie die Lehrerinnen und Lehrer (im Folgenden mit Lehrer bzw. Schüler bezeichnet) die Möglichkeit, mittags im Bistro zu essen. Hierfür werden jeden Tag zwei Gerichte angeboten: Das Tagesgericht sowie ein vegetarisches Gericht.

Im Rahmen eines Wirtschaftsprojektes haben Schüler des 12. Jahrgangs die Anzahl der verkauften Gerichte für die vergangene Woche ermittelt und ausgewertet. Sie haben das folgende Säulendiagramm (Abb. 2.1) erstellt, das neben den absoluten Häufigkeiten der einzelnen Tage auch den jeweiligen Mittelwert abbildet.

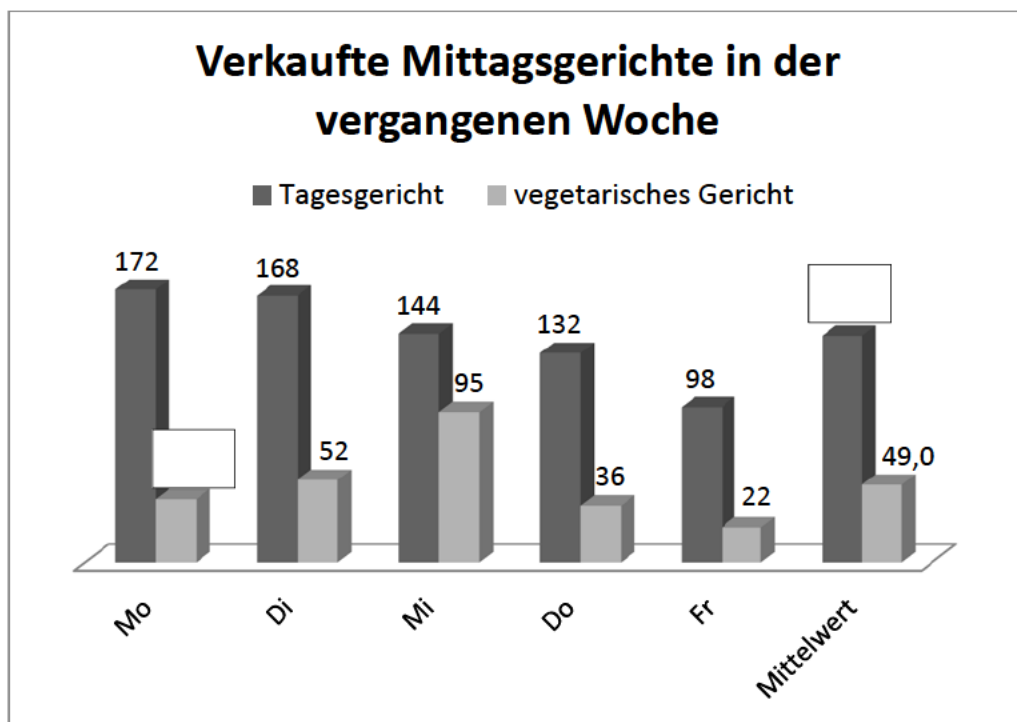


Abbildung 2.1

Leider fehlen zwei Werte auf dem Ausdruck des Diagramms, welches die Schüler durch Kästen markiert haben. Die fehlenden Werte sollen zumindest kurzfristig handschriftlich ergänzt werden.

- a) Berechnen Sie die beiden fehlenden Werte. Sollten Sie zu keinen sinnvollen Werten gelangen, schätzen Sie diese aufgrund der dargestellten Säulen ab.

Die Schüler diskutieren, ob zusätzlich zum Mittelwert auch der Median in der Graphik abgebildet werden sollte.

- b) Ermitteln und interpretieren Sie den Median der Anzahl der verkauften Tagesgerichte in der betrachteten Woche.

Der Betreiber des Bistros ist insbesondere mit der Anzahl der täglich verkauften vegetarischen Gerichte unzufrieden. Er hat diese auf den ausdrücklichen Wunsch der Schülervertretung ins Programm aufgenommen. Die Schülervertretung vertritt auch nach wie vor die Meinung, dass ein vegetarisches Gericht wichtig ist, da immer mehr Schüler Vegetarier sind. In Deutschland ernähren sich aktuell 9 % der Bevölkerung vegetarisch.

- c) Erläutern Sie, unter welchen Annahmen die Anzahl der Vegetarier unter den Schülern der Berufsbildenden Schule als binomialverteilte Zufallsvariable betrachtet werden kann.

An der Berufsbildenden Schule werden insgesamt 1 850 Schüler unterrichtet. Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die Anzahl der Vegetarier binomialverteilt ist und auch hier die Trefferwahrscheinlichkeit in Höhe von 9 % für Vegetarier gilt.

- d) Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit...
- genau 167 Vegetarier,
 - weniger als 150 Vegetarier und
 - mehr als 250 Vegetarier an der Schule sind.

Insgesamt ist aufgrund der Verkaufszahlen der ersten Woche zu vermuten, dass auch häufig Nichtvegetarier das vegetarische Gericht wählen. Insbesondere bei den Frauen ist das vegetarische Gericht beliebt, in 60 % der Fälle haben sie eines der 245 vegetarischen Gerichte bestellt, wohingegen 462 der 714 Tagesgerichte von Männern bestellt worden sind. Die Schülervertretung möchte daher das Bistro gezielt bei den Schülerinnen und Lehrerinnen bewerben, die ihrer Meinung nach im Bistro seltener zu Mittag essen als Männer.

- e) Prüfen Sie mittels eines Vierfelderdiagramms, ob tatsächlich weniger Frauen als Männer das Bistro zum Mittagessen nutzen.

Ein Mitglied der Projektgruppe hat während der beobachteten Woche per Strichliste festgehalten, wie viele Mittagessen in welcher Zeit bestellt wurden. Hierzu wurde die Zeit, in der Mittagessen angeboten wird, in Viertelstunden eingeteilt. Tabelle 2.1 zeigt die ermittelten Daten.

Uhrzeit	11:30 bis 11:45	11:45 bis 12:00	12:00 bis 12:15	12:15 bis 12:30	12:30 bis 12:45	12:45 bis 13:00	13:00 bis 13:15	13:15 bis 13:30
vergangene Zeit t in Viertelstunden	1	2	3	4	5	6	7	8
Anzahl der Mittagessen in Stück pro Viertelstunde	54	95	128	153	165	148	122	94

Tabelle 2.1

- f) Zeichnen Sie die empirischen Daten zum Zusammenhang zwischen der vergangenen Zeit und der Anzahl der Mittagessen als Punkte in das gegebene Koordinatensystem (Abb. 2.2) ein.

Ermitteln Sie mittels Regression eine Funktionsgleichung, die den Zusammenhang möglichst geeignet wiedergibt.

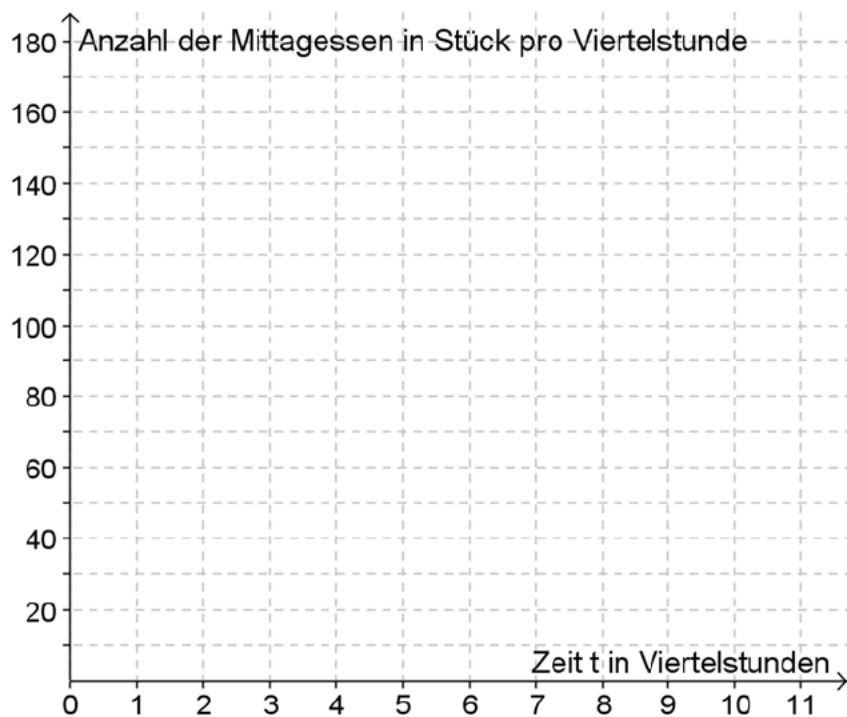


Abbildung 2.2

Ein Mitglied der Schülersvertretung ist der Meinung, dass es sich für den Betreiber lohnen würde, wenn er die Zeit, in der Mittagessen angeboten wird, um eine halbe Stunde auf 11:30 Uhr bis 14:00 Uhr verlängern würde, da dann noch mehr Mittagessen verkauft würden.

- g) Beurteilen Sie, ob es sich für den Bistrobetreiber lohnen würde, die Zeit, in der Mittagessen angeboten wird, zu verlängern.

Name des Prüflings:	
---------------------	--

Punkteverteilung Aufgabe 3: Fehmarnbeltquerung

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	gesamt
Erreichbar	4	4	6	3	4	4	5	30
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter:
 $a, b, c, \dots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \dots \in \mathbb{R}$.

Zurzeit verkehrt eine Fähre zwischen Rødby (Dänemark) und Puttgarden (Deutschland). Die „Feste Fehmarnbeltquerung“ ist ein geplanter Tunnel unter dem Fehmarnbelt, der beide Länder miteinander verbinden soll.

Der Graph der Funktion f (1 Längeneinheit $\triangleq$ 1 km) beschreibt in der Draufsicht eine mögliche Trassenführung für diesen Tunnel (siehe Abb. 3.1).

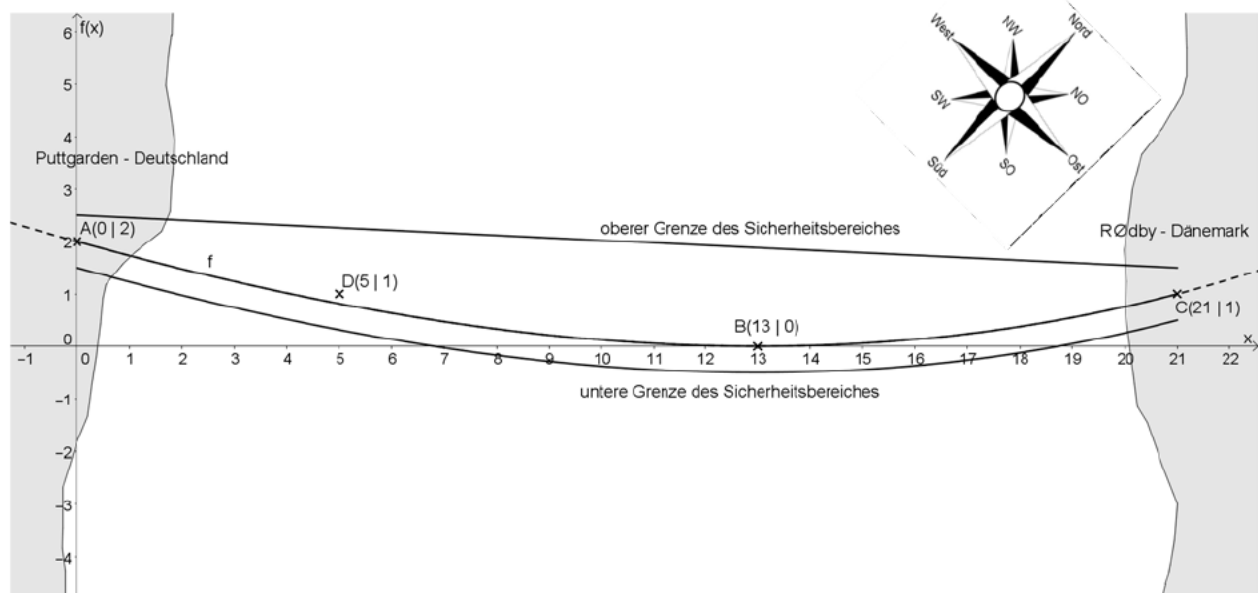


Abbildung 3.1

- a) Begründen Sie, warum sich für die Modellierung des Verlaufs der Tunneltrasse f eine ganzrationale Funktion 3. Grades über den dargestellten Bereich anbietet.
- b) Zeigen Sie, dass die Funktion f mit der Gleichung:

$$f(x) = \frac{41}{227\,136}x^3 + \frac{811}{113\,568}x^2 - \frac{4\,843}{17\,472}x + 2 \text{ mit } 0 \leq x \leq 21$$

die dargestellte Trassenführung angemessen beschreibt.

Da in dieser Region mit rund 15 % des weltweiten Seeverkehrsvolumens ein hohes Verkehrsaufkommen herrscht, ist ein Sicherheitsbereich um den Tunnel (siehe Abb. 3.1) definiert worden. In diesem Bereich gelten besondere Regeln für den Schiffsverkehr. Die Grenze des oberen Sicherheitsbereichs ist eine geradlinige Verbindung zwischen zwei Punkten, die sich 0,5 km nordwestlich (bitte beachten Sie die Kompassrose) der Punkte A und C befinden. Die Grenze des unteren Sicherheitsbereichs ist die in südöstlicher Richtung um 0,5 km verschobene Tunneltrasse f.

Für den Sicherheitsbereich gilt von Südwesten nach Nordosten (Abszissenrichtung) das Intervall $I = [0; 21]$.

- c) Geben Sie die beiden Gleichungen der Funktionsgraphen, die den Sicherheitsbereich begrenzen, an.

Berechnen Sie die Fläche des Sicherheitsbereichs und geben Sie das Ergebnis in einer sinnvollen Maßeinheit an.

Für die Fertigstellung des Tunnels müssen einige Mio. m^3 Erdreich bewegt werden. Dieser Aushub soll dann an der Küste zur Landgewinnung genutzt werden. Bevor mit dem Ausheben des Tunnelgrabens im Fehmarnbelt begonnen wird, soll bereits Boden an Land verschoben worden sein. Das Planungsbüro gibt an, dass sich erfahrungsgemäß die Menge des bewegten Erdbodens näherungsweise durch die Gleichung der Funktion g mit

$$g(t) = 15 - 14,5e^{-\frac{3}{50}t} \text{ mit } t \geq 0$$

beschreiben lässt, wobei $g(t)$ die Menge des Aushubs in Mio. m^3 in Abhängigkeit von der Zeit t in Wochen beschreibt.

- d) Geben Sie die Menge des Aushubes an, der langfristig annähernd bewegt werden muss, und ermitteln Sie die Menge des Aushubes zum Beginn der Betrachtung.
- e) Berechnen Sie die durchschnittliche wöchentliche Änderung der Aushubmenge von der 10. bis zur 30. Woche in der Bauphase.

Um die Stärke des zu erwartenden Verkehrsaufkommens beschreiben zu können, wurde mithilfe vorliegender Zahlen und Schätzungen auf Grundlage des Verkehrs über den Großen Belt und des Verkehrs über den Öresund zwischen Dänemark und Schweden durch das Planungsbüro die Gleichung der Funktion i ermittelt. Es gilt:

$$i(t) = 1,4 - 2e^{-3t} + 2e^{-0,9t} \text{ mit } 0 \leq t \leq 3,5.$$

Die Gleichung der Funktion i gibt den zu erwartenden Fahrzeugstrom an einem Montag in Richtung Fehmarn in 1 000 Fahrzeugen pro Stunde und in Abhängigkeit von der Zeit t in Stunden an. Betrachtet wird die prognostizierte Stoßzeit am Morgen zwischen 06:30 Uhr und 10:00 Uhr.

- f) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem der zu erwartende Fahrzeugstrom maximal wird. Geben Sie die Größe des Fahrzeugstroms zu diesem Zeitpunkt an.

Ein Ingenieur des Planungsbüros behauptet, dass die höchste Abnahme des Fahrzeugstroms außerhalb des betrachteten Zeitraumes stattfindet.

- g) Beurteilen Sie die Richtigkeit dieser Behauptung. Nutzen Sie hierbei die vom Planungsbüro modellierte Gleichung der Funktion i .

Name des Prüflings

Punkteverteilung Aufgabe 3: Dengue-Fieber

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	3	5	3	5	3	3	3	5	30
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \dots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \dots \in \mathbb{R}$.

Anfang 2015 schrieb eine Moderatorin auf Facebook: „Dengue-Fieber ist echt [...]!“ Die Moderatorin hatte sich bei einem Neujahrsurlaub auf den Malediven diese Tropenkrankheit zugezogen. Die Virus-Erkrankung wird durch bestimmte Mückenarten übertragen, die sich in den letzten Jahren auch in Europa bzw. in Deutschland ausgebreitet haben. Die Moderatorin wurde mit Fieber in ein Krankenhaus eingeliefert und behandelt. Der Verlauf der Körpertemperatur bei Fieber kann manchmal stark schwanken, insbesondere beim sogenannten biphasischen Fieber. Der Zusammenhang zwischen der Körpertemperatur c in Grad Celsius und der vergangenen Zeit t in Tagen kann bei einem typischen Verlauf für die ersten zwölf Tage durch die Funktion c mit der folgenden Gleichung modelliert werden:

$$c(t) = -0,00975t^4 + 0,238t^3 - 1,84t^2 + 4,75t + 36,7 \text{ mit } 0 \leq t \leq 12.$$

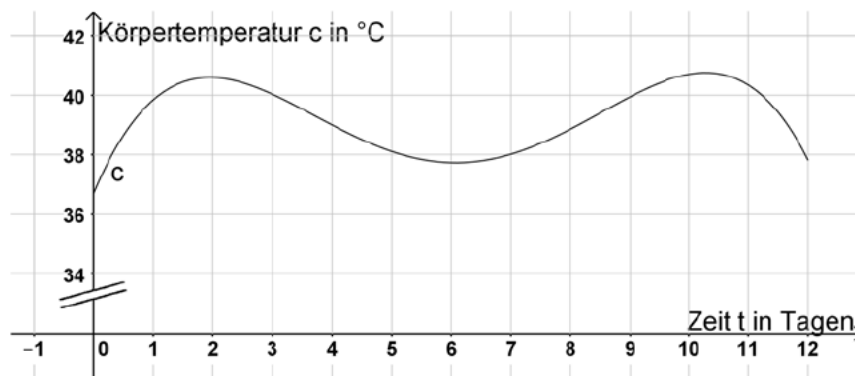


Abbildung 3.1

- Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen c im Sachzusammenhang anhand dreier Aspekte.
- Berechnen Sie den exakten Zeitpunkt mit der höchsten Körpertemperatur und geben Sie die dort vorliegende Körpertemperatur und die Uhrzeit an.

Man kann bei einer Körpertemperatur von über $40,5^\circ\text{C}$ von kritischem Fieber sprechen, das einer strengen Beobachtung bedarf.

- Ermitteln Sie die Zeiträume, in denen der Patient bei dem typischen Verlauf des biphasischen Fiebers unter kritischem Fieber leidet.

Starke Änderungen der Körpertemperatur sind für den Menschen sehr anstrengend und schwächen ihn.

- d) Ermitteln Sie, wie stark die Körpertemperatur im Mittel zwischen dem Ende des achten und dem Ende des neunten Tages angestiegen ist und wie groß die momentane Änderung der Körpertemperatur am Ende des achten Tages ist.

Erläutern Sie, warum sich die beiden Werte voneinander unterscheiden.

Häufig werden bei Fieber schmerz- und fiebersenkende Medikamente verordnet. Nimmt man ein derartiges Medikament in Form einer Tablette ein, so wird der Wirkstoff zunächst vom Körper aufgenommen und die Wirkstoffkonzentration in den Körperflüssigkeiten steigt. Im Laufe der Zeit wird der Wirkstoff vom Körper abgebaut und die Wirkstoffkonzentration nimmt ab. Der Zusammenhang zwischen der Wirkstoffkonzentration w in den Körperflüssigkeiten in Milligramm pro Liter $\left[\frac{\text{mg}}{\text{l}}\right]$ und der vergangenen Zeit t seit der Einnahme in Stunden wird beschrieben durch die Funktion w mit der Gleichung:

$$w(t) = 18t \cdot e^{-0,6t} \text{ mit } 0 \leq t \leq 12.$$

Die Wirkstoffkonzentration muss über $5,5 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$ liegen, damit das Medikament noch wirkt.

- e) Ermitteln Sie, nach welcher Zeit die Tablette nicht mehr wirkt.

Gegeben ist der formale Ausdruck $M = \frac{1}{12} \cdot \int_0^{12} w(t) dt$.

- f) Berechnen Sie den Wert von M .

Interpretieren Sie den formalen Ausdruck M im Sachzusammenhang.

Nach 3 Stunden 20 Minuten, im Wendepunkt des Graphen w , wird die Modellierung der Wirkstoffkonzentration durch die Funktion w ungenau. Eine bessere Näherung ist die Annahme, dass der Wirkstoff ab diesem Zeitpunkt vom Körper linear abgebaut wird. Die Wirkstoffkonzentration wird daher besser durch eine abschnittsweise definierte Funktion w_{neu} mit der folgenden Gleichung beschrieben:

$$w_{\text{neu}}(t) = \begin{cases} 18t \cdot e^{-0,6t} & \text{für } 0 \leq t \leq \square, \\ \square & \text{für } \square < t \leq \square. \end{cases}$$

Auch hierbei gibt w_{neu} die Wirkstoffkonzentration in den Körperflüssigkeiten in Milligramm pro Liter $\left[\frac{\text{mg}}{\text{l}}\right]$ und t die vergangene Zeit seit der Einnahme in Stunden an.

Der erste Abschnitt der Funktion muss knickfrei in den zweiten linearen Abschnitt übergehen.

- g) Zeigen Sie, dass der Wendepunkt des Graphen w beim Zeitpunkt 3 Stunden 20 Minuten liegt.

- h) Ergänzen Sie alle fehlenden Angaben der Funktionsgleichung w_{neu} .

Geben Sie an, nach wie vielen Stunden und Minuten der Wirkstoff vollständig abgebaut ist.

Name des Prüflings:

Punkteverteilung Aufgabe 3: Wattenmeer

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	gesamt
Erreichbar	4	5	5	6	4	3	3	30
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \dots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \dots \in \mathbb{R}$.

Der erste deutsche Offshore Windpark Alpha Ventus speist seit seiner Inbetriebnahme im Jahr 2010 kontinuierlich klimafreundliche Energie ins deutsche Versorgungsnetz ein.

Die Wasserströmungen können im Seegebiet von Alpha Ventus (siehe Abb. 3.1)¹ während der Gezeiten untersucht werden. Mit einer fest installierten Messvorrichtung auf der abgebildeten Umspannplattform wird dazu lokal die Wasserströmungsgeschwindigkeit über Grund in Richtung Küste gemessen.

Als Ergebnis werden die nachfolgenden Messwerte ermittelt. Die Messungen begannen um 00:00 Uhr Ortszeit und sind leider nur zu unregelmäßigen Zeiten notiert worden.

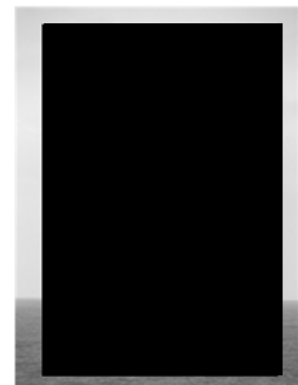


Abbildung 3.1

Uhrzeit	Wasserströmungsgeschwindigkeit in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$
00:00	0
01:15	0,35
02:45	0,61
04:15	0,4
06:30	-0,2
07:00	-0,4
08:45	-0,55
11:20	-0,25
14:00	0,5
19:00	-0,2

Tabelle 3.1

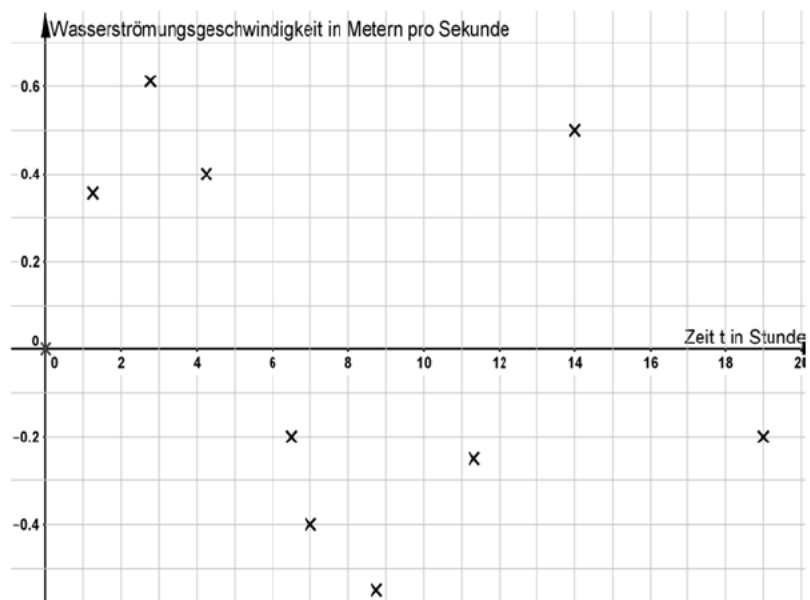


Abbildung 3.2

- a) Beschreiben Sie den Verlauf der Wasserströmungsgeschwindigkeit in Abb. 3.2 im Sachzusammenhang anhand zweier Aspekte.

¹ http://commons.wikimedia.org/wiki/File%3AAlpha_Ventus_Windmills.JPG (Zugriff 10. Juli 2014)

Von zwei Ingenieurbüros erhalten Sie die folgenden Vorschläge I und II zur Modellierung des Zusammenhangs für den Zeitraum von 12 Stunden, beginnend ebenfalls um 00:00 Uhr Ortszeit. Dabei geben v_I und v_{II} die Wasserströmungsgeschwindigkeiten in $\frac{m}{s}$ und t die Zeit in Stunden an:

$$I: v_I(t) = \frac{3}{5} \cdot \sin\left(\frac{13}{25}t\right) \text{ mit } 0 \leq t \leq 12 \text{ und}$$

$$II: v_{II}(t) = \frac{1}{125}t^3 - \frac{18}{125}t^2 + \frac{29}{50}t \text{ mit } 0 \leq t \leq 12.$$

- b) Begründen Sie, warum die Funktionen v_I und v_{II} grundsätzlich geeignet sind, die gegebenen Wasserströmungsgeschwindigkeiten zu modellieren.

Entscheiden Sie begründet, welcher der beiden Funktionstypen bei einem Definitionsbereich von mehreren Tagen geeigneter ist.

Die Fundamente des Windparks entwickeln sich zu künstlichen Riffs. Aus diesem Grund sollen die größten Wasserströmungsgeschwindigkeiten betrachtet werden.

- c) Ermitteln Sie die größten Wasserströmungsgeschwindigkeiten in Richtung Küste, die mithilfe der Funktionen v_I und v_{II} beschrieben werden und vergleichen Sie diese Werte miteinander.

- d) Berechnen Sie den Wendepunkt des Graphen v_{II} .

Interpretieren Sie die Bedeutung des Wendepunktes im Sachzusammenhang.

In einem weiteren Schritt sollen nun die Auswirkungen des Windes auf schwimmende Körper (z. B. Treibgut) in diesem Seegebiet untersucht werden. Dazu wird um 00:00 Uhr eine Treibboje von der Plattform im Meer ausgesetzt. Die Treibboje ist mit einem GPS-Gerät² ausgestattet, das die Messung der Geschwindigkeit über Grund erlaubt. Der Verlauf der Bojengeschwindigkeit v_B in Richtung Küste ist für 12 Stunden in der folgenden Graphik (Abb. 3.3) dargestellt und kann mit der Funktionsgleichung:

$$v_B(t) = \frac{1}{125}t^3 - \frac{41}{250}t^2 + \frac{39}{50}t$$

angegeben werden, wobei t die Zeit in Stunden und v_B die Geschwindigkeit der Boje in $\frac{m}{s}$ angibt.

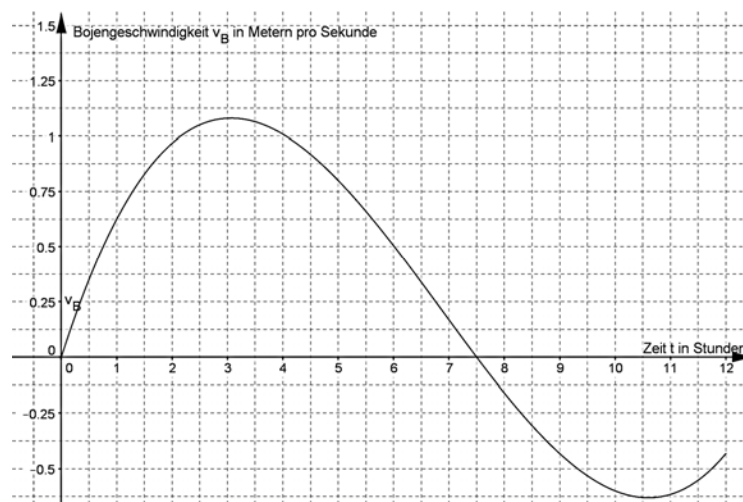


Abbildung 3.3

² GPS: Global Positioning System; Satelliten gestützte Positionsbestimmung

Gegeben ist der formale Ausdruck $s = 3600 \cdot \int_0^{7,5} v_B(t) dt$.

e) Berechnen Sie den Wert des Ausdrucks s .

Interpretieren Sie den formalen Ausdruck s im Sachzusammenhang.

Ergänzt man die Abbildung 3.3 um den Graphen der Funktion v_{II} , so ergibt sich die Abbildung 3.4.

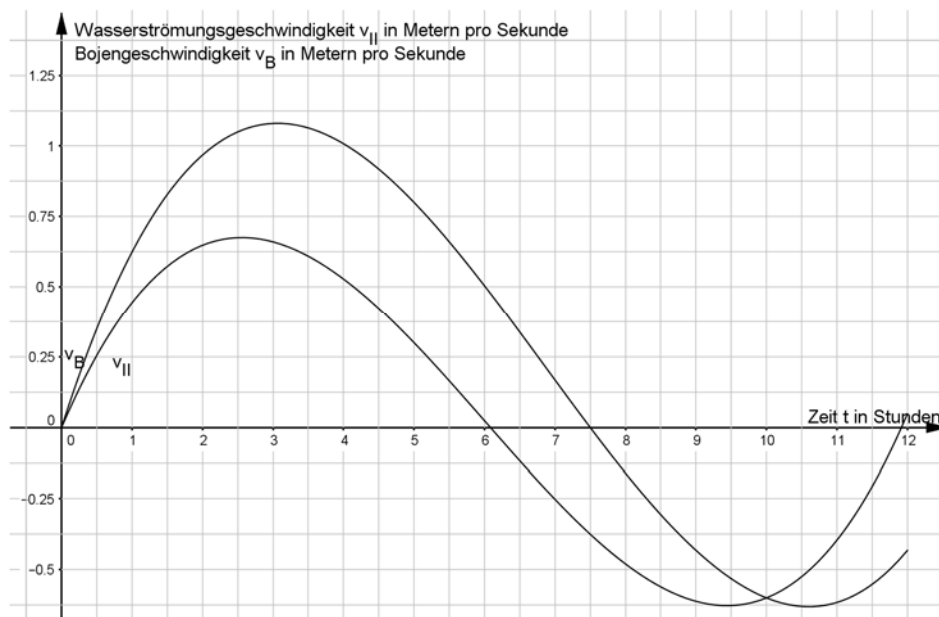


Abbildung 3.4

Der Wert der Fläche zwischen den beiden Funktionen v_{II} und v_B entspricht der Länge des Weges, den die Boje durch den Wind zurückgelegt hat.

- f) Begründen Sie, warum die Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen v_{II} und v_B für $0 \leq t \leq 6$ dem Weg entspricht, den die Boje durch den Wind zurückgelegt hat.
- g) Bestimmen Sie die Länge des Weges, den die Boje aufgrund des Windes für $0 \leq t \leq 6$ zurückgelegt hat.

Name des Prüflings:

Punkteverteilung Aufgabe 3: Gläserproduktion

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	gesamt
Erreichbar	3	6	3	3	4	5	6	30
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \dots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \dots \in \mathbb{R}$.

Das Unternehmen PHANGLASTISCH produziert Gläser.

Unter anderem wird ein einfaches Sektklas für den Partybedarf produziert. Die Controllingabteilung hat hierbei ermittelt, dass die Kosten K in Euro in Abhängigkeit von der produzierten Menge x in 1000 Stück durch den nebenstehenden Graphen K der Kostenfunktion mit der folgenden Funktionsgleichung beschrieben werden können:

$$K(x) = 0,5x^3 - 20x^2 + 310x + 6\,000$$

mit $0 \leq x \leq 36$.

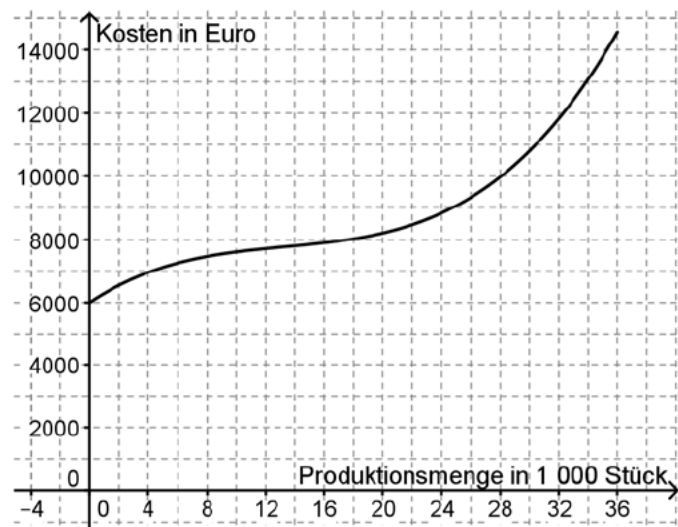


Abbildung 3.1

- a) Beschreiben Sie den Kurvenverlauf in Abb. 3.1 im Sachzusammenhang anhand dreier Aspekte.

Die Produktionsmenge mit den geringsten Stückkosten legt auch die langfristige Preisuntergrenze fest. Diese Menge liegt bei $x_1 \approx 27,78$ also bei etwa 27 780 Stück. Kurzfristig darf der Preis sogar auf das Minimum der variablen Stückkosten sinken. Für die variablen Stückkosten k_v in Euro pro 1000 Stück gilt die Funktionsgleichung:

$$k_v(x) = 0,5x^2 - 20x + 310 \quad \text{mit } 0 \leq x \leq 36.$$

- b) Berechnen Sie das Minimum der variablen Stückkosten.

Ermitteln Sie die kurz- und die langfristige Preisuntergrenze in Euro pro Stück.

Aktuell liegt der Marktpreis bei 0,80 Euro pro Stück, dies entspricht dann auch dem Grenzerlös E' .

Ein Volkswirt behauptet, dass man aus der Gleichung: Gewinn (G) = Erlös (E) - Kosten (K) folgern kann, dass die gewinnmaximale Menge x^* erreicht wird, wenn $E'(x^*) = K'(x^*)$ gilt.

- c) Zeigen Sie, dass der Volkswirt Recht hat.
d) Ermitteln und interpretieren Sie den Ausdruck $K'(10)$.

- e) Erläutern Sie, warum im vorliegenden Fall die Gleichung $800 = K'(x^*)$ verwendet werden muss, um die gewinnmaximale Menge ermitteln zu können.

Ermitteln Sie die gewinnmaximale Menge.

Die Produktentwicklungsabteilung schlägt vor, ein neues Glas mit einer innovativen, jedoch leider teuren Technologie zu versehen, so dass es sich je nach Temperatur unterschiedlich verfärbt. Die Unternehmensleitung ist sich nicht sicher, ob hierfür ein hinreichend großer Absatzmarkt besteht, auf dem auch höhere Preise erzielt werden können. Sie beauftragt ein Marktforschungsunternehmen, das nach einiger Zeit den Zusammenhang zwischen dem Preis eines Glases und der zu erwartenden Absatzmenge durch die in Abb. 3.2 eingetragenen Punkte beschreibt.

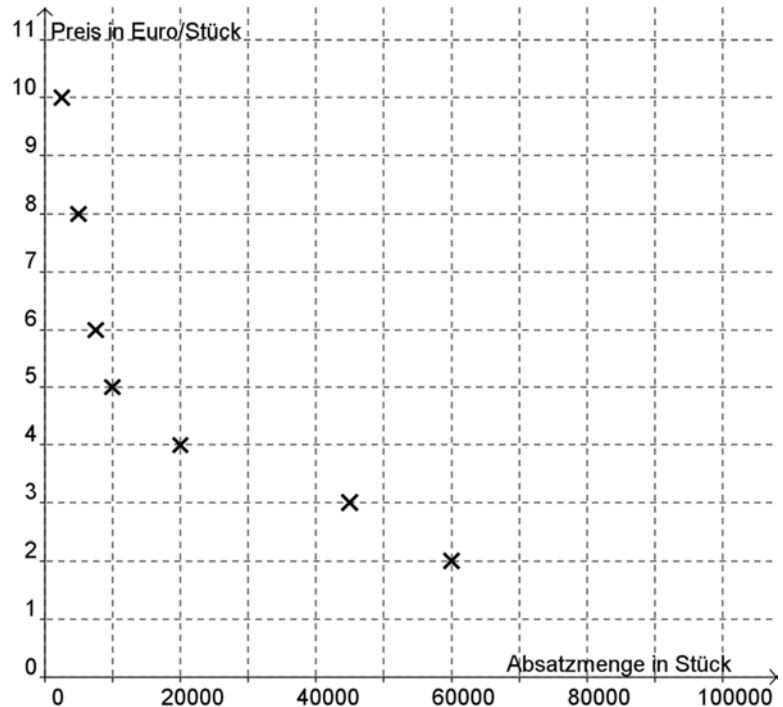


Abbildung 3.2

Zudem schlägt das Marktforschungsunternehmen vor, den Zusammenhang zwischen dem Preis p in Euro pro Stück und Absatz x in Stück näherungsweise durch die Funktion p mit der folgenden Gleichung zu beschreiben:

$$p(x) = 7,92 \cdot e^{-0,00002x} \quad \text{mit } 0 \leq x \leq 100\,000.$$

- f) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion p in das Koordinatensystem (Abb. 3.2) ein.

Beurteilen Sie anhand der Graphik (Abb. 3.2), inwieweit die Gleichung der Funktion p geeignet erscheint, den Sachzusammenhang zu beschreiben.

Auf der Basis der Preis-Absatzfunktion p hat die Controllingabteilung die Funktionsgleichung für den Grenzerlös der farbigen Gläser E_{farb}' in Euro pro Stück in Abhängigkeit von der Absatzmenge x in Stück ermittelt:

$$E_{\text{farb}}'(x) = (7,92 - 0,0001584x) \cdot e^{-0,00002x} \quad \text{mit } 0 \leq x \leq 100\,000.$$

- g) Ermitteln Sie die erlösmaximale Absatzmenge, den erlösmaximalen Preis sowie den zugehörigen Gesamterlös.

Aufgabe 1 mit Analytischer Geometrie:

	Anforderungen	Modelllösungen																			
A1	Der Prüfling ...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. <u>Bemerkung:</u> Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	BE																		
1a	bestimmt die Gleichung der 1. Ableitung der Funktion f, bestimmt den Koeffizienten b so, dass der Graph f sprung- und knickfrei verläuft, berechnet den Wert des Integrals und gibt dessen Bedeutung an.	$f'(x) = \begin{cases} 3x - 5 & \text{für } x \leq 3 \\ 4 & \text{für } x > 3 \end{cases}$ $f(3) = \frac{3}{2}$ $\frac{3}{2} = 4 \cdot 3 + b \Leftrightarrow b = -\frac{21}{2}$ $f'(3) = 4$, somit ist der Wert der Steigung an der Stelle $x = 3$ mit der Steigung des zweiten Abschnittes ($m = 4$) identisch. Der Graph f verläuft daher sprung- und knickfrei. $\int_1^2 f(x) dx = [0,5x^3 - 2,5x^2 + 3x + c]_1^2$ $= (0,5 \cdot 2^3 - 2,5 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + c) - (0,5 \cdot 1^3 - 2,5 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + c)$ $= 0 - 1 = -1$ Der Graph der Funktion f verläuft im Intervall I mit $I = [1; 2]$ unterhalb der Abszissenachse. Die Größe der Fläche zwischen dem Graphen f und der Abszissenachse beträgt somit eine Flächeneinheit.	5																		
1b	entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.	<table><tr><td><u>Hinweis:</u> Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).</td><td>w</td><td>f</td></tr><tr><td>Der Wert des Parameters a ist generell doppelt so hoch wie der Wert des Parameters d.</td><td></td><td>X</td></tr><tr><td>Wenn $a = b = 1$ und $c = d = 0$ gilt, so befindet sich eine maximale, positive Änderungsrate bei $x = \pi$.</td><td></td><td>X</td></tr><tr><td>Wenn $a = b = 1$ und $c = d = 0$ gilt, beträgt der Integralwert über eine Periodenlänge von der Funktion f null.</td><td>X</td><td></td></tr><tr><td>Für $a = 3, b = 2$ und $c = d = 0$ gilt: Die Periodenlänge beträgt $p = 2\pi$.</td><td></td><td>X</td></tr><tr><td>Für $b = 1$ und $c = 0$ beschreiben die Gleichungen der Funktionen f und g mit $g(x) = a \cdot \cos\left(b \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + d$ den gleichen Funktionsgraphen.</td><td>X</td><td></td></tr></table>	<u>Hinweis:</u> Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	w	f	Der Wert des Parameters a ist generell doppelt so hoch wie der Wert des Parameters d.		X	Wenn $a = b = 1$ und $c = d = 0$ gilt, so befindet sich eine maximale, positive Änderungsrate bei $x = \pi$.		X	Wenn $a = b = 1$ und $c = d = 0$ gilt, beträgt der Integralwert über eine Periodenlänge von der Funktion f null.	X		Für $a = 3, b = 2$ und $c = d = 0$ gilt: Die Periodenlänge beträgt $p = 2\pi$.		X	Für $b = 1$ und $c = 0$ beschreiben die Gleichungen der Funktionen f und g mit $g(x) = a \cdot \cos\left(b \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + d$ den gleichen Funktionsgraphen.	X		5
<u>Hinweis:</u> Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	w	f																			
Der Wert des Parameters a ist generell doppelt so hoch wie der Wert des Parameters d.		X																			
Wenn $a = b = 1$ und $c = d = 0$ gilt, so befindet sich eine maximale, positive Änderungsrate bei $x = \pi$.		X																			
Wenn $a = b = 1$ und $c = d = 0$ gilt, beträgt der Integralwert über eine Periodenlänge von der Funktion f null.	X																				
Für $a = 3, b = 2$ und $c = d = 0$ gilt: Die Periodenlänge beträgt $p = 2\pi$.		X																			
Für $b = 1$ und $c = 0$ beschreiben die Gleichungen der Funktionen f und g mit $g(x) = a \cdot \cos\left(b \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + d$ den gleichen Funktionsgraphen.	X																				
1c	berechnet die Fläche A des Dreiecks für $P(4 f(4))$ und zeigt, dass das eingeschriebene Dreieck die maxi-	$P(4 f(4)) = P(4 4)$ $A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$ [FE] Die Größe des Dreiecks beträgt 8 Flächeneinheiten. Zielfunktion: $A(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$ $A'(x) = -x + 4, A''(x) = -1$	5																		

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung nächste Seite

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 1c	male Fläche hat, wenn $P(4 f(4))$ gilt.	Notwendige Bedingung: $A'(x) = 0$ $0 = -x + 4 \Leftrightarrow x_e = 4$ Hinreichende Bedingung: $A'(x_e) = 0 \wedge A''(x_e) \neq 0$ $A''(4) = -1 \Rightarrow A''(x_e) < 0$ Somit ist x_e Stelle eines Hochpunktes. $f(4) = 4$ und $A(4) = 8$ Der Punkt, bei dem der Flächeninhalt des Dreieckes maximal wird, hat die Koordinaten $P(4 4)$.	
1d	gibt eine Gleichung der dargestellten Ebene in Koordinaten- und Parameterform an und ermittelt die Schnittgeraden der dargestellten Ebene E mit den Ebenen, die jeweils durch zwei Koordinatenachsen aufgespannt werden.	Die Gleichung der Ebene E in der Parameterform ergibt sich aus den Spannvektoren der Ebene und einem Stützvektor. Die Ebene E wird durch die Punkte $A(4 0 0)$, $B(0 3 0)$ und $C(0 0 2)$ beschrieben. Es ergeben sich die folgenden Spannvektoren der Ebene: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ Mit dem Stützvektor $\overrightarrow{OA}$ ergibt sich dann die folgende Ebenengleichung in Parameterform: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$ Die Schnittgerade mit der x-y-Ebene ergibt sich z. B. mit dem Spannvektor $\overrightarrow{AB}$ der Ebene E und dem Stützvektor $\overrightarrow{OA}$ wie folgt: $g_{xy}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$ Die Schnittgerade mit der x-z-Ebene ergibt sich z. B. sich mit dem Spannvektor $\overrightarrow{AC}$ der Ebene E und dem Stützvektor $\overrightarrow{OA}$ wie folgt: $g_{xz}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$ Die Schnittgerade mit der y-z-Ebene ergibt sich z. B. sich mit dem Spannvektor $\overrightarrow{BC}$ der Ebene E und dem Stützvektor $\overrightarrow{OB}$ wie folgt: $g_{yz}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$	5
1e	zeigt, dass der Stützvektor der Geraden g_3 nicht auf der Geraden g_2 liegt,	Damit der Stützvektor der Geraden g_3 auf der Geraden g_2 liegt, müsste sich ein reeller Wert für den Parameter r_2 finden lassen, so dass dies zu diesem Ortsvektor führt. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = r_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ Aus der x-Komponente ergibt sich $r_2 = \frac{1}{4}$. Eingesetzt in die Gleichung für die Gerade g_2 ergibt sich der dazugehörige Punkt der Geraden: $\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$	5

Fortsetzung nächste Seite

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 1e	zeigt, dass die Geraden g_1 und g_3 parallel zueinander verlaufen, aber nicht identisch sind und berechnet den Schnittpunkt der Geraden g_1 und g_2.	Da $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ gilt, liegt der Stützvektor der Geraden g_3 nicht auf der Geraden g_2. Damit die Geraden parallel sind, müssen die Richtungsvektoren der Geraden g_1 und g_3 linear abhängig sein. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = r_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ Es ergibt sich $r_3 = \frac{1}{2}$, damit sind die Richtungsvektoren linear abhängig. Damit die Geraden nicht identisch sind, darf der Ortsvektor der Geraden g_1 kein Punkt der Geraden g_3 sein: $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$ Aus der x-Komponente ergibt sich: $r_3 = \frac{1}{2}$. Eingesetzt in die Gleichung der Geraden g_3 ergibt sich der dazugehörige Ortsvektor des Punktes P der Geraden: $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ Da $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ gilt, sind die Geraden g_1 und g_3 parallel, aber nicht identisch. Zur Berechnung des Schnittpunktes werden die Geradengleichungen gleichgesetzt: $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = r_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ Durch Aufstellen zweier Gleichungen und das Eliminieren einer der Variablen ergibt sich der Parameter $r_2 = \frac{1}{2}$. $\begin{array}{l} \text{I} \quad 2 + r_1 = 4r_2 \\ \text{II} \quad 1 + 2r_1 = 2r_2 \end{array}$ $\begin{array}{rcl} (-2) \cdot \text{I} + \text{II}: & -2 \cdot (2 + r_1) + 1 + 2r_1 & = -8r_2 + 2r_2 \\ & -3 & = -6r_2 \\ & r_2 & = \frac{1}{2} \end{array}$ Durch Einsetzen des Parameters $r_2 = \frac{1}{2}$ in die Gleichung für die Gerade g_2 ergibt sich der Ortsvektor des Schnittpunktes S der beiden Geraden: $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$ Der Schnittpunkt der Geraden g_1 und g_2 hat die Koordinaten $S(2 2 1)$.	

	Anforderungen	Modelllösungen	
1f	gibt eine Gleichung der Ebene E_1 in Parameterform an und zeigt, dass die Normalenvektoren der Ebenen E_1 und E_2 linear abhängig sind.	Die Parameterform wird durch Umwandeln der Variablen x und y in die Parameter s und t bestimmt: $\begin{aligned} x &= s \\ y &= t \\ \underline{4s + 2t + 4z} &= \underline{20} \end{aligned}$ Es ergibt sich durch Umstellen: $\begin{aligned} x &= s \\ y &= t \\ \underline{z} &= \underline{-s - 0,5t + 5} \end{aligned}$ Und damit die Parameterform der Ebenengleichung für die E_1: $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0,5 \end{pmatrix}.$ Die Normalenvektoren der Ebenen sind linear anhängig voneinander, wenn $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ gilt.}$ Dies ist für $s = -1$ der Fall.	5
			30

Aufgabe 2: AirRace

	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
2a	begründet, dass sich die entsprechende Flugroute mit der gegebenen Gleichung beschreiben lässt, wenn davon ausgegangen wird, dass die Airgates mittig zwischen den Pylonen durchflogen werden.	Die Flugroute lässt sich als eine Gerade beschreiben, die mittig durch die beiden Airgates A und B führt. Daher ergibt sich für die Geradengleichung g in der Form $\vec{x} = \vec{x}_0 + r \cdot \vec{a}$: Für $\vec{x}_0$: $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 600 \\ 100 \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 615 \\ 105 \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 600 \\ 100 \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 607,5 \\ 102,5 \\ z \end{pmatrix}$ Die z-Koordinate des Ortsvektors beschreibt die Flughöhe, die sich zwischen AirGate A und AirGate B nicht verändert und im Allgemeinen 15 m beträgt. Es ergibt sich somit für den Stützvektor der Geraden: $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 607,5 \\ 102,5 \\ 15 \end{pmatrix}$ und für den Richtungsvektor $\vec{a}$ durch die jeweilige Mitte der Airgates: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 457,5 \\ 552,5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 607,5 \\ 102,5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -150 \\ 450 \\ 0 \end{pmatrix}$ Die Geradengleichung lautet damit: $g: \vec{x} = \vec{x}_0 + r \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 607,5 \\ 102,5 \\ 15 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -150 \\ 450 \\ 0 \end{pmatrix}$ und beschreibt somit die Flugroute.	4
2b	ermittelt die Geschwindigkeit in Kilometer pro Stunde, mit der der Pilot mindestens fliegen muss, um die erste Aufgabe zu erfüllen.	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 450 \\ 550 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 600 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -150 \\ 450 \\ 0 \end{pmatrix}$ $ \vec{a} = \left \begin{pmatrix} -150 \\ 450 \\ 0 \end{pmatrix} \right \approx 474,34 \text{ [m]}$ Die Entfernung (Betrag des Vektors $\vec{a}$) zwischen den Toren beträgt somit ca. 474,34 m. $\frac{474,34 \text{ m}}{5 \text{ s}} \approx 94,87 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ $94,87 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 3,6 \frac{\text{s} \cdot \text{km}}{\text{m} \cdot \text{h}} \approx 341,53 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ Die Geschwindigkeit des Flugzeuges muss somit mindestens ca. $94,87 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ betragen, dies entspricht ca. $341,53 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.	4
2c	weist rechnerisch nach, dass der Pilot das Airgate C auf einer Höhe von 15 m passiert.	Die Gerade g_1 beschreibt die Flugbahn des Flugzeuges ausgehend von dem Punkt P: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 800 \\ 700 \\ 300 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -80 \\ -80 \\ -57 \end{pmatrix}$. Der Punkt $C_3(x y 15)$ ist ein beliebiger Punkt mit der Höhe 15 m. Das Gleichsetzen des Ortsvektors $\overrightarrow{OC_3}$ mit der Geraden g_1 führt zu den Koordinaten des Flugzeuges bei der Höhe 15 m. $\overrightarrow{OC_3} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 \\ 700 \\ 300 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -80 \\ -80 \\ -57 \end{pmatrix}$ <i>Fortsetzung nächste Seite</i>	5

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2c		$\Rightarrow u = 5, x = 400 \text{ und } y = 300$ $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 800 \\ 700 \\ 300 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} -80 \\ -80 \\ -57 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 15 \end{pmatrix}$ Es ergibt sich somit der Durchstoßpunkt $P(400 300 15)$. Abschließend ist zu prüfen, ob sich das Flugzeug tatsächlich zwischen den beiden Pylonen befindet. Dazu wird eine Punktprobe mit der Geraden durchgeführt, auf der die Punkte C_1 und C_2 liegen (auf der Höhe 15 m): $\begin{pmatrix} 395 \\ 305 \\ 15 \end{pmatrix} + v \cdot \left(\begin{pmatrix} 405 \\ 295 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 395 \\ 305 \\ 15 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 15 \end{pmatrix}$ Da sich $v = \frac{1}{2}$ ergibt, befindet sich das Flugzeug tatsächlich genau mittig zwischen den Pylonen.	
2d	prüft, ob der Pilot die Maschine noch rechtzeitig abfangen kann.	Normalenvektor der x-y-Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Berechnung des Schnittwinkels: $\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -80 \\ -80 \\ -57 \end{pmatrix}}{\left \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right \cdot \left \begin{pmatrix} -80 \\ -80 \\ -57 \end{pmatrix} \right } \right) \approx 26,74^\circ < 30^\circ$ Damit ist die Bedingung erfüllt und der Pilot kann die Maschine noch rechtzeitig abfangen.	3
2e	begründet, dass die Ebenengleichung E die Zuschauertribüne beschreibt.	Die Spannvektoren der Ebene E berechnen sich aus den Punkten der Tribüne: $\overrightarrow{OT_1} - \overrightarrow{OT_2} = \begin{pmatrix} 20 \\ 180 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 280 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OT_3} - \overrightarrow{OT_2} = \begin{pmatrix} -40 \\ 275 \\ 40 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 280 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -50 \\ -5 \\ 40 \end{pmatrix}$ Mit dem Punkt T_2 als Stützvektor ergibt sich die folgende Ebenengleichung: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 280 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -50 \\ -5 \\ 40 \end{pmatrix}$ Die Parameter s und t müssen zwischen 0 und 1 liegen, damit die Ebene nur die Zuschauertribüne beschreibt. Das Einsetzen von $s = 1$ und $t = 1$ muss zu dem Punkt T_4 führen: $E: \vec{x}_{T_4} = \begin{pmatrix} 10 \\ 280 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -50 \\ -5 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ 175 \\ 40 \end{pmatrix}$ Somit beschreibt die gegebene Ebenengleichung die Tribüne.	5
2f	ermittelt die Zuschauerkapazität der Tribüne.	Es wird zunächst geprüft, ob die Spannvektoren der Ebene E einen rechten Winkel bilden: $\begin{pmatrix} 10 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -50 \\ -5 \\ 40 \end{pmatrix} = 0$ Da dies der Fall ist, kann die Fläche als Rechteck (in diesem Fall als	4

Fortsetzung nächste Seite

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2f		Produkt der Beträge der Richtungsvektoren) bestimmt werden: $A = \left \begin{pmatrix} 10 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix} \right \cdot \left \begin{pmatrix} -50 \\ -5 \\ 40 \end{pmatrix} \right \approx 6454,65 \text{ [m}^2\text{]}$ Da nur 80 % der Fläche für Sitzplätze genutzt werden kann, muss die Fläche mit 0,8 multipliziert werden: $6454,65 \text{ m}^2 \cdot 0,8 = 5163,72 \text{ m}^2$ Pro Sitzplatz werden 0,75 m² kalkuliert, folglich muss die zur Verfügung stehende Tribünenfläche durch $0,75 \frac{\text{m}^2}{\text{Zuschauer}}$ geteilt werden: $n = \frac{5163,72 \text{ m}^2}{0,75 \frac{\text{m}^2}{\text{Zuschauer}}} \approx 6884 \text{ Zuschauer.}$ Aufgrund der Ganzzahligkeit der Zuschauerplätze muss hier das Ergebnis abgeschnitten werden. Es ergibt sich eine Kapazität für 6884 Zuschauer.	
2g	prüft, ob es bei dem gegenwärtigen Kurs zu einer Kollision mit der Zuschauertribüne kommen könnte.	Aus den beiden Punkten auf dem Kurs wird die Gerade f gebildet und zum Schnitt mit der Ebene E gebracht. $f: \vec{x} = \begin{pmatrix} 320,0 \\ 177,5 \\ 15,0 \end{pmatrix} + w \cdot \left(\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 35 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 320,0 \\ 177,5 \\ 15,0 \end{pmatrix} \right)$ $f: \vec{x} = \begin{pmatrix} 320,0 \\ 177,5 \\ 15,0 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} -220,0 \\ 22,5 \\ 20 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 320,0 \\ 177,5 \\ 15,0 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} -220,0 \\ 22,5 \\ 20,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 280 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -50 \\ -5 \\ 40 \end{pmatrix}$ Es ergeben sich: $w \approx 1,656$, $s \approx 0,592$ und $t \approx 1,203$. Der Wert des Parameters t liegt aber außerhalb des Definitionsbereiches der Ebene E ($0 \leq t \leq 1$), folglich kann es zu keinem Zusammenstoß des Flugzeuges mit der Zuschauertribüne kommen. Das Flugzeug fliegt knapp über die Tribüne hinweg.	5
			30

Aufgabe 1 mit Linearer Algebra:

	Anforderungen	Modelllösungen																			
A1	Der Prüfling ...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. <u>Bemerkung:</u> Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	BE																		
1a	bestimmt die Gleichung der 1. Ableitung der Funktion f, bestimmt den Koeffizienten b so, dass der Graph f sprung- und knickfrei verläuft, berechnet den Wert des Integrals und gibt dessen Bedeutung an.	$f'(x) = \begin{cases} 3x - 5 & \text{für } x \leq 3 \\ 4 & \text{für } x > 3 \end{cases}$ $f(3) = \frac{3}{2}$ $\frac{3}{2} = 4 \cdot 3 + b \Leftrightarrow b = -\frac{21}{2}$ $f'(3) = 4, \text{ somit ist der Wert der Steigung an der Stelle } x = 3 \text{ mit der Steigung des zweiten Abschnittes (} m = 4 \text{) identisch.}$ Der Graph f verläuft daher sprung- und knickfrei. $\int_1^2 f(x) \, dx = [0,5x^3 - 2,5x^2 + 3x + c]_1^2$ $= (0,5 \cdot 2^3 - 2,5 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + c) - (0,5 \cdot 1^3 - 2,5 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + c)$ $= 0 - 1 = -1$ Der Graph der Funktion f verläuft im Intervall I mit $I = [1; 2]$ unterhalb der Abszissenachse. Die Größe der Fläche zwischen dem Graphen f und der Abszissenachse beträgt somit eine Flächeneinheit.	5																		
1b	entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.	<table><tr><td><u>Hinweis:</u> Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).</td><td>w</td><td>f</td></tr><tr><td>Der Wert des Parameters a ist generell doppelt so hoch wie der Wert des Parameters d.</td><td></td><td>X</td></tr><tr><td>Wenn $a = b = 1$ und $c = d = 0$ gilt, so befindet sich eine maximale, positive Änderungsrate bei $x = \pi$.</td><td></td><td>X</td></tr><tr><td>Wenn $a = b = 1$ und $c = d = 0$ gilt, beträgt der Integralwert über eine Periodenlänge von der Funktion f null.</td><td>X</td><td></td></tr><tr><td>Für $a = 3, b = 2$ und $c = d = 0$ gilt: Die Periodenlänge beträgt $p = 2\pi$.</td><td></td><td>X</td></tr><tr><td>Für $b = 1$ und $c = 0$ beschreiben die Gleichungen der Funktionen f und g mit $g(x) = a \cdot \cos\left(b \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + d$ den gleichen Funktionsgraphen.</td><td>X</td><td></td></tr></table>	<u>Hinweis:</u> Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	w	f	Der Wert des Parameters a ist generell doppelt so hoch wie der Wert des Parameters d.		X	Wenn $a = b = 1$ und $c = d = 0$ gilt, so befindet sich eine maximale, positive Änderungsrate bei $x = \pi$.		X	Wenn $a = b = 1$ und $c = d = 0$ gilt, beträgt der Integralwert über eine Periodenlänge von der Funktion f null.	X		Für $a = 3, b = 2$ und $c = d = 0$ gilt: Die Periodenlänge beträgt $p = 2\pi$.		X	Für $b = 1$ und $c = 0$ beschreiben die Gleichungen der Funktionen f und g mit $g(x) = a \cdot \cos\left(b \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + d$ den gleichen Funktionsgraphen.	X		5
<u>Hinweis:</u> Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	w	f																			
Der Wert des Parameters a ist generell doppelt so hoch wie der Wert des Parameters d.		X																			
Wenn $a = b = 1$ und $c = d = 0$ gilt, so befindet sich eine maximale, positive Änderungsrate bei $x = \pi$.		X																			
Wenn $a = b = 1$ und $c = d = 0$ gilt, beträgt der Integralwert über eine Periodenlänge von der Funktion f null.	X																				
Für $a = 3, b = 2$ und $c = d = 0$ gilt: Die Periodenlänge beträgt $p = 2\pi$.		X																			
Für $b = 1$ und $c = 0$ beschreiben die Gleichungen der Funktionen f und g mit $g(x) = a \cdot \cos\left(b \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + d$ den gleichen Funktionsgraphen.	X																				
1c	berechnet die Fläche A des Dreiecks für $P(4 f(4))$ und zeigt, dass das eingeschriebene Dreieck die maxi-	$P(4 f(4)) = P(4 4)$ $A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8 \text{ [FE]}$ Die Größe des Dreiecks beträgt 8 Flächeneinheiten. Zielfunktion: $A(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$ $A'(x) = -x + 4, A''(x) = -1$	5																		

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung nächste Seite

	Anforderungen	Modelllösungen																			
zu 1c	male Fläche hat, wenn $P(4 f(4))$ gilt.	Notwendige Bedingung: $A'(x) = 0$ $0 = -x + 4 \Leftrightarrow x_e = 4$ Hinreichende Bedingung: $A'(x_e) = 0 \wedge A''(x_e) \neq 0$ $A''(4) = -1 \Rightarrow A''(x_e) < 0$ Somit ist x_e Stelle eines Hochpunktes. $f(4) = 4$ und $A(4) = 8$ Der Punkt, bei dem der Flächeninhalt des Dreieckes maximal wird, hat die Koordinaten $P(4 4)$.																			
1d	gibt das LGS in der Form der „erweiterten Koeffizientenmatrix“ an und ermittelt den Lösungsvektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ in der Matrixengleichung.	$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \end{array} \right)$ Aus der Matrixengleichung: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}$ folgt: $\begin{pmatrix} -a + b \\ 2a + 4b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{array}{l} -a + b = -2 \\ 2a + 4b = 10 \end{array}$ Weiteres Lösen z. B. mit der erweiterten Koeffizientenmatrix: $\left(\begin{array}{cc c} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 10 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$ Der Lösungsvektor lautet: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.	5																		
1e	zeigt, dass genau ein Wert für k existiert, so dass $R \cdot S = T$ gilt und bestimmt für $k = 0$ die Matrix X , wenn $T \cdot X = S$ gilt.	$R \cdot S = T$ $\begin{pmatrix} k & -1 \\ 0 & -k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2k \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -k \end{pmatrix}$ Danach folgt durch Vergleich der Matrizenelemente: $\begin{pmatrix} -k-2 & 2k \\ -2k & 2k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -4k \end{pmatrix} \Rightarrow k = -2$ $X = T^{-1} \cdot S$ Für die Matrix T wird die zugehörige inverse Matrix ermittelt: $T \cdot T^{-1} = E \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -4c & -4d \\ 4a & 4b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 \\ -0,25 & 0 \end{pmatrix}$ Somit gilt: $X = \begin{pmatrix} 0 & 0,25 \\ -0,25 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0,25 & 0 \end{pmatrix}$.	5																		
1f	entscheidet, welche der Aussagen wahr bzw. falsch sind.	<table><tr><td><u>Hinweis:</u> Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).</td><td>w</td><td>f</td></tr><tr><td>Für die Matrix D gilt: $D = A^T$.</td><td>X</td><td></td></tr><tr><td>Die Rechenoperation $A \cdot B - B$ ist definiert.</td><td>X</td><td></td></tr><tr><td>Zur Matrix C existiert keine inverse Matrix.</td><td></td><td>X</td></tr><tr><td>Es gilt: $C^{2n} = E$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 1$, wobei die Matrix E die Einheitsmatrix ist.</td><td>X</td><td></td></tr><tr><td>Die Matrix M, für die $M = B \cdot B$ gilt, ist vom gleichen Typ wie die Matrix B.</td><td>X</td><td></td></tr></table>	<u>Hinweis:</u> Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	w	f	Für die Matrix D gilt: $D = A^T$.	X		Die Rechenoperation $A \cdot B - B$ ist definiert.	X		Zur Matrix C existiert keine inverse Matrix.		X	Es gilt: $C^{2n} = E$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 1$, wobei die Matrix E die Einheitsmatrix ist.	X		Die Matrix M , für die $M = B \cdot B$ gilt, ist vom gleichen Typ wie die Matrix B .	X		5
<u>Hinweis:</u> Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	w	f																			
Für die Matrix D gilt: $D = A^T$.	X																				
Die Rechenoperation $A \cdot B - B$ ist definiert.	X																				
Zur Matrix C existiert keine inverse Matrix.		X																			
Es gilt: $C^{2n} = E$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 1$, wobei die Matrix E die Einheitsmatrix ist.	X																				
Die Matrix M , für die $M = B \cdot B$ gilt, ist vom gleichen Typ wie die Matrix B .	X																				
			30																		

Aufgabe 2: Meeresschildkröten

	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling ...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
2a	erstellt einen Übergangsgraphen für die in der Matrix M angegebenen Informationen.	<pre> graph LR G[G] -- 0,08 --> J[J] J -- 0,001 --> A[A] A -- 0,04 --> B[B] J -- 0,68 --> J A -- 0,71 --> A B -- 0,8 --> B B -- 110 --> G </pre>	4
2b	erläutert die Bedeutung der von Null verschiedenen Elemente auf der Hauptdiagonalen der Matrix M und die Bedeutung des Matrixelementes $m_{32} = 0,001$.	Auf der Hauptdiagonalen gibt es Zahlenwerte, die von Null verschieden sind, da die Entwicklungsstufen der Schildkröten teilweise mehrere Altersstufen umfassen. So kann in der zweiten, dritten und vierten Entwicklungsstufe nach einem Jahr ein Verbleib in der Entwicklungsstufe erfolgen. Dabei bedeutet das Matrixelement $m_{22} = 0,68$, dass ca. 68 % der Jungtiere auch nach einem Jahres weiterhin zu den Jungtieren gezählt werden. Das Matrixelement $m_{33} = 0,71$ bedeutet auch, dass ca. 71 % der fast ausgewachsenen Tiere nach Ablauf eines Jahres auch in diesem Stadium verbleiben werden. Durch das Matrixelement $m_{44} = 0,8$ wird beschrieben, dass ca. 80 % der Brüter ein Jahr überleben werden. Das Matrixelement $m_{32} = 0,001$ gibt die Übergangswahrscheinlichkeit von den Jungtieren zu den fast ausgewachsenen Tieren an. Nur 0,1 % der Jungtiere sind ein Jahr später fast ausgewachsen.	4
2c	begründet allgemein und im Sachzusammenhang, dass die Matrix M keine stochastische Matrix sein kann.	Eine stochastische Matrix hat Matrixelemente m_{ij} mit $0 \leq m_{ij} \leq 1$. Die jeweiligen Spaltensummen ergeben immer den Wert 1. Das ist hier aufgrund der Geburtenrate (Anzahl der Eier > 1) sowie der nicht 100 %igen Überlebenswahrscheinlichkeit bzw. Übergangsrate nicht der Fall.	3
2d	berechnet mit der Modellierung durch die Matrix M den Bestandsvektor nach einem, nach fünf und nach neun Jahren und	Mit Hilfe des gegebenen Bestandsvektors $\vec{p}_0$ und der Matrix M wird der Bestand berechnet. Nach einem Jahr: $\vec{p}_1 = M \cdot \vec{p}_0$ $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 110 \\ 0,08 & 0,680 & 0 & 0 \\ 0 & 0,001 & 0,71 & 0 \\ 0 & 0 & 0,04 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14\,000 \\ 8\,000 \\ 4\,000 \\ 130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14\,300 \\ 6\,560 \\ 2\,848 \\ 264 \end{pmatrix}$ nach fünf Jahren: $\vec{p}_5 = M^5 \cdot \vec{p}_0$ $\vec{p}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 110 \\ 0,08 & 0,680 & 0 & 0 \\ 0 & 0,001 & 0,71 & 0 \\ 0 & 0 & 0,04 & 0,8 \end{pmatrix}^5 \cdot \begin{pmatrix} 14\,000 \\ 8\,000 \\ 4\,000 \\ 130 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 36\,391 \\ 7\,785 \\ 740 \\ 306 \end{pmatrix}$	6

Fortsetzung nächste Seite

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2d	vergleicht die zukünftige Entwicklung dieser gesamten Schildkrötenpopulation seit Beobachtungsbeginn mit der Entwicklung der Population der Lederschildkröte im Ostpazifik in den letzten 20 Jahren.	Nach neun Jahren: $\vec{p}_9 = M^9 \cdot \vec{p}_0$ $\vec{p}_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 110 \\ 0,08 & 0,680 & 0 & 0 \\ 0 & 0,001 & 0,71 & 0 \\ 0 & 0 & 0,04 & 0,8 \end{pmatrix}^9 \cdot \begin{pmatrix} 14\,000 \\ 8\,000 \\ 4\,000 \\ 130 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 22\,897 \\ 7\,586 \\ 209 \\ 178 \end{pmatrix}$ Für die gesamte Schildkrötenpopulation ergibt sich zu Beginn eine Population mit 26 130 Individuen. Um einen weiteren vergleichbaren Wert zu erhalten, wird auch der Populationsbestand nach zwanzig Jahren berechnet: $\vec{p}_{20} = M^{20} \cdot \vec{p}_0 \approx \begin{pmatrix} 3\,135 \\ 1\,604 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix} \text{ mit insgesamt ca. 4\,778 Individuen.}$ Das heißt, dass diese Schildkrötenpopulation bei unveränderten Bedingungen, innerhalb der nächsten zwanzig Jahre auf einem Bestand von etwa 18,3 % zurückgehen wird. Der Rückgang beträgt also etwa 81,7 % und ist damit nicht ganz so groß wie der der Lederschildkröte.	
2e	bestimmt die Verteilung der Schildkrötenpopulation auf die einzelnen Altersgruppen.	Für die Verteilung gilt: $J = 2A, G = 3A, B = 0,1A, G + J + A + B = 24\,400.$ Daraus folgt: $2A + 3A + A + 0,1A = 24\,400$ $6,1A = 24\,400 \Leftrightarrow A = 4\,000$ und somit: $G = 12\,000, J = 8\,000$ und $B = 400$. Für den Schildkrötenpopulationsbestand zu Beginn der zweijährigen Untersuchung gilt: $\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 12\,000 \\ 8\,000 \\ 4\,000 \\ 400 \end{pmatrix}$.	4
2f	ermittelt die fehlende Werte m_{21} und m_{32} in der Übergangsmatrix und gibt den gesamten Schildkrötenpopulationsbestand am 01.03.2015 an.	Für den Bestand nach einem Jahr ergibt sich: $\vec{p}_1 = M_{\text{neu}} \cdot \vec{p}_0$ $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 110 \\ m_{21} & 0,680 & 0 & 0 \\ 0 & m_{32} & 0,71 & 0 \\ 0 & 0 & 0,04 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12\,000 \\ 8\,000 \\ 4\,000 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ 6\,640 \\ 2\,856 \\ B_1 \end{pmatrix}$ $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 44\,000 \\ 12\,000m_{21} + 5\,440 \\ 8\,000m_{32} + 2\,840 \\ 480 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ 6\,640 \\ 2\,856 \\ B_1 \end{pmatrix}$ Aus: $12\,000m_{21} + 5\,440 = 6\,640$ folgt: $m_{21} = 0,1$. Aus: $8\,000m_{32} + 2\,840 = 2\,856$ folgt: $m_{32} = 0,002$. Für den gesamten Schildkrötenpopulationsbestand am 01.03.2015 gilt: $E_1 + J_1 + A_1 + B_1 = 44\,000 + 6\,640 + 2\,856 + 480 = 53\,976.$ Am 01.03.2015 bestand die Schildkrötenpopulation aus 53 976 Individuen.	4

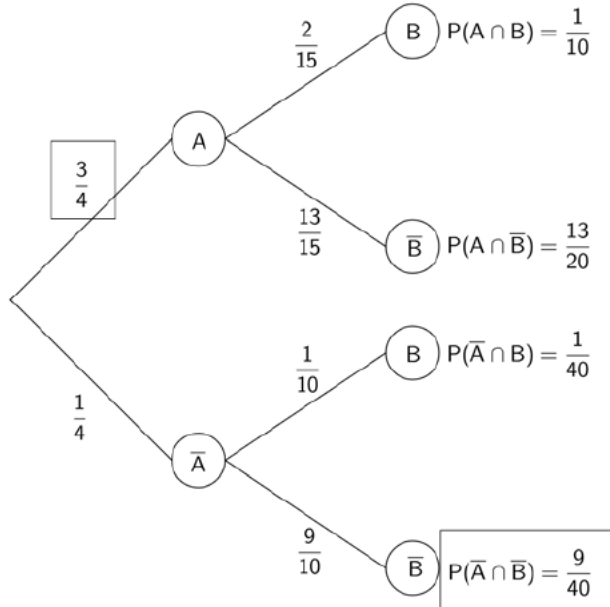
	Anforderungen	Modelllösungen	
2g	erstellt eine zugehörige Übergangsmatrix V und ermittelt eine Anfangsverteilung für die 40 Mitarbeiter auf die Abteilungen, so dass die Anzahl der Mitarbeiter jedes Jahr stabil bleibt.	$V = \begin{matrix} & \begin{matrix} S & P & I \end{matrix} \\ \begin{matrix} S \\ P \\ I \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,6 \\ 0,2 & 0 & 0,4 \\ 0,4 & 0,8 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$ Mit Hilfe der Matrixgleichung: $V \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ mit } a + b + c = 40$ kann der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, der die Verteilung der Mitarbeiter angibt, ermittelt werden, wobei durch a die Anzahl der Mitarbeiter in S, durch b die Anzahl der Mitarbeiter in P und durch c die Mitarbeiteranzahl in I angegeben wird. Aus der Matrixgleichung: $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,6 \\ 0,2 & 0 & 0,4 \\ 0,4 & 0,8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ folgt z. B. die Lösung: $a = \frac{17}{14}t, b = \frac{9}{14}t, c = t \text{ mit } t \in \mathbb{R}.$ Da $a + b + c = 40$ gilt, ist $\frac{17}{14}t + \frac{9}{14}t + t = 40$ mit $t = 14$. Somit gilt für den Vektor $\vec{x}$: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}$ Damit die Anzahl der Mitarbeiter in jedem Jahr stabil bleibt, sollten in der Abteilung S 17 Mitarbeiter, in der Abteilung P 9 Mitarbeiter und in der Abteilung I 14 Mitarbeiter beschäftigt werden.	5
			30

Aufgabe 1 Analysis mit Stochastik:

	Anforderungen	Modelllösungen																			
A1	Der Prüfling...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. <u>Bemerkung:</u> Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	BE																		
1a	bestimmt die Gleichung der 1. Ableitung der Funktion f, bestimmt den Koeffizienten b so, dass der Graph f sprung- und knickfrei verläuft, berechnet den Wert des Integrals und gibt dessen Bedeutung an.	$f'(x) = \begin{cases} 3x - 5 & \text{für } x \leq 3 \\ 4 & \text{für } x > 3 \end{cases}$ $f(3) = \frac{3}{2}$ $\frac{3}{2} = 4 \cdot 3 + b \Leftrightarrow b = -\frac{21}{2}$ $f'(3) = 4, \text{ somit ist der Wert der Steigung an der Stelle } x = 3 \text{ mit der Steigung des zweiten Abschnittes (} m = 4 \text{) identisch.}$ Der Graph f verläuft daher sprung- und knickfrei. $\int_1^2 f(x) dx = [0,5x^3 - 2,5x^2 + 3x + c]_1^2$ $= (0,5 \cdot 2^3 - 2,5 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + c) - (0,5 \cdot 1^3 - 2,5 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + c)$ $= 0 - 1 = -1$ Der Graph der Funktion f verläuft im Intervall I mit $I = [1; 2]$ unterhalb der Abszissenachse. Die Größe der Fläche zwischen dem Graphen f und der Abszissenachse beträgt somit eine Flächeneinheit.	5																		
1b	entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.	<table><tr><td><u>Hinweis:</u> Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).</td><td>w</td><td>f</td></tr><tr><td>Der Wert des Parameters a ist generell doppelt so hoch wie der Wert des Parameters d.</td><td></td><td>X</td></tr><tr><td>Wenn a = b = 1 und c = d = 0 gilt, so befindet sich eine maximale, positive Änderungsrate bei x = π.</td><td></td><td>X</td></tr><tr><td>Wenn a = b = 1 und c = d = 0 gilt, beträgt der Integralwert über eine Periodenlänge von der Funktion f null.</td><td>X</td><td></td></tr><tr><td>Für a = 3, b = 2 und c = d = 0 gilt: Die Periodenlänge beträgt p = 2π.</td><td></td><td>X</td></tr><tr><td>Für b = 1 und c = 0 beschreiben die Gleichungen der Funktionen f und g mit $g(x) = a \cdot \cos\left(b \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + d$ den gleichen Funktionsgraphen.</td><td>X</td><td></td></tr></table>	<u>Hinweis:</u> Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	w	f	Der Wert des Parameters a ist generell doppelt so hoch wie der Wert des Parameters d.		X	Wenn a = b = 1 und c = d = 0 gilt, so befindet sich eine maximale, positive Änderungsrate bei x = π.		X	Wenn a = b = 1 und c = d = 0 gilt, beträgt der Integralwert über eine Periodenlänge von der Funktion f null.	X		Für a = 3, b = 2 und c = d = 0 gilt: Die Periodenlänge beträgt p = 2π.		X	Für b = 1 und c = 0 beschreiben die Gleichungen der Funktionen f und g mit $g(x) = a \cdot \cos\left(b \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + d$ den gleichen Funktionsgraphen.	X		5
<u>Hinweis:</u> Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	w	f																			
Der Wert des Parameters a ist generell doppelt so hoch wie der Wert des Parameters d.		X																			
Wenn a = b = 1 und c = d = 0 gilt, so befindet sich eine maximale, positive Änderungsrate bei x = π.		X																			
Wenn a = b = 1 und c = d = 0 gilt, beträgt der Integralwert über eine Periodenlänge von der Funktion f null.	X																				
Für a = 3, b = 2 und c = d = 0 gilt: Die Periodenlänge beträgt p = 2π.		X																			
Für b = 1 und c = 0 beschreiben die Gleichungen der Funktionen f und g mit $g(x) = a \cdot \cos\left(b \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + d$ den gleichen Funktionsgraphen.	X																				
1c	berechnet die Fläche A des Dreiecks für P(4 f(4)) und zeigt, dass das eingeschriebene Dreieck die maximale Fläche	$P(4 f(4)) = P(4 4)$ $A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8 \text{ [FE]}$ Die Größe des Dreiecks beträgt 8 Flächeneinheiten. Zielfunktion: $A(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$ $A'(x) = -x + 4, A''(x) = -1$	5																		

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung nächste Seite

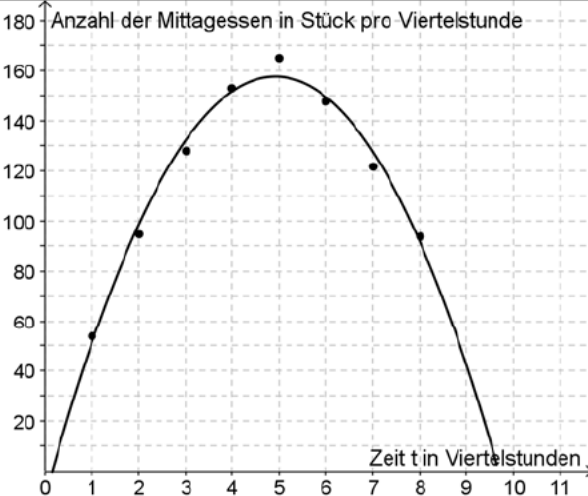
	Anforderungen	Modelllösungen							
	hat, wenn $P(4 f(4))$ gilt.	Notwendige Bedingung: $A'(x) = 0$ $0 = -x + 4 \Leftrightarrow x_e = 4$ Hinreichende Bedingung: $A'(x_e) = 0 \wedge A''(x_e) \neq 0$ $A''(4) = -1 \Rightarrow A''(x_e) < 0$ Somit ist x_e Stelle eines Hochpunktes. $f(4) = 4$ und $A(4) = 8$ Der Punkt, bei dem der Flächeninhalt des Dreieckes maximal wird, hat die Koordinaten $P(4 4)$.							
1d	ermittelt die Anzahl der durchgeführten Bernoulliexperimente n und entscheidet begründet, ob die folgenden Aussagen wahr sind.	$n = \frac{E(X)}{p} = \frac{56}{0,7} = 80$ <table><tr><th>Aussage</th><th>Entscheidung und Begründung</th></tr><tr><td>Die Standardabweichung σ ist kleiner als 4 ($\sigma < 4$).</td><td>$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$ $\sigma = \sqrt{56 \cdot 0,3}$ $\sigma = \sqrt{16,8} > 4$ Aufgrund der aufgezeigten Ungleichung muss $\sigma > 4$ sein. Die Aussage ist somit falsch.</td></tr><tr><td>$P(X = 54) = P(X = 58)$</td><td>Da $p = 0,7 > 0,5$ ist, ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X nicht symmetrisch sondern rechtssteil bzw. linkschief, die Wahrscheinlichkeiten links und rechts im gleichen Abstand vom Erwartungswert sind also verschieden, daher ist die Aussage falsch, es muss gelten: $P(X = 54) \neq P(X = 58)$.</td></tr></table>	Aussage	Entscheidung und Begründung	Die Standardabweichung σ ist kleiner als 4 ($\sigma < 4$).	$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$ $\sigma = \sqrt{56 \cdot 0,3}$ $\sigma = \sqrt{16,8} > 4$ Aufgrund der aufgezeigten Ungleichung muss $\sigma > 4$ sein. Die Aussage ist somit falsch.	$P(X = 54) = P(X = 58)$	Da $p = 0,7 > 0,5$ ist, ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X nicht symmetrisch sondern rechtssteil bzw. linkschief, die Wahrscheinlichkeiten links und rechts im gleichen Abstand vom Erwartungswert sind also verschieden, daher ist die Aussage falsch, es muss gelten: $P(X = 54) \neq P(X = 58)$.	5
Aussage	Entscheidung und Begründung								
Die Standardabweichung σ ist kleiner als 4 ($\sigma < 4$).	$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$ $\sigma = \sqrt{56 \cdot 0,3}$ $\sigma = \sqrt{16,8} > 4$ Aufgrund der aufgezeigten Ungleichung muss $\sigma > 4$ sein. Die Aussage ist somit falsch.								
$P(X = 54) = P(X = 58)$	Da $p = 0,7 > 0,5$ ist, ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X nicht symmetrisch sondern rechtssteil bzw. linkschief, die Wahrscheinlichkeiten links und rechts im gleichen Abstand vom Erwartungswert sind also verschieden, daher ist die Aussage falsch, es muss gelten: $P(X = 54) \neq P(X = 58)$.								
1e	ergänzt die fehlenden Werte im Baumdiagramm und		5						

Fortsetzung nächste Seite

	Anforderungen	Modelllösungen																					
zu 1e	ergänzt die fehlenden Werte im Vierfelderdiagramm und berechnet die Wahrscheinlichkeit $P(\bar{A} \bar{B})$.	<table><tr><th></th><th>A</th><th>$\bar{A}$</th><th>Summen</th></tr><tr><th>B</th><td>200</td><td>50</td><td>250</td></tr><tr><th>$\bar{B}$</th><td>1300</td><td>450</td><td>1750</td></tr><tr><th>Summen</th><td>1500</td><td>500</td><td>2000</td></tr></table> $P_{\bar{B}}(\bar{A}) = P(\bar{A} \bar{B}) = \frac{450}{1750} = \frac{9}{35}$		A	$\bar{A}$	Summen	B	200	50	250	$\bar{B}$	1300	450	1750	Summen	1500	500	2000					
	A	$\bar{A}$	Summen																				
B	200	50	250																				
$\bar{B}$	1300	450	1750																				
Summen	1500	500	2000																				
1f	gibt auf Grundlage der Häufigkeitstabelle und des Boxplotdiagramms die statistischen Größen an und ergänzt die fehlenden Werte in der Häufigkeitstabelle.	(1) Median: $z_{\text{Median}} = 65$ (2) Modus: $z_{\text{Modus}} = 80$ (3) Quartilsabstand: $Q_3 - Q_1 = 19$ <table><tr><th>z_i</th><th>h_i</th></tr><tr><td>56</td><td>1</td></tr><tr><td>58</td><td>3</td></tr><tr><td>61</td><td>3</td></tr><tr><td>63</td><td>2</td></tr><tr><td>67</td><td>1</td></tr><tr><td>70</td><td>3</td></tr><tr><td>80</td><td>4</td></tr><tr><td>110</td><td>1</td></tr><tr><td>Σ</td><td>18</td></tr></table>	z_i	h_i	56	1	58	3	61	3	63	2	67	1	70	3	80	4	110	1	Σ	18	5
z_i	h_i																						
56	1																						
58	3																						
61	3																						
63	2																						
67	1																						
70	3																						
80	4																						
110	1																						
Σ	18																						
			30																				

Aufgabe 2: Im Bistro

	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
2a	berechnet die beiden fehlenden Werte.	Tagesgericht: $\bar{x} = \frac{172+168+144+132+98}{5} = 142,8$ Vegetarisches Gericht: $49 = \frac{v_1+52+95+36+22}{5} \Leftrightarrow v_1 = 40$ Im Mittel wurden in der betrachteten Woche täglich 142,8 Tagesgerichte verkauft. Am Montag wurden 40 vegetarische Gerichte verkauft.	4
2b	ermittelt und interpretiert den Median der Anzahl der Tagesgerichte.	$x_{\text{Median}} = 144$ Die Hälfte der Tage in der betrachteten Woche wurden mindestens 144 Tagesgerichte verkauft, die andere Hälfte der Tage höchstens 144 Tagesgerichte.	3
2c	erläutert, unter welchen Annahmen die Anzahl der Vegetarier als binomialverteilte Zufallsvariable betrachtet werden kann.	Wenn man n Schüler dahingehend untersucht, ob sie Vegetarier sind oder nicht, handelt es sich um eine n-stufige Bernoulli-Kette, da das Einzelexperiment innerhalb einer Stufe nur zwei Ergebnisse hat: Erfolg (Schüler ist Vegetarier) und Misserfolg (Schüler ist nicht Vegetarier). Die Anzahl der Schüler ist ganzzahlig, somit ist die Zufallsvariable abzählbar und mithin diskret. Zuletzt gilt es die Frage der stochastischen Unabhängigkeit zu klären: Ist die Tatsache, dass ein Schüler Vegetarier ist unabhängig davon, dass ein anderer Schüler Vegetarier ist. Dies ist zumeist der Fall. Einige Berufsfelder haben zwar vielleicht eine größere Nähe zu Ernährungs- und/oder Ökologiefragen, dennoch ist davon auszugehen, dass im Allgemeinen die Entscheidung für oder gegen Vegetarismus unabhängig von dem einzelnen Schüler getroffen wurde.	4
2d	berechnet die Wahrscheinlichkeiten für - genau 167 Vegetarier, - weniger als 150 Vegetarier, - mehr als 250 Vegetarier.	$X = \text{Anzahl der Vegetarier}$ X ist binomialverteilt mit $n = 1850$ und $p = 0,09$. $P(X = 167) = \binom{1850}{167} \cdot 0,09^{167} \cdot 0,91^{1683} \approx 0,0323$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 3,23 % sind genau 167 Schüler Vegetarier. $P(X < 150) = \sum_{k=0}^{149} \binom{1850}{k} \cdot 0,09^k \cdot 0,91^{1850-k} \approx 0,082$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 8,2 % sind weniger als 150 Schüler Vegetarier. $P(X \geq 251) = \sum_{k=251}^{1850} \binom{1850}{k} \cdot 0,09^k \cdot 0,91^{1850-k}$ ist nahezu Null. Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 250 Schüler Vegetarier sind, ist sehr klein, nahezu Null.	6

	Anforderungen	Modelllösungen																																	
2e	prüft mittels eines Vierfelderdiagramms, ob tatsächlich weniger Frauen als Männer das Bistro zum Mittagessen nutzen.	Vierfelderdiagramm mit absoluten Häufigkeiten <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>h</th><th>V</th><th>$\bar{V}$</th><th>Σ</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>W</td><td>147</td><td>252</td><td>399</td></tr> <tr> <td>$\bar{W}$</td><td>98</td><td>462</td><td>560</td></tr> <tr> <td>Σ</td><td>245</td><td>714</td><td>959</td></tr> </tbody> </table> mit: W:= Weibliche Kunden V:= Vegetarisches Gericht Vierfelderdiagramm mit empirischen Wahrscheinlichkeiten <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>P</th><th>V</th><th>$\bar{V}$</th><th>Σ</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>W</td><td>$\frac{21}{137}$</td><td>$\frac{36}{137}$</td><td>$\frac{57}{137}$</td></tr> <tr> <td>$\bar{W}$</td><td>$\frac{14}{137}$</td><td>$\frac{66}{137}$</td><td>$\frac{80}{137}$</td></tr> <tr> <td>Σ</td><td>$\frac{35}{137}$</td><td>$\frac{102}{137}$</td><td>1</td></tr> </tbody> </table> $\bar{W}$:= männliche Kunden $\bar{V}$:= Tagesgericht In der untersuchten Woche haben tatsächlich weniger Frauen als Männer das Mittagsangebot im Bistro genutzt. Absolut standen 399 Frauen 560 Männern gegenüber. Relativ sind dieses ca. 42 % Frauen gegenüber ca. 58 % Männern.	h	V	$\bar{V}$	Σ	W	147	252	399	$\bar{W}$	98	462	560	Σ	245	714	959	P	V	$\bar{V}$	Σ	W	$\frac{21}{137}$	$\frac{36}{137}$	$\frac{57}{137}$	$\bar{W}$	$\frac{14}{137}$	$\frac{66}{137}$	$\frac{80}{137}$	Σ	$\frac{35}{137}$	$\frac{102}{137}$	1	5
h	V	$\bar{V}$	Σ																																
W	147	252	399																																
$\bar{W}$	98	462	560																																
Σ	245	714	959																																
P	V	$\bar{V}$	Σ																																
W	$\frac{21}{137}$	$\frac{36}{137}$	$\frac{57}{137}$																																
$\bar{W}$	$\frac{14}{137}$	$\frac{66}{137}$	$\frac{80}{137}$																																
Σ	$\frac{35}{137}$	$\frac{102}{137}$	1																																
2f	zeichnet die Daten als Punkte in das Koordinatensystem und ermittelt mittels Regression eine Funktionsgleichung, die den Zusammenhang geeignet wiedergibt.	Anzahl der Mittagessen in Stück pro Viertelstunde  Aufgrund der Punktwolke scheint eine Parabel besonders gut geeignet den Zusammenhang abzubilden. $\hat{m}(t) = -6,93455t^2 + 68,208t - 10,232$ mit $1 \leq t \leq 8$ ($\hat{m}(t)$ ist geeignet, da der Korrelationskoeffizient mit $r \approx 0,993$ sehr hoch ist.) Anmerkung: Je nach eingesetztem CAS und den gewählten Einstellungen kann die Lösung von der Modelllösung abweichen.	5																																
2g	beurteilt, ob es sich lohnen würde, die Zeit, in der Mittagessen angeboten wird, zu verlängern.	Wenn man unterstellt, dass die Uhrzeit die Anzahl der Mittagessen kausal beeinflusst, was bei unseren Essgewohnheiten naheliegt, und dann mittels der Funktionsgleichung $\hat{m}(t)$ für Stellen außerhalb des Definitionsbereiches Funktionswerte ermittelt, dann würde sich die Verlängerung lohnen. Aufgrund der Datenlage wäre es auch möglich, die Zeit, in der Mittagessen angeboten wird, sogar bis ca. 14:15 Uhr zu verlängern. Die Ausweitung des Definitionsbereichs ist jedoch fraglich, vielmehr könnte es auch sein, dass bei einem verlängerten Angebot insgesamt die gleiche Anzahl an Mittagessen verkauft wird, diese sich jedoch anders über den Zeitraum verteilen und zur Modellierung dann eine andere Funktionsgleichung herangezogen werden müsste.	3																																
			30																																

Aufgabe 3: Fehmarnbeltquerung

	Anforderungen	Modelllösungen	
A3	Der Prüfling...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
3a	begründet, warum sich eine ganzrationale Funktion 3. Grades anbietet.	Im dargestellten Verlauf der Tunneltrasse f befinden sich die drei Punkte A, B und C. Der Punkt B kann als Tiefpunkt identifiziert werden. Dadurch, dass durch den Tiefpunkt B keine Symmetrieachse verläuft, muss der Graph der Funktion einen höheren Grad als 2 aufweisen. Zur Erfüllung dieser Vorgaben bietet sich eine ganzrationale Funktion 3. Grades an.	4
3b	zeigt, dass die Gleichung der Funktion f die Trassenführung angemessen beschreibt.	Allgemeine Gleichung: $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ $f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$ Bedingungen: I. $f(0) = 2$ II. $f(13) = 0$ III. $f(21) = 1$ IV. $f'(13) = 0$ LGS: I. $d = 2$ II. $2197 \cdot a + 169 \cdot b + 13 \cdot c + d = 0$ III. $9261 \cdot a + 441 \cdot b + 21 \cdot c + d = 1$ IV. $507 \cdot a + 26 \cdot b + c = 0$ $\Rightarrow f(x) = \frac{41}{227136}x^3 + \frac{811}{113568}x^2 - \frac{4843}{17472}x + 2$	4
3c	gibt die beiden Gleichungen der Funktionsgraphen, die den Sicherheitsbereich begrenzen an und berechnet die Fläche des Sicherheitsbereiches und gibt das Ergebnis in einer sinnvollen Maßeinheit an.	$s_o(x) = -\frac{1}{21}x + \frac{5}{2}$ $s_u(x) = \frac{41}{227136}x^3 + \frac{811}{113568}x^2 - \frac{4843}{17472}x + 1,5$ Die Gleichung der Funktion d ist die Differenzenfunktion der Funktionen s_o und s_u : $d(x) = s_o(x) - s_u(x) = -\frac{41}{227136}x^3 - \frac{811}{113568}x^2 + \frac{191}{832}x + 1$ Die Gleichung der Integralfunktion I_0 lautet: $I_0(x) = -\frac{41}{908544}x^4 - \frac{811}{340704}x^3 + \frac{191}{1664}x^2 + x.$ $I_0(21) \approx 40,7987 \text{ [km}^2\text{]}$ Der Flächeninhalt des Sicherheitsbereiches beträgt in etwa 40,7987 km ² .	6
3d	gibt die Menge des Aushubes und ermittelt die Menge des Aushubes.	Der gesamte Aushub hat eine Menge von ca. 15 Mio. m ³ . $g(0) = 0,5$ Zu Beginn der Baggararbeiten sind bereits 0,5 Mio. m ³ an Land verschoben worden.	3

	Anforderungen	Modelllösungen	
3e	berechnet die durchschnittliche wöchentliche Änderung der Aushubmenge.	$\frac{g(30)-g(10)}{30-10} \approx 0,278 \left[\frac{\text{Mio. m}^3}{\text{Woche}} \right]$ Die durchschnittliche Änderung der Aushubmenge ab der 10. bis zur 30. Woche der Bauphase beträgt ca. 0,278 Mio. m³ pro Woche.	4
3f	berechnet den Zeitpunkt des maximalen Fahrzeugstroms und gibt die Größe des Fahrzeugstroms an.	$i(t) = 1,4 - 2 \cdot e^{-3t} + 2 \cdot e^{-0,9t}$ $i'(t) = 6 \cdot e^{-3t} - 1,8 \cdot e^{-0,9t}$ $i''(t) = -18 \cdot e^{-3t} + 1,62 \cdot e^{-0,9t}$ Notwendige Bedingung: $i'(t) = 0$: $i'(t) = 0 \Leftrightarrow t_e \approx 0,5733$ Hinreichende Bedingung: $i''(t_e) \neq 0 \wedge i'(t_e) = 0$ $i''(t_e) \approx -2,26 < 0 \Rightarrow t_e \neq 0$ Somit ist t_e Stelle eines Hochpunktes. Wenn $t \approx 0,5733$ (ca. 34,4 Min), also um ca. 07:04 Uhr wird der zu erwartende Fahrzeugstrom maximal. $i(t_e) \approx 2,236$ Um etwa 07:04 Uhr beträgt der maximale Fahrzeugstrom ca. 2 236 Fahrzeuge pro Stunde.	4
3g	beurteilt die Richtigkeit der Behauptung.	$i'(t) = 6 \cdot e^{-3t} - 1,8 \cdot e^{-0,9t}$ $i''(t) = -18 \cdot e^{-3t} + 1,62 \cdot e^{-0,9t}$ $i'''(t) = 54 \cdot e^{-3t} - 1,458 \cdot e^{-0,9t}$ Notwendige Bedingung: $i''(t) = 0$ $0 = -18 \cdot e^{-3t} + 1,62 \cdot e^{-0,9t} \Rightarrow t_w \approx 1,15$ Hinreichende Bedingung: $i'''(t_w) \neq 0 \wedge i''(t_w) = 0$ $i'''(t_w) \approx 1,21 \Rightarrow i'''(t_w) > 0$ Somit ist t_w Stelle eines Wendepunktes, mit größter Abnahme. Die Behauptung ist nicht richtig, weil die größte Abnahme des Fahrzeugstroms bei $t_w \approx 1,15$ (ca. 07:39 Uhr) stattfindet.	5
			30

Aufgabe 3: Dengue-Fieber

	Anforderungen	Modelllösungen	
A3	Der Prüfling...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
3a	beschreibt den Verlauf des Graphen c im Sachzusammenhang anhand dreier Aspekte.	Die Körpertemperatur steigt in den ersten beiden Tagen auf über 40°C an und erreicht dann zunächst den höchsten Wert. Bis zum 6. Tag sinkt das Fieber und erreicht ungefähr am 6. Tag den kleinsten Wert, bevor die Körpertemperatur in den folgenden vier Tagen wieder auf über 40°C steigt. Erst im Laufe des 11. Tages sinkt das Fieber bis zum Ende des Definitionsbereiches am 12. Tag.	3
3b	berechnet den exakten Zeitpunkt mit der höchsten Körpertemperatur und gibt die Uhrzeit an und die dort vorliegende Körpertemperatur an.	$c(t) = -0,00975t^4 + 0,238t^3 - 1,84t^2 + 4,75t + 36,7$ $c'(t) = -0,039t^3 + 0,714t^2 - 3,68t + 4,75$ $c''(t) = -0,117t^2 + 1,428t - 3,68$ Notwendige Bedingung: $c'(t) = 0$ $0 = -0,039t^3 + 0,714t^2 - 3,68t + 4,75$ $\Rightarrow t_1 \approx 1,95, t_2 \approx 6,07 \text{ und } t_3 \approx 10,28$ Hinreichende Bedingung: $c'(t_e) = 0 \wedge c''(t_e) \neq 0$ $c''(t_1) \approx -1,34 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt bei } t_1 \approx 1,95.$ $c''(t_2) \approx 0,68 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt bei } t_2 \approx 6,07.$ $c''(t_3) \approx -1,36 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt bei } t_3 \approx 10,28.$ $c(t_1) \approx 40,59$ $c(t_3) \approx 40,75$ Die höchste Körpertemperatur tritt am 11. Tag um ca. 06:43 Uhr mit einer Temperatur von ungefähr $40,8^{\circ}\text{C}$ auf.	5
3c	ermittelt die Zeiträume, in denen der Patient bei dem typischen Verlauf des biphasischen Fiebers unter kritischem Fieber leidet.	$c(t) = 40,5$ $t_1 \approx 1,6, t_2 \approx 2,33, t_3 \approx 9,63. \text{ und } t_4 \approx 10,85.$ Vom 2. Tag ab ca. 14:23 Uhr bis zum 3. Tag um ca. 08:00 Uhr liegt das erste Mal kritisches Fieber vor. Vom 10. Tag ab ca. 15:07 Uhr bis zum 11. Tag um ca. 20:24 Uhr lag das zweite Mal kritisches Fieber vor. Insgesamt also über einen Zeitraum von knapp zwei Tagen.	3
3d	ermittelt, wie stark die Körpertemperatur im Mittel zwischen dem 8. und 9. Tag angestiegen ist und wie groß die momentane Änderung der Körpertemperatur am achten Tag ist und	<i>Hinweis: Die Temperaturdifferenzen werden im Folgenden abweichend von der physikalischen Norm in $^{\circ}\text{C}$ und nicht in Kelvin angegeben.</i> $\frac{c(9) - c(8)}{9 - 8} \approx \frac{39,94 - 38,86}{1} = 1,08$ Die Körpertemperatur ist innerhalb des achten Tages um $1,08^{\circ}\text{C}$ angestiegen. Im Mittel ist die Temperatur um $1,08 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{d}}$ angestiegen. Momentane Änderung: $c'(8) \approx 1,038$ Zum Zeitpunkt des 8. Tages beträgt die momentane Änderung ca. $1,038 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{d}}$. <i>Fortsetzung nächste Seite</i>	5

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 3d	erläutert, warum sich die beiden Werte voneinander unterscheiden.	Die momentane Änderung gibt die Änderung der Körpertemperatur zum Zeitpunkt $t = 8$ an. Die momentane Änderung verändert sich kontinuierlich, wird zunächst größer bis zum Wendepunkt und nimmt dann wieder ab. Der Mittelwert aus allen momentanen Änderungen entspricht der durchschnittlichen Änderung. Der Anstieg der Körpertemperatur im Mittel zwischen dem achten und neunten Tag kann durch die Sekantensteigung graphisch veranschaulicht werden, die momentane Änderung durch die Tangentensteigung.	
3e	ermittelt, nach welcher Zeit eine Tablette nicht mehr wirkt.	$5,5 = 18t \cdot e^{-0,6t}$, $t_1 \approx 0,4$ und $t_2 \approx 4,5$ An der Stelle t_1 nimmt die Wirkstoffkonzentration noch zu. Deshalb ist die Tablette nach ca. 4,5 Stunden nicht mehr wirksam.	3
3f	berechnet den Wert von M und interpretiert die Formel im Sachzusammenhang.	$M = \frac{1}{12} \cdot \int_0^{12} w(t) dt \approx 4,14$ Der formale Ausdruck M beschreibt die mittlere Wirkstoffkonzentration in den Körperflüssigkeiten innerhalb der ersten 12 Stunden.	3
3g	zeigt, dass der Wendepunkt der Funktion w beim Zeitpunkt 3 Stunden 20 Minuten liegt.	$w(t) = 18t \cdot e^{-0,6t}$ $w'(t) = \left(-\frac{54}{5}t + 18\right) \cdot e^{-0,6t}$ $w''(t) = \left(\frac{162}{25}t - \frac{108}{5}\right) \cdot e^{-0,6t}$ $w'''(t) = \left(-\frac{486}{125}t + \frac{486}{25}\right) \cdot e^{-0,6t}$ Für den Zeitpunkt 3 Stunden und 20 Minuten gilt: $t_w = \frac{10}{3}$. Hinreichende Bedingung: $w''(t_w) = 0 \wedge w'''(t_w) \neq 0$ $w''\left(\frac{10}{3}\right) = 0$ und $w'''\left(\frac{10}{3}\right) \approx 0,88 \neq 0$ Damit sind die Bedingungen erfüllt und die Funktion w hat bei $t_w = \frac{10}{3}$ einen Wendepunkt.	3
3h	ergänzt alle fehlenden Angaben der Funktionsgleichung w_{neu} und gibt an, nach wie vielen Stunden und Minuten der Wirkstoff vollständig abgebaut ist.	$l(t) = m \cdot t + b$ $m = w'\left(\frac{10}{3}\right) \approx -2,44$ $w\left(\frac{10}{3}\right) \approx 8,12$ $w\left(\frac{10}{3}\right) = -2,44 \cdot \frac{10}{3} + b = 8,12 \Leftrightarrow b \approx 16,25$ also: $w_{\text{neuII}}(t) = -2,44t + 16,25$ $w_{\text{neuII}}(t) = 0 \Rightarrow t \approx \frac{20}{3}$ $w_{\text{neu}} = \begin{cases} 18t \cdot e^{-0,6t} & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{10}{3} \\ -2,44t + 16,25 & \text{für } \frac{10}{3} < t \leq \frac{20}{3} \end{cases}$ Nach ungefähr 6 Stunden und 40 Minuten ist der Wirkstoff vollständig abgebaut.	5
			30

Aufgabe 3: Wattenmeer

	Anforderungen	Modelllösungen	
A3	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
3a	beschreibt den Verlauf der Wasserströmungsgeschwindigkeit im Sachzusammenhang anhand zweier Aspekte.	Beispielsweise: • Anstieg der Wasserströmungsgeschwindigkeit bis 02:45 Uhr mit scheinbarem Maximum, • zwischen 04:15 Uhr und 06:30 Uhr Umkehr der Richtung, ablandige Strömung. • gegen 08:45 Uhr Minimum (maximale ablandige Wasserströmungsgeschwindigkeit), • zwischen 11:20 Uhr und 14:00 Uhr Rückkehr zur Richtung Küste, • ab 12:00 Uhr (eventuell) wiederkehrende Periode.	4
3b	begründet, warum die gegebenen Funktionen v_I und v_{II} grundsätzlich geeignet sind, die gegebenen Wasserströmungsgeschwindigkeiten zu modellieren und entscheidet begründet, welcher der beiden Funktionstypen bei einem Definitionsbereich von mehreren Tagen geeigneter ist.	Die Punktwolke im Intervall $[0; 12]$ kann durch Funktionsgraphen verstetigt werden, die einen Wendepunkt und zwei Extremwerte haben. Daher ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades wie z. B. die Funktion v_{II} geeignet. Die Sinusfunktion hat bei entsprechend eingeschränktem Definitionsbereich ebenfalls einen Wendepunkt, einen Tief- und einen Hochpunkt und eignet sich somit, den Sachverhalt darzustellen, außerdem berücksichtigt sie periodisches Verhalten. Geeigneter zur Beschreibung des Sachverhaltes „Wasserströmungsgeschwindigkeit“ bei Ebbe und Flut ist die Sinusfunktion, da sich hier Wende-, Hoch- und Tiefpunkte wie bei Ebbe und Flut periodisch wiederholen.	5
3c	ermittelt die größten Wasserströmungsgeschwindigkeiten in Richtung Küste und	„In Richtung Küste“ bedeutet, dass nur nach dem Hochpunkt gefragt wird. $v_I(t) = \frac{3}{5} \cdot \sin\left(\frac{13}{25}t\right)$ $v_I'(t) = \frac{39}{125} \cdot \cos\left(\frac{13}{25}t\right)$ $v_I''(t) = -\frac{507}{3125} \cdot \sin\left(\frac{13}{25}t\right)$ Notwendige Bedingung: $v_I'(t) = 0$ $0 = \frac{39}{125} \cdot \cos\left(\frac{13}{25}t\right) \Rightarrow t_{e1} \approx 3,02 \text{ und } t_{e2} \approx 9,06$ Hinreichende Bedingung: $v_I'(t_e) = 0 \wedge v_I''(t_e) \neq 0$ $v_I''(t_{e1}) < 0 \Rightarrow t_{e1} \approx 3,02 \text{ ist die Stelle eines Hochpunktes.}$ $v_I''(t_{e2}) > 0 \Rightarrow t_{e2} \approx 9,06 \text{ ist die Stelle eines Tiefpunktes.}$ $v(t_{e1}) = 0,6$ Also ist nach v_I die größte Strömungsgeschwindigkeit $0,6 \frac{m}{s}$ in Richtung Küste (Flut). Analog für v_{II} : $v_{II}(t) = \frac{1}{125}t^3 - \frac{18}{125}t^2 + \frac{29}{50}t$	5

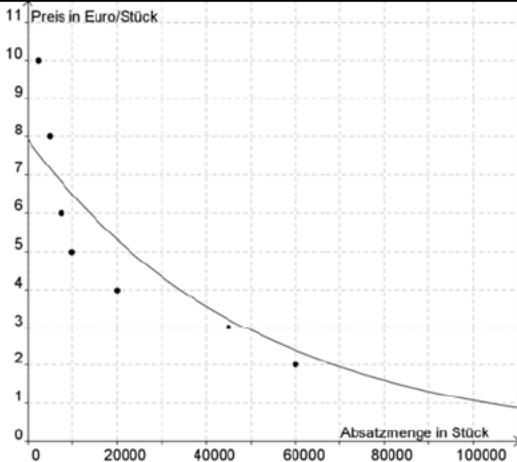
Fortsetzung nächste Seite

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 3c	vergleicht die Ergebnisse miteinander.	$v_{II}'(t) = \frac{3}{125}t^2 - \frac{36}{125}t + \frac{29}{50}$ $v_{II}''(t) = \frac{6}{125}t + \frac{36}{125}$ $v_{II}'(t) = 0$ $0 = \frac{3}{125}t^2 - \frac{36}{125}t + \frac{29}{50} \Rightarrow t_{e1} \approx 2,56 \text{ und } t_{e2} \approx 9,44$ $v_{II}''(t_{e1}) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt bei } t_{e1} \approx 2,56$ $v_{II}''(t_{e2}) > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt bei } t_{e2} \approx 9,44$ $v_{II}(t_{e1}) \approx 0,68$ Also ist nach v_{II} die größte Strömungsgeschwindigkeit ca. $0,68 \frac{m}{s}$ in Richtung Küste (Flut). Im Vergleich der beiden Funktionen ist die Strömungsgeschwindigkeit bei v_{II} mit ca. $0,68 \frac{m}{s}$ stärker als bei v_I mit nur $0,6 \frac{m}{s}$.	
3d	berechnet den Wendepunkt und interpretiert die Bedeutung des Wendepunktes im Sachzusammenhang.	$v_{II}(t) = \frac{1}{125}t^3 - \frac{18}{125}t^2 + \frac{29}{50}t$ $v_{II}'(t) = \frac{3}{125}t^2 - \frac{36}{125}t + \frac{29}{50}$ $v_{II}''(t) = \frac{6}{125}t + \frac{36}{125}$ $v_{II}'''(t) = \frac{6}{125}$ Notwendige Bedingung: $v_{II}''(t) = 0$ $\Rightarrow t_w = 6$ Hinreichende Bedingung: $v_{II}''(t_w) = 0 \wedge v_{II}'''(t_w) \neq 0$ $v_{II}'''(6) = \frac{6}{125} \neq 0$ $v(6) = \frac{3}{125} \Rightarrow W\left(6 \mid \frac{3}{125}\right)$ Im Wendepunkt ist die Änderung der Wasserströmung am größten, da $v_{II}'''(6) = \frac{6}{125} > 0$ (kleinste Steigung). In diesem Fall nimmt sie in Richtung Küste am stärksten ab.	6
3e	berechnet den Wert des Ausdrucks s und interpretiert den formalen Ausdruck s.	$3\,600 \cdot \int_0^{7,5} v_B(t) dt = 18\,731,3$ Die Größe der Fläche zwischen dem Graph v_B und der Abszissenachse entspricht der zurückgelegten Strecke der Boje. Im Zeitraum von 0 bis 7,5 Stunden ist der Wert des Integrals positiv: die Boje bewegt sich in Richtung Küste. Ersetzt man eine Stunde durch 3 600 Sekunden, erhält man 3 600 m. Dies erklärt den Faktor 3 600 und damit ist die Einheit des zurückgelegten Weges s Meter.	4
3f	begründet, warum die Fläche zwischen den beiden Funktionen dem Weg entspricht, den die Boje zurückgelegt hat.	Da die Bojengeschwindigkeit über Grund bis $t = 6$ über der Wassergeschwindigkeit liegt, muss der Wind die Boje zusätzlich Richtung Küste antreiben. Die Differenz der Ordinatenwerte ist also die zusätzliche Vortriebsgeschwindigkeit durch den Wind. Die von beiden Graphen für $0 \leq t \leq 6$ eingeschlossene Fläche ist somit der sich durch den Wind ergebende Weg Richtung Küste.	3

	Anforderungen	Modelllösungen	
3g	bestimmt den Weg, den die Boje aufgrund des Windes für $0 \leq t \leq 6$ zurück gelegt hat.	Die Fläche ist formal: $\int_0^6 (v_B(t) - v_H(t)) dt = \frac{54}{25} \left[\frac{m}{s} \cdot h \right]$ $\frac{54}{25} \frac{m}{s} \cdot h \cdot 3600 \text{ m} = 7776 \text{ m} = 7,776 \text{ km.}$ Die Boje hat also auf Grund des Windes einen Weg von ca. 7,8 km in Richtung Küste zurückgelegt.	3
			30

Aufgabe 3: Gläserproduktion

	Anforderungen	Modelllösungen	
A3	Der Prüfling...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
3a	beschreibt den Kurvenverlauf im Sachzusammenhang anhand von drei Aspekten.	Unabhängig von der Produktionsmenge fallen immer 6 000,00 € Fixkosten bei der Produktion der Sektgläser an. Mit steigender Produktionsmenge steigen die Kosten streng monoton an. Bis ca. 18 000 Gläser nimmt die Höhe der zusätzlichen Kosten dabei ab, über 18 000 Gläser steigt die Höhe der zusätzlichen Kosten dabei immer weiter an.	3
3b	berechnet das Minimum der variablen Stückkosten und ermittelt die kurz- und langfristigen Preisuntergrenzen.	$k_v(x) = 0,5x^2 - 20x + 310$ $k_v'(x) = x - 20$ Notwendige Bedingung: $k_v'(x) = 0$ $0 = x - 20 \Leftrightarrow x_e = 20$ Hinreichende Bedingung: $k_v'(x_e) = 0 \wedge k_v''(x_e) > 0$ $k_v''(20) = 1 > 0$ $k_v(20) = 110 \Rightarrow \text{Min}_{k_v}(20 110)$ Das Minimum der variablen Stückkosten liegt bei einer Produktionsmenge in Höhe von 20 000 Stück und hat eine Höhe von 110,00 €. Langfristige Preisuntergrenze: $K(27,78) \approx 9\,896,54$ Wenn bei $x \approx 27,78$ Gesamtkosten von ca. 9 896,54 € anfallen, dann betragen die minimalen Stückkosten $\frac{9\,896,54}{27\,780} \approx 0,36$ [€ pro Stück]. Unter diesen Preis darf der Marktpreis langfristig nicht fallen, wenn das Unternehmen ohne Verlust produzieren will. Das Minimum der variablen Stückkosten liegt bei $x_e = 20$. $k_v(20) = 110$ Daher darf der Preis für die Sektgläser kurzfristig nicht unter $\frac{110}{1\,000} = 0,11$ [€ pro Stück] fallen.	6
3c	zeigt, dass der Volkswirt Recht hat.	Die notwendige Bedingung für ein Gewinnmaximum lautet: $G'(x) = 0$. Wendet man die Summenregel auf die Ableitung der Gewinnfunktion an, erhält man: $G'(x) = E'(x) - K'(x)$. Aus der Bedingung: $G'(x^*) = 0$, folgt $0 = E'(x^*) - K'(x^*) \quad +K'(x^*)$ $E'(x^*) = K'(x^*)$.	3
3d	ermittelt und interpretiert den Ausdruck $K'(10)$.	$K'(x) = 1,5x^2 - 40x + 310$ $K'(10) = 60$ Der formale Ausdruck $K'(10)$ gibt die Grenzkosten bei einer produzierten Menge von 10 000 Gläsern an. Das heißt, die Kosten der Gläserproduktion würden für die nächsten 1 000 Gläser um 60,00 € zunehmen, wenn die Grenzkosten, die bei exakt 10 000 Gläsern gelten, für weitere 1 000 Gläser konstant bleiben würden.	3

	Anforderungen	Modelllösungen	
3e	erläutert, warum mit der Gleichung die gewinnmaximale Menge ermittelt werden kann und ermittelt die gewinnmaximale Menge.	Der Preis von 0,80 € gilt nur für ein Glas. Die Grenzkosten gelten jedoch gemäß Variablendefinition immer für 1 000 Gläser, daher muss der Preis für ein Glas noch mit dem Faktor 1 000 multipliziert werden, um den Grenzerlös anzugeben. $800 = 1,5x^2 - 40x + 310$ $\Rightarrow x_1 \approx 35,793 \quad \wedge \quad x_2 \approx -9,13 \notin D_K$ Zeichnet man z. B. die Erlösfunktion $E(x) = 800x$ in das Koordinatensystem ein, wird deutlich, dass an der Stelle x_1 aufgrund des maximalen Abstandes zwischen Kosten und Erlösen das Gewinnmaximum liegt. Die gewinnmaximale Menge liegt somit bei ca. 35 793 Stück.	4
3f	zeichnet den Graphen der Funktion p in das Koordinatensystem ein und beurteilt anhand der Graphik, inwieweit die Funktionsgleichung geeignet erscheint.	 Der eingezeichnete Graph ist grundsätzlich geeignet, den Sachzusammenhang zu beschreiben, da die Preise mit steigender Absatzmenge abnehmen, diese Abnahmen sich jedoch verringern, somit sollte eine geeignete Kurve konvex sein, welches für den Graphen der Funktion p gilt. Die ermittelte Funktionsgleichung erzeugt jedoch teilweise Funktionswerte, die von den realen Punkten stärker abweichen. Dennoch ist die Gleichung mit Einschränkungen geeignet.	5
3g	ermittelt die erlösmaximale Menge, den erlösmaximalen Preis sowie den Gesamterlös.	$E_{\text{farb}}'(x) = (7,92 - 0,0001584x) \cdot e^{-0,00002x}$ erlösmaximale Menge: $E_{\text{farb}}'(x) = 0 \wedge E_{\text{farb}}''(x^*) < 0$ $E_{\text{farb}}'(x) = 0 \Rightarrow x \approx 50\,000$ $E_{\text{farb}}''(50\,000) < 0$ Erlösmaximaler Preis: $p(50\,000) \approx 2,91$. Maximaler Gesamterlös: $E_{\text{farb}}(50\,000) = \int_0^{50\,000} (7,92 - 0,0001584x) \cdot e^{-0,00002x} dx$ $E_{\text{farb}}(50\,000) \approx 145\,680$ Bei einer Absatzmenge von ca. 50 000 Gläsern zu einem Preis von 2,91 Euro pro Stück würde der maximale Erlös von ca. 145 680,00 € erzielt werden.	6
			30