

|                    |  |
|--------------------|--|
| Name des Prüflings |  |
|--------------------|--|

Punkteverteilung Aufgabe 1:

| Aufgabenteil   | a | b | c | d | e | f | g | h | gesamt |
|----------------|---|---|---|---|---|---|---|---|--------|
| Erreichbar     | 6 | 4 | 4 | 3 | 5 | 3 | 4 | 5 | 34     |
| Erstkorrektur  |   |   |   |   |   |   |   |   |        |
| Zweitkorrektur |   |   |   |   |   |   |   |   |        |

a) Gegeben ist die Funktionenschar  $f_a$  mit der Funktionsgleichung:

$$f_a(x) = a \cdot x^4 - 2 \cdot x^2 + 4 \quad \text{mit } a, x \in \mathbb{R} \text{ und } a \neq 0.$$

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidung.

| Aussage                                                              | Entscheidung und Begründung |
|----------------------------------------------------------------------|-----------------------------|
| Alle Funktionsgraphen der Funktionenschar sind achsensymmetrisch.    |                             |
| Alle Funktionsgraphen der Funktionenschar besitzen zwei Wendepunkte. |                             |
| Für $a > 0$ kann die Funktion drei Extrema besitzen.                 |                             |

b) Gegeben sind Parabeln, deren Verläufe durch  $f_t(x) = \frac{3}{4t^3}x^2 - \frac{2}{3t^2}x$  mit  $t, x \in \mathbb{R}$  und  $t > 0$  beschrieben werden.

Weisen Sie nach, dass die Flächen, die die Parabeln mit der Abszisse einschließen, für alle  $t > 0$  gleich groß sind.

- c) Geben Sie jeweils eine mögliche Funktionsgleichung in der Form  $y(x) = a \cdot \sin(b(x + c)) + d$  und  $y(x) = a \cdot \cos(b(x + c)) + d$  mit  $a, b, c, d, x \in \mathbb{R}$  an, deren Graph den in Abbildung 1.1 dargestellten Verlauf hat.

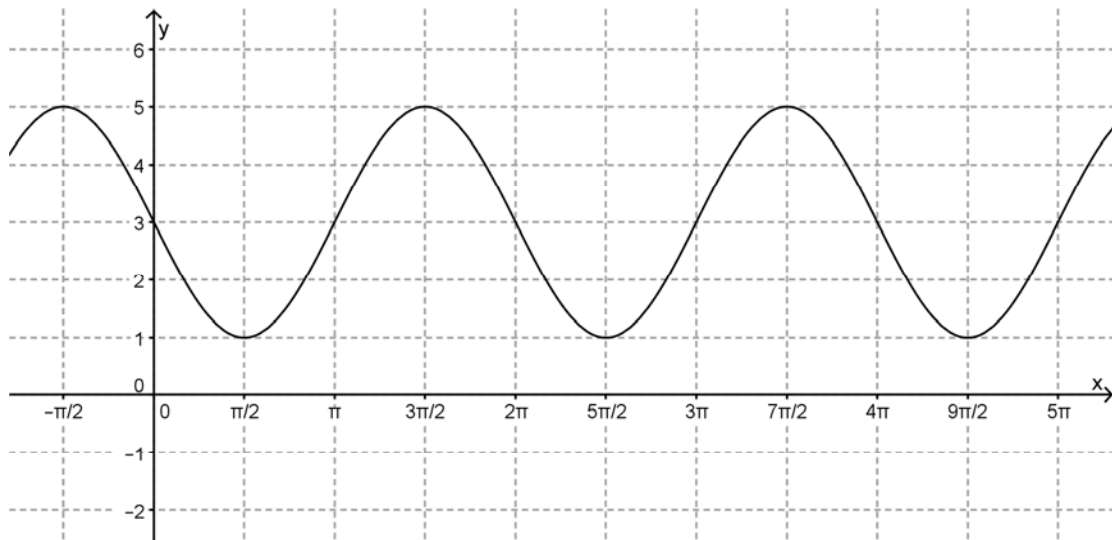


Abbildung 1.1

- d) Im Koordinatensystem (Abbildung 1.2) ist die erste Ableitung  $f'$  einer Funktion  $f$  dargestellt.

Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen der Funktion  $f$  in das untere Koordinatensystem.

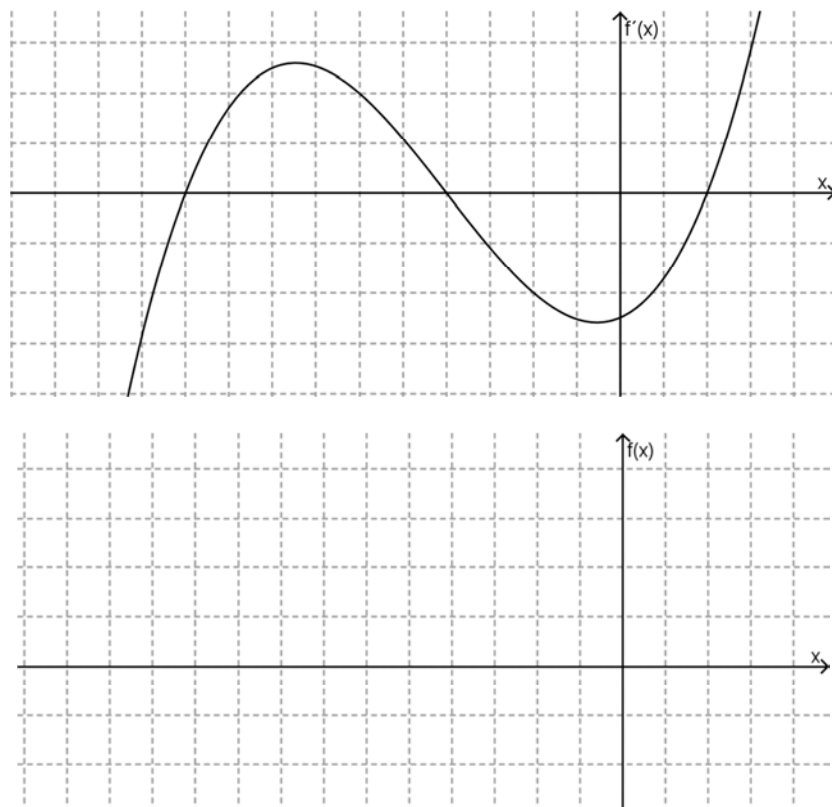
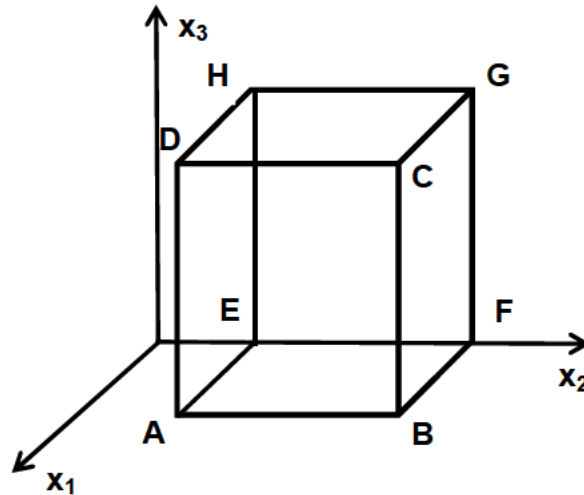


Abbildung 1.2

- e) Ein Quader mit den Eckpunkten  $E(0|2|0)$  und  $D(5|2|4)$  steht auf der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene (siehe Abbildung). Die Länge der Strecke  $\overline{EF}$  beträgt 3 Längeneinheiten.



- Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte A und H an.
  - Ermitteln Sie das Volumen des Quaders.
  - Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene durch die Punkte D, E und F in Normalform.
- f) Gegeben sind die Punkte  $A(1|3|4)$ ,  $B(5|5|6)$  und  $M(2|3,5|z)$  mit  $z \in \mathbb{R}$ .
- Bestimmen Sie den Parameter  $z$  so, dass der Punkt M auf der Strecke  $\overline{AB}$  liegt.
  - Ermitteln Sie den Punkt, der die Strecke  $\overline{AB}$  im Verhältnis 1:3 teilt.
- g) Gegeben sind der Punkt  $A(1|2|1)$  und eine Menge von Punkten  $C_k(4|k|-2)$  mit  $k \in \mathbb{R}$ .
- Beschreiben Sie die Lage der Punkte der Menge  $C_k$  im Raum und geben Sie hierfür ein mathematisches Modell an.
  - Bestimmen Sie die Werte des Parameters  $k$ , für die die Punkte  $C_k$  vom Punkt A einen Abstand von  $d = 10$  LE haben.
- h) Gegeben sind die Ebene E mit der Ebenengleichung  $E: x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3$  sowie die Geradenschar  $g_a$  mit der Gleichung
- $$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} a^2 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \text{ mit } r, a \in \mathbb{R} \text{ und } a \neq 0.$$
- Erläutern Sie, warum der Parameterwert  $a = 0$  kein sinnvoller Wert in Hinblick auf die Geradenschar ist.
  - Erläutern Sie, zu welcher Koordinatenebene alle Geraden der Geradenschar  $g_a$  parallel verlaufen.
  - Untersuchen Sie die möglichen Lagen von E und  $g_a$  in Abhängigkeit von  $a$ .

Punkteverteilung Aufgabe 2: Fabrikhalle

| Aufgabenteil   | a | b | c | d | e | f | g | h | gesamt |
|----------------|---|---|---|---|---|---|---|---|--------|
| Erreichbar     | 5 | 3 | 4 | 2 | 5 | 3 | 5 | 6 | 33     |
| Erstkorrektur  |   |   |   |   |   |   |   |   |        |
| Zweitkorrektur |   |   |   |   |   |   |   |   |        |

Ein zementverarbeitendes Unternehmen plant zur Ausweitung der Produktion den Neubau einer Fabrikhalle. Die Planung sieht hierzu folgende Eckpunkte des Gebäudes vor (alle Angaben in Metern):

Grundfläche: A(30|20|0), B(60|20|0), C(60|60|0), D(30|60|0),

Dach: E(30|20|15), F(60|20|22), G(60|60|22), H(30|60|15).

Die  $x_1$ -Achse zeigt in südliche, die  $x_2$ -Achse in östliche Richtung. Die Kanten des Gebäudes sollen geradlinig verlaufen.

a) Zeichnen Sie von der Halle ein dreidimensionales Schrägbild.

Hinweis: Zeichnen Sie die  $x_1$ -Achse für die Veranschaulichung nachfolgender Aufgaben bis  $x_1 = 100$ .

Um die laufenden Kosten für den Neubau zu reduzieren, wird überlegt, auf dem Hallendach eine Photovoltaikanlage zu installieren. Diese Anlage verwandelt das einfallende Sonnenlicht in Strom, der ins öffentliche Stromnetz eingespeist werden kann, wodurch das Unternehmen zusätzliche Einnahmen erzielen würde. Zur Planung der Photovoltaikanlage wird von der Dachebene  $E_D$  folgende Gleichung in Koordinatenform erstellt:

$$E_D: -7x_1 + 30x_3 = 240.$$

b) Zeigen Sie, dass diese Gleichung die Dachebene beschreibt.

Vom Neigungswinkel der Dachfläche gegenüber der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene und von der Ausrichtung der Fläche bzgl. der Himmelsrichtung hängt ab, welchen Anteil vom maximal möglichen Ertrag eine Photovoltaikanlage wirklich erbringt. Um diese Abhängigkeit dem Kunden zu veranschaulichen, wurde vom Hersteller der Photovoltaikanlage eine graphische Darstellung erstellt (Abb. 2.1).

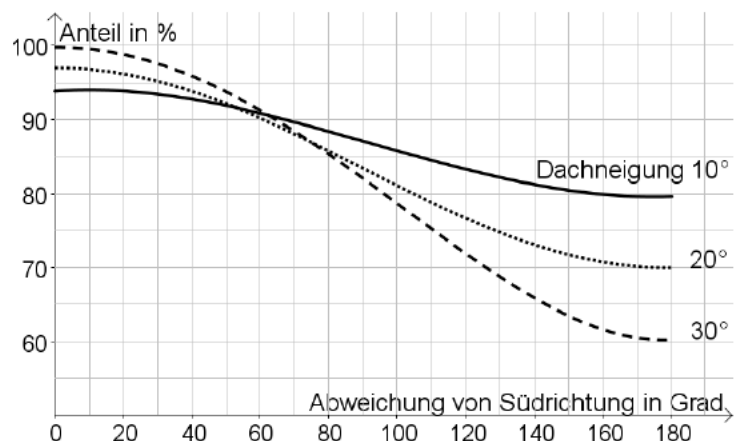


Abbildung 2.1

c) Ermitteln Sie, welchen Anteil vom maximal möglichen Ertrag das zementverarbeitende Unternehmen für die geplante Photovoltaikanlage in etwa erwarten kann.

- d) Für die Photovoltaikanlage soll eine elektrische Leitung vom Mittelpunkt M der Dachfläche zu einem Punkt Z der Dachkante  $\overline{EF}$  verlegt werden, der vom Punkt E einen Abstand von 10 m hat.  
Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte M und Z.

Das Grundstück wurde durch das Unternehmen deshalb ausgewählt, da es direkt an das Ufer eines Flusses grenzt. Die transporttechnisch günstige Lage soll dazu genutzt werden, um Rohstoffe per Schiff anzuliefern und mit Hilfe eines geradlinigen Förderbandes zur Hallenwand BCGF zu befördern. Der Anfangspunkt des Förderbandes soll sich am Flussufer im Punkt P(100|70|0) befinden.

- e) Auf dem Grundstück befindet sich im Punkt S(93|66,5|0) bereits ein 6 m hoher senkrechter Pfeiler, der aufgrund seiner Stabilität sehr gut zum Abstützen des Förderbandes geeignet wäre.  
Untersuchen Sie, ob es möglich ist, das Förderband vom Punkt P über die Spitze des Pfeilers zur Wand BCGF zu bauen.
- f) Die Anlage zur Zementverarbeitung im Inneren der Fabrikhalle macht es notwendig, dass das Förderband die Hallenwand in einem Punkt Q erreicht, der zum einen senkrecht über dem Punkt  $Q_0(60|50|0)$  liegt und zum anderen zur Dachfläche einen Abstand von mindestens 1,5 m hat.  
Bestimmen Sie die maximale Höhe des Punktes Q, so dass der geforderte Abstand noch eingehalten wird.
- g) Das Förderband von Punkt P(100|70|0) zum Punkt Q(60|50|20) soll durch einen senkrechten Stützpfeiler abgestützt werden. Eine erste Planung sah vor, für den Pfeiler im Punkt T(68|53|0) ein Fundament zu gießen. Es stellte sich allerdings heraus, dass sich der Punkt T nicht senkrecht unter dem Förderband befindet, sondern hierfür in östliche Richtung verlegt werden muss.  
Bestimmen Sie, wie weit der Punkt T in östliche Richtung verlegt werden muss.

Die Leistung des geplanten Förderbandes (gemessen in Tonnen (t) pro Stunde (h)) vom Punkt P(100|70|0) zum Punkt Q(60|50|20) beträgt laut Herstellerangaben bei waagrechttem Verlauf 800 t/h. Bei schrägem Verlauf ist die Leistung jedoch geringer. Zur Berechnung der Förderbandleistung ist der maximale Leistungswert von 800 t/h mit einem Faktor c zu multiplizieren, der vom Neigungswinkel  $\alpha$  des Förderbandes gegenüber der Horizontalen abhängt. Laut Herstellerangaben kann der Faktor c für Winkel bis maximal  $30^\circ$  mithilfe folgender ganzrationaler Funktion berechnet werden, wobei  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $0 \leq \alpha \leq 30$  gilt.

$$c(\alpha) = -0,000001\alpha^4 + 0,000032\alpha^3 - 0,000616\alpha^2 - 0,001216\alpha + 1$$

- h) Zeigen Sie, dass es länger als 10 Stunden dauern würde, einen Zementfrachter mit einer Ladung von 6000 t zu entladen.

Bestimmen Sie, welchen Neigungswinkel das Förderband maximal haben darf, um eine Entladezeit von höchstens 10 Stunden zu erreichen

|                    |  |
|--------------------|--|
| Name des Prüflings |  |
|--------------------|--|

Punkteverteilung Aufgabe 1:

| Aufgabenteil   | a | b | c | d | e | f | g | h | i | gesamt |
|----------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--------|
| erreichbar     | 6 | 4 | 4 | 3 | 3 | 5 | 3 | 2 | 4 | 34     |
| Erstkorrektur  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |        |
| Zweitkorrektur |   |   |   |   |   |   |   |   |   |        |

a) Gegeben ist die Funktionenschar  $f_a$  mit der Funktionsgleichung:

$$f_a(x) = a \cdot x^4 - 2 \cdot x^2 + 4 \quad \text{mit } a, x \in \mathbb{R} \text{ und } a \neq 0.$$

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidung.

| Aussage                                                              | Entscheidung und Begründung |
|----------------------------------------------------------------------|-----------------------------|
| Alle Funktionsgraphen der Funktionenschar sind achsensymmetrisch.    |                             |
| Alle Funktionsgraphen der Funktionenschar besitzen zwei Wendepunkte. |                             |
| Für $a > 0$ kann die Funktion drei Extrema besitzen.                 |                             |

b) Gegeben sind Parabeln, deren Verläufe durch  $f_t(x) = \frac{3}{4t^3}x^2 - \frac{2}{3t^2}x$  mit  $t, x \in \mathbb{R}$  und  $t > 0$  beschrieben werden.

Weisen Sie nach, dass die Flächen, die die Parabeln mit der Abszisse einschließen, für alle  $t > 0$  gleich groß sind.

- c) Geben Sie jeweils eine mögliche Funktionsgleichung in der Form  $y(x) = a \cdot \sin(b(x + c)) + d$  und  $y(x) = a \cdot \cos(b(x + c)) + d$  mit  $a, b, c, d, x \in \mathbb{R}$  an, deren Graph den in Abbildung 1.1 dargestellten Verlauf hat.

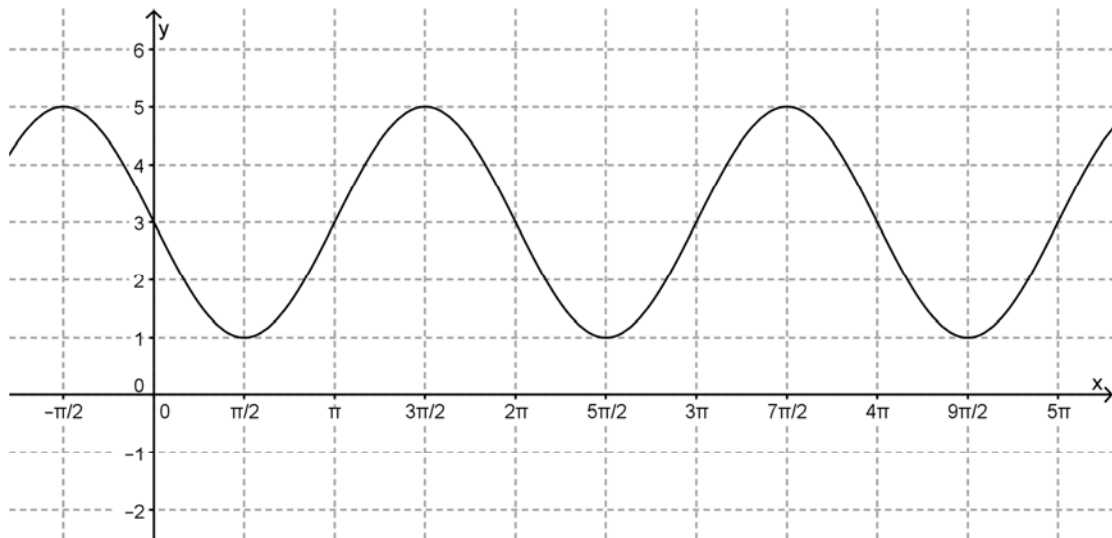


Abbildung 1.1

- d) Im Koordinatensystem (Abbildung 1.2) ist die erste Ableitung  $f'$  einer Funktion  $f$  dargestellt.

Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen der Funktion  $f$  in das untere Koordinatensystem.

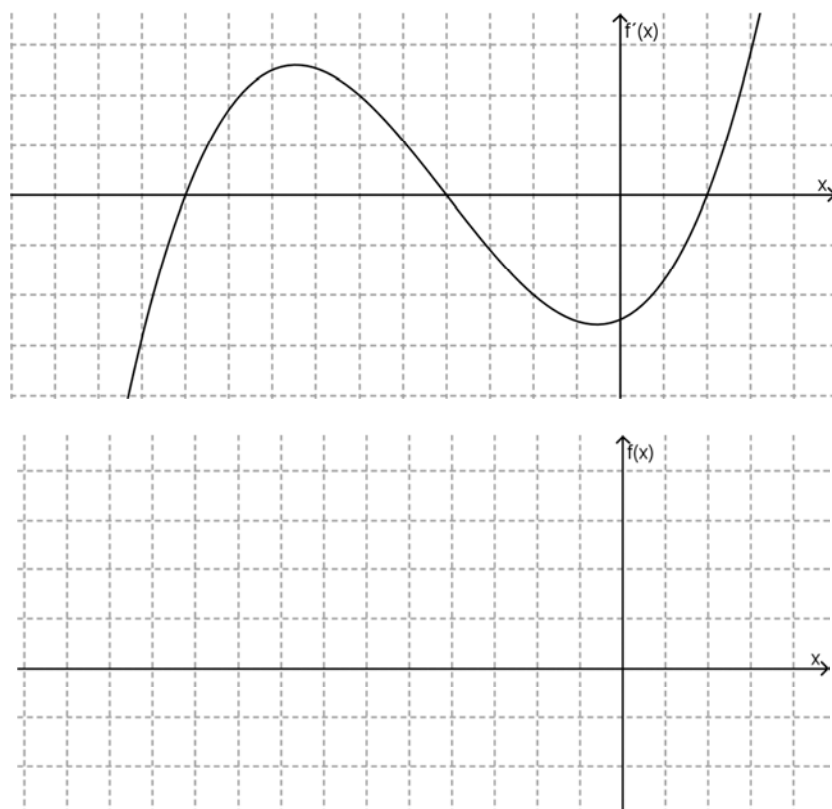


Abbildung 1.2

- e) Gegeben ist die Matrix  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$  mit  $t \in \mathbb{R}$ .

Bestimmen Sie den Parameter  $t$  so, dass die Matrix  $M$  nicht invertierbar ist.

- f) Zeigen Sie, dass die Matrix  $Q = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \\ 0,4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  einen stabilen zyklischen Prozess beschreibt und geben Sie die Zykluslänge an.

Ermitteln Sie die Matrix  $X$ , so dass  $Q^2 \cdot X = \begin{pmatrix} 375 \\ 20 \\ 400 \end{pmatrix}$  gilt.

- g) Berechnen Sie die fehlenden Matrixelemente  $a, b, c \in \mathbb{R}$  zur folgenden Matrizenmultiplikation.

$$\begin{pmatrix} a & 4 \\ 2 & -2 \\ 1 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & a & a \\ a & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & a & -7 \\ c & 2 & 2b \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

- h) Bestimmen Sie die Koeffizienten  $a, b$  und  $c$  mit  $a, b, c \in \mathbb{R}$  so, dass das folgende lineare Gleichungssystem die Lösung  $\mathbb{L} = \{(3 \mid -4 \mid 2)\}$  hat.

$$\begin{aligned} a \cdot x - y - 3 \cdot z &= 1 \\ -c \cdot x + b \cdot y + 7 \cdot z &= 0 \\ 3 \cdot x + b \cdot y + b \cdot z &= 5 \end{aligned}$$

- i) Bestimmen Sie aus den folgenden Matrixengleichungen jeweils die Matrix  $X$ . (Für alle Matrizen existieren die zugehörigen inversen Matrizen,  $s \in \mathbb{R}$ .)

|                                               |       |
|-----------------------------------------------|-------|
| $A \cdot X = B \cdot X + s \cdot A$           | $X =$ |
| $E = X \cdot A^T \cdot B - 4 \cdot X \cdot C$ | $X =$ |

Punkteverteilung Aufgabe 2: Kundenzufriedenheit

| Aufgabenteil   | a | b | c | d | e | f | g | h | i | gesamt |
|----------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--------|
| Erreichbar     | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 4 | 5 | 4 | 7 | 33     |
| Erstkorrektur  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |        |
| Zweitkorrektur |   |   |   |   |   |   |   |   |   |        |

Das Möbelhaus „Schanz“ beauftragt ein Marktforschungsunternehmen die Kundenzufriedenheit mit den monatlich wechselnden Sonderangeboten zu untersuchen. Anhand von Erfahrungen bereits erfolgter Untersuchungen von 2000 Kunden kann das Marktforschungsunternehmen die monatliche Änderung der Kundenzufriedenheit wie folgt darstellen:

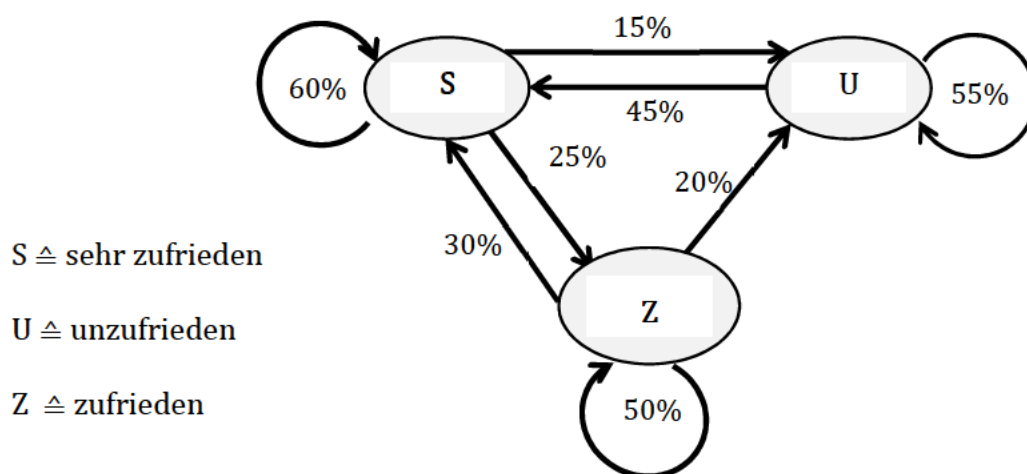


Abbildung 2.1

- a) Erläutern Sie anhand eines ausgewählten Elementes der Matrix A, warum diese Matrix das Änderungsverhalten der Kundenzufriedenheit wiedergibt.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} S & U & Z \end{matrix} \\ \begin{matrix} S \\ U \\ Z \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,60 & 0,45 & 0,30 \\ 0,15 & 0,55 & 0,20 \\ 0,25 & 0 & 0,50 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Zu Beginn der Untersuchung wurden insgesamt 2000 Kunden befragt. Das Änderungsverhalten bezüglich der Kundenzufriedenheit wird durch die Matrix A und die Verteilung

der Kunden wird durch den Vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} S \\ U \\ Z \end{pmatrix}$  beschrieben. Von diesen befragten Kunden waren ein Fünftel aller Kunden sehr zufrieden mit den monatlich wechselnden Sonderangeboten und die Hälfte aller Kunden war mit diesen Angeboten unzufrieden.

- b) Ermitteln Sie, wie viele Kunden nach dem ersten Monat sehr zufrieden und wie viele Kunden unzufrieden mit den wechselnden Sonderangeboten waren.

Nach dem ersten Monat wird die Kundenumfrage unter den 2000 Kunden wiederholt. Demnach waren 43,5% der Kunden sehr zufrieden und 20% der Kunden waren zufrieden.

- c) Ermitteln Sie den voraussichtlichen Prozentsatz sehr zufriedener, unzufriedener und zufriedener Kunden nach einem weiteren Monat und nach weiteren sechs Monaten.
- d) Ermitteln Sie die Matrix  $A^2$  und interpretieren Sie die Matrix  $A^2$  im Sachzusammenhang.

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass das Element  $a_{11}$  der Matrix  $A^2$  den Wert 0,5025 annimmt. Es werden zu diesem Element der Matrix  $A^2$  von einem Mitarbeiter des Marktforschungsinstitutes folgende drei Aussagen getroffen:

Aussage 1: Von 100 sehr zufriedenen Kunden sind auch nach zwei Monaten noch ca. 50 Kunden sehr zufrieden.

Aussage 2: Der Anteil der ursprünglich sehr zufriedenen Kunden, die in zwei aufeinanderfolgenden Monaten immer noch sehr zufrieden waren, muss kleiner als 50,25% sein.

Aussage 3: Der Anteil der ursprünglich sehr zufriedenen Kunden (S), die auch während der zurückliegenden zwei Monate sehr zufrieden waren, beträgt 50,25%.

- e) Entscheiden Sie begründet, welche der drei Aussagen zu dem Element  $a_{11} = 0,5025$  der Matrix  $A^2$  korrekt sind.
- f) Untersuchen Sie, wie sich das Änderungsverhalten der Kundenzufriedenheit langfristig entwickeln wird und geben Sie mit Hilfe der Matrix A an, wie sich der Anteil der sehr zufriedenen Kunden darstellen wird.
- g) Ermitteln Sie den Fixvektor der Matrix A, der die Verteilung der 2000 Kunden wiedergibt und erläutern Sie dessen Bedeutung im Sachzusammenhang.

Durch eine gezielte Imagewerbung möchte das Marktforschungsunternehmen den Anteil der unzufriedenen Kunden senken. Bei der Untersuchung wird das Änderungsverhalten, das durch die Matrix A beschrieben wird, zunächst vorausgesetzt.

Es wird jedoch angenommen, dass 10% der unzufriedenen Kunden nach der Imagewerbung zufrieden sein werden. Der Anteil der unzufrieden bleibenden Kunden soll entsprechend gesenkt werden. Die Marketingmaßnahme soll schon zu Beginn der Untersuchung durchgeführt werden. Zu diesem Zeitpunkt waren von den 2000 Kunden 400 Kunden sehr zufrieden und 600 Kunden waren zufrieden.

- h) Weisen Sie nach, dass schon nach dem ersten Monat der Einführung der Marketingmaßnahme die Anzahl der unzufriedenen Kunden zugunsten der zufriedenen Kunden gesenkt werden kann.

- i) Ergänzen Sie die nachfolgende Wertetabelle 2.2, der man entnehmen kann, wie viele sehr zufriedene und wie viele unzufriedene Kunden in den ersten sechs Monaten zu erwarten sind, unter der Voraussetzung, dass das Änderungsverhalten der Kundenzufriedenheit unverändert bleibt.

| nach ... Monat/en                      | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   |
|----------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Anzahl der sehr zufriedenen Kunden (S) | 400 | 870 | 971 | 983 | 980 | 976 | 974 |
| Anzahl der unzufriedenen Kunden (U)    |     |     |     |     |     |     |     |

Wertetabelle 2.2 (Zahlenwerte z.T. gerundet)

Stellen Sie die in der Wertetabelle dargestellten Sachverhalte graphisch dar.

Entscheiden Sie begründet, mit welchem Funktionstyp eine längerfristige Vorhersage bezüglich der Anzahl sehr zufriedener Kunden beschrieben werden kann.

|                    |  |
|--------------------|--|
| Name des Prüflings |  |
|--------------------|--|

Punkteverteilung Aufgabe 1:

| Aufgabenteil   | a | b | c | d | e | f | g | gesamt |
|----------------|---|---|---|---|---|---|---|--------|
| Erreichbar     | 6 | 4 | 4 | 3 | 4 | 7 | 6 | 34     |
| Erstkorrektur  |   |   |   |   |   |   |   |        |
| Zweitkorrektur |   |   |   |   |   |   |   |        |

a) Gegeben ist die Funktionenschar  $f_a$  mit der Funktionsgleichung:

$$f_a(x) = a \cdot x^4 - 2 \cdot x^2 + 4 \quad \text{mit } a, x \in \mathbb{R} \text{ und } a \neq 0.$$

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidung.

| Aussage                                                              | Entscheidung und Begründung |
|----------------------------------------------------------------------|-----------------------------|
| Alle Funktionsgraphen der Funktionenschar sind achsensymmetrisch.    |                             |
| Alle Funktionsgraphen der Funktionenschar besitzen zwei Wendepunkte. |                             |
| Für $a > 0$ kann die Funktion drei Extrema besitzen.                 |                             |

b) Gegeben sind Parabeln, deren Verläufe durch  $f_t(x) = \frac{3}{4t^3}x^2 - \frac{2}{3t^2}x$  mit  $t, x \in \mathbb{R}$  und  $t > 0$  beschrieben werden.

Weisen Sie nach, dass die Flächen, die die Parabeln mit der Abszisse einschließen, für alle  $t > 0$  gleich groß sind.

- c) Geben Sie jeweils eine mögliche Funktionsgleichung in der Form  $y(x) = a \cdot \sin(b(x + c)) + d$  und  $y(x) = a \cdot \cos(b(x + c)) + d$  mit  $a, b, c, d, x \in \mathbb{R}$  an, deren Graph den in Abbildung 1.1 dargestellten Verlauf hat.

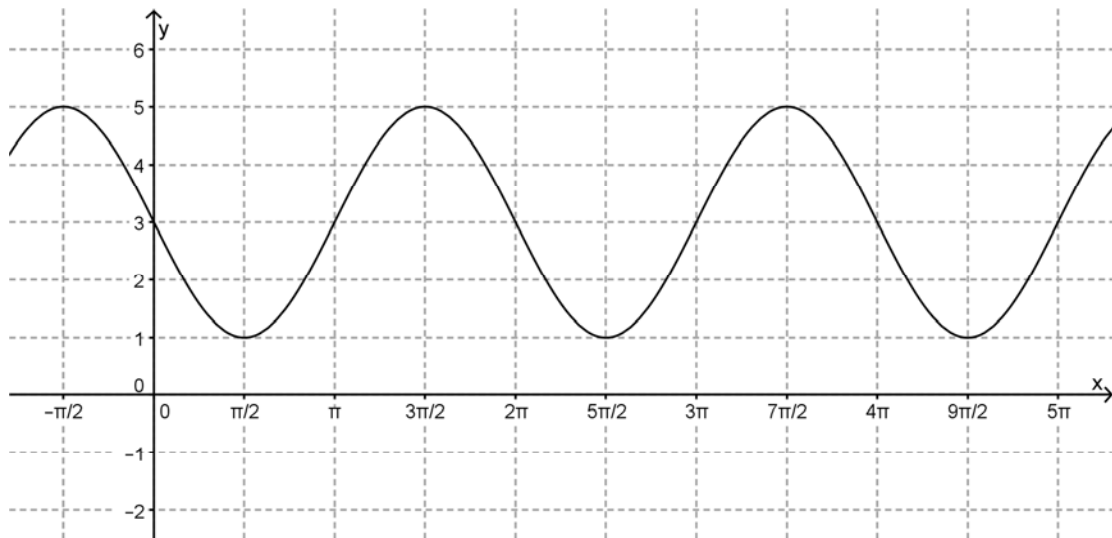


Abbildung 1.1

- d) Im Koordinatensystem (Abbildung 1.2) ist die erste Ableitung  $f'$  einer Funktion  $f$  dargestellt.

Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen der Funktion  $f$  in das untere Koordinatensystem.

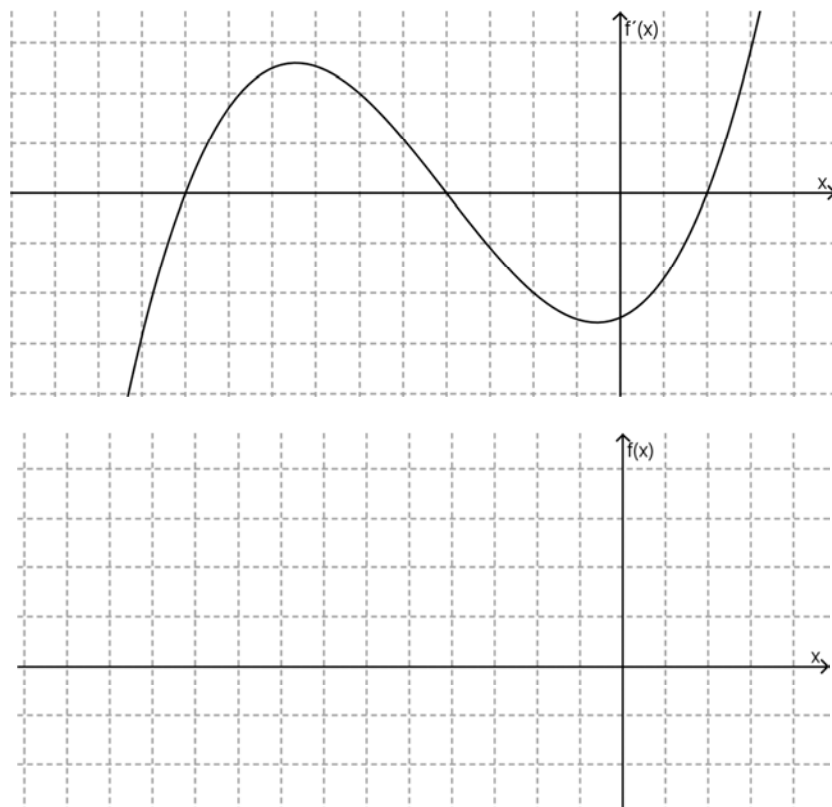


Abbildung 1.2

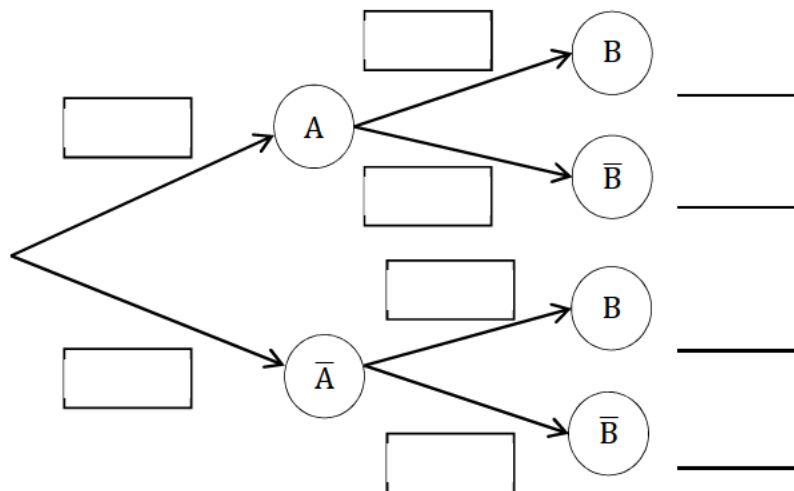
e) Eine Zufallsgröße  $X$  hat die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

|              |      |      |      |
|--------------|------|------|------|
| $x_i$        | 0    | 1    | 2    |
| $P(X = x_i)$ | 0,32 | 0,36 | 0,32 |

- Weisen Sie nach, dass der Erwartungswert  $E(X) = 1$  ist.
- Berechnen Sie die Standardabweichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße  $X$ .
- Ermitteln Sie, welchen Wert  $x_1$  statt Null annehmen müsste, damit für den Erwartungswert  $E(X) = 0$  gilt.

f) Betrachtet werden die Ereignisse  $A$  und  $B$ , von denen folgenden Wahrscheinlichkeiten gegeben sind:  $P(A) = 0,2$ ,  $P_A(B) = 0,625$  und  $P(\bar{A} \cap B) = 0,4$ .

- Beschriften Sie das vorgegebene Baumdiagramm mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.
- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten  $P(A \cap B)$  und  $P_{\bar{A}}(B)$ .



g) Für eine binomialverteilte Zufallsgröße wird die Nullhypothese  $H_0: p = 0,4$  gegen  $H_1: p \neq 0,4$  bei einem Stichprobenumfang von  $n = 50$  getestet. Als Annahmebereich von  $H_0$  wird die Menge  $A = \{13; 14; 15; \dots; 27\}$  festgelegt.

- Berechnen Sie die Irrtumswahrscheinlichkeit.
- Bei der Testdurchführung wurden 12 Erfolge gezählt. Beurteilen Sie dieses Ergebnis.
- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art, wenn man von einer tatsächlichen Wahrscheinlichkeit von  $p = 0,45$  ausgehen kann.

## Punkteverteilung Aufgabe 2: Aufmerksamkeitsdefizitstörung (ADHS)

| Aufgabenteil   | a | b | c | d | e | f | gesamt |
|----------------|---|---|---|---|---|---|--------|
| Erreichbar     | 3 | 7 | 3 | 6 | 8 | 6 | 33     |
| Erstkorrektur  |   |   |   |   |   |   |        |
| Zweitkorrektur |   |   |   |   |   |   |        |

Eine Aufmerksamkeitsdefizit-Hyperaktivitätsstörung auch Aufmerksamkeitsdefizit-Hyperaktivitätssyndrom, kurz ADHS, wird seit Beginn der 90er Jahre bei immer mehr Kindern diagnostiziert. Dabei handelt es sich um eine psychische Störung, die sich durch Probleme mit der Aufmerksamkeit, Impulsivität und Hyperaktivität auszeichnet. Über die Häufigkeit des Vorkommens herrscht große Unsicherheit. Da es keine objektiven Diagnosekriterien gibt, ist die Angabe einer Krankheitshäufigkeit (Prävalenz) schwierig. Kinderärzte gehen heute von einer durchschnittlichen Häufigkeit von 3,9% bei Kindern aus, bei denen ADHS diagnostiziert wird.

- a) Erläutern Sie, unter welchen Voraussetzungen die Anzahl  $X$  von Kindern, bei denen ADHS diagnostiziert wurde, als binomialverteilte Zufallsgröße betrachtet werden kann.

Schülerinnen und Schüler eines Beruflichen Gymnasiums mit dem Profulfach „Gesundheit“ haben für ihr fächerübergreifendes Projekt das Thema „ADHS“ gewählt und besuchen daher eine Kindertagesstätte. Die Leiterin der Kindertagesstätte begleitet die Schülerinnen und Schüler während ihres Besuches in eine Gruppe von 26 Kindern.

- b) Berechnen Sie (ohne CAS nachvollziehbar) unter der Annahme, dass eine Binomialverteilung vorliegt und man von einer durchschnittlichen Prävalenz von 3,9% ausgeht, folgende Werte:
- Die Anzahl der Kinder mit ADHS, die man in dieser Gruppe erwarten kann.
  - Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in dieser Gruppe genau zwei Fälle von ADHS vorliegen.
  - Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in dieser Gruppe mindestens ein Fall von ADHS auftritt.
  - Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in dieser Gruppe weniger als zwei Fälle von ADHS vorkommen.

Die Leitung der Kindertagesstätte möchte bereits bei der Einteilung der Gruppen die mögliche Anzahl von Kindern mit ADHS berücksichtigen, um diesen Kindern auch die notwendige Fürsorge durch ausreichendes Personal zukommen zu lassen.

- c) Ermitteln Sie die maximale Gruppengröße, so dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80% höchstens ein Kind mit ADHS in der Gruppe ist.

Eine Umfrage unter den Eltern der Kindertagesstätte ergab, dass von den insgesamt 120 Kindern acht Kinder die Diagnose ADHS haben. Die Leiterin behauptet daher, dass der Anteil der Kinder mit ADHS in ihrer Einrichtung wesentlich höher liegt als bisher angenommen bei 3,9%.

- d) Widerlegen Sie mit Hilfe eines geeigneten Testverfahrens und einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 2% die Behauptung der Leiterin.

Ermitteln Sie die Irrtumswahrscheinlichkeit, wenn die Leiterin ihre Behauptung für den Fall, dass mindestens acht Kinder die Diagnose ADHS haben, beibehalten will.

Von den insgesamt 120 Kindern der Kindertagesstätte sind 66 Jungen. In einer Fachzeitschrift hat die Leiterin gelesen, dass das Verhältnis bei ADHS betroffenen Kindern von Jungen zu Mädchen 3:1 beträgt.

- e) Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Jungen mit ADHS bei 2,925% liegt, wenn weiterhin eine durchschnittliche Häufigkeit von ADHS von 3,9% zugrunde gelegt wird.

Erstellen Sie eine Vierfeldertafel für die Ereignisse „Junge“ und „ADHS diagnostiziert“.

Prüfen Sie, ob die Ereignisse „Junge“ und „ADHS diagnostiziert“ stochastisch unabhängig sind.

Die Häufigkeit von ADHS ist auch vom Alter der Kinder bzw. jungen Menschen abhängig. Basierend auf Statistiken aus dem Jahr 2011 wurde zur Beschreibung des altersbedingten Anteils von männlichen Personen mit ADHS die Funktion  $H$  mit der Funktionsgleichung

$$H(t) = \begin{cases} \frac{5}{32}t^2 & \text{mit } t \in \mathbb{R} \text{ und } 0 \leq t \leq 8, \\ -0,00051t^4 + 0,0444t^3 - 1,334t^2 + 15,6t - 50,06784 & \text{mit } t \in \mathbb{R} \text{ und } 8 < t \leq 22, \end{cases}$$

ermittelt. Dabei gibt  $t$  das Alter in Jahren und  $H(t)$  die Häufigkeit von ADHS in Prozent an.

- f) Stellen Sie die Häufigkeitsverteilung  $H(t)$  graphisch dar.

Berechnen Sie das Alter, in dem der Anteil männlicher Personen mit ADHS am höchsten ist und geben Sie den höchsten Anteil an.

Weisen Sie nach, dass im Alter von 15 Jahren bis 16 Jahren die Häufigkeit von ADHS am stärksten abnimmt.

|                    |  |
|--------------------|--|
| Name des Prüflings |  |
|--------------------|--|

Punkteverteilung **Aufgabe 3** (Alternative 1): **Freizeitpark**

| Aufgabenteil   | a | b | c | d | e | f | g | h | i | j | gesamt |
|----------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--------|
| Erreichbar     | 4 | 4 | 5 | 3 | 2 | 2 | 4 | 3 | 3 | 3 | 33     |
| Erstkorrektur  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |        |
| Zweitkorrektur |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |        |

In Freizeitparks findet man neben Achterbahnen seit einigen Jahren auch die sogenannten Disk'o. Bei dieser Art von Fahrgeschäft schaukeln die Fahrgäste auf einer rotierenden Scheibe auf einer gewölbten Bahn vor und zurück. In der folgenden Abbildung ist ein sogenannter Disk'o Coaster oder auch Mega Coaster dargestellt. Bei dieser Bauart durchfährt die rotierende Scheibe in der Mitte einen „Hügel“, der als Camelback bezeichnet wird. Zur besseren Veranschaulichung sind in Abbildung 3.1 mehrere dieser rotierenden Scheiben auf einer Bahn eingezeichnet.



Abbildung 3.1: Disc'o Coaster

Für einen Park ist eine Bahn, wie in Abbildung 3. 1 dargestellt, geplant. Die beiden tiefsten Stellen liegen 24 Meter auseinander und haben jeweils einen horizontalen Abstand von 12 Metern zum Camelback. Der Camelback in der Mitte soll eine Höhe von 3,84 Metern haben. Der Coaster steht auf ebenem Grund und die Höhe der Schienen kann vernachlässigt werden.

- a) Ermitteln Sie die Bedingungen, die für eine ganzrationale Funktion  $f$  gelten müssen, die den in Abbildung 3.1 dargestellten Bahnverlauf modelliert.
- Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Funktion.

In den Herstellerunterlagen ist unter anderem die folgende Funktionsgleichung zur Beschreibung des Bahnverlaufs zu finden:

$$f(x) = \frac{1}{5400}x^4 - \frac{4}{75}x^2 + \frac{96}{25} \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}.$$

Gemäß diesen Unterlagen erreicht der Schlitten, auf dem die Scheibe mit den Passagieren befestigt ist, an den Umkehrpunkten eine Höhe von 6 Metern.

Der Betreiber des Freizeitparks möchte die neue Attraktion unter anderem damit bewerben, dass an den Umkehrpunkten eine Steigung bzw. eine Gefälle von über 200% vorliegt.

b) Prüfen Sie, ob eine derartige Werbeaussage den Tatsachen entspricht.

An den Wendepunkten der Funktion  $f$ , mit der der Bahnverlauf modelliert wird, muss die Bahn durch extra starke Stützstreben stabilisiert werden. Diese Streben müssen senkrecht zum Bahnverlauf montiert werden.

c) Berechnen Sie den Winkel zwischen dem ebenen Grund und einer der benötigten Streben.

Der Freizeitpark hat täglich von 9.00 Uhr bis 21.00 Uhr geöffnet. An einem Tag wurde der Besucherstrom in einem Beobachtungszeitraum von 9.00 Uhr bis 16.00 Uhr erfasst und kann durch die Funktion  $g$  mit der Funktionsgleichung

$$g(t) = -9,45(e^{-1,72t} - e^{-0,95t}) \quad \text{mit } t \in \mathbb{R} \text{ und } 0 \leq t \leq 7$$

annähernd genau modelliert werden.

Dabei entspricht  $g(t)$  der momentanen Änderungsrate der Besucherzahl in 1000 Personen pro Stunde und  $t$  gibt die Zeit in Stunden an, wobei 9.00 Uhr  $t = 0$  ist.

d) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem der Besucherstrom maximal war.  
Geben Sie die Uhrzeit und die Größe des Besucherstroms zu diesem Zeitpunkt an.

In einem Zeitungsartikel über den Freizeitpark wird behauptet, dass der Besucherstrom von 10.00 Uhr bis 11.00 Uhr um mehr als 60% abnimmt.

e) Beurteilen Sie die Richtigkeit der Behauptung in diesem Artikel.

Die Personalabteilung hat festgelegt, dass bei einem Besucherstrom von mehr als 1500 Besuchern pro Stunde zusätzliche Kassen geöffnet werden sollen.

f) Berechnen Sie den Zeitraum, in dem zusätzliche Kassen geöffnet sein müssen.

Die Controllingabteilung, die für die Beschaffung, Aufbereitung und Analyse von Daten in dem Freizeitpark verantwortlich ist, bemängelt die Modellierung durch die Funktion  $g$  zum Ende des Beobachtungszeitraums, da nach ihren Aufzeichnungen an diesem Tag ab etwa 15.00 Uhr keine Besucher mehr kamen. Die Abteilung schlägt daher vor, den Besucherstrom ab 14.00 Uhr durch eine lineare Funktion  $h$  zu modellieren, die zu diesem Zeitpunkt tangential am Graphen der Funktion  $g$  anliegen soll.

g) Erläutern Sie, warum die Modellierung durch die Funktion  $g$  ab 15.00 Uhr bemängelt werden kann, indem Sie einen Bezug zur Funktion  $g$  herstellen.

Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der Funktion  $h$  und bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem dann kein Besucher mehr kam.

Die Controllingabteilung wünscht sich ein mathematisches Instrument, mit dem die tatsächliche Besucherzahl für einen Tag berechnet werden kann. Hierfür schlägt ein Mitarbeiter eine Funktion  $G$  vor, die die Anzahl der Besucher in 1000 Personen zum Zeitpunkt  $t$  beschreibt. Die Funktionsgleichung der vorgeschlagenen Funktion  $G$  lautet:

$$G(t) = \frac{945}{172}e^{-1,72t} - \frac{189}{19}e^{-0,95t} + \frac{14553}{3268} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R} \text{ und } 0 \leq t \leq 7,$$

wobei der Zeitpunkt  $t = 0$  dem Zeitpunkt der Parköffnung um 9.00 Uhr entspricht.

- h) Weisen Sie nach, dass die Funktion  $G$  die Anzahl der Besucher zum Zeitpunkt  $t$  beschreibt.

Im Zeitraum von 9.00 Uhr bis 14.00 Uhr erhält jeder 2000ste Besucher eine Freikarte.

- i) Ermitteln Sie, wie viele Freikarten an diesem Tag verschenkt wurden und bestimmen Sie die entsprechenden Zeitpunkte.

Die Funktionenschar  $g_a$  mit  $g_a(t) = a \cdot (e^{-1,72t} - e^{-0,95t})$  mit  $a, t \in \mathbb{R}, a \neq 0, 0 \leq t \leq 5$  stellt den Besucherstrom auch an anderen Tagen in der Zeit von 9.00 Uhr bis 14.00 Uhr dar. Die Funktionenschar  $G_a(t)$  gibt die Anzahl der Besucher in 1000 Personen zum Zeitpunkt  $t$  an.

- j) Beschreiben Sie, welchen Einfluss der Parameter  $a$  auf  $G_a(t)$  hat und untersuchen Sie, ob für die Werte des Parameters  $a$  weitere Einschränkungen gelten.

Bestimmen Sie den Parameter  $a$  so, dass eine Besucherzahl von 2000 nicht überschritten wird.

|                    |  |
|--------------------|--|
| Name des Prüflings |  |
|--------------------|--|

Punkteverteilung Aufgabe 3 (Alternative 2): Freibad

| Aufgabenteil   | a | b | c | d | e | f | g | gesamt |
|----------------|---|---|---|---|---|---|---|--------|
| Erreichbar     | 3 | 4 | 6 | 4 | 5 | 6 | 5 | 33     |
| Erstkorrektur  |   |   |   |   |   |   |   |        |
| Zweitkorrektur |   |   |   |   |   |   |   |        |

Das quaderförmige Schwimmbecken eines Freibades einer Gemeinde wird regelmäßig zu Beginn der Saison komplett befüllt und zum Ende der Saison vollständig entleert. Unter den technischen Aufzeichnungen des Freibades finden sich folgende Datenblätter:

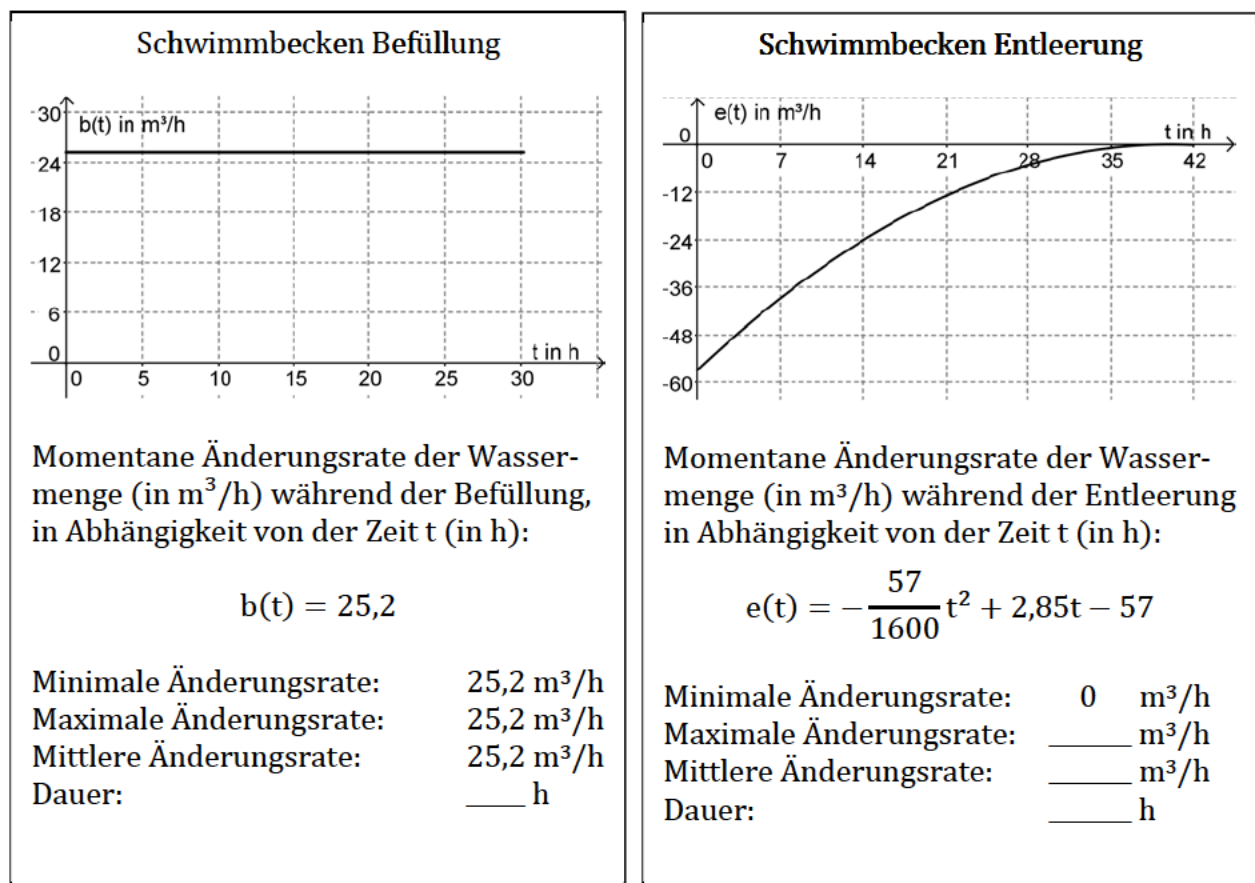


Abbildung 3.1

- a) Beschreiben Sie sowohl den Befüllungs- als auch den Entleerungsprozess des Schwimmbeckens im Sachkontext der gegebenen Datenblätter.

Die Gemeindevertretung möchte, dass die Datenblätter ergänzt werden und teilt der technischen Abteilung die Maße des Schwimmbeckens mit. Es ist 25 m lang und 16 m breit. Bei der Tiefe ist die Gemeinde sich nicht ganz sicher, sie vermutet eine Tiefe von 1,85 m. Sie würde aber noch einmal nachmessen lassen wollen. Ein Mitarbeiter der technischen Abteilung versichert der Gemeinde, dass ein Nachmessen nicht nötig sei.

- b) Erläutern Sie, dass die Tiefe nicht nachgemessen werden muss, sondern mit Hilfe des Datenblattes „Schwimmbad Entleerung“ berechnet werden kann.

Ermitteln Sie die vier fehlenden Angaben der Datenblätter und berechnen Sie die Tiefe des Beckens.

Bei dem Freibad handelt es sich um ein beheiztes Freibad, das mit einer Wassertemperatur von  $28^{\circ}\text{C}$  –  $30^{\circ}\text{C}$  wirbt.

Die Wassertemperatur wird mittels eines Zweipunktreglers reguliert. Dieser sorgt dafür, dass die Heizanlage das Wasser erwärmt, sobald dessen Temperatur unter einen bestimmten Wert fällt. Außerdem schaltet der Zweipunktregler die Heizanlage wieder ab, wenn eine bestimmte Temperatur überschritten wird. Da die Erwärmung des Wassers sowie die Abkühlung nicht schlagartig geschieht und die Wassermengen im Freibad durch eine ständige Umwälzung durch die Heizanlage geführt werden, dauert es jeweils eine gewisse Zeit, bis die Temperatur nach Einschalten der Heizung auch spürbar steigt und nach Ausschalten der Heizung auch wieder fällt.

Der Verlauf der Wassertemperatur  $W(t)$  (in  $^{\circ}\text{C}$ ) in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  (in h) lässt sich durch eine Sinusfunktion mit der allgemeinen Gleichung

$$W(t) = a \cdot \sin(b \cdot (t - c)) + d \text{ mit } a, b, c, d, t \in \mathbb{R}$$

beschreiben.

Für die vergangenen Stunden wurde die Temperatur kontrolliert. Folgende Messungen wurden dokumentiert:

*Zu Beginn der Messung betrug die Temperatur  $29,5^{\circ}\text{C}$ . Sie sank dann nach einer Stunde auf ein Minimum von  $27^{\circ}\text{C}$  und stieg in den nächsten zwei Stunden, bis sie ihr Maximum von  $32^{\circ}\text{C}$  erreicht hatte. In den nächsten zwei Stunden kühlte sich das Wasser wieder auf das Minimum von  $27^{\circ}\text{C}$  ab. Dieser Vorgang wiederholte sich fortlaufend.*

Abbildung 3.2

- c) Bestimmen Sie die Parameter  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  anhand des Kurvenverlaufs der Funktion  $W(t)$  und geben Sie die Funktionsgleichung an.

Zeichnen Sie den Graphen von  $W(t)$  für  $t \geq 0$  in das nachfolgende Koordinatensystem (Abb. 3.3) ein.

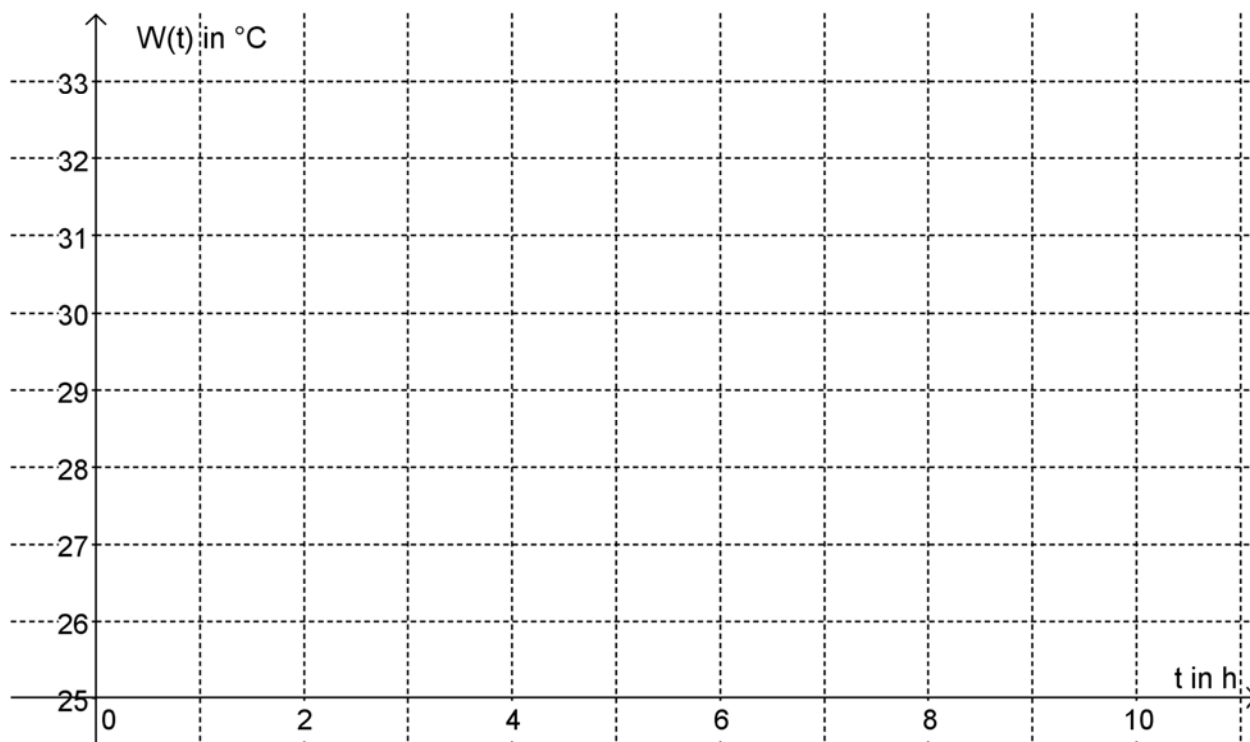


Abbildung 3.3

Die Besucher kritisieren, dass die zugesicherte Temperatur von  $28^\circ\text{C} - 30^\circ\text{C}$  nicht eingehalten wird. Ein Techniker sichert zu, den Regler des Heizsystems neu einzustellen. Der neue Verlauf der Wassertemperatur lässt sich danach mit der Funktionsgleichung

$$N(t) = 1,5 \cdot \sin\left(\frac{5}{6}\pi \cdot (t - 1,2)\right) + 29,5 \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

beschreiben.

Trotz der besseren Einstellung des Reglers gibt es immer noch Beschwerden. Einige Besucher haben das Gefühl, dass die Zeitspanne, in der sich das abgekühlte Wasser von  $28^\circ\text{C}$  wieder bis auf  $30^\circ\text{C}$  aufheizt, mehr als 30 Minuten beträgt.

- d) Beurteilen Sie die Beschwerde der Besucher.

Der Bauausschuss der Gemeindevertretung plant für das nächste Jahr eine Rutsche am Spielbecken zu installieren. Eine klassische Wasserrutsche lässt sich in drei Bereiche einteilen: dem Startabschnitt, dem Rutschabschnitt mit konstantem Gefälle und der Auslaufzone.

Ein Ingenieurbüro hat zur Veranschaulichung der Konstruktionsmöglichkeiten für die beiden ersten Abschnitte eine Modellierung mittels der folgenden Funktion erstellt (mit  $f(x)$  und  $x$  in Metern):

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \cos(x) + b - a & \text{mit } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -a \cdot x + b + \frac{\pi-2}{2} \cdot a & \text{mit } \frac{\pi}{2} \leq x \leq c \end{cases} \quad \text{mit } a, b, c, x \in \mathbb{R}$$

Das Ingenieurbüro verspricht, dass dieses Modell einen knickfreien Übergang zwischen den ersten beiden Abschnitten gewährleistet. Das ist wichtig, damit kein Absatz bzw. Knick entsteht, bei dem sich die Gäste beim Rutschen verletzen könnten.

e) Weisen Sie nach, dass vom Übergang der ersten beiden Abschnitte keine Verletzungsgefahr ausgeht.

Letztlich hat sich der Ausschuss hinsichtlich der ersten beiden Abschnitte unter Berücksichtigung der baulichen Möglichkeiten und der Sicherheitsauflagen für die dargestellte Rutsche (Abb. 3.4) mit der zugehörigen Funktionsgleichung

$$r(x) = \begin{cases} 2 \cdot \cos(x) + 3 & \text{mit } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -2x + 3 + \pi & \text{mit } \frac{\pi}{2} \leq x \leq 2,6 \end{cases} \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

entschieden.

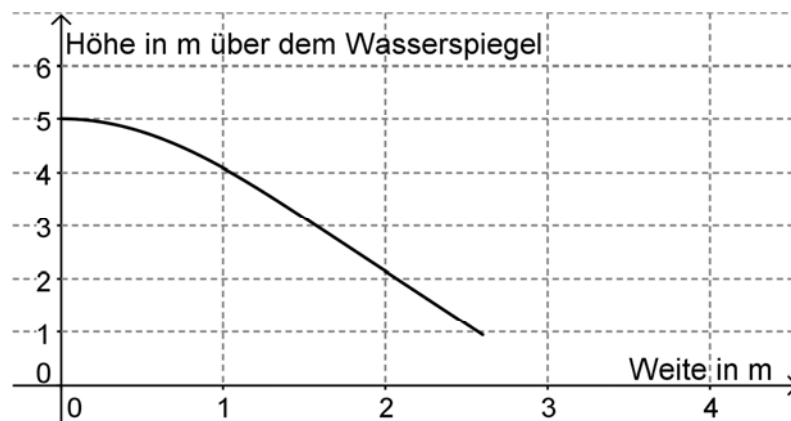


Abbildung 3.4

Für die Auslaufzone bittet der Ausschuss folgende Auflagen zu berücksichtigen:

- das Gefälle im Übergang vom Rutschabschnitt zur Auslaufzone muss 200% betragen;
- das Ende der Auslaufzone liegt bei einer Weite von 3 m und 0,05 m über dem Wasserspiegel (siehe Abb. 3.4);
- der Neigungswinkel am Ende der Auslaufzone beträgt  $15^\circ$  zum horizontalen Wasserspiegel.

Das Planungsbüro ist der Meinung, den Verlauf der Auslaufzone unter Einbeziehung aller vorgegebenen Auflagen durch eine ganzrationale Funktion  $h$  modellieren zu können.

- f) Ermitteln Sie die Bedingungen zur Bestimmung der Funktion  $h$  unter Einbeziehung aller vorgegebenen Auflagen.

Stellen Sie das zugehörige Gleichungssystem auf.

Erläutern Sie, welchen Grad diese Funktion unter Einbeziehung aller vorgegebenen Auflagen maximal haben kann.

Zur Stabilisierung und um Kinder daran zu hindern unter der Rutsche hindurch zu laufen, soll eine rechteckige Metallplatte (siehe Abbildung 3.5) angebracht werden. Die Fläche dieser Platte soll größtmöglich sein, damit diese als Werbefläche verpachtet werden kann. Dazu sollen zwei Alternativen untersucht werden (Abb. 3.5).

Alternative 1: Die rechte obere Ecke der Metallplatte wird im ersten Abschnitt befestigt.

Alternative 2: Die rechte obere Ecke der Metallplatte wird im zweiten Abschnitt befestigt.

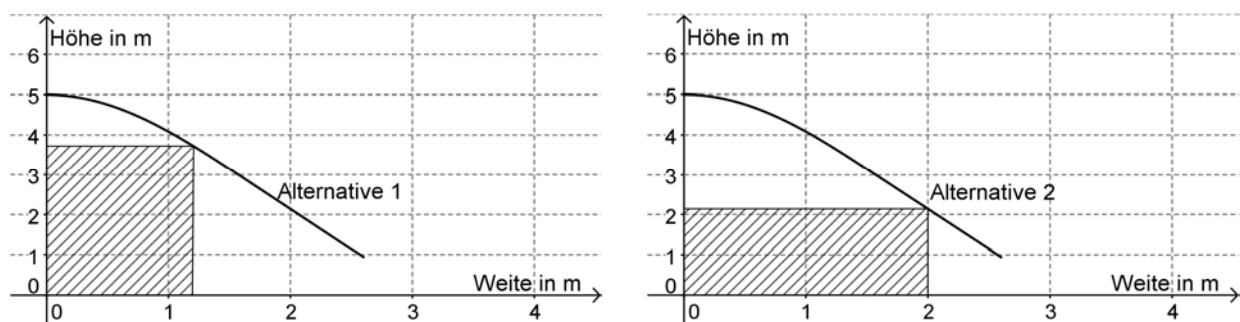
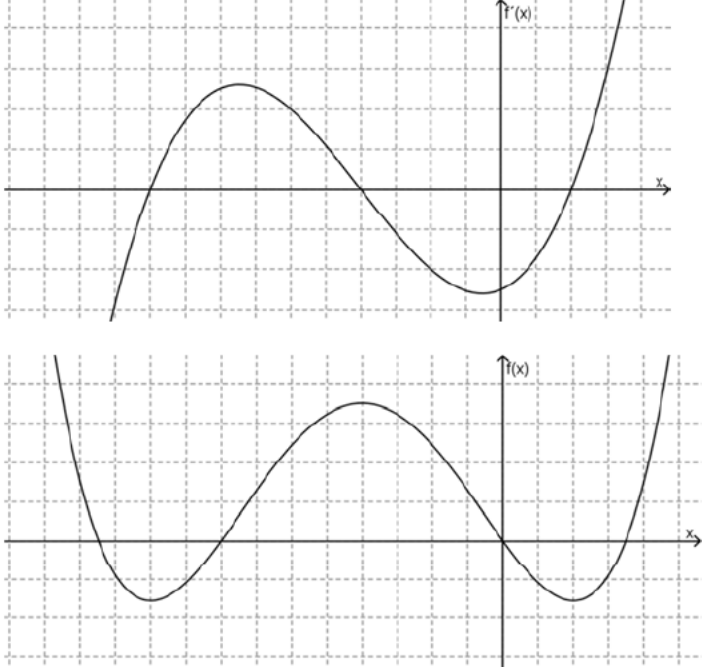


Abbildung 3.5

- g) Berechnen Sie die Plattenabmessungen beider Alternativen für  $r(x)$  und entscheiden Sie, welche Alternative gewählt werden sollte.

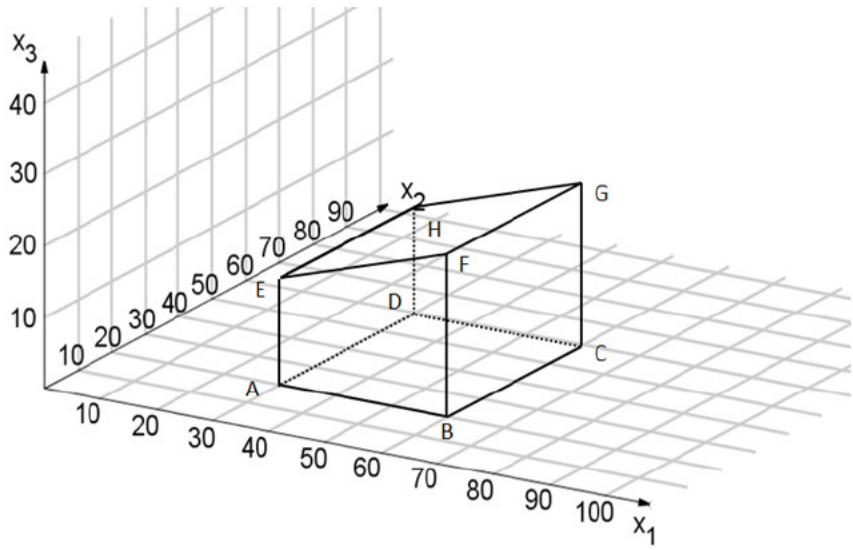
Aufgabe 1 mit Analytischer Geometrie:

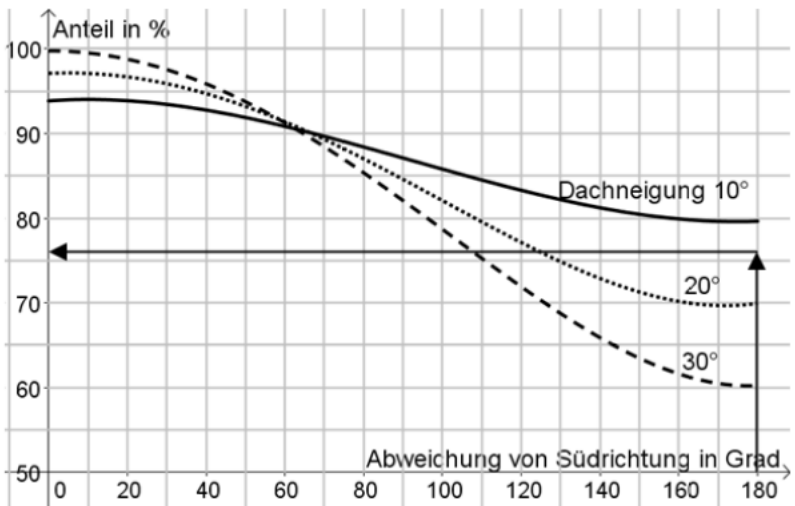
|                                                                    | Anforderungen                                                                                                                                                                                                                          | Modelllösungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |         |                             |                                                                 |                                                                                                       |                                                                    |                                                                                                                                                                |                                                      |                                                                                                                                                                                                                                        |   |
|--------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|-----------------------------|-----------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| A1                                                                 | Der Prüfling                                                                                                                                                                                                                           | Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:<br>Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | BE      |                             |                                                                 |                                                                                                       |                                                                    |                                                                                                                                                                |                                                      |                                                                                                                                                                                                                                        |   |
| 1a                                                                 | entscheidet, welche Aussage wahr oder falsch ist und begründet seine Entscheidung.                                                                                                                                                     | <table><thead><tr><th>Aussage</th><th>Entscheidung und Begründung</th></tr></thead><tbody><tr><td>Alle Funktionsgraphen der Funktionschar sind achsensymmetrisch.</td><td>Wahr. Da die Funktion nur gerade Exponenten der Potenzen von x besitzt oder weil <math>f(x) = f(-x)</math> gilt.</td></tr><tr><td>Alle Funktionsgraphen der Funktionschar besitzen zwei Wendepunkte.</td><td>Falsch.<br/>Die zweite Ableitung <math>f''(x) = 12a \cdot x^2 - 4</math> besitzt für <math>a &lt; 0</math> keine Nullstellen. Somit haben nicht alle Graphen der Schar zwei Wendepunkte.</td></tr><tr><td>Für <math>a &gt; 0</math> kann die Funktion drei Extrema besitzen.</td><td>Wahr. Denn <math>f'(x) = 4a \cdot x^3 - 4x</math> besitzt drei Nullstellen (unter der Voraussetzung, dass <math>a &gt; 0</math>).<br/><math>x_{01} = 0; x_{02} = +\sqrt{\frac{1}{a}}; x_{03} = -\sqrt{\frac{1}{a}}</math><br/><math>f''(x)</math> ist an diesen Stellen ungleich Null.</td></tr></tbody></table>                             | Aussage | Entscheidung und Begründung | Alle Funktionsgraphen der Funktionschar sind achsensymmetrisch. | Wahr. Da die Funktion nur gerade Exponenten der Potenzen von x besitzt oder weil $f(x) = f(-x)$ gilt. | Alle Funktionsgraphen der Funktionschar besitzen zwei Wendepunkte. | Falsch.<br>Die zweite Ableitung $f''(x) = 12a \cdot x^2 - 4$ besitzt für $a < 0$ keine Nullstellen. Somit haben nicht alle Graphen der Schar zwei Wendepunkte. | Für $a > 0$ kann die Funktion drei Extrema besitzen. | Wahr. Denn $f'(x) = 4a \cdot x^3 - 4x$ besitzt drei Nullstellen (unter der Voraussetzung, dass $a > 0$ ).<br>$x_{01} = 0; x_{02} = +\sqrt{\frac{1}{a}}; x_{03} = -\sqrt{\frac{1}{a}}$<br>$f''(x)$ ist an diesen Stellen ungleich Null. | 6 |
| Aussage                                                            | Entscheidung und Begründung                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |         |                             |                                                                 |                                                                                                       |                                                                    |                                                                                                                                                                |                                                      |                                                                                                                                                                                                                                        |   |
| Alle Funktionsgraphen der Funktionschar sind achsensymmetrisch.    | Wahr. Da die Funktion nur gerade Exponenten der Potenzen von x besitzt oder weil $f(x) = f(-x)$ gilt.                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |         |                             |                                                                 |                                                                                                       |                                                                    |                                                                                                                                                                |                                                      |                                                                                                                                                                                                                                        |   |
| Alle Funktionsgraphen der Funktionschar besitzen zwei Wendepunkte. | Falsch.<br>Die zweite Ableitung $f''(x) = 12a \cdot x^2 - 4$ besitzt für $a < 0$ keine Nullstellen. Somit haben nicht alle Graphen der Schar zwei Wendepunkte.                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |         |                             |                                                                 |                                                                                                       |                                                                    |                                                                                                                                                                |                                                      |                                                                                                                                                                                                                                        |   |
| Für $a > 0$ kann die Funktion drei Extrema besitzen.               | Wahr. Denn $f'(x) = 4a \cdot x^3 - 4x$ besitzt drei Nullstellen (unter der Voraussetzung, dass $a > 0$ ).<br>$x_{01} = 0; x_{02} = +\sqrt{\frac{1}{a}}; x_{03} = -\sqrt{\frac{1}{a}}$<br>$f''(x)$ ist an diesen Stellen ungleich Null. |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |         |                             |                                                                 |                                                                                                       |                                                                    |                                                                                                                                                                |                                                      |                                                                                                                                                                                                                                        |   |
| 1b                                                                 | weist nach, dass alle Flächeninhalte für $t > 0$ gleich groß sind.                                                                                                                                                                     | Als Integrationsgrenzen müssen zunächst die Nullstellen ermittelt werden.<br>$\frac{3}{4t^3}x_N^2 - \frac{2}{3t^2}x_N = 0 \Rightarrow x_{N1} = 0 \text{ und } x_{N2} = \frac{8}{9}t$<br>Bestimmung der Stammfunktion F: $F(x) = \frac{1}{4t^3}x^3 - \frac{1}{3t^2}x^2$ .<br>Berechnung des Flächeninhalts:<br>$A = \left  \int_0^{\frac{8}{9}t} f(x) dx \right  = \left  F\left(\frac{8}{9}t\right) - F(0) \right  = \left  -\frac{64}{729} \right  [\text{FE}].$ $\text{solve}\left(\frac{3}{4t^3}x^2 - \frac{2}{3t^2}x = 0\right)$ $\left\{ x=0, x=\frac{8 \cdot t}{9} \right\}$ $\int \left( \frac{3}{4t^3}x^2 - \frac{2}{3t^2}x \right)$ $\frac{3 \cdot x^3 - 4 \cdot t \cdot x^2}{12 \cdot t^3}$ $\frac{8}{9}t$ $\int_0^{\frac{8}{9}t} \left( \frac{3}{4t^3}x^2 - \frac{2}{3t^2}x \right) dx$ $-\frac{64}{729}$<br>Da der Parameter t im Ergebnis nicht enthalten ist, ist der Flächeninhalt unabhängig vom Parameter t und für alle Parabeln der Schar gleich. Der Flächeninhalt beträgt also $\frac{64}{729}$ FE. | 4       |                             |                                                                 |                                                                                                       |                                                                    |                                                                                                                                                                |                                                      |                                                                                                                                                                                                                                        |   |

|    | Anforderungen                                                                                                                    | Modelllösungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |   |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| 1c | gibt eine sin- und eine cos-Funktionsgleichung an.                                                                               | Mögliche Lösungen:<br>$y(x) = 2 \cdot \sin(x - \pi) + 3$ und $y(x) = 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 3$ ,<br>sowie sämtliche Varianten unter Berücksichtigung der Rechts-/Linksverschiebung.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 4 |
| 1d | skizziert den Verlauf des Graphen der Funktion f.                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 3 |
| 1e | gibt die Koordinaten der Punkte A und H an,<br><br>ermittelt das Volumen und<br><br>bestimmt eine Ebenengleichung in Normalform. | $A(5 2 0)$<br>$H(0 2 4)$<br><br>Das Volumen beträgt $V = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 60 \text{ [LE}^3\text{]}$ .<br><br>Ein Normalenvektor auf der Ebene E ist der Vektor<br>$\vec{n} = \overrightarrow{ED} \times \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$ .<br>Damit lautet eine Ebenengleichung in Normalenform:<br>$E: \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} = 0$ .                                                       | 5 |
| 1f | bestimmt den Wert des Parameters z und                                                                                           | $\mathbf{a} := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} := \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{m} := \begin{bmatrix} 2 \\ 3.5 \\ 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 3.5 \\ z \end{bmatrix}$<br>$\text{solve}(\mathbf{m} = \mathbf{a} + k \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}), k, z) \rightarrow k = \frac{1}{4} \text{ and } z = 4.5$<br>Da $k \leq 1$ ist, liegt der Punkt M für $z = 4.5$ auf der Strecke $\overline{AB}$ .<br><i>Fortsetzung nächste Seite</i> | 3 |

|       | Anforderungen                                                                                                                                                                                              | Modelllösungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |    |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| zu 1f | ermittelt den Punkt, der die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis 1:3 teilt.                                                                                                                              | Anhand der CAS-Lösung $k = \frac{1}{4}$ kann man ebenfalls erkennen, dass der Punkt M die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis 1:3 teilt.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |    |
| 1g    | beschreibt die Lage der Punkte,<br><br>gibt ein mathematisches Modell an und<br><br>bestimmt die Werte des Parameters k.                                                                                   | Die Punkte liegen auf einer Geraden, die parallel zur $x_2$ -Achse verläuft.<br><br>Z.B. $g: \vec{x} = \overrightarrow{OC_0} + r \cdot \overrightarrow{C_0C_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$<br><br>$ \overrightarrow{AC_k}  = \left  \begin{pmatrix} 4 \\ k \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right  = \left  \begin{pmatrix} 3 \\ k-2 \\ -3 \end{pmatrix} \right  = \sqrt{18 + (k-2)^2} = 10$<br><br>$\text{solve}(\sqrt{18+(k-2)^2}=10, k) \rightarrow k=-7.05539 \text{ or } k=11.0554$<br>Die gesuchten Werte sind also $k_1 = -7,05539$ und $k_2 = 11,0554$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 4  |
| 1h    | erläutert, warum der Wert $a=0$ nicht sinnvoll ist,<br><br>erläutert, zu welcher Koordinatenebene alle Geraden der Geradenschar $g_a$ parallel verlaufen und<br><br>untersucht die Lagen von E und $g_a$ . | Für $a = 0$ ist der Richtungsvektor der Geraden der Nullvektor, so dass keine Gerade beschrieben wird.<br><br>Da die $x_2$ -Koordinate der Richtungsvektoren aller Geraden der Geradenschar $g_a$ den Wert Null hat, verlaufen alle Geraden der Geradenschar $g_a$ parallel zur $x_1$ - $x_3$ -Ebene.<br><br>Einsetzen der Geradengleichung in die Ebenengleichung liefert zunächst folgende Gleichung:<br>$r \cdot a^2 - 2a + 3(-1 + a \cdot r) = 3$ .<br>Auflösen der Gleichung mit dem CAS nach a ergibt:<br>$\text{solve}(r \cdot a^2 - 2 \cdot a + 3 \cdot (-1 + a \cdot r) = 3, a) \rightarrow a = \frac{2}{r} \text{ or } a = -3$<br><br>Für $a \neq -3$ hat die Gleichung die Lösung $r = \frac{2}{a}$ , so dass die Gerade die Ebene E in einem Punkt schneidet.<br>Untersucht man die Gleichung für den Wert $a = -3$ , so erhält man:<br>$\text{solve}(r \cdot (-3)^2 - 2 \cdot (-3) + 3 \cdot (-1 + (-3) \cdot r) = 3, r) \rightarrow \text{true}$<br><br>Dies bedeutet, dass es in diesem Fall unendlich viele Lösungen gibt, bzw. dass $g_{-3}$ in der Ebene E liegt. | 5  |
|       |                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 34 |

## Aufgabe 2: Fabrikhalle

|    | Anforderungen                                       | Modelllösungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |    |
|----|-----------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| A2 | Der Prüfling                                        | Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:<br>Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | BE |
| 2a | zeichnet das Schrägbild.                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 5  |
| 2b | zeigt, dass die Gleichung die Dachebene beschreibt. | <p>Ein Normalenvektor der Ebene kann z.B. mithilfe des Vektorproduktes berechnet werden.</p> $\vec{n} = \frac{1}{40} \cdot [\vec{EF} \times \vec{EH}] = \frac{1}{40} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{40} \cdot \begin{pmatrix} -280 \\ 0 \\ 1200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}$ <p>Mit Hilfe des Ortsvektors des Punktes E kann man eine Ebenengleichung in Normalform aufstellen.</p> $E_D: \left[ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} = 0$ <p>Durch Umformung ergibt sich daraus die Ebenengleichung in Koordinatenform:</p> $E_D: -7(x_1 - 30) + 30(x_3 - 15) = 0 \text{ bzw. } E_D: -7x_1 + 30x_3 = 240.$ | 3  |
| 2c | ermittelt den in etwa zu erwartenden Anteil.        | <p>Benötigt wird zunächst der Winkel <math>\alpha</math> zwischen der <math>x_1</math>-<math>x_2</math>-Ebene und der Dachebene <math>E_D</math>:</p> $\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}}{\left  \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right  \cdot \left  \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} \right } \approx \frac{30}{1 \cdot 30,8} \approx 0,9740 \Rightarrow \alpha \approx 13,09^\circ.$ <p style="text-align: right;"><i>Fortsetzung nächste Seite</i></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 4  |

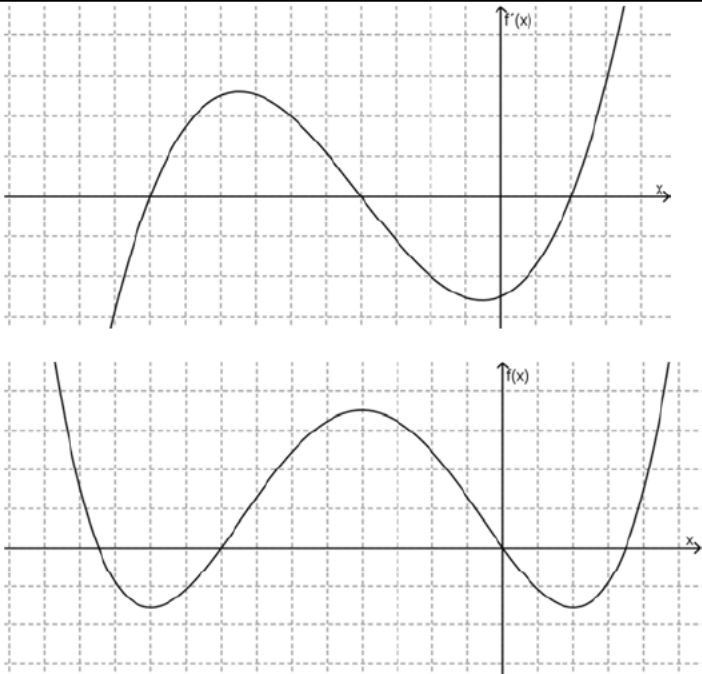
|       | Anforderungen                                 | Modelllösungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |   |
|-------|-----------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| zu 2c |                                               | <p>Da die <math>x_1</math>-Achse in südliche Richtung zeigt, zeigt die Dachfläche genau in nördliche Richtung. Dies entspricht einer Abweichung von der Südrichtung von <math>180^\circ</math>. Damit kann man den zu erwartenden Anteil näherungsweise graphisch bestimmen.</p>  <p>Es ergibt sich ein Anteil von ca. 76%.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |   |
| 2d    | berechnet die Koordinaten der Punkte M und Z. | $ \overrightarrow{EF}  = \left  \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \right  \approx 30,8 \Rightarrow \overrightarrow{OZ} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} + \frac{10}{30,8} \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 39,74 \\ 20 \\ 17,27 \end{pmatrix}$ <p>Die Koordinaten von Punkt Z lauten <math>Z(39,74 20 17,27)</math>.</p> $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 40 \\ 18,5 \end{pmatrix}$ <p>Die Koordinaten von Punkt M lauten <math>M(45 40 18,5)</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                    | 2 |
| 2e    | untersucht, ob der Bau möglich ist.           | <p>Die Gerade <math>g_F</math> beschreibt den Verlauf des Förderbandes durch den Punkt P und die Pfeilerspitze, die zugehörige Geradengleichung lautet:</p> $g_F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \left[ \begin{pmatrix} 93 \\ 66,5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -3,5 \\ 6 \end{pmatrix}.$ <p>Ebene der Seitenwand BCGF z.B. in Koordinatenform<br/> <math>E_{BCGF}: x_1 = 60</math>.</p> <p>Als Schnittpunkt der Geraden <math>g_F</math> mit der Ebene <math>E_{BCGF}</math> ergibt sich mit <math>r = \frac{40}{7}</math> der Punkt <math>N(60 50 \frac{240}{7})</math>.</p> <p>Da die Halle nur 22 m hoch ist, die <math>x_3</math>-Koordinate des Punktes N aber <math>\frac{240}{7} \text{ m} \approx 34,29 \text{ m}</math> beträgt, liegt der Schnittpunkt nicht innerhalb der Seitenfläche, sondern darüber. Dieser Förderbandverlauf ist demnach nicht möglich.</p> | 5 |

|    | Anforderungen                             | Modelllösungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |   |
|----|-------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| 2f | bestimmt die maximale Höhe des Punktes Q. | <p><math>z \in \mathbb{R}</math> ist die variable <math>x_3</math>-Koordinate des Punktes Q:</p> $\mathbf{qv}(z) := \begin{bmatrix} 60 \\ 50 \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \text{Fertig}$ <p>Mit Hilfe der Hesse'schen Normalform der Dachebene bestimmt man dann die maximale Höhe:</p> $\mathbf{e} := \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \\ 15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \\ 15 \end{bmatrix} \quad \mathbf{ndach} := \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix}$ $\text{solve}\left(\frac{\text{dotP}(\mathbf{e} - \mathbf{qv}(z), \mathbf{ndach})}{\text{norm}(\mathbf{ndach})} = 1.5, z\right) \rightarrow z = 20.4597$ <p>Der Punkt Q kann demnach eine maximale Höhe von ca. 20,46 m haben.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 3 |
| 2g | bestimmt die Verschiebung von Punkt T.    | <p>Die Gerade <math>\mathbf{gpq}</math> beschreibt den Verlauf des Förderbandes durch die Punkte P und Q, die zugehörige Geradengleichung lautet:</p> $\mathbf{q} := \begin{bmatrix} 60 \\ 50 \\ 20 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 60 \\ 50 \\ 20 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p} := \begin{bmatrix} 100 \\ 70 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 100 \\ 70 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{gpq}(r) := \mathbf{p} + r \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{p}) \rightarrow \text{Fertig}$ $\mathbf{gpq}(r) \rightarrow \begin{bmatrix} 100 - 40 \cdot r \\ 70 - 20 \cdot r \\ 20 \cdot r \end{bmatrix}$ <p>Die Gerade <math>\mathbf{gt}</math> beschreibt den Verlauf des senkrechten Pfeilers im Punkt T, dessen östliche Verschiebung durch den Parameter <math>k \in \mathbb{R}</math> in der <math>x_2</math>-Koordinate modelliert wird.</p> $\mathbf{t} := \begin{bmatrix} 68 \\ 53 + k \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 68 \\ k + 53 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{gt}(m) := \mathbf{t} + m \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Fertig}$ $\mathbf{gt}(m) \rightarrow \begin{bmatrix} 68 \\ k + 53 \\ m \end{bmatrix}$ <p>Die Schnittpunktuntersuchung der beiden Geraden ergibt:</p> $\text{solve}(\mathbf{gt}(m) = \mathbf{gpq}(r), m, r) \rightarrow m = 16 \text{ and } r = \frac{4}{5} \text{ and } k = 1$ <p>Dies bedeutet, dass ein Schnittpunkt existiert, wenn der Parameter k den Wert <math>k = 1</math> hat. Damit muss der Punkt T um 1 Meter in östliche Richtung verlegt werden.</p> | 5 |

|    | Anforderungen                                                                                                        | Modelllösungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |    |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2h | <p>zeigt, dass das Entladen länger als 10 Stunden dauern würde und</p> <p>bestimmt den maximalen Neigungswinkel.</p> | <p>Bezeichnet man mit <math>Q_0(60 50 0)</math> den Punkt am Boden lotrecht unter Punkt <math>Q(60 50 20)</math>, so ist zunächst der Winkel zwischen den Vektoren <math>\overrightarrow{PQ}</math> und <math>\overrightarrow{PQ_0}</math> gesucht.</p> <p>Mit <math>\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -40 \\ -20 \\ 20 \end{pmatrix}</math> und <math>\overrightarrow{PQ_0} = \begin{pmatrix} -40 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix}</math> folgt für den Neigungswinkel:</p> $\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} -40 \\ -20 \\ 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -40 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left  \begin{pmatrix} -40 \\ -20 \\ 20 \end{pmatrix} \right  \cdot \left  \begin{pmatrix} -40 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} \right } \approx \frac{2000}{48,99 \cdot 44,72} \approx 0,9129 \Rightarrow \alpha \approx 24,09^\circ.$ <p>Es ergibt sich ein Faktor von <math>c(24,09) \approx 0,72</math>.</p> <p>Die Förderleistung beträgt demnach <math>0,72 \cdot 800 \frac{t}{h} = 576 \frac{t}{h}</math>.</p> <p><math>6000/576 \approx 10,42</math></p> <p>Es dauert demnach 10,42 Stunden (ca. 10 h 25 min) das Schiff zu entladen. Das Entladen dauert länger als 10 Stunden.</p> <p>Um auf eine Entladezeit von 10 Stunden zu erreichen, müsste eine Leistung von 600t/h erzielt werden, d.h. für den Faktor <math>c</math> muss gelten: <math>c = 600/800 = 0,75</math>.</p> <p>Den dazugehörigen Winkel berechnet man mit Hilfe des CAS:</p> <pre>fak(x):=-1.E-6·x<sup>4</sup>+3.2E-5·x<sup>3</sup>-6.16E-4·x<sup>2</sup>-0.001216·x+1 ▶ Fertig solve(fak(x)=0.75,x) ▶ x=-14.4253 or x=23.2043</pre> <p>Das Förderband darf also maximal einen Neigungswinkel von <math>\alpha \approx 23,20^\circ</math> haben.</p> | 6  |
|    |                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 33 |

Aufgabe 1 mit Linearer Algebra:

|                                                                    | Anforderungen                                                                                                                                                                                                                                 | Modelllösungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |         |                             |                                                                 |                                                                                                       |                                                                    |                                                                                                                                                                |                                                      |                                                                                                                                                                                                                                               |   |
|--------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|-----------------------------|-----------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| A1                                                                 | Der Prüfling                                                                                                                                                                                                                                  | Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:<br>Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | BE      |                             |                                                                 |                                                                                                       |                                                                    |                                                                                                                                                                |                                                      |                                                                                                                                                                                                                                               |   |
| 1a                                                                 | entscheidet, welche Aussage wahr oder falsch ist und begründet seine Entscheidung.                                                                                                                                                            | <table><thead><tr><th>Aussage</th><th>Entscheidung und Begründung</th></tr></thead><tbody><tr><td>Alle Funktionsgraphen der Funktionschar sind achsensymmetrisch.</td><td>Wahr. Da die Funktion nur gerade Exponenten der Potenzen von x besitzt oder weil <math>f(x) = f(-x)</math> gilt.</td></tr><tr><td>Alle Funktionsgraphen der Funktionschar besitzen zwei Wendepunkte.</td><td>Falsch.<br/>Die zweite Ableitung <math>f''(x) = 12a \cdot x^2 - 4</math> besitzt für <math>a &lt; 0</math> keine Nullstellen. Somit haben nicht alle Graphen der Schar zwei Wendepunkte.</td></tr><tr><td>Für <math>a &gt; 0</math> kann die Funktion drei Extrema besitzen.</td><td>Wahr. Denn <math>f'(x) = 4a \cdot x^3 - 4x</math> besitzt, drei Nullstellen: (unter der Voraussetzung, dass <math>a &gt; 0</math>).<br/><math>x_{01} = 0; x_{02} = +\sqrt{\frac{1}{a}}; x_{03} = -\sqrt{\frac{1}{a}},</math><br/><br/><math>f''(x)</math> ist an diesen Stellen ungleich Null.</td></tr></tbody></table>                                    | Aussage | Entscheidung und Begründung | Alle Funktionsgraphen der Funktionschar sind achsensymmetrisch. | Wahr. Da die Funktion nur gerade Exponenten der Potenzen von x besitzt oder weil $f(x) = f(-x)$ gilt. | Alle Funktionsgraphen der Funktionschar besitzen zwei Wendepunkte. | Falsch.<br>Die zweite Ableitung $f''(x) = 12a \cdot x^2 - 4$ besitzt für $a < 0$ keine Nullstellen. Somit haben nicht alle Graphen der Schar zwei Wendepunkte. | Für $a > 0$ kann die Funktion drei Extrema besitzen. | Wahr. Denn $f'(x) = 4a \cdot x^3 - 4x$ besitzt, drei Nullstellen: (unter der Voraussetzung, dass $a > 0$ ).<br>$x_{01} = 0; x_{02} = +\sqrt{\frac{1}{a}}; x_{03} = -\sqrt{\frac{1}{a}},$<br><br>$f''(x)$ ist an diesen Stellen ungleich Null. | 6 |
| Aussage                                                            | Entscheidung und Begründung                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |         |                             |                                                                 |                                                                                                       |                                                                    |                                                                                                                                                                |                                                      |                                                                                                                                                                                                                                               |   |
| Alle Funktionsgraphen der Funktionschar sind achsensymmetrisch.    | Wahr. Da die Funktion nur gerade Exponenten der Potenzen von x besitzt oder weil $f(x) = f(-x)$ gilt.                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |         |                             |                                                                 |                                                                                                       |                                                                    |                                                                                                                                                                |                                                      |                                                                                                                                                                                                                                               |   |
| Alle Funktionsgraphen der Funktionschar besitzen zwei Wendepunkte. | Falsch.<br>Die zweite Ableitung $f''(x) = 12a \cdot x^2 - 4$ besitzt für $a < 0$ keine Nullstellen. Somit haben nicht alle Graphen der Schar zwei Wendepunkte.                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |         |                             |                                                                 |                                                                                                       |                                                                    |                                                                                                                                                                |                                                      |                                                                                                                                                                                                                                               |   |
| Für $a > 0$ kann die Funktion drei Extrema besitzen.               | Wahr. Denn $f'(x) = 4a \cdot x^3 - 4x$ besitzt, drei Nullstellen: (unter der Voraussetzung, dass $a > 0$ ).<br>$x_{01} = 0; x_{02} = +\sqrt{\frac{1}{a}}; x_{03} = -\sqrt{\frac{1}{a}},$<br><br>$f''(x)$ ist an diesen Stellen ungleich Null. |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |         |                             |                                                                 |                                                                                                       |                                                                    |                                                                                                                                                                |                                                      |                                                                                                                                                                                                                                               |   |
| 1b                                                                 | weist nach, dass alle Flächeninhalte für $t > 0$ gleich groß sind.                                                                                                                                                                            | Als Integrationsgrenzen müssen zunächst die Nullstellen ermittelt werden.<br>$\frac{3}{4t^3}x_N^2 - \frac{2}{3t^2}x_N = 0 \Rightarrow x_{N1} = 0 \text{ und } x_{N2} = \frac{8}{9}t$<br>Bestimmung der Stammfunktion F: $F(x) = \frac{1}{4t^3}x^3 - \frac{1}{3t^2}x^2$ .<br>Berechnung des Flächeninhalts:<br>$A = \left  \int_0^{\frac{8}{9}t} f(x) dx \right  = \left  F\left(\frac{8}{9}t\right) - F(0) \right  = \left  -\frac{64}{729} \right  [\text{FE}].$<br>$\text{solve}\left(\frac{3}{4t^3}x^2 - \frac{2}{3t^2}x = 0\right)$<br>$\left\{ x=0, x=\frac{8 \cdot t}{9} \right\}$<br>$f\left(\frac{3}{4t^3}x^2 - \frac{2}{3t^2}x\right)$<br>$\frac{3 \cdot x^3 - 4 \cdot t \cdot x^2}{12 \cdot t^3}$<br>$\frac{8}{9}t$<br>$\int_0^{\frac{8}{9}t} \left( \frac{3}{4t^3}x^2 - \frac{2}{3t^2}x \right) dx$<br>$-\frac{64}{729}$<br>Da der Parameter t im Ergebnis nicht enthalten ist, ist der Flächeninhalt unabhängig vom Parameter t und für alle Parabeln der Schar gleich. Der Flächeninhalt beträgt also $\frac{64}{729}$ FE. | 4       |                             |                                                                 |                                                                                                       |                                                                    |                                                                                                                                                                |                                                      |                                                                                                                                                                                                                                               |   |

|    | Anforderungen                                                                       | Modelllösungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |   |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| 1c | gibt eine sin- und eine cos-Funktionsgleichung an.                                  | Mögliche Lösungen:<br>$y(x) = 2 \cdot \sin(x - \pi) + 3$ und $y(x) = 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 3$ ,<br>sowie sämtliche Varianten unter Berücksichtigung der Rechts-/Linksverschiebung.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 4 |
| 1d | skizziert den Verlauf des Graphen der Funktion f.                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 3 |
| 1e | bestimmt den Parameter t so, dass die Matrix M nicht invertierbar ist.              | Ermittlung der Matrix $M^{-1}$ :<br>$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{m} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ $m^{-1} \begin{bmatrix} \frac{5}{3 \cdot t + 5} & \frac{1}{3} - \frac{5}{3 \cdot (3 \cdot t + 5)} & \frac{5}{3 \cdot (3 \cdot t + 5)} - \frac{1}{3} \\ -\frac{15}{3 \cdot t + 5} & \frac{5}{3 \cdot t + 5} & 1 - \frac{5}{3 \cdot t + 5} \\ \frac{3}{3 \cdot t + 5} & -\frac{1}{3 \cdot t + 5} & \frac{1}{3 \cdot t + 5} \end{bmatrix}$ <p>Da <math>3t + 5 \neq 0</math> gelten muss, ist die Matrix M nicht invertierbar, wenn <math>t = -\frac{5}{3}</math> ist.</p> | 3 |
| 1f | zeigt, dass ein zyklischer Prozess beschrieben wird und gibt die Zykluslänge an und | $Q = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \\ 0,4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ <p style="text-align: right;"><i>Fortsetzung nächste Seite</i></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 5 |

|       | Anforderungen                                  | Modelllösungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |   |
|-------|------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| zu 1f | ermittelt die Matrix X.                        | <p>Bilden verschiedener Potenzen der Matrix Q:</p> $\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \\ 0.4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{q} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \\ 0.4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $q^2 \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2.5 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ $q^3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $q^4 \quad \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \\ 0.4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ <p>Da die Matrix <math>Q^3</math> die Einheitsmatrix ergibt, handelt es sich um einen zyklischen Prozess.<br/> Nach drei Zyklen reproduziert sich somit der Anfangsbestand. Die Zykluslänge entspricht folglich drei Übergängen.</p> <p>Aus der Matrixgleichung: <math>Q^2 \cdot X = \begin{pmatrix} 375 \\ 20 \\ 400 \end{pmatrix}</math> folgt: <math>X = Q^{-2} \cdot \begin{pmatrix} 375 \\ 20 \\ 400 \end{pmatrix}</math></p> $q^{-2} \cdot \begin{bmatrix} 375. \\ 20. \\ 400. \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 100. \\ 200. \\ 150. \end{bmatrix}$ <p>Die gesuchte Matrix X ist <math>X = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix}</math>.</p> |   |
| 1g    | berechnet die fehlenden Elemente der Matrizen. | $\begin{bmatrix} a & 4 \\ 2 & -2 \\ 1 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & a & a \\ a & 0 & -2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} a \cdot (c+4) & a^2 & a^2-8 \\ 2 \cdot c-2 \cdot a & 2 \cdot a & 2 \cdot a+4 \\ a \cdot b+c & a & a-2 \cdot b \end{bmatrix}$ <p>Aus dem Vergleich der Matrixelemente:</p> $\begin{pmatrix} a \cdot c + 4a & a^2 & a^2 - 8 \\ 2c - 2a & 2a & 2a + 4 \\ a \cdot b + c & a & a - 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & a & -7 \\ c & 2 & 2b \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ <p>folgen z.B.:</p> <p><math>a = 1</math>,<br/> <math>2a + 4 = 2b</math> mit <math>b = 3</math>,<br/> <math>a \cdot b + c = 5</math> mit <math>c = 2</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 3 |

|                                               | Anforderungen                                                                                                                                | Modelllösungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                     |                                                                                                            |                                               |                                                                                                                                              |   |
|-----------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| 1h                                            | bestimmt die Koeffizienten a, b und c so, dass das LGS die Lösung $\mathbb{L} = \{(3 \mid -4 \mid 2)\}$ hat.                                 | <p>Aus der gegebenen Lösungsmenge folgt das LGS:</p> $\begin{array}{rcl} 3a - (-4) - 3 \cdot 2 & = & 1 \\ -3c + (-4)b + 7 \cdot 2 & = & 0 \\ 3 \cdot 3 + (-4)b + b \cdot 2 & = & 5 \end{array}$ <hr/> $\begin{array}{rcl} 3a & = & 3 \\ -3c - 4b & = & -14 \\ -2b & = & -4 \end{array}$ <hr/> <p>Daraus folgen die Lösungen für die Koeffizienten: a = 1, b = 2 und c = 2.</p>                                                                                                                          | 2                                   |                                                                                                            |                                               |                                                                                                                                              |   |
| 1i                                            | bestimmt jeweils die Matrix X.                                                                                                               | <table><tr><td><math>A \cdot X = B \cdot X + s \cdot A</math></td><td><math>A \cdot X - B \cdot X = s \cdot A</math><br/><math>(A - B) \cdot X = s \cdot A</math><br/><math>X = (A - B)^{-1} \cdot s \cdot A</math></td></tr><tr><td><math>E = X \cdot A^T \cdot B - 4 \cdot X \cdot C</math></td><td><math>E = X \cdot (A^T \cdot B) - X \cdot (4 \cdot C)</math><br/><math>E = X \cdot (A^T \cdot B - 4 \cdot C)</math><br/><math>X = E \cdot (A^T \cdot B - 4 \cdot C)^{-1}</math></td></tr></table> | $A \cdot X = B \cdot X + s \cdot A$ | $A \cdot X - B \cdot X = s \cdot A$<br>$(A - B) \cdot X = s \cdot A$<br>$X = (A - B)^{-1} \cdot s \cdot A$ | $E = X \cdot A^T \cdot B - 4 \cdot X \cdot C$ | $E = X \cdot (A^T \cdot B) - X \cdot (4 \cdot C)$<br>$E = X \cdot (A^T \cdot B - 4 \cdot C)$<br>$X = E \cdot (A^T \cdot B - 4 \cdot C)^{-1}$ | 4 |
| $A \cdot X = B \cdot X + s \cdot A$           | $A \cdot X - B \cdot X = s \cdot A$<br>$(A - B) \cdot X = s \cdot A$<br>$X = (A - B)^{-1} \cdot s \cdot A$                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                     |                                                                                                            |                                               |                                                                                                                                              |   |
| $E = X \cdot A^T \cdot B - 4 \cdot X \cdot C$ | $E = X \cdot (A^T \cdot B) - X \cdot (4 \cdot C)$<br>$E = X \cdot (A^T \cdot B - 4 \cdot C)$<br>$X = E \cdot (A^T \cdot B - 4 \cdot C)^{-1}$ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                     |                                                                                                            |                                               |                                                                                                                                              |   |
|                                               |                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 34                                  |                                                                                                            |                                               |                                                                                                                                              |   |

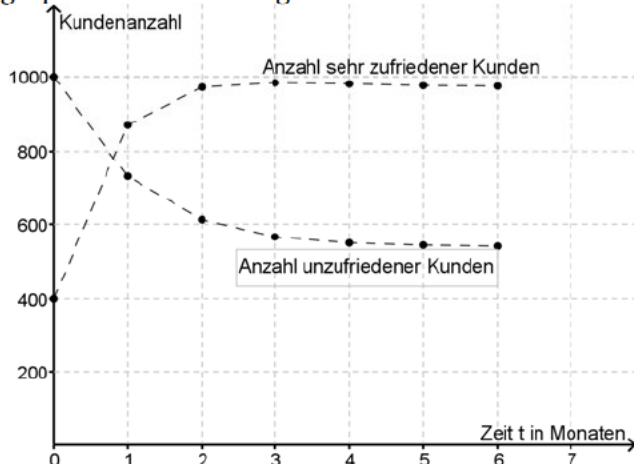
Aufgabe 2: Kundenzufriedenheit

|    | Anforderungen                                                                                                                                                 | Modelllösungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |    |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| A2 | Der Prüfling                                                                                                                                                  | Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:<br>Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | BE |
| 2a | erläutert anhand eines ausgewählten Elementes der Matrix A, warum diese Matrix das Änderungsverhalten der Kundenzufriedenheit wiedergibt.                     | 45% der unzufriedenen Kunden (U) wechselten laut Abbildung 2.1 innerhalb eines Monats zu den sehr zufriedenen Kunden (S).<br>$45\% = \frac{45}{100} = 0,45 = a_{12}$ <p>Dabei gibt beispielsweise das Element <math>a_{12} = 0,45</math> den prozentualen Übergang der unzufriedenen Kunden (U) zu den sehr zufriedenen Kunden (S) innerhalb dieses Monats an.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 2  |
| 2b | ermittelt, wie viele Kunden nach dem ersten Monat sehr zufrieden bzw. unzufrieden mit den wechselnden Sonderangeboten waren.                                  | <p>1/5 aller Kunden <math>\triangleq</math> 400 Kunden (S)<br/> Hälfte aller Kunden <math>\triangleq</math> 1000 Kunden (U)<br/> <math>2000 - 400 - 1000 = 600 \triangleq</math> 600 Kunden (Z)</p> $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.45 & 0.3 \\ 0.15 & 0.55 & 0.2 \\ 0.25 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \xrightarrow{a} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.45 & 0.3 \\ 0.15 & 0.55 & 0.2 \\ 0.25 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 400 \\ 1000 \\ 600 \end{bmatrix} \xrightarrow{k} \begin{bmatrix} 400 \\ 1000 \\ 600 \end{bmatrix}$ $a \cdot k = \begin{bmatrix} 870. \\ 730. \\ 400. \end{bmatrix}$ <p>Nach einem Monat waren 870 Kunden sehr zufrieden und 730 Kunden waren unzufrieden.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 3  |
| 2c | ermittelt den voraussichtlichen Prozentsatz sehr zufriedener, unzufriedener und zufriedener Kunden nach einem weiteren Monat und nach weiteren sechs Monaten. | <p>Anteil der unzufriedenen Kunden:<br/> <math>U = 100\% - 43,5\% - 20\% = 36,5\%</math>.</p> <p>Es ergibt sich damit die Verteilung der Kunden: <math>\begin{pmatrix} S \\ U \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,435 \\ 0,365 \\ 0,2 \end{pmatrix}</math>.</p> <p>Nach einem weiteren Monat:</p> $a \cdot \begin{bmatrix} 0.435 \\ 0.365 \\ 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.48525 \\ 0.306 \\ 0.20875 \end{bmatrix}$ <p>Nach einem weiteren Monat (nach insgesamt zwei Monaten) werden ca. 48,5% der Kunden sehr zufrieden sein, 30,6% der Kunden unzufrieden und ca. 20,9% der Kunden zufrieden sein.</p> <p>Nach weiteren sechs Monaten:</p> $a^6 \cdot \begin{bmatrix} 0.435 \\ 0.365 \\ 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.486747 \\ 0.270365 \\ 0.242889 \end{bmatrix}$ <p>Nach weiteren sechs Monaten (nach insgesamt 7 Monaten) werden ca. 48,7% der Kunden sehr zufrieden sein, ca. 27% der Kunden unzufrieden und ca. 24,3% der Kunden zufrieden sein.</p> | 3  |

|    | Anforderungen                                                                                                                                                            | Modelllösungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |   |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| 2d | ermittelt die Matrix $A^2$ und<br><br>interpretiert diese Matrix im Sachzusammenhang.                                                                                    | <p>Lösung mittels CAS:</p> $A^2 = \begin{bmatrix} 0.5025 & 0.5175 & 0.42 \\ 0.2225 & 0.37 & 0.255 \\ 0.275 & 0.1125 & 0.325 \end{bmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 0,5025 & 0,5175 & 0,42 \\ 0,2225 & 0,37 & 0,255 \\ 0,275 & 0,1125 & 0,325 \end{pmatrix}$ <p>Die Matrix <math>A^2</math> beschreibt das Änderungsverhalten der Kundenzufriedenheit mit den wechselnden Sonderangeboten nach zwei Monaten (unter der Voraussetzung, dass sich dieses Übergangsverhalten nicht verändert).</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 2 |
| 2e | entscheidet begründet, welche der drei Aussagen korrekt sind.                                                                                                            | <p>Das Matrixelement <math>a_{11} = 0,5025</math> beschreibt den Anteil der sehr zufriedenen Kunden, die nach zwei Monaten sehr zufrieden sind. Das Matrixelement <math>a_{11} = 0,5025</math> wird durch Multiplikation der ersten Zeile der Matrix A mit der ersten Spalte der Matrix A gebildet. (<math>0,6^2 + 0,45 \cdot 0,15 + 0,30 \cdot 0,25 = 0,5025</math>). Daran erkennt man, dass dazu aber auch unzufriedene und zufriedene Kunden des Vormonats gehören, deswegen können nur die beiden Aussagen 1 und 2 wahr sein. Aussage 3 ist demzufolge falsch.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 3 |
| 2f | untersucht, wie sich das Änderungsverhalten der Kundenzufriedenheit entwickeln wird und<br><br>gibt an, wie sich der Anteil der sehr zufriedenen Kunden entwickeln wird. | $A^{12} = \begin{bmatrix} 0.486485 & 0.486488 & 0.486487 \\ 0.270271 & 0.270269 & 0.270271 \\ 0.243244 & 0.243243 & 0.243242 \end{bmatrix}$ $A^{13} = \begin{bmatrix} 0.486486 & 0.486487 & 0.486487 \\ 0.27027 & 0.27027 & 0.27027 \\ 0.243243 & 0.243244 & 0.243243 \end{bmatrix}$ $A^{14} = \begin{bmatrix} 0.486486 & 0.486486 & 0.486487 \\ 0.27027 & 0.27027 & 0.27027 \\ 0.243243 & 0.243243 & 0.243243 \end{bmatrix}$ <p>Die Folge der Matrixpotenzen konvergiert gegen eine Grenzmatrix, d.h., langfristig stabilisiert sich die Verteilung des Änderungsverhaltens der Kundenzufriedenheit.</p> <p>Die Matrix <math>A^n</math> beschreibt eine Grenzmatrix, d.h. langfristig wird sich die Verteilung der Kunden (bezgl. der Zufriedenheit) stabilisieren.</p> $A^n = \begin{pmatrix} 0,487 & 0,487 & 0,487 \\ 0,27 & 0,27 & 0,27 \\ 0,243 & 0,243 & 0,243 \end{pmatrix}$ <p>Das bedeutet, dass nach mehr als 12 Monaten 48,7% aller Kunden sehr zufrieden sein werden und somit fast die Hälfte aller Kunden langfristig sehr zufrieden sein wird.</p> | 4 |
| 2g | ermittelt den Fixvektor und erläutert dessen Bedeutung im Sachzusammenhang.                                                                                              | <p>Die Matrixgleichung <math>A \cdot \vec{k} = \vec{k}</math> wird aufgestellt, wobei der Vektor <math>\vec{k}</math> der zugehörige Fixvektor ist, der die Verteilung der Kunden angibt.</p> $\text{solve}\left\{A \cdot \begin{bmatrix} s \\ u \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ u \\ z \end{bmatrix}, \{s, u, z\}\right\}$ $s=2 \cdot \mathbf{1} \text{ and } u=1.11111 \cdot \mathbf{1} \text{ and } z=\mathbf{1}$ <p style="text-align: right;"><i>Fortsetzung nächste Seite</i></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 5 |

|          | Anforderungen                                                                                      | Modelllösungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |   |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| zu<br>2g |                                                                                                    | <p>Der zugehörige Fixvektor lautet: <math>\vec{k} = \begin{pmatrix} 2t \\ 1,11111t \\ t \end{pmatrix}</math> mit <math>t \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>Da <math>S + U + Z = 2000</math> gilt:</p> $\text{solve}\{2 \cdot t + 1.11111 \cdot t + t = 2000, t\} \quad t = 486.487$ <p>folgt: <math>\vec{k} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 486,487 \\ 1,11111 \cdot 486,487 \\ 486,487 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 973 \\ 541 \\ 486 \end{pmatrix}</math></p> <p>Der Fixvektor gibt die Verteilung der 2000 Kunden im Falle einer stabilen (stationären) Verteilung an. Das bedeutet, dass sich langfristig die Verteilung der Kunden stabilisieren wird (unter der Voraussetzung, dass sich das Änderungsverhalten bzgl. der Kundenzufriedenheit nicht ändern wird) und somit ca. 973 Kunden sehr zufrieden sein werden, ca. 541 Kunden unzufrieden sein werden und ca. 486 Kunden zufrieden sein werden.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |   |
| 2h       | weist nach, dass die Anzahl unzufriedener Kunden zugunsten zufriedener Kunden gesenkt werden kann. | <p>Änderungsverhalten vor der Imagewerbung wird durch die Matrix</p> $A = \begin{pmatrix} 0,60 & 0,45 & 0,3 \\ 0,15 & 0,55 & 0,2 \\ 0,25 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$ <p>beschrieben.</p> <p>Nach einem Monat ergaben sich (vor der Imagewerbung) 870 sehr zufriedene Kunden, 730 unzufriedene Kunden und 400 zufriedene Kunden und somit <math>\vec{k}_1 = \begin{pmatrix} 870 \\ 730 \\ 400 \end{pmatrix}</math>.</p> <p>(<math>Z = 2000 - 870 - 730 = 400</math>)</p> <p>Das Änderungsverhalten der Kundschaft nach der Imagewerbung wird durch die Matrix <math>A_{\text{neu}} = \begin{pmatrix} 0,60 &amp; 0,45 &amp; 0,3 \\ 0,15 &amp; \mathbf{0,45} &amp; 0,2 \\ 0,25 &amp; \mathbf{0,10} &amp; 0,5 \end{pmatrix}</math> beschrieben.</p> <p>Nach einem Monat:</p> $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.45 & 0.3 \\ 0.15 & 0.55-0.1 & 0.2 \\ 0.25 & 0+0.1 & 0.5 \end{bmatrix} \cdot \vec{k} = \begin{bmatrix} 870. \\ 630. \\ 500. \end{bmatrix}$ <p>Nach der Imagewerbung ergeben sich nur noch 630 unzufriedene Kunden, aber schon 500 zufriedene Kunden.</p> <p>Damit kann der Anteil unzufriedener Kunden (zugunsten zufriedener Kunden) innerhalb eines Monats um 100 Kunden gesenkt werden und der Anteil zufriedener Kunden um 100 Kunden vergrößert werden.</p> | 4 |
| 2i       | ergänzt die Wertetabelle,                                                                          | $a^1 \cdot \begin{bmatrix} 400 \\ 1000 \\ 600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 870. \\ 730. \\ 400. \end{bmatrix}$ $a^2 \cdot \begin{bmatrix} 400 \\ 1000 \\ 600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 970.5 \\ 612. \\ 417.5 \end{bmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 7 |

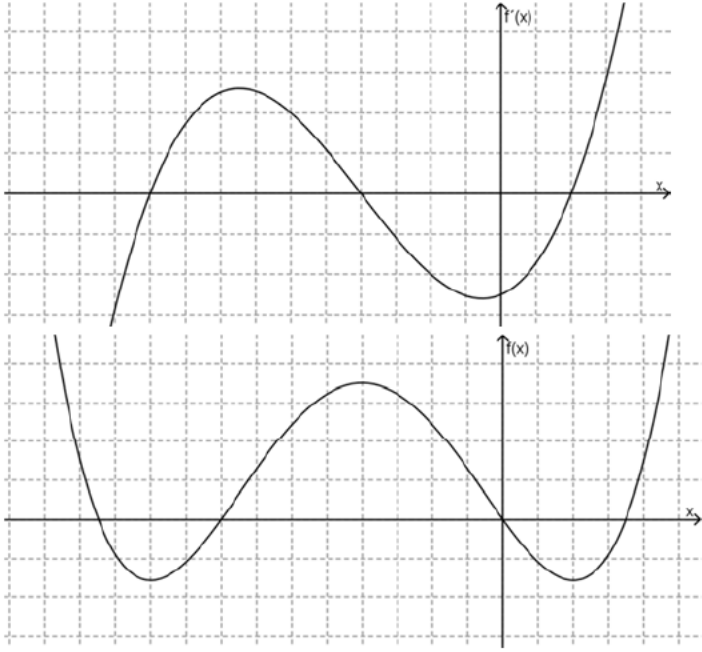
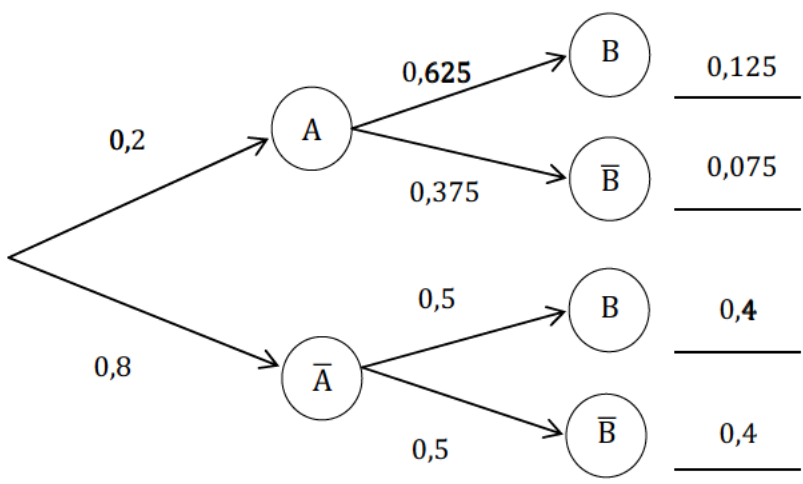
Fortsetzung nächste Seite

| Anforderungen                                |                                                                                                                                        | Modelllösungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                     |     |     |     |     |   |   |   |                                              |     |     |     |     |     |     |     |                                           |      |     |     |     |     |     |     |  |
|----------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|-----|-----|-----|-----|---|---|---|----------------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-------------------------------------------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--|
| zu<br>2i                                     |                                                                                                                                        | $a^3 \cdot \begin{bmatrix} 400 \\ 1000 \\ 600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 982.95 \\ 565.675 \\ 451.375 \end{bmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                     |     |     |     |     |   |   |   |                                              |     |     |     |     |     |     |     |                                           |      |     |     |     |     |     |     |  |
|                                              |                                                                                                                                        | $a^4 \cdot \begin{bmatrix} 400 \\ 1000 \\ 600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 979.736 \\ 548.839 \\ 471.425 \end{bmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                     |     |     |     |     |   |   |   |                                              |     |     |     |     |     |     |     |                                           |      |     |     |     |     |     |     |  |
|                                              |                                                                                                                                        | $a^5 \cdot \begin{bmatrix} 400 \\ 1000 \\ 600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 976.247 \\ 543.107 \\ 480.647 \end{bmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                     |     |     |     |     |   |   |   |                                              |     |     |     |     |     |     |     |                                           |      |     |     |     |     |     |     |  |
|                                              |                                                                                                                                        | $a^6 \cdot \begin{bmatrix} 400 \\ 1000 \\ 600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 974.34 \\ 541.275 \\ 484.385 \end{bmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                     |     |     |     |     |   |   |   |                                              |     |     |     |     |     |     |     |                                           |      |     |     |     |     |     |     |  |
|                                              |                                                                                                                                        | <table><tr><th>nach ...<br/>Monaten</th><th>0</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th></tr><tr><td>Anzahl der sehr<br/>zufriedenen<br/>Kunden (S)</td><td>400</td><td>870</td><td>971</td><td>983</td><td>980</td><td>976</td><td>974</td></tr><tr><td>Anzahl der<br/>unzufriedenen<br/>Kunden (U)</td><td>1000</td><td>730</td><td>612</td><td>566</td><td>549</td><td>543</td><td>541</td></tr></table>                                                                                                 | nach ...<br>Monaten | 0   | 1   | 2   | 3   | 4 | 5 | 6 | Anzahl der sehr<br>zufriedenen<br>Kunden (S) | 400 | 870 | 971 | 983 | 980 | 976 | 974 | Anzahl der<br>unzufriedenen<br>Kunden (U) | 1000 | 730 | 612 | 566 | 549 | 543 | 541 |  |
| nach ...<br>Monaten                          | 0                                                                                                                                      | 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 2                   | 3   | 4   | 5   | 6   |   |   |   |                                              |     |     |     |     |     |     |     |                                           |      |     |     |     |     |     |     |  |
| Anzahl der sehr<br>zufriedenen<br>Kunden (S) | 400                                                                                                                                    | 870                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 971                 | 983 | 980 | 976 | 974 |   |   |   |                                              |     |     |     |     |     |     |     |                                           |      |     |     |     |     |     |     |  |
| Anzahl der<br>unzufriedenen<br>Kunden (U)    | 1000                                                                                                                                   | 730                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 612                 | 566 | 549 | 543 | 541 |   |   |   |                                              |     |     |     |     |     |     |     |                                           |      |     |     |     |     |     |     |  |
|                                              |                                                                                                                                        | (Zahlenwerte z.T. gerundet)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                     |     |     |     |     |   |   |   |                                              |     |     |     |     |     |     |     |                                           |      |     |     |     |     |     |     |  |
|                                              | stellt den Sach-<br>verhalt graphisch<br>dar und                                                                                       | graphische Darstellung des Sachverhalts:<br>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                     |     |     |     |     |   |   |   |                                              |     |     |     |     |     |     |     |                                           |      |     |     |     |     |     |     |  |
|                                              | entscheidet be-<br>gründet, welcher<br>Funktionstyp für<br>die Darstellung<br>der Anzahl sehr<br>zufriedener Kun-<br>den geeignet ist. | Die Beschreibung durch ganzrationale Funktionsterme ist nicht sinnvoll, da die Anzahl sehr zufriedener Kunden nicht unbegrenzt steigen oder fallen kann (hier: max. 2000 Kunden). Somit sollte der längerfristige Verlauf z.B. durch den Graphen einer Exponentialfunktion (z. B.: $K(t) = a + b \cdot e^{k \cdot t}$ mit $k < 0$ ) beschrieben werden, um das asymptotische Verhalten des Graphen zu berücksichtigen. Auch eine Darstellung des Graphenverlaufes mit Hilfe abschnittsweiser definierter Funktionen wäre möglich. |                     |     |     |     |     |   |   |   |                                              |     |     |     |     |     |     |     |                                           |      |     |     |     |     |     |     |  |

33

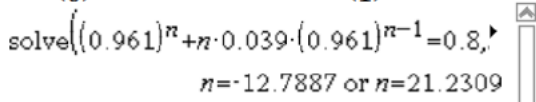
Aufgabe 1 mit Stochastik:

|                                                                    | Anforderungen                                                                                                                                                                                                                                 | Modelllösungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |         |                             |                                                                 |                                                                                                       |                                                                    |                                                                                                                                                                |                                                      |                                                                                                                                                                                                                                               |   |
|--------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|-----------------------------|-----------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| A1                                                                 | Der Prüfling                                                                                                                                                                                                                                  | Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:<br>Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | BE      |                             |                                                                 |                                                                                                       |                                                                    |                                                                                                                                                                |                                                      |                                                                                                                                                                                                                                               |   |
| 1a                                                                 | entscheidet, welche Aussage wahr oder falsch ist und begründet seine Entscheidung.                                                                                                                                                            | <table><thead><tr><th>Aussage</th><th>Entscheidung und Begründung</th></tr></thead><tbody><tr><td>Alle Funktionsgraphen der Funktionschar sind achsensymmetrisch.</td><td>Wahr. Da die Funktion nur gerade Exponenten der Potenzen von x besitzt oder weil <math>f(x) = f(-x)</math> gilt.</td></tr><tr><td>Alle Funktionsgraphen der Funktionschar besitzen zwei Wendepunkte.</td><td>Falsch.<br/>Die zweite Ableitung <math>f''(x) = 12a \cdot x^2 - 4</math> besitzt für <math>a &lt; 0</math> keine Nullstellen. Somit haben nicht alle Graphen der Schar zwei Wendepunkte.</td></tr><tr><td>Für <math>a &gt; 0</math> kann die Funktion drei Extrema besitzen.</td><td>Wahr. Denn <math>f'(x) = 4a \cdot x^3 - 4x</math> besitzt, drei Nullstellen: (unter der Voraussetzung, dass <math>a &gt; 0</math>).<br/><math>x_{01} = 0; x_{02} = +\sqrt{\frac{1}{a}}; x_{03} = -\sqrt{\frac{1}{a}},</math><br/><br/><math>f''(x)</math> ist an diesen Stellen ungleich Null.</td></tr></tbody></table>                                          | Aussage | Entscheidung und Begründung | Alle Funktionsgraphen der Funktionschar sind achsensymmetrisch. | Wahr. Da die Funktion nur gerade Exponenten der Potenzen von x besitzt oder weil $f(x) = f(-x)$ gilt. | Alle Funktionsgraphen der Funktionschar besitzen zwei Wendepunkte. | Falsch.<br>Die zweite Ableitung $f''(x) = 12a \cdot x^2 - 4$ besitzt für $a < 0$ keine Nullstellen. Somit haben nicht alle Graphen der Schar zwei Wendepunkte. | Für $a > 0$ kann die Funktion drei Extrema besitzen. | Wahr. Denn $f'(x) = 4a \cdot x^3 - 4x$ besitzt, drei Nullstellen: (unter der Voraussetzung, dass $a > 0$ ).<br>$x_{01} = 0; x_{02} = +\sqrt{\frac{1}{a}}; x_{03} = -\sqrt{\frac{1}{a}},$<br><br>$f''(x)$ ist an diesen Stellen ungleich Null. | 6 |
| Aussage                                                            | Entscheidung und Begründung                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |         |                             |                                                                 |                                                                                                       |                                                                    |                                                                                                                                                                |                                                      |                                                                                                                                                                                                                                               |   |
| Alle Funktionsgraphen der Funktionschar sind achsensymmetrisch.    | Wahr. Da die Funktion nur gerade Exponenten der Potenzen von x besitzt oder weil $f(x) = f(-x)$ gilt.                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |         |                             |                                                                 |                                                                                                       |                                                                    |                                                                                                                                                                |                                                      |                                                                                                                                                                                                                                               |   |
| Alle Funktionsgraphen der Funktionschar besitzen zwei Wendepunkte. | Falsch.<br>Die zweite Ableitung $f''(x) = 12a \cdot x^2 - 4$ besitzt für $a < 0$ keine Nullstellen. Somit haben nicht alle Graphen der Schar zwei Wendepunkte.                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |         |                             |                                                                 |                                                                                                       |                                                                    |                                                                                                                                                                |                                                      |                                                                                                                                                                                                                                               |   |
| Für $a > 0$ kann die Funktion drei Extrema besitzen.               | Wahr. Denn $f'(x) = 4a \cdot x^3 - 4x$ besitzt, drei Nullstellen: (unter der Voraussetzung, dass $a > 0$ ).<br>$x_{01} = 0; x_{02} = +\sqrt{\frac{1}{a}}; x_{03} = -\sqrt{\frac{1}{a}},$<br><br>$f''(x)$ ist an diesen Stellen ungleich Null. |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |         |                             |                                                                 |                                                                                                       |                                                                    |                                                                                                                                                                |                                                      |                                                                                                                                                                                                                                               |   |
| 1b                                                                 | weist nach, dass alle Flächeninhalte für $t > 0$ gleich groß sind.                                                                                                                                                                            | Als Integrationsgrenzen müssen zunächst die Nullstellen ermittelt werden.<br>$\frac{3}{4t^3}x_N^2 - \frac{2}{3t^2}x_N = 0 \Rightarrow x_{N1} = 0 \text{ und } x_{N2} = \frac{8}{9}t$<br>Bestimmung der Stammfunktion F: $F(x) = \frac{1}{4t^3}x^3 - \frac{1}{3t^2}x^2$ .<br>Berechnung des Flächeninhalts:<br>$A = \left  \int_0^{\frac{8}{9}t} f(x) dx \right  = \left  F\left(\frac{8}{9}t\right) - F(0) \right  = \left  -\frac{64}{729} \right  [\text{FE}].$<br>$\text{solve}\left(\frac{3}{4t^3}x^2 - \frac{2}{3t^2}x = 0\right)$<br>$\left\{ x=0, x=\frac{8 \cdot t}{9} \right\}$<br>$\int \left( \frac{3}{4t^3}x^2 - \frac{2}{3t^2}x \right)$<br>$\frac{3 \cdot x^3 - 4 \cdot t \cdot x^2}{12 \cdot t^3}$<br>$\frac{8}{9}t$<br>$\int_0^{\frac{8}{9}t} \left( \frac{3}{4t^3}x^2 - \frac{2}{3t^2}x \right) dx$<br>$-\frac{64}{729}$<br>Da der Parameter t im Ergebnis nicht enthalten ist, ist der Flächeninhalt unabhängig vom Parameter t und für alle Parabeln der Schar gleich. Der Flächeninhalt beträgt also $\frac{64}{729}$ FE. | 4       |                             |                                                                 |                                                                                                       |                                                                    |                                                                                                                                                                |                                                      |                                                                                                                                                                                                                                               |   |

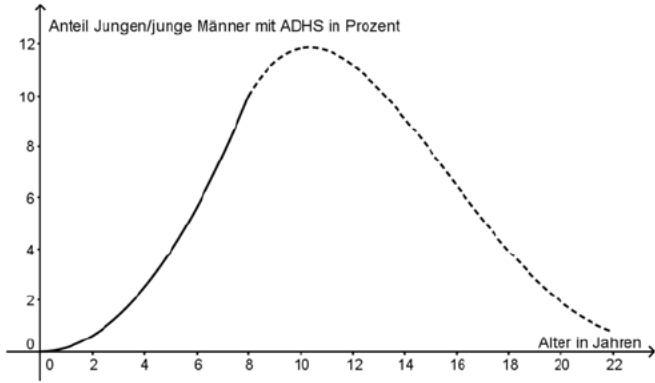
|    | Anforderungen                                                                                                      | Modelllösungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |   |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| 1c | gibt eine sin- und eine cos-Funktionsgleichung an.                                                                 | Mögliche Lösungen:<br>$y(x) = 2 \cdot \sin(x - \pi) + 3$ und $y(x) = 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 3$ ,<br>sowie sämtliche Varianten unter Berücksichtigung der Rechts-/Linksverschiebung.                                                                                                                                                                            | 4 |
| 1d | skizziert den Verlauf des Graphen der Funktion f.                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 3 |
| 1e | weist nach, dass $E(X) = 1$ ist,<br><br>berechnet die Standardabweichung und<br><br>ermittelt den Wert für $x_1$ . | $E(X) = 0,32 \cdot 0 + 0,36 \cdot 1 + 0,32 \cdot 2 = 1$ $\sigma = \sqrt{(0-1)^2 \cdot 0,32 + (1-1)^2 \cdot 0,36 + (2-1)^2 \cdot 0,32} = 0,8$ <p>Sei <math>x_1 = a</math>, dann gilt für den Erwartungswert:<br/> <math>0,32 \cdot a + 0,36 \cdot 1 + 0,32 \cdot 2 = 0 \Rightarrow a = -3,125</math><br/> Damit <math>E(X) = 0</math> ist, müsste <math>x_1 = -3,125</math> sein.</p> | 4 |
| 1f | beschriftet das zugehörige Baumdiagramm und                                                                        |  <p style="text-align: right;"><i>Fortsetzung nächste Seite</i></p>                                                                                                                                                                                                                              | 7 |

|       | Anforderungen                                                                                                                                  | Modelllösungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |    |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| zu 1f | ermittelt die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.                                                                                                  | $P(A \cap B) = P_A(B) \cdot P(A) = 0,625 \cdot 0,2 = 0,125$<br>$P_{\bar{A}}(B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = \frac{0,4}{0,8} = 0,5$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |    |
| 1g    | berechnet die Irrtumswahrscheinlichkeit und<br><br>beurteilt das Ergebnis und<br><br>ermittelt die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art. | Betrachtet wird die binomialverteilte Zufallsgröße X mit $n = 50$ und $p = 0,4$ .<br>$\alpha = 1 - P(13 \leq X \leq 27) = 0,029285$<br>$1 - \text{binomCdf}(50, 0,4, 13, 27) \quad 0.029285$ <br>Die Irrtumswahrscheinlichkeit beträgt ca. 2,93%.<br><br>Da die Anzahl der Erfolge nicht im Annahmebereich liegt, kann die Nullhypothese verworfen werden und die Gegenhypothese angenommen werden.<br><br>Es gilt: $p = 0,45$ , $n = 50$<br>$\beta = P(13 \leq X \leq 27) = 0,920271$<br>$\text{binomCdf}(50, 0,45, 13, 27) \quad 0.920271$ <br>Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art beträgt ca. 92%. | 6  |
|       |                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 34 |

Aufgabe 2: Aufmerksamkeitsdefizitstörung (ADHS)

|    | Anforderungen                                                          | Modelllösungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |    |
|----|------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| A2 | Der Prüfling                                                           | Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:<br>Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | BE |
| 2a | erläutert die Voraussetzungen zur Anwendung der Binomialverteilung.    | X: „Anzahl der Kinder mit ADHS“ kann als binomialverteilt angenommen werden, wenn nur zwei mögliche Ergebnisse zugelassen sind:<br>Erfolg: ADHS diagnostiziert, Misserfolg: ADHS nicht diagnostiziert. Verschiedene Stadien oder Stufen werden nicht betrachtet. Das Auftreten bzw. die Diagnose bei einzelnen Kindern muss voneinander unabhängig sein und die ADHS-Prävalenz wird mit einer gleichbleibenden Wahrscheinlichkeit $p = 0,04$ festgelegt.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 3  |
| 2b | berechnet (ohne CAS nachvollziehbar) die gesuchten Werte.              | Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der Kinder mit ADHS, $X \in \{0; 1; 2; 3; \dots; 26\}$ , X ist binomialverteilt mit $p = 0,039$ und $n = 26$ . <ul style="list-style-type: none"> <li>Die Anzahl der Kinder mit ADHS, die man in dieser Gruppe erwarten kann, berechnet man durch:<br/><math>\mu = n \cdot p = 26 \cdot 0,039 = 1,014</math>.<br/>Man kann in der Gruppe ein Kind mit ADHS erwarten.</li> <li>Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in dieser Gruppe genau zwei Fälle von ADHS vorliegen, berechnet man durch:<br/><math>P(X = 2) = \binom{26}{2} \cdot 0,039^2 \cdot 0,961^{24} \approx 0,1903</math>.<br/>Sie beträgt ca. 19%.</li> <li>Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in dieser Gruppe mindestens ein Fall von ADHS auftritt, berechnet man durch:<br/><math>P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,961^{26} \approx 0,6445</math>.<br/>Sie beträgt ca. 64,45%.</li> <li>Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in dieser Gruppe weniger als zwei Fälle von ADHS vorkommen, berechnet man durch:<br/><math>P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)</math><br/><math>P(X \leq 1) = 0,961^{26} + \binom{26}{1} \cdot 0,039^1 \cdot 0,961^{25} \approx 0,7306</math>.<br/>Sie beträgt ca. 73%.</li> </ul> | 7  |
| 2c | ermittelt die gesuchte Gruppengröße.                                   | Betrachtet wird die binomialverteilte Zufallsgröße X „Anzahl der Kinder mit ADHS“ mit $p = 0,039$ und unbekannter Kettenlänge n. Gesucht ist: $P(X \leq 1) \geq 0,8$<br>$\Rightarrow \binom{n}{0} \cdot 0,039^0 \cdot 0,961^n + \binom{n}{1} \cdot 0,039^1 \cdot 0,961^{n-1} \geq 0,8$<br><br>Da die Wahrscheinlichkeit mindestens 80% betragen soll, liegt die maximale Gruppengröße bei 21 Kindern.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 3  |
| 2d | widerlegt mit Hilfe eines geeigneten Testverfahrens die Behauptung und | Es wird die Zufallsgröße X „Anzahl der Kinder mit ADHS“ mit $X \in \{0; 1; 2; 3; \dots; 120\}$ , $n = 120$ und $p = 0,039$ betrachtet. Da die Behauptung lautet, der Anteil der ADHS-Fälle sei höher, wird ein rechtsseitiger Test durchgeführt.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 6  |

Fortsetzung nächste Seite

|                                       | Anforderungen                                                                                                                                       | Modelllösungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                     |         |                                     |          |                                       |          |        |      |           |         |         |       |  |     |     |      |   |
|---------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|---------|-------------------------------------|----------|---------------------------------------|----------|--------|------|-----------|---------|---------|-------|--|-----|-----|------|---|
| zu 2d                                 |                                                                                                                                                     | <p>Nullhypothese <math>H_0: p \leq 0,039</math>, Gegenhypothese <math>H_1: p &gt; 0,039</math>, Irrtumswahrscheinlichkeit: <math>\alpha = 2\%</math>.<br/>Abschätzen der Grenzen des Annahmebereichs A von <math>H_0</math>:</p> <table><tr><td><math>\text{binomCdf}(120, 0.039, 0, 8)</math></td><td>0.95428</td></tr><tr><td><math>\text{binomCdf}(120, 0.039, 0, 9)</math></td><td>0.980659</td></tr></table> <p>Damit lautet der Annahmebereich von <math>H_0</math>: <math>A = \{0; 1; 2; 3; \dots; 9\}</math> und man kann die Nullhypothese ablehnen, wenn <math>X &gt; 9</math> ist. Da aber nur acht Kinder mit ADHS in der Kindertagesstätte sind, kann die Behauptung der Leiterin verworfen werden.</p> <p>Da die Leiterin ihre Behauptung beibehalten will, lehnt sie die Nullhypothese ab. Für die Irrtumswahrscheinlichkeit gilt dann:<br/><math>\alpha = P(X \geq 8) \approx 0,098</math></p> <table><tr><td><math>\text{binomCdf}(120, 0.039, 8, 120)</math></td><td>0.097954</td></tr></table> <p>Die Beibehaltung der Behauptung kann nur mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von ca. 9,8% erfolgen.</p> | $\text{binomCdf}(120, 0.039, 0, 8)$ | 0.95428 | $\text{binomCdf}(120, 0.039, 0, 9)$ | 0.980659 | $\text{binomCdf}(120, 0.039, 8, 120)$ | 0.097954 |        |      |           |         |         |       |  |     |     |      |   |
| $\text{binomCdf}(120, 0.039, 0, 8)$   | 0.95428                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                     |         |                                     |          |                                       |          |        |      |           |         |         |       |  |     |     |      |   |
| $\text{binomCdf}(120, 0.039, 0, 9)$   | 0.980659                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                     |         |                                     |          |                                       |          |        |      |           |         |         |       |  |     |     |      |   |
| $\text{binomCdf}(120, 0.039, 8, 120)$ | 0.097954                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                     |         |                                     |          |                                       |          |        |      |           |         |         |       |  |     |     |      |   |
| 2e                                    | <p>weist die Wahrscheinlichkeit nach und</p> <p>erstellt eine Vierfeldertafel und</p> <p>prüft, ob die Ereignisse stochastisch unabhängig sind.</p> | <p>Insgesamt wird eine Wahrscheinlichkeit für eine ADHS-Diagnose von 0,039 zugrunde gelegt. Der Anteil von Jungen zu Mädchen mit 3:1, bedeutet, dass von dem Gesamtanteil 75% auf die Jungen entfallen. Daher gilt: <math>0,039 \cdot 0,75 = 0,02925</math>. Somit liegt die Wahrscheinlichkeit für einen Jungen mit ADHS bei 2,925%.</p> <table><tr><td></td><td>Mädchen</td><td>Jungen</td><td></td></tr><tr><td>ADHS</td><td>0,975%</td><td>2,925%</td><td>3,9%</td></tr><tr><td>kein ADHS</td><td>44,025%</td><td>52,075%</td><td>96,1%</td></tr><tr><td></td><td>45%</td><td>55%</td><td>100%</td></tr></table> <p>J steht für das Ereignis „Junge“ und A für das Ereignis „ADHS diagnostiziert“. Wenn die beiden Ereignisse stochastisch unabhängig sind, muss gelten: <math>P_J(A) = P(A)</math><br/><math>P_J(A) = \frac{P(J \cap A)}{P(J)} = \frac{0,02925}{0,55} = \frac{117}{2200} \approx 0,053</math> und <math>P(A) = 0,04</math><br/><math>\Rightarrow P_J(A) \neq P(A)</math><br/>Die Ereignisse „Junge“ und „ADHS diagnostiziert“ sind nicht stochastisch unabhängig.</p>                                   |                                     | Mädchen | Jungen                              |          | ADHS                                  | 0,975%   | 2,925% | 3,9% | kein ADHS | 44,025% | 52,075% | 96,1% |  | 45% | 55% | 100% | 8 |
|                                       | Mädchen                                                                                                                                             | Jungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                     |         |                                     |          |                                       |          |        |      |           |         |         |       |  |     |     |      |   |
| ADHS                                  | 0,975%                                                                                                                                              | 2,925%                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 3,9%                                |         |                                     |          |                                       |          |        |      |           |         |         |       |  |     |     |      |   |
| kein ADHS                             | 44,025%                                                                                                                                             | 52,075%                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 96,1%                               |         |                                     |          |                                       |          |        |      |           |         |         |       |  |     |     |      |   |
|                                       | 45%                                                                                                                                                 | 55%                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 100%                                |         |                                     |          |                                       |          |        |      |           |         |         |       |  |     |     |      |   |
| 2f                                    | stellt die Funktion H graphisch dar,                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 6                                   |         |                                     |          |                                       |          |        |      |           |         |         |       |  |     |     |      |   |

Fortsetzung nächste Seite

|          | Anforderungen                                                                                                                                                                 | Modelllösungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |    |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| zu<br>2f | <p>berechnet das Alter mit der höchsten Häufigkeit und gibt den Anteil an und</p> <p>weist nach, dass im Alter von 15 Jahren bis 16 Jahren die stärkste Abnahme vorliegt.</p> | <p>Für den Hochpunkt gelten: <math>H_2'(t_E) = 0</math> und <math>H_2''(t_E) &lt; 0</math>.</p> <pre> Define h2(t)=-5.1E-4*t^4+0.0444*t^3-1.334*t^2 Fertig fMax(h2(t),t) t=10.3379 h2(10.3379) 11.8655 </pre> <p>Im Alter von ca. 10,34 Jahren liegt die höchste Häufigkeit von ADHS mit einem Anteil von ca. 11,9% vor.</p> <p>Für den Wendepunkt gelten: <math>H_2''(t_W) = 0</math> und <math>H_2'''(t_W) \neq 0</math>.</p> <pre> d/dt(h2(t)) -0.00204*t^3+0.1332*t^2-2.668*t+15.6 d/dt(-0.00204*t^3+0.1332*t^2-2.668*t+15.6) -0.00612*t^2+0.2664*t-2.668 solve(-0.00612*t^2+0.2664*t-2.668=0,t) t=15.6202 or t=27.9092 d/dt(h2(t)) t=15.6202 -1.34995 d^3/dt^3(h2(t)) t=15.6202 0.075209 </pre> <p>Da <math>t_{W2} = 27,9092 \notin \mathbb{D}</math>, <math>t_{W1} = 15,6202 \in \mathbb{D}</math> und <math>H_2'''(t_{W1}) \approx 0,08 \neq 0</math> und <math>H_2'(15,62) \approx -1,35</math> liegt im Alter von 15,62 Jahren die stärkste Abnahme der Häufigkeit von ADHS vor.</p> |    |
|          |                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 33 |

Aufgabe 3 (Alternative 1):Freizeitpark

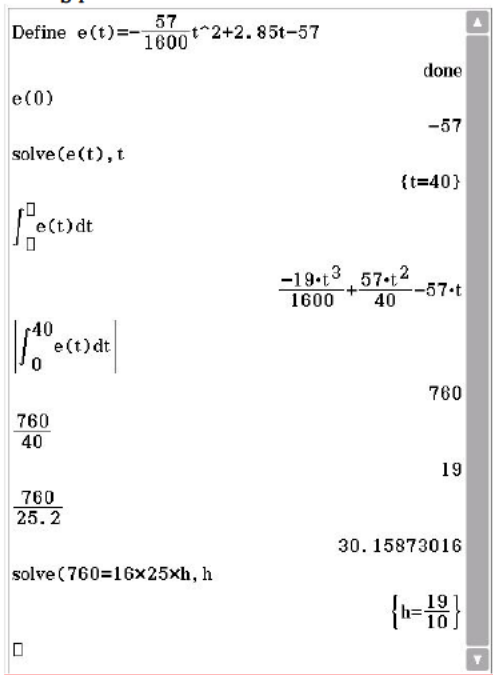
|    | Anforderungen                                                                                                                                                                         | Modelllösungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |    |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| A3 | Der Prüfling                                                                                                                                                                          | Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:<br>Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | BE |
| 3a | ermittelt die Bedingungen, die für die gesuchte Funktionsgleichung gelten, die den Bahnverlauf beschreibt und<br><br>bestimmt die Funktionsgleichung, die den Bahnverlauf beschreibt. | <p>Legt man das Koordinatensystem so in das Schaubild, dass die Abszisse die Tiefpunkte berührt und der Hochpunkt auf der Ordinate liegt, kann der achsensymmetrische Ansatz gewählt werden.</p> <pre>define f(x)=a*x^4+b*x^2+c</pre> <p style="text-align: right;">done</p> <pre>define f1(x)=diff(f(x),x)</pre> <p style="text-align: right;">done</p> $\begin{cases} f(0)=3.84 \\ f(12)=0 \\ f1(12)=0 \end{cases} \quad a, b, c$ $\left\{ a=\frac{1}{5400}, b=-\frac{4}{75}, c=\frac{96}{25} \right\}$ <p>Die gesuchte Funktionsgleichung ist: <math>f(x) = \frac{1}{5400}x^4 - \frac{4}{75}x^2 + \frac{96}{25}</math>.</p> <p>Je nach Lage des Koordinatensystems sind alternative Lösungen möglich.</p>                                                                      | 4  |
| 3b | prüft, ob die geplante Werbeaussage den Tatsachen entspricht.                                                                                                                         | <p>Zunächst müssen die x-Koordinaten der beiden Umkehrpunkte bestimmt werden.</p> <pre>solve(f(x)=6,x)</pre> $\{x=-18, x=18\}$ <p>Mit der 1. Ableitung <math>f'(x) = \frac{1}{1350}x^3 - \frac{8}{75}x</math> errechnet sich für die Umkehrpunkte die Steigung <math>f'(-18) = -2,4</math> bzw. <math>f'(18) = 2,4</math>. Die Steigung (das Gefälle) entspricht an den Umkehrpunkten 240%. Eine diesbezügliche Werbeaussage entspräche den Tatsachen.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 4  |
| 3c | berechnet den Winkel der Strebe zum ebenen Grund.                                                                                                                                     | <p>Gesucht ist eine der Wendestellen.</p> <p>Notwendige Bedingung: <math>f''(x) = 0</math></p> <pre>define f(x)=x^4/5400-4x^2/75+96/25</pre> <p style="text-align: right;">done</p> <pre>define f1(x)=diff(f(x),x)</pre> <p style="text-align: right;">done</p> <pre>define f2(x)=diff(f1(x),x)</pre> <p style="text-align: right;">done</p> <pre>solve(f2(x)=0,x)</pre> $\{x=-4\sqrt{3}, x=4\sqrt{3}\}$ <p>Hinreichende Bedingung: <math>f''(x) = 0</math> und <math>f'''(x) \neq 0</math></p> $f'''(-4\sqrt{3}) = \frac{-4\sqrt{3}}{225} \neq 0 \text{ und } f'''(4\sqrt{3}) = \frac{4\sqrt{3}}{225} \neq 0$ <p>Damit liegen die Wendestellen bei <math>x_{1,2} = \pm 4\sqrt{3} \approx \pm 6,93</math>.</p> <p style="text-align: right;"><i>Fortsetzung nächste Seite</i></p> | 5  |

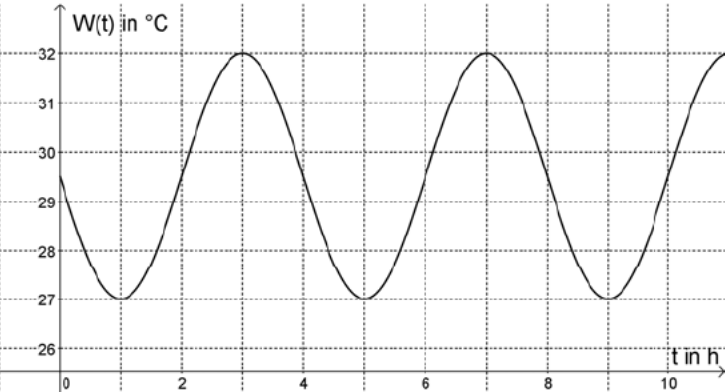
|       | Anforderungen                                                                                                                         | Modelllösungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |   |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| zu 3c |                                                                                                                                       | <p>Die Steigungen in den Wendepunkten betragen:</p> $f'(-4\sqrt{3}) = \frac{64\sqrt{3}}{225} \approx 0,49 \text{ bzw. } f'(4\sqrt{3}) = \frac{-64\sqrt{3}}{225} \approx -0,49.$ <p>Da die Stützstreben in den Wendepunkten senkrecht zum Bahnverlauf montiert werden sollen, müssen sie nach dem Orthogonalitätskriterium für Geraden (<math>m_1 \cdot m_2 = -1</math>) eine Steigung von</p> $m_{1/2} = \pm \frac{225}{64\sqrt{3}} = \pm \frac{75\sqrt{3}}{64} \approx \pm 2,03 \text{ aufweisen. Daraus errechnet sich der Winkel } \alpha \text{ der Stützstrebe zur horizontalen Ebene mit}$ $\alpha_{1,2} = \tan^{-1}\left(\pm \frac{75\sqrt{3}}{64}\right) \approx \pm 63,77^\circ.$                                                                                                                                                     |   |
| 3d    | <p>berechnet den Zeitpunkt, zu dem der Besucherstrom maximal war und</p> <p>gibt die Uhrzeit und die Größe des Besucherstroms an.</p> | <p>Gesucht ist das Maximum der Funktion <math>g</math> mit der Funktionsgleichung <math>g(t) = -9,45(e^{-1,72t} - e^{-0,95t})</math>.</p> <p>Notwendige Bedingung: <math>g'(t) = 0</math></p> <p>Hinreichende Bedingung: <math>g'(t) = 0</math> und <math>g''(t_E) &lt; 0</math></p> <pre> define g(t)=-9.45*(e^-1.72*t-e^-0.95*t) done define g1(t)=diff(g(t),t) done define g2(t)=diff(g1(t),t) done solve(g1(t)=0,t) {t=0.7709319288} g2(t) {t=0.7709319288} -3.323343487 g(t) {t=0.7709319288} 2.033869943 </pre> <p>Beide Bedingungen sind für <math>t \approx 0,771</math> erfüllt.</p> <p>Der Zeitpunkt <math>t \approx 0,771</math> entspricht 46,26 Minuten nach Parköffnung, also ca. 9.46 Uhr.</p> <p>Da <math>g(0,771) \approx 2,0338</math> ist, betrug zu diesem Zeitpunkt der Besucherstrom zirka 2034 Besucher pro Stunde.</p> | 3 |
| 3e    | beurteilt die Richtigkeit der Behauptung.                                                                                             | <p>Werden die entsprechenden Funktionswerte von <math>g</math> zueinander ins Verhältnis gesetzt, erhält man:</p> $\frac{g(2)}{g(1)} \approx \frac{1,11}{1,96} \approx 0,57$ <p>Um 11.00 Uhr beträgt der Besucherstrom nur noch ca. 57% des Wertes von 10.00 Uhr. Die Abnahme des Besucherstroms ist <math>100\% - 57\% = 43\%</math> und damit kleiner als 60%. Die Aussage ist also falsch.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 2 |
| 3f    | berechnet den Zeitraum, in dem die zusätzlichen Kassen geöffnet sein müssen.                                                          | <pre> solve(g(t)=1.5,t) {t=0.3118322587,t=1.561105182} </pre> <p>Im Zeitraum zwischen <math>t_1 \approx 0,312</math> und <math>t_2 \approx 1,561</math> liegt der Wert für den Besucherstrom oberhalb von 1500 Besuchern pro Stunde. (Die zusätzlichen Kassen müssen zirka in der Zeit von 9.19 Uhr bis 10.34 Uhr geöffnet sein. – Die Angabe der Uhrzeiten ist nicht gefordert, es genügt, wenn die Zeitpunkte als Dezimalzahlen angegeben werden.)</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 2 |

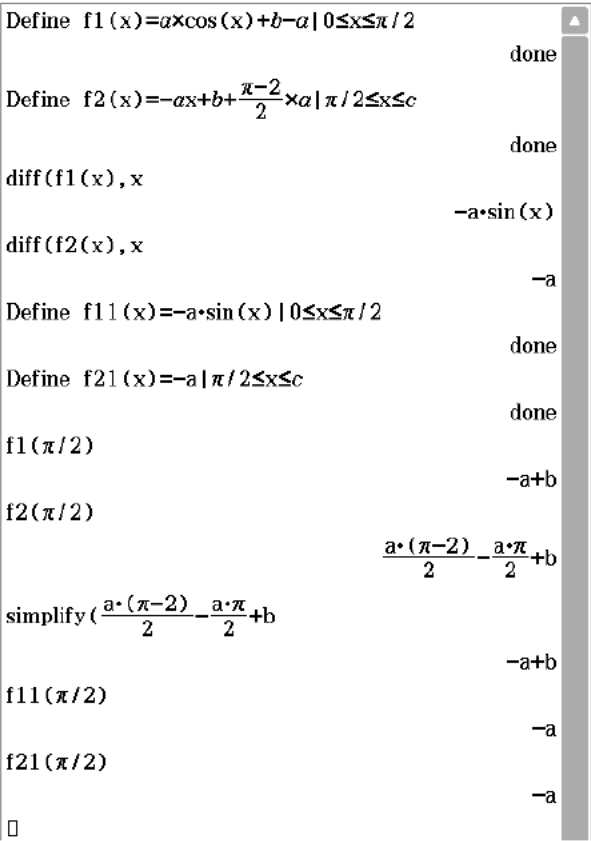
|    | Anforderungen                                                                                                                                                                                         | Modelllösungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |   |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| 3g | <p>erläutert, warum die Modellierung ab 15.00 Uhr bemängelt werden kann und ermittelt eine Funktionsgleichung <math>h(t)</math> und</p> <p>bestimmt den Zeitpunkt, zu dem kein Besucher mehr kam.</p> | <p>Der Funktionswert von <math>g</math> an der Stelle <math>t = 6</math> ist ungefähr 0,031 (entspricht 31 Besuchern). Dies steht jedoch im Widerspruch zur Aussage der Controllingabteilung, dass bereits ab 15.00 Uhr keine Besucher mehr kamen. Daher modelliert die Funktion <math>g</math> den Besucherstrom nicht mehr ausreichend.</p> <p>Damit der Graph der Funktion von <math>h</math> tangential an <math>g</math> anschließt, müssen an der Stelle <math>t = 5</math> die Funktions- und Steigungswerte von <math>g</math> und <math>h</math> übereinstimmen. Die Bedingungen: <math>h(5)=g(5)</math> und <math>m = g'(5)</math> führen zu dem folgenden LGS:</p> <pre>define h(t)=m*t+b done {h(5)=g(5)  m=g'(5)}   m, b {m=-0.07467813812, b=0.4534094105}</pre> <p>Die gesuchte Funktionsgleichung lautet:</p> $h(t) = -0,0747t + 0,4534.$ <p>Der Zeitpunkt, an dem kein Besucher mehr kam, entspricht der Nullstelle von <math>h</math>. Es ist also <math>h(t)=0</math> zu untersuchen.</p> <pre>solve(-0.0747*t+0.4534=0, t) {t=4534/747}</pre> <p>Mit der Modellierung durch <math>h</math> sind ab dem Zeitpunkt <math>t \approx 6,1</math> (ca. 15.06 Uhr – Angabe der Uhrzeit ist nicht gefordert) keine Besucher mehr gekommen.</p> | 4 |
| 3h | <p>weist nach, dass die Funktion <math>G</math> die Anzahl der Besucher zum Zeitpunkt <math>t</math> beschreibt.</p>                                                                                  | <p>Wenn <math>G</math> die Anzahl der Besucher zum Zeitpunkt <math>t</math> beschreibt, muss <math>G</math> eine Stammfunktion von <math>g</math> sein. Es ist also zu zeigen, dass <math>G'(t) = g(t)</math> ist. Das CAS liefert:</p> <pre>define G(t)=945/172*x*e^-1.72*t-189/19*e^-0.95*t+14553/3268 done diff(G(t), t) (189/20 * (43/25 * e^-1.72*t - 19/20 * e^-0.95*t)) - 267/100 * e^-1.72*t</pre> <p>Durch zwei Umformschritte ergibt sich:</p> $G'(t) = -\frac{189}{20} \cdot \left( -e^{\frac{43}{25}t} - \frac{267}{100} + e^{\frac{19}{20}t} - \frac{267}{100} \right) = -9,45 \cdot (e^{-1,72t} - e^{-0,95t}) = g(t)$ <p>Da beim Differenzieren additive Konstanten wegfallen, existieren zu integrierbaren Funktionen unendlich viele Stammfunktionen. Damit die Funktion <math>G</math> als Stammfunktion von <math>g</math> auch tatsächlich die Anzahl der Besucher beschreibt, muss die Anfangswertbedingung erfüllt sein. Da zum Zeitpunkt <math>t = 0</math> noch keine Besucher im Park sind, muss die additive Konstante so gewählt werden, dass <math>G(0)=0</math> ist. Auch das ist hier der Fall.</p>                                                                                                                           | 3 |
| 3i | <p>ermittelt, wie viele Freikarten verschenkt wurden und</p>                                                                                                                                          | <p>Die Gesamtzahl der Besucher, die bis 14.00 Uhr im Park waren, entspricht dem Funktionswert von <math>G</math> an der Stelle 5:</p> $G(5) \approx 4,3681.$ <p>Das entspricht über 4000 Besuchern. Es wurden also zwei Freikarten verschenkt.</p> <p style="text-align: right;"><i>Fortsetzung nächste Seite</i></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 3 |

|       | Anforderungen                                                                                                                                                                                                                                                                    | Modelllösungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |    |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| zu 3i | bestimmt die entsprechenden Zeitpunkte.                                                                                                                                                                                                                                          | <p>Um die Zeitpunkte zu ermitteln sind die Gleichungen <math>G(t) = 2</math> bzw. <math>G(t) = 4</math> nach <math>t</math> aufzulösen.</p> <pre>solve(G(t)=2, t)</pre> $\{t=-0.569700243, t=1.216915457\}$ <pre>solve(G(t)=4, t)</pre> $\{t=-0.7413416027, t=3.200689436\}$ <p>Die negativen Lösungen liegen außerhalb des Definitionsbereiches und sind nicht zu berücksichtigen. Die erste Freikarte wurde also zirka 1,2 Stunden (ca. 10.13 Uhr), die andere zirka 3,2 Stunden (ca. 12.12 Uhr) nach Parköffnung verschenkt. – Die Angabe der Uhrzeiten ist nicht gefordert.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |    |
| 3j    | <p>beschreibt, welchen Einfluss der Parameter <math>a</math> auf <math>G_a(t)</math> hat und untersucht, ob für <math>a</math> weitere Einschränkungen gelten und</p> <p>bestimmt den Parameter <math>a</math> so, dass eine Besucherzahl von 2000 nicht überschritten wird.</p> | <p>Nach der Faktorregel der Integralrechnung bleibt ein konstanter Faktor (<math>a \in \mathbb{R}</math>) beim Integrieren erhalten.</p> $\int a \cdot (e^{-1,72t} - e^{-0,95t}) dt = a \cdot \int (e^{-1,72t} - e^{-0,95t}) dt = G_a(t) + C$ <p>Der Faktor <math>a</math> beeinflusst also lediglich den Funktionswert von <math>G</math>. Da <math>G_a</math> die Anzahl der Besucher in 1000 Personen sein soll, sind nur positive Funktionswerte zur Beschreibung des Sachverhalts sinnvoll. Für Werte von <math>a &gt; 0</math> wird der gegebene Sachverhalt nicht beschrieben, da die Fläche zwischen dem Graphen von <math>g_a</math> und der Abszisse unterhalb der Abszisse liegt.</p> <p>Damit die Fläche die Gesamtbesucheranzahl angibt, muss daher <math>a &lt; 0</math> gelten.</p> <p>Folgende Gleichung ist zu lösen:</p> $a \cdot \int_0^5 (e^{-1,72t} - e^{-0,95t}) dt = 2 \Leftrightarrow a \approx -4,33.$ | 3  |
|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 33 |

Aufgabe 3 (Alternative 2): Freibad

|    | Anforderungen                                                                                                                                | Modelllösungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |    |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| A3 | Der Prüfling                                                                                                                                 | Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:<br>Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | BE |
| 3a | beschreibt die Prozesse.                                                                                                                     | <u>Befüllungsprozess:</u> Das Wasser läuft konstant mit einer Änderungsrate von $25,2 \text{ m}^3/\text{h}$ ein, das heißt das Becken füllt sich gleichmäßig, d.h. der Wasserspiegel steigt proportional zur Zeit.<br><u>Entleerungsprozess:</u> Das Wasser läuft mit abnehmender Änderungsrate ab, das heißt das Becken leert sich immer langsamer (bzw. im Laufe der Zeit fließt immer weniger Wasser pro h) ab. Zu Beginn hat die Änderungsrate einen Wert von $-57 \text{ m}^3/\text{h}$ . Der Entleerungsprozess endet nach ca. 40 Stunden.                                                                                                                                                                                                                                            | 3  |
| 3b | erläutert, dass die Tiefe nicht nachgemessen werden muss,<br><br>ermittelt die fehlenden Angaben und<br><br>berechnet die Tiefe des Beckens. | Für die rechnerische Ermittlung der Schwimmbeckenhöhe kann die gesamte abgelaufene Menge Wasser mittels Integralrechnung auf Basis der Funktion $e(t)$ ermittelt werden. Durch die Volumenformel $V = b \cdot l \cdot h$ lässt sich dann die Tiefe bzw. Höhe $h = \frac{V}{b \cdot l}$ berechnen.<br> <p><u>Entleerungsprozess</u><br/> Maximale Änderungsrate: <math>-57 \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{h}} \right]</math><br/> Dauer: 40 [h]<br/> <math>V = 760 \text{ m}^3</math><br/> Mittlere Änderungsrate: <math>19 \left[ \frac{\text{m}^3}{\text{h}} \right]</math><br/> <u>Befüllungsprozess</u><br/> Dauer: <math>\approx 30,16 \text{ [h]}</math><br/> <math>h = 1,90 \text{ [m]}</math></p> | 4  |

|    | Anforderungen                                                                                                           | Modelllösungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |   |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| 3c | bestimmt die Parameter a, b, c und d, gibt die Funktionsgleichung an und zeichnet den Graphen in das Koordinatensystem. | $a = \frac{32-27}{2} = 2,5 \quad b = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ $c = 3 - \frac{1}{4} \cdot 4 = 2 \quad d = \frac{32+27}{2} = 29,5$ $W(t) = 2,5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot (t - 2)\right) + 29,5 \text{ mit } t \in \mathbb{R}$                                                                                                                                                                                                                          | 6 |
| 3d | beurteilt die Beschwerde.                                                                                               | <pre>solve(28=1.5sin(5/6*pi*(t-1.2))+29.5 0&lt;=t&lt;=2.4,t {t=0.6} solve(30=1.5sin(5/6*pi*(t-1.2))+29.5 0&lt;=t&lt;=2.4,t {t=1.329808138,t=2.270191862} 1.33-0.6 0.73 0.73*60 43.8</pre> <p>Die Besucher haben mit ihrer Beschwerde Recht, der Zeitraum ist größer als 0,5 h (43,8 Minuten).</p>                                                                                                                                                                                                                                                       | 4 |
| 3e | weist nach, dass die Funktion f an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ knickfrei ist.                                        | $f'(x) = \begin{cases} -a \cdot \sin(x) & \text{mit } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -a & \text{mit } \frac{\pi}{2} \leq x \leq c \end{cases} \text{ mit } a, c, x \in \mathbb{R}$ <p>Bedingungen für einen knickfreien Übergang:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Bedingung: <math>f_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = f_2\left(\frac{\pi}{2}\right)</math></li> <li>2. Bedingung: <math>f_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f_2'\left(\frac{\pi}{2}\right)</math></li> </ol> <p style="text-align: right;"><i>Fortsetzung nächste Seite</i></p> | 5 |

|       | Anforderungen                                                                                                                                                                                 | Modelllösungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |   |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| zu 3e |                                                                                                                                                                                               | <p>Nachweis:</p>  <p>Da beide Bedingungen erfüllt sind, ist der Übergang knickfrei und vom Übergang geht somit keine Verletzungsgefahr aus.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |
| 3f    | <p>ermittelt die Bedingungen zur Bestimmung der Funktionsgleichung,</p> <p>stellt das zugehörige Gleichungssystem auf und</p> <p>erläutert, welchen Grad die Funktion maximal haben kann.</p> | <p>Aus den Anforderungen lassen sich vier Bedingungen formulieren:</p> <p>I <math>r_2(2,6) = h(2,6)</math><br/>         II <math>h'(2,6) = -2</math><br/>         III <math>h(3) = 0,05</math><br/>         IV <math>h'(3) = -\tan(15^\circ)</math></p> <p>Gleichungssystem:</p> $\begin{aligned} a \cdot 17,576 + b \cdot 6,76 + c \cdot 2,6 + d &= \pi - \frac{11}{5} \\ a \cdot 20,28 + b \cdot 5,2 + c &= -2 \\ a \cdot 27 + b \cdot 9 + c \cdot 3 + d &= 0,05 \\ a \cdot 27 + b \cdot 6 + c &= -0,267949 \end{aligned}$ <p>Mit vier unabhängigen Bedingungen ist ein LGS mit genau vier Parametern eindeutig lösbar. Daraus ergibt sich eine Funktion maximal dritten Grades.</p> <p><u>Hinweis:</u> Die Funktionsgleichung ist an dieser Stelle nicht gefragt. Bei allen gängigen CAS-Systemen gab es das Problem, dass der Definitionsbereich an den Rändern automatisch von kleiner gleich in echt kleiner geändert wurde. Damit sind die Funktionen am Definitionsrand nicht mehr definiert und somit auch nicht differenzierbar. Die Bedingungen I und IV sind dann nicht lösbar.</p> | 6 |

|    | Anforderungen                                                                                                         | Modelllösungen                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |    |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3g | <p>berechnet die nötigen Plattenabmessungen beider Alternativen und</p> <p>entscheidet sich für eine Alternative.</p> | <p>Extremwertproblem:</p> <p>Alternative 1:</p> $A(x) = r_1(x) \cdot x$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <pre>Define r(x)=2*cos(x)+3 done Define A(x)=x*r(x) done Define A1(x)=diff(A(x),x) done solve(A1(x) 0&lt;=x&lt;=pi/2 {x=1.535863128}</pre> </div> <p>□</p> $x \approx 1,5358 < 1,5708 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \in \mathbb{D}$ <p>Alternative 2:</p> $A(x) = r_2(x) \cdot x$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <pre>Define r(x)=-2x+3+pi done Define A(x)=x*r(x) done Define A1(x)=diff(A(x),x) done solve(A1(x) {x=1.535398163}</pre> </div> <p>□</p> $x \approx 1,5354 < 1,5708 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \notin \mathbb{D}$ <p>Die optimale Lösung liegt bei der Alternative 1. Bei der Alternative 2 liegt die optimale Lösung nicht im Definitionsbereich des zweiten Abschnittes der Funktion r.</p> <p>Aus <math>r_1(1,5358) = 3,07</math> ergeben sich folgende Plattenabmessungen:</p> <p>Breite: 1,54 m, Höhe: 3,07 m</p> | 5  |
|    |                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 33 |