

Name des Prüflings	
--------------------	--

Punkteverteilung Aufgabe 1:

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	i	gesamt
Erreichbar	4	4	4	3	2	5	4	4	4	34
Erstkorrektur										
Zweitkorrektur										

- a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades, deren Graph in Abbildung 1.1 dargestellt ist.

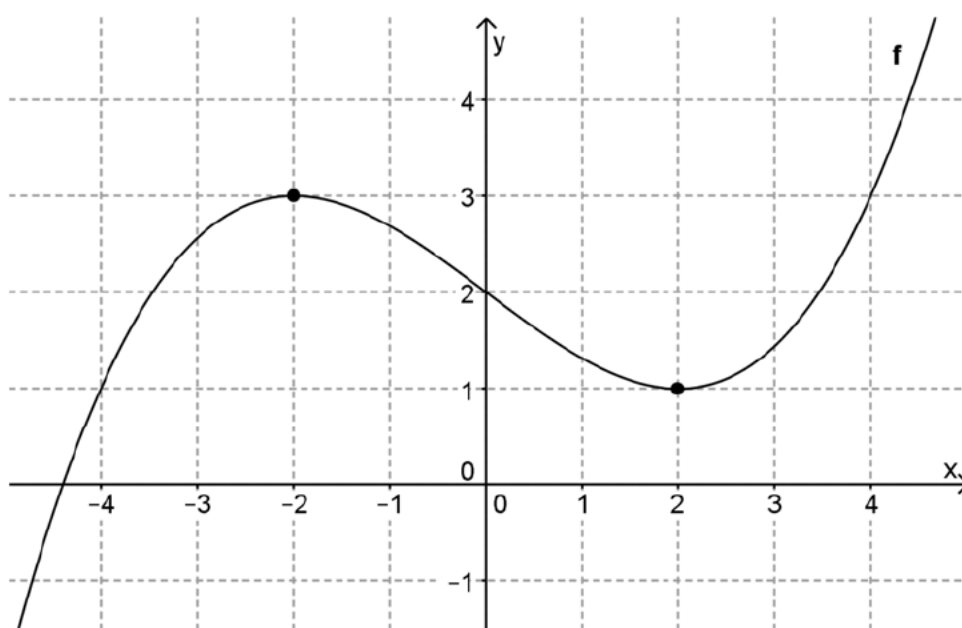


Abbildung 1.1

- b) Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).

	wahr	falsch						
Bei der Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot e^{-1,5} \cdot x + 15 \cdot e^2$ handelt es sich um eine Exponentialfunktion.								
Zu der Exponentialfunktion f mit der Gleichung $f(x) = 2^{3x+2}$ mit $x \in \mathbb{R}$ passt die folgende Wertetabelle: <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td>x</td><td>0</td><td>3</td></tr> <tr> <td>$f(x)$</td><td>4</td><td>512</td></tr> </table>	x	0	3	$f(x)$	4	512		
x	0	3						
$f(x)$	4	512						
Der Definitionsbereich der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = e^x$ besteht nur aus allen positiven reellen Zahlen.								
Der Graph der Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = a^{b \cdot x}$ mit $a, b, x \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ verläuft durch den Punkt $P(0 1)$.								

- c) Der Graph der Funktion $f(x) = 0,5x^3 - 2x$ mit $x \in \mathbb{R}$ schließt im Intervall $[1; b]$ mit $b \in \mathbb{R}$ ober- und unterhalb der x -Achse je eine Teilfläche ein.

Ermitteln Sie die Intervallgrenze $b > 2$, so dass die eingeschlossenen Flächen gleich groß sind.

- d) Im Koordinatensystem (Abbildung 1.2) ist der Graph einer Funktion f dargestellt. Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen der ersten Ableitungsfunktion f' in das untere Koordinatensystem.

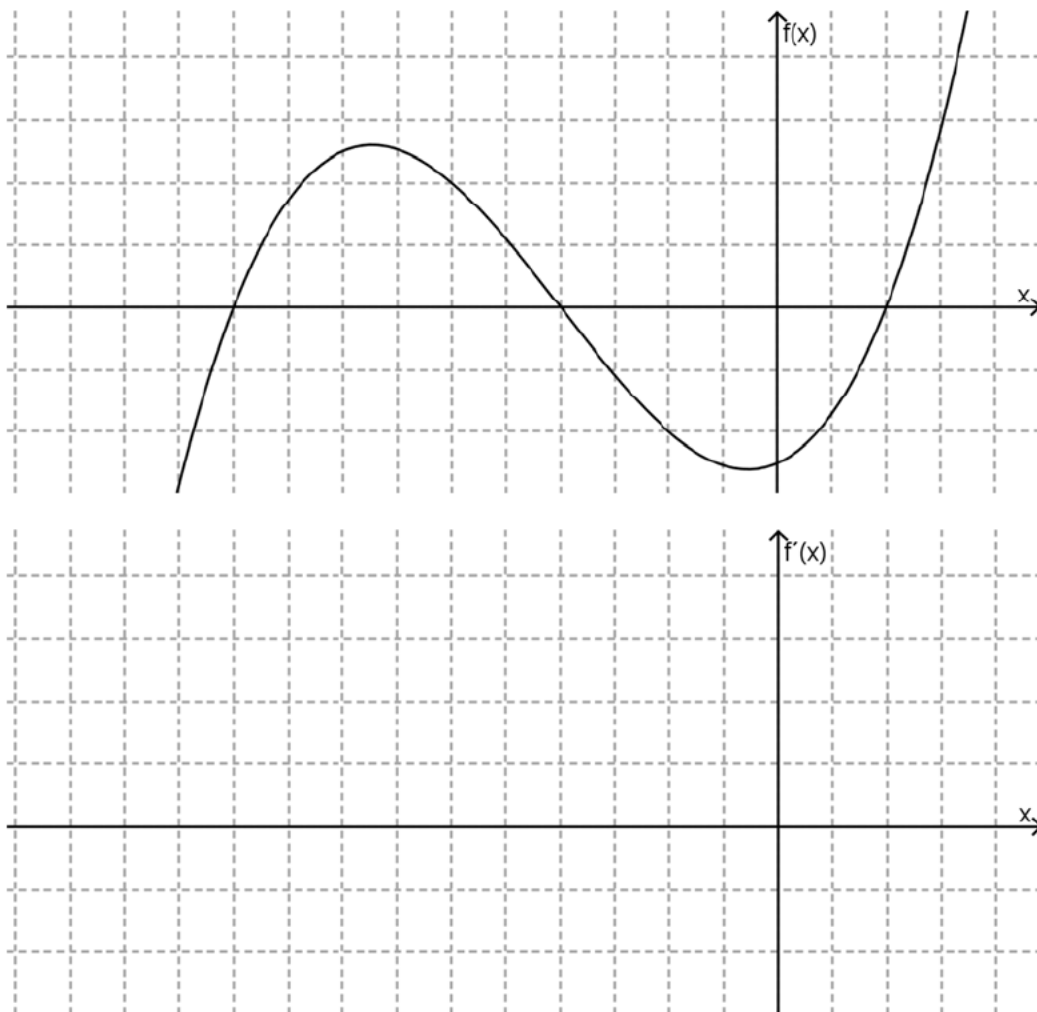


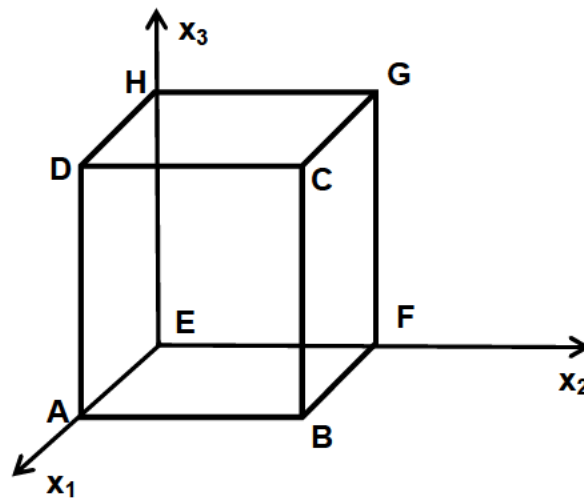
Abbildung 1.2

- e) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).

	wahr	falsch
Die Steigung eines Funktionsgraphen an einer Stelle x wird mit der ersten Ableitung berechnet.		
Eine Funktion kann an keiner Stelle die Steigung 100% haben, da es dann keine Funktion mehr wäre (der Graph würde senkrecht nach oben verlaufen).		

- f) Ein Quader mit den Eckpunkten $E(0|0|0)$ und $D(5|0|4)$ steht auf der x_1 - x_2 -Ebene (siehe Abbildung). Die Länge der Strecke $\overline{EF}$ beträgt 3 Längeneinheiten.



- Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte A und H an.
 - Ermitteln Sie das Volumen des Quaders.
 - Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene durch die Punkte D, E und F in Parameterform.
- g) Gegeben ist die Gerade g mit der Geradengleichung $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$.
- Überprüfen Sie, ob der Richtungsvektor der Geraden g ein Einheitsvektor ist.
 - Geben Sie einen anderen möglichen Richtungsvektor der Geraden g an.
 - Eine Gerade h entsteht dadurch, dass die Gerade g um zwei Längeneinheiten parallel zur x_3 -Achse nach oben verschoben wird.
Geben Sie eine Geradengleichung der Geraden h an.
 - Eine Gerade k verläuft durch den Punkt $P(3|1|4)$ und parallel zur x_1 -Achse.
Geben Sie eine Geradengleichung der Geraden k an.

- h) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{d} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Weisen Sie nach, dass sich der Vektor $\vec{d}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellen lässt und geben Sie die Linearkombination an.

- i) Gegeben sind die Geraden g und h mit den Geradengleichungen

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ y \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ mit } r, y \in \mathbb{R} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ mit } s \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie, für welches y die Geraden g und h keine Ebene bilden.

Punkteverteilung **Aufgabe 2: Fabrikhalle**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	5	3	3	3	4	5	4	6	33
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Ein zementverarbeitendes Unternehmen plant zur Ausweitung der Produktion den Neubau einer Fabrikhalle. Die Planung sieht hierzu folgende Eckpunkte des Gebäudes vor (alle Angaben in Metern):

Grundfläche: $A(30|20|0)$, $B(60|20|0)$, $C(60|60|0)$, $D(30|60|0)$,

Dach: $E(30|20|15)$, $F(60|20|22)$, $G(60|60|22)$, $H(30|60|15)$.

Die x_1 -Achse zeigt in südliche, die x_2 -Achse in östliche Richtung. Die Kanten des Gebäudes sollen geradlinig verlaufen.

- Zeichnen Sie von der Halle ein dreidimensionales Schrägbild.
Hinweis: Zeichnen Sie die x_1 -Achse für die Veranschaulichung nachfolgender Aufgaben bis $x_1 = 100$.
- Im Bauantrag müssen das Gebäudevolumen (der sog. „umbaute Raum“) sowie die Größe der Dachfläche angegeben werden. Der beauftragte Architekt hat hierfür die Werte 22200 m^3 bzw. ca. 1232 m^2 berechnet.
Weisen Sie nach, dass diese Werte richtig sind.

Um die laufenden Kosten für den Neubau zu reduzieren, wird überlegt, auf dem Hallendach eine Photovoltaikanlage zu installieren. Diese Anlage verwandelt das einfallende Sonnenlicht in Strom, der ins öffentliche Stromnetz eingespeist werden kann, wodurch das Unternehmen zusätzliche Einnahmen erzielen würde.

- Für die Photovoltaikanlage soll eine elektrische Leitung so installiert werden, dass sie im Mittelpunkt M der Dachfläche beginnend zunächst geradlinig zum Mittelpunkt der Kante $\overline{EF}$ verläuft und danach entlang der Kante $\overline{EF}$ zum Endpunkt E geführt wird. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes M sowie die Leitungslänge.
- Um die Fläche für die Photovoltaikanlage zu vergrößern, wird überlegt, die Höhe des Hallendachfirstes $\overline{FG}$ über der x_1 - x_2 -Ebene zu vergrößern.
Bestimmen Sie die benötigte Höhe des Dachfirstes $\overline{FG}$, damit das Hallendach eine Fläche von 1600 m^2 hat.

Das Grundstück wurde durch das Unternehmen deshalb ausgewählt, da es direkt an das geradlinige Ufer eines Flusses grenzt, das 40 m südlich von der Hallenwand BCGF entfernt parallel zur x_2 -Achse verläuft. Die transporttechnisch günstige Lage soll dazu genutzt werden, um Rohstoffe per Schiff anzuliefern und mit Hilfe eines geradlinigen Förderbandes zur Halle zu befördern. Der Anfangspunkt des Förderbandes soll sich am Flussufer im Punkt $P(100|50|0)$ befinden.

- e) Erläutern Sie, warum die folgende Geradengleichung geeignet ist, den Uferverlauf mathematisch zu modellieren:

$$g_U: \vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeichnen Sie den Uferverlauf in das Koordinatensystem aus Aufgabenteil a).

Weisen Sie rechnerisch nach, dass sich der Punkt P am Flussufer befindet.

- f) Auf dem Grundstück befindet sich ein lotrechter Pfeiler mit dem Endpunkt $S(90|50|5)$, der aufgrund seiner Stabilität sehr gut zum Abstützen des Förderbandes geeignet ist. Zeigen Sie, dass das Förderband die uferseitige Hallenwand BCGF erreichen wird.
- g) Die Planung der Halle sieht vor, dass das Förderband im Punkt $Q(60|50|20)$ die Hallenwand BCGF erreicht. Zeigen Sie, dass der Startpunkt P am Flussufer so gewählt wurde, dass das Förderband möglichst kurz ist.

Die Leistung des geplanten Förderbandes (gemessen in Tonnen (t) pro Stunde (h)) beträgt laut Herstellerangaben bei waagerechtem Verlauf 800 t/h. Bei schrägem Verlauf ist die Leistung jedoch geringer. Zur Berechnung der Förderbandleistung ist der maximale Leistungswert von 800 t/h mit einem Faktor c zu multiplizieren, der vom Neigungswinkel α des Förderbandes gegenüber der Horizontalen abhängt. Laut Herstellerangaben kann der Faktor c für Winkel bis maximal 30° mithilfe folgender ganzrationaler Funktion berechnet werden:

$$c(\alpha) = -0,000001\alpha^4 + 0,000032\alpha^3 - 0,000616\alpha^2 - 0,001216\alpha + 1$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und $0 \leq \alpha \leq 30$.

- h) Beschreiben Sie die Abhängigkeit der Entladezeit eines Frachters vom Neigungswinkel des Förderbandes.

Weisen Sie nach, dass das geplante Förderband vom Punkt $P(100|50|0)$ zum Punkt $Q(60|50|20)$ einen Neigungswinkel von $\alpha \approx 26,56^\circ$ hat.

Berechnen Sie, wie lange es dauert, einen Zementfrachter mit einer Ladung von 6000 t zu entladen.

Name des Prüflings	
--------------------	--

Punkteverteilung **Aufgabe 1:**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	gesamt
erreichbar	4	4	4	3	2	3	3	3	3	3	2	34
Erstkorrektur												
Zweitkorrektur												

- a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades, deren Graph in Abbildung 1.1 dargestellt ist.

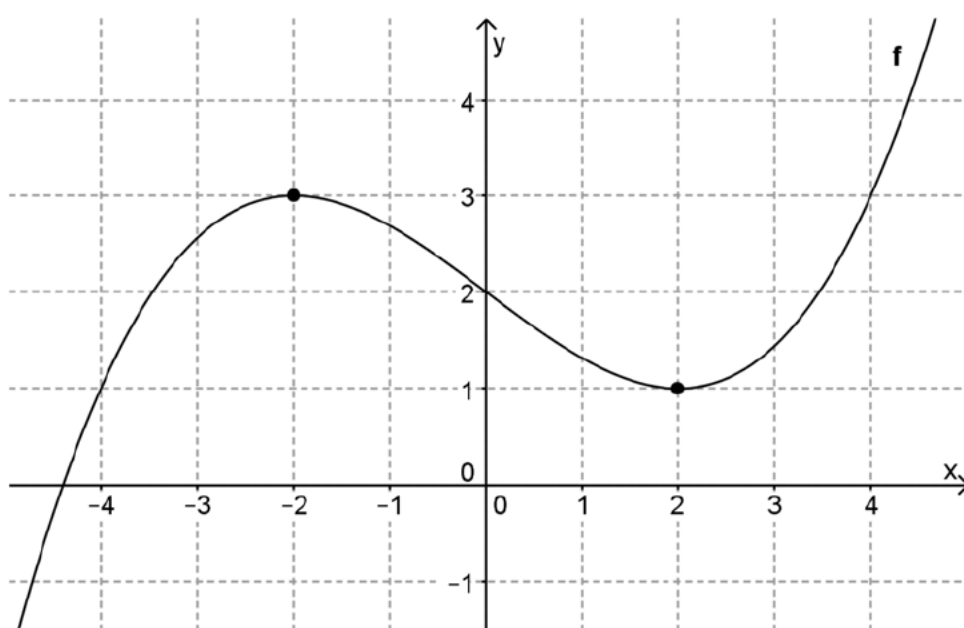


Abbildung 1.1

- b) Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).

	wahr	falsch						
Bei der Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot e^{-1,5} \cdot x + 15 \cdot e^2$ handelt es sich um eine Exponentialfunktion.								
Zu der Exponentialfunktion f mit der Gleichung $f(x) = 2^{3x+2}$ mit $x \in \mathbb{R}$ passt die folgende Wertetabelle: <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td>x</td><td>0</td><td>3</td></tr> <tr> <td>f(x)</td><td>4</td><td>512</td></tr> </table>	x	0	3	f(x)	4	512		
x	0	3						
f(x)	4	512						
Der Definitionsbereich der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = e^x$ besteht nur aus allen positiven reellen Zahlen.								
Der Graph der Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = a^{b \cdot x}$ mit $a, b, x \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ verläuft durch den Punkt $P(0 1)$.								

- c) Der Graph der Funktion $f(x) = 0,5x^3 - 2x$ mit $x \in \mathbb{R}$ schließt im Intervall $[1; b]$ mit $b \in \mathbb{R}$ ober- und unterhalb der x -Achse je eine Teilfläche ein.

Ermitteln Sie die Intervallgrenze $b > 2$, so dass die eingeschlossenen Flächen gleich groß sind.

- d) Im Koordinatensystem (Abbildung 1.2) ist der Graph einer Funktion f dargestellt. Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen der ersten Ableitungsfunktion f' in das untere Koordinatensystem.

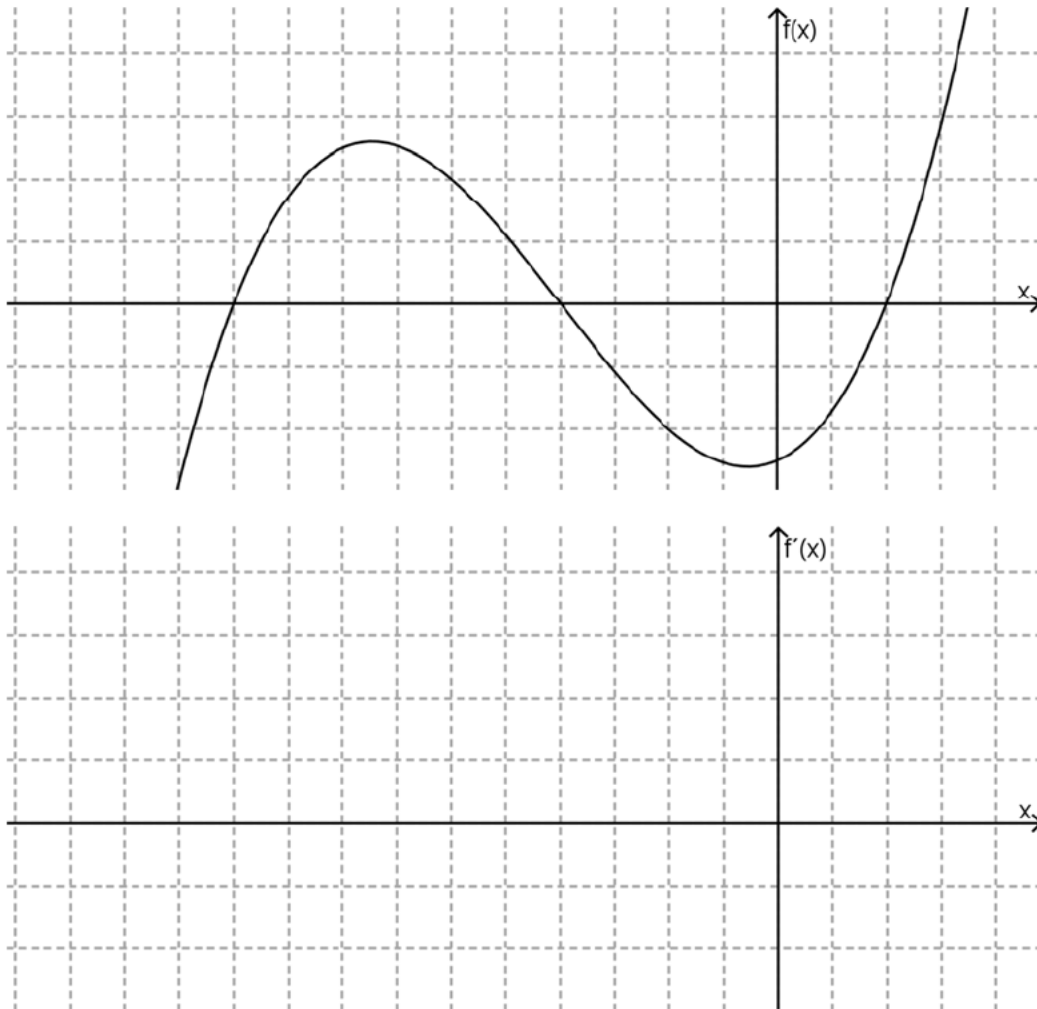


Abbildung 1.2

- e) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).

	wahr	falsch
Die Steigung eines Funktionsgraphen an einer Stelle x wird mit der ersten Ableitung berechnet.		
Eine Funktion kann an keiner Stelle die Steigung 100% haben, da es dann keine Funktion mehr wäre (der Graph würde senkrecht nach oben verlaufen).		

f) Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 11 & -25 & 12 \\ 10 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ermitteln Sie die Zahlenwerte $r, s \in \mathbb{R}$ so, dass die Gleichung $r \cdot A + s \cdot B = C$ gilt.

g) Bestimmen Sie die Matrixelemente $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass die Matrix B die Inverse zur Matrix A ist.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

h) Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ x & y \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Matrix A so, dass $A \cdot B = B \cdot A$ gilt.

i) Weisen Sie durch Umstellen der Matrixgleichung $2 \cdot C = C \cdot A - B$ nach, dass für die Matrix $C = B \cdot (A - 2 \cdot E)^{-1}$ gilt.

j) Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,7 \\ 0,5 & 0 & 0,3 \end{pmatrix}$.

Ermitteln Sie die Matrix A^4 und erläutern Sie, ob es sich bei den Matrizen A und A^4 um stochastische Matrizen handelt.

k) Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $A^2 = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & -4 & 2 \\ 8 & 3 & -8 \\ 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}$.

Prüfen Sie durch Rechnung die Richtigkeit des gekennzeichneten Elementes in der Matrix A^2 .

Punkteverteilung Aufgabe 2: Kundenzufriedenheit

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	5	4	2	4	3	7	3	5	33
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Das Möbelhaus „Schanz“ beauftragt ein Marktforschungsunternehmen die Kundenzufriedenheit mit den monatlich wechselnden Sonderangeboten zu untersuchen. Anhand von Erfahrungen bereits erfolgter Untersuchungen von 1040 Kunden kann das Marktforschungsunternehmen die monatliche Änderung der Kundenzufriedenheit wie folgt darstellen:

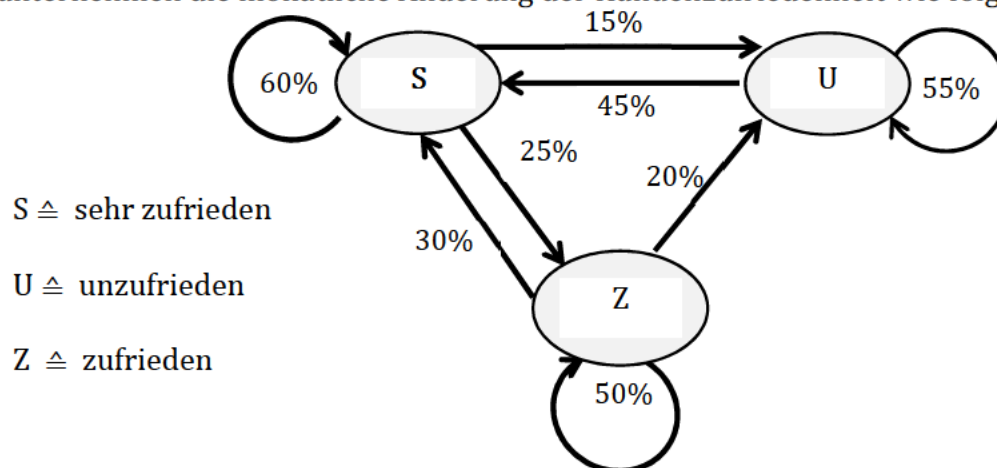


Abbildung 2.1

Zu Beginn der Untersuchung waren von den 1040 Kunden 200 Kunden sehr zufrieden und 340 Kunden waren zufrieden. Die Verteilung der Kunden wird durch den Vektor $\vec{v}$ und das Änderungsverhalten der Kundenzufriedenheit wird durch die Matrix A beschrieben.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} S & U & Z \end{matrix} \\ \begin{matrix} S \\ U \\ Z \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,60 & 0,45 & 0,30 \\ 0,15 & 0,55 & 0,20 \\ 0,25 & 0 & 0,50 \end{pmatrix} \end{matrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} S \\ U \\ Z \end{pmatrix}$$

- a) Erläutern Sie anhand eines ausgewählten Elementes der Matrix A, warum diese Matrix das Änderungsverhalten der Kundenzufriedenheit wiedergibt.

Ermitteln Sie auch die fehlenden Werte in der Tabelle 2.1.

Änderungsverhalten der Kundenzufriedenheit (Anzahl der Kunden)		Beginn der Untersuchung			Kundenanzahl
		S	U	Z	
nach einem Monat	S	120	225		
	U		275	68	
	Z		0	170	
Kundenanzahl:		200	500	340	1040

Tabelle 2.1

- b) Ermitteln Sie A^2 und interpretieren Sie diese Matrix im Sachzusammenhang. Erläutern Sie auch die erste Zeile Ihrer Matrix A^2 im Sachzusammenhang.

Zu Beginn der Umfrage wurden 1040 Kunden befragt. 200 Kunden gaben an, sehr zufrieden zu sein und 340 Kunden waren zufrieden.

- c) Ermitteln Sie die voraussichtliche Anzahl sehr zufriedener, unzufriedener und zufriedener Kunden nach sechs Monaten.
- d) Prüfen Sie, ob der Seniorchef Recht hat, wenn er behauptet, dass schon ein Jahr nach Beginn der Untersuchung nur noch etwa 25% aller Kunden unzufrieden sein werden.
- e) Untersuchen Sie, ob die Verteilung von 200 sehr zufriedenen Kunden, 500 unzufriedenen Kunden und 340 zufriedenen Kunden aus einer Verteilung des Vormonats entstanden sein kann (unter der Voraussetzung, dass das Änderungsverhalten der Kundenzufriedenheit durch die Matrix A beschrieben werden kann).
- f) Ergänzen Sie die Wertetabelle 2.2, der man entnehmen kann, wie viele zufriedene Kunden in den ersten sechs Monaten zu erwarten sind, unter der Voraussetzung, dass das Übergangsverhalten der Kundschaft unverändert bleibt.

nach ... Monat/en	1	2	3	4	5	6
Anzahl zufriedener Kunden (Z)						

Wertetabelle 2.2

Stellen Sie diesen Sachverhalt graphisch dar.

Beurteilen Sie, ob eine längerfristige Vorhersage bezüglich der Anzahl zufriedener Kunden mit Hilfe der ganzrationalen Funktion K mit der Gleichung:

$$K(t) \approx -0,7037t^3 + 6,6746t^2 - 10,0503t + 223,333 \text{ mit } t \in \mathbb{R},$$

wobei K die Anzahl zufriedener Kunden und t die Zeit in Monaten angibt, dargestellt werden kann.

- g) Untersuchen Sie, wie sich die Anzahl der sehr zufriedenen Kunden, der zufriedenen Kunden und der unzufriedenen Kunden langfristig entwickeln wird.

Durch eine gezielte Imagewerbung möchte das Marktforschungsunternehmen den Anteil der unzufriedenen Kunden senken. Bei der Untersuchung wird das Änderungsverhalten, das durch die Matrix A beschrieben wird, zunächst vorausgesetzt. Es wird aber angenommen, dass 10% der unzufriedenen Kunden nach dieser Imagewerbung zufrieden sein werden. Der Anteil der unzufrieden bleibenden Kunden soll entsprechend gesenkt werden. Vor der Einführung der Marketingmaßnahme waren 447 Kunden sehr zufrieden, 373 Kunden unzufrieden und 220 Kunden zufrieden.

- h) Weisen Sie nach, dass schon nach dem ersten Monat der Einführung der Marketingmaßnahme, unter der Annahme, dass zu Beginn von insgesamt 1040 Kunden 200 Kunden sehr zufrieden und 340 Kunden zufrieden sind, die Anzahl der unzufriedenen Kunden zugunsten der zufriedenen Kunden gesenkt werden kann.

Name des Prüflings	
--------------------	--

Punkteverteilung Aufgabe 1:

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	4	4	4	3	2	4	7	6	34
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

- a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades, deren Graph in Abbildung 1.1 dargestellt ist.

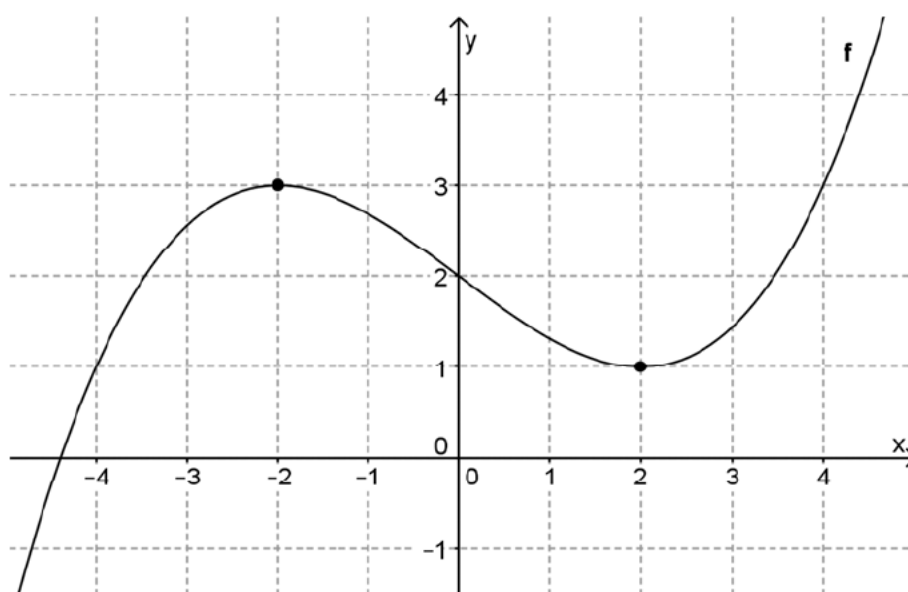


Abbildung 1.1

- b) Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).

	wahr	falsch						
Bei der Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot e^{-1,5} \cdot x + 15 \cdot e^2$ handelt es sich um eine Exponentialfunktion.								
Zu der Exponentialfunktion f mit der Gleichung $f(x) = 2^{3x+2}$ mit $x \in \mathbb{R}$ passt die folgende Wertetabelle: <table> <tr> <td>x</td><td>0</td><td>3</td></tr> <tr> <td>$f(x)$</td><td>4</td><td>512</td></tr> </table>	x	0	3	$f(x)$	4	512		
x	0	3						
$f(x)$	4	512						
Der Definitionsbereich der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = e^x$ besteht nur aus allen positiven reellen Zahlen.								
Der Graph der Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = a^{b \cdot x}$ mit $a, b, x \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ verläuft durch den Punkt $P(0 1)$.								

- c) Der Graph der Funktion $f(x) = 0,5x^3 - 2x$ mit $x \in \mathbb{R}$ schließt im Intervall $[1; b]$ mit $b \in \mathbb{R}$ ober- und unterhalb der x-Achse je eine Teilfläche ein.

Ermitteln Sie die Intervallgrenze $b > 2$, so dass die eingeschlossenen Flächen gleich groß sind.

- d) Im Koordinatensystem (Abbildung 1.2) ist der Graph einer Funktion f dargestellt. Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen der ersten Ableitungsfunktion f' in das untere Koordinatensystem.

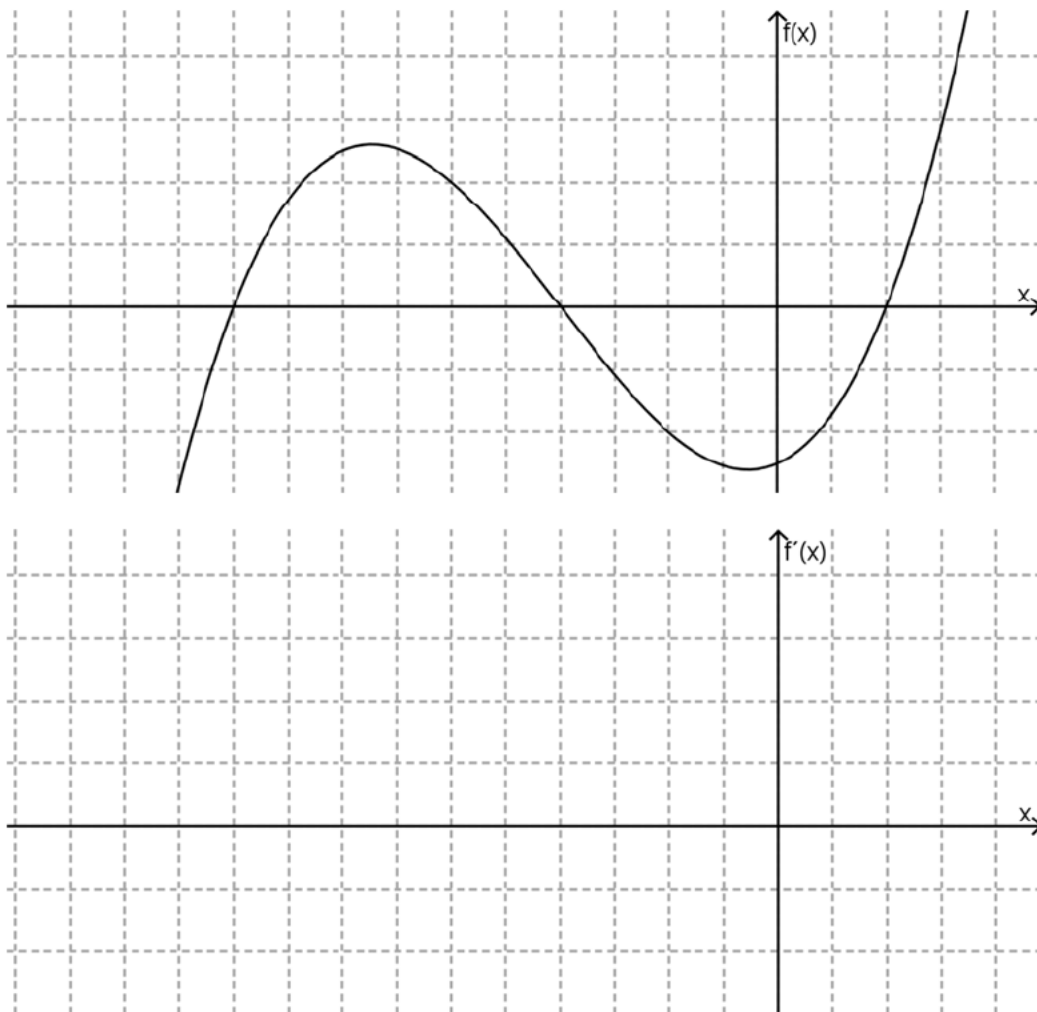


Abbildung 1.2

- e) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).

	wahr	falsch
Die Steigung eines Funktionsgraphen an einer Stelle x wird mit der ersten Ableitung berechnet.		
Eine Funktion kann an keiner Stelle die Steigung 100% haben, da es dann keine Funktion mehr wäre (der Graph würde senkrecht nach oben verlaufen).		

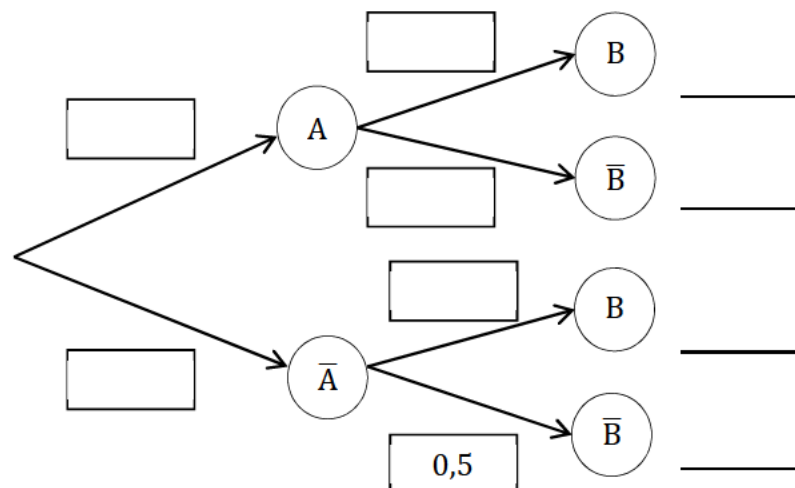
f) Eine Zufallsgröße X hat die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,32	0,36	a

- Begründen Sie, dass $a = 0,32$ gelten muss.
- Weisen Sie nach, dass der Erwartungswert $E(X) = 1$ ist.
- Berechnen Sie die Standardabweichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X .

g) Betrachtet werden die Ereignisse A und B mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten:
 $P(A) = 0,2$, $P(A \cap B) = 0,125$ und $P(\bar{A} \cap B) = 0,4$.

- Beschriften Sie das vorgegebene Baumdiagramm mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.
- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit $P(B)$.



h) Für eine binomialverteilte Zufallsgröße wird die Nullhypothese $H_0: p = 0,4$ gegen $H_1: p \neq 0,4$ bei einem Stichprobenumfang von $n = 50$ getestet. Als Annahmebereich von H_0 wird die Menge $A = \{13; 14; 15; \dots; 27\}$ festgelegt.

- Geben Sie den Ablehnungsbereich an.
- Ermitteln Sie die Irrtumswahrscheinlichkeit.
- Bei der Testdurchführung wurden 12 Erfolge gezählt. Beurteilen Sie dieses Ergebnis.

Punkteverteilung Aufgabe 2: Aufmerksamkeitsdefizitstörung (ADHS)

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	gesamt
Erreichbar	3	7	3	6	3	3	8	33
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

Eine Aufmerksamkeitsdefizit-Hyperaktivitätsstörung auch Aufmerksamkeitsdefizit-Hyperaktivitätssyndrom, kurz ADHS, wird seit Beginn der 90er Jahre bei immer mehr Kindern diagnostiziert. Dabei handelt es sich um eine psychische Störung, die sich durch Probleme mit der Aufmerksamkeit, Impulsivität und Hyperaktivität auszeichnet. Über die Häufigkeit des Vorkommens herrscht große Unsicherheit. Da es keine objektiven Diagnosekriterien gibt, ist die Angabe einer Krankheitshäufigkeit (Prävalenz) schwierig. Kinderärzte gehen heute von einer durchschnittlichen Häufigkeit von 3,9% bei Kindern aus, bei denen ADHS diagnostiziert wird.

- a) Erläutern Sie, unter welchen Voraussetzungen die Anzahl X von Kindern, bei denen ADHS diagnostiziert wurde, als binomialverteilte Zufallsgröße betrachtet werden kann.

Schülerinnen und Schüler eines Beruflichen Gymnasiums mit dem Profulfach „Gesundheit“ haben für ihr fächerübergreifendes Projekt das Thema „ADHS“ gewählt und besuchen daher eine Kindertagesstätte. Die Leiterin der Kindertagesstätte begleitet die Schülerinnen und Schüler während ihres Besuches in eine Gruppe von 26 Kindern.

- b) Ermitteln Sie unter der Annahme, dass eine Binomialverteilung vorliegt und man von einer durchschnittlichen Prävalenz von 3,9% ausgeht, folgende Werte:
- Die Anzahl der Kinder mit ADHS, die man in dieser Gruppe erwarten kann.
 - Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in dieser Gruppe genau zwei Fälle von ADHS vorliegen.
 - Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in dieser Gruppe mindestens ein Fall von ADHS auftritt.
 - Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens ein Fall und weniger als vier Fälle von ADHS auftreten.

Die Leitung der Kindertagesstätte möchte bereits bei der Einteilung der Gruppen die mögliche Anzahl von Kindern mit ADHS berücksichtigen, um diesen Kindern auch die notwendige Fürsorge durch ausreichendes Personal zukommen zu lassen.

- c) Berechnen Sie die maximale Gruppengröße, so dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 70% kein Kind mit ADHS in der Gruppe ist.

Eine Umfrage unter den Eltern der Kindertagesstätte ergab, dass von den insgesamt 120 Kindern acht Kinder die Diagnose ADHS haben. Die Leiterin behauptet daher, dass der Anteil der Kinder mit ADHS in ihrer Einrichtung wesentlich höher liegt als bisher angenommen bei 3,9%.

- d) Widerlegen Sie mit Hilfe eines geeigneten Testverfahrens und einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 2% die Behauptung der Leiterin.
- e) In einer Fachzeitschrift hat die Leiterin gelesen, dass das Verhältnis bei ADHS betroffenen Kindern von Jungen zu Mädchen 3:1 beträgt.
Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Jungen mit ADHS bei 2,925% liegt, wenn weiterhin eine durchschnittliche Häufigkeit von ADHS von 3,9% zugrunde gelegt wird.
- f) Von den insgesamt 120 Kindern der Kindertagesstätte sind 66 Jungen. Die Leiterin sagt auf einer Teambesprechung, dass aufgrund dieser Zahlen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Kind der Kindertagesstätte ein Junge oder ein Kind mit ADHS ist, über 50% beträgt.
Entscheiden Sie begründet, ob die Aussage der Leiterin zutrifft, wenn weiterhin die Wahrscheinlichkeit für einen Jungen mit ADHS bei 2,925% liegt.

Die Häufigkeit von ADHS ist auch vom Alter der Kinder bzw. jungen Menschen abhängig. Basierend auf Statistiken aus dem Jahr 2011 wurde zur Beschreibung des altersbedingten Anteils von männlichen Personen mit ADHS die Funktion H mit der Funktionsgleichung

$$H(t) = \begin{cases} -0,005t^4 + 0,09t^3 - 0,3t^2 + 0,65t & \text{mit } t \in \mathbb{R} \text{ und } 0 \leq t \leq 8, \\ 0,01t^3 - 0,5t^2 + 7t - 17,5 & \text{mit } t \in \mathbb{R} \text{ und } 8 < t \leq 22, \end{cases}$$

ermittelt. Dabei gibt t das Alter in Jahren und $H(t)$ die Häufigkeit von ADHS in Prozent an.

- g) Stellen Sie die Häufigkeitsverteilung $H(t)$ graphisch dar.
Berechnen Sie das Alter, in dem der Anteil an männlichen Personen mit ADHS am höchsten ist, und geben Sie den höchsten Anteil an.
Weisen Sie nach, dass im Alter von 16 Jahren bis 17 Jahren die Häufigkeit von ADHS am stärksten abnimmt.

Name des Prüflings

Punkteverteilung Aufgabe 3: Freibad

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	gesamt
Erreichbar	4	6	2	3	6	5	7	33
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

Das beheizte Freibad einer Gemeinde wirbt mit einer Wassertemperatur von $28^\circ\text{C} - 30^\circ\text{C}$.

Die Wassertemperatur wird mittels eines Zweipunktreglers reguliert. Dieser sorgt dafür, dass die Heizanlage das Wasser erwärmt, sobald dessen Temperatur unter einen bestimmten Wert fällt. Außerdem schaltet der Zweipunktreger die Heizanlage wieder ab, wenn eine bestimmte Temperatur überschritten wird.

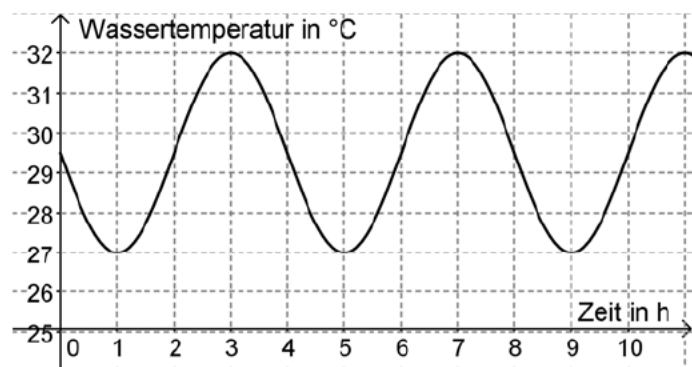


Abbildung 3.1

Der Verlauf der Wassertemperatur in Abhängigkeit von der Zeit lässt sich durch eine Sinusfunktion mit der allgemeinen Gleichung

$$W(t) = a \cdot \sin(b \cdot (t + c)) + d \quad \text{mit } a, b, c, d, t \in \mathbb{R}$$

beschreiben. Dabei gibt t die Zeit in Stunden und $W(t)$ die Wassertemperatur in $^\circ\text{C}$ an. Für die vergangenen Stunden wurde die Temperatur kontrolliert und gemäß der Abbildung 3.1 dokumentiert.

- a) Bestimmen Sie die Parameter $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ anhand des Kurvenverlaufs in Abbildung 3.1.

Die Besucher kritisieren, dass die zugesicherte Temperatur von $28^\circ\text{C} - 30^\circ\text{C}$ nicht eingehalten wird. Ein Techniker sichert zu, den Regler des Heizsystems neu einzustellen. Der neue Verlauf der Wassertemperatur lässt sich in Abhängigkeit von der Zeit t nun mit der Funktionsgleichung

$$N(t) = 1,5 \cdot \sin\left(\frac{5}{6} \pi \cdot (t - 1,2)\right) + 29,5 \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}$$

beschreiben. Dabei gibt t die Zeit in Stunden und $N(t)$ die Wassertemperatur in $^\circ\text{C}$ an.

- b) Bestimmen Sie die minimale und maximale Wassertemperatur bei der neuen Reglereinstellung $N(t)$ und vergleichen Sie die beiden Reglereinstellungen $N(t)$ und $W(t)$ hinsichtlich der zugesicherten Temperatur von $28^\circ\text{C} - 30^\circ\text{C}$.

Berechnen Sie für die Reglereinstellung $N(t)$ die Zeitpunkte, an denen die Wassertemperatur am höchsten bzw. am niedrigsten innerhalb der ersten zwei Stunden ist.

Der Bauausschuss der Gemeindevertretung plant für das nächste Jahr eine Rutsche am Spielbecken neu zu installieren. Eine klassische Wasserrutsche lässt sich in drei Bereiche einteilen: dem Startabschnitt, dem Rutschabschnitt mit konstantem Gefälle und der Auslaufzone.

Ein Ingenieurbüro hat für die beiden ersten Abschnitte folgende Funktion erstellt (mit $f(x)$ und x in Metern, Abszisse als Wasserspiegel):

$$f(x) = \begin{cases} -0,5x^2 + 4,5 & \text{mit } 0 \leq x \leq 1,5 \\ -1,5x + 5,625 & \text{mit } 1,5 \leq x \leq 2,8 \end{cases} \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}^+.$$

- c) Stellen Sie die ersten beiden Abschnitte der Wasserrutsche im nachfolgenden Koordinatensystem (Abb. 3.2) graphisch dar.

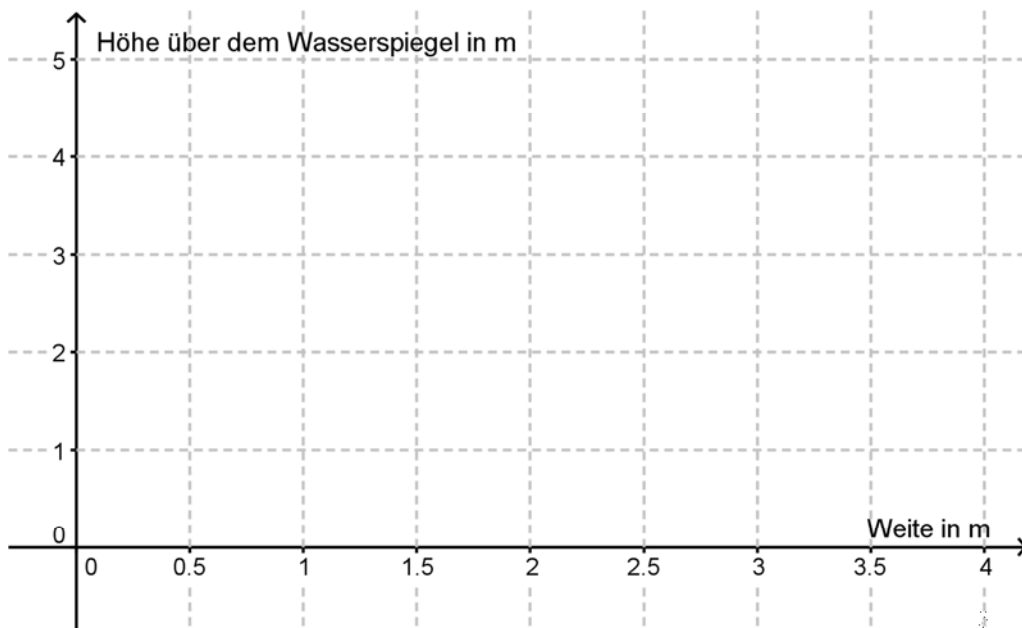


Abbildung 3.2

Das Ingenieurbüro verspricht, dass dieses Modell einen knickfreien Übergang zwischen den ersten beiden Abschnitten gewährleistet.

- d) Weisen Sie nach, dass der Übergang wirklich knickfrei ist.

Für die Auslaufzone bittet der Ausschuss folgende Auflagen zu berücksichtigen:

- die Steigung im Übergang vom Rutschabschnitt zur Auslaufzone muss $m = -1,5$ betragen,
- Ende der Auslaufzone bei einer Weite von 3,5 m und 0,05 m über dem Wasserspiegel,
- am Ende der Auslaufzone soll die Steigung noch $m = -0,2$ betragen.

Das Planungsbüro ist der Meinung, den Verlauf der Auslaufzone unter Einbeziehung aller vorgegebenen Auflagen durch eine ganzrationale Funktion h dritten Grades modellieren zu können.

- e) Erläutern Sie, warum eine ganzrationale Funktion dritten Grades geeignet ist.

Bestimmen Sie den Funktionsterm der Funktion h unter Einbeziehung aller vorgegebenen Auflagen.

Das quaderförmige Schwimmbecken des Freibades wird regelmäßig zu Beginn der Saison vollständig befüllt und zum Ende der Saison wieder vollständig entleert. Unter den technischen Aufzeichnungen des Freibades finden sich folgende Datenblätter:

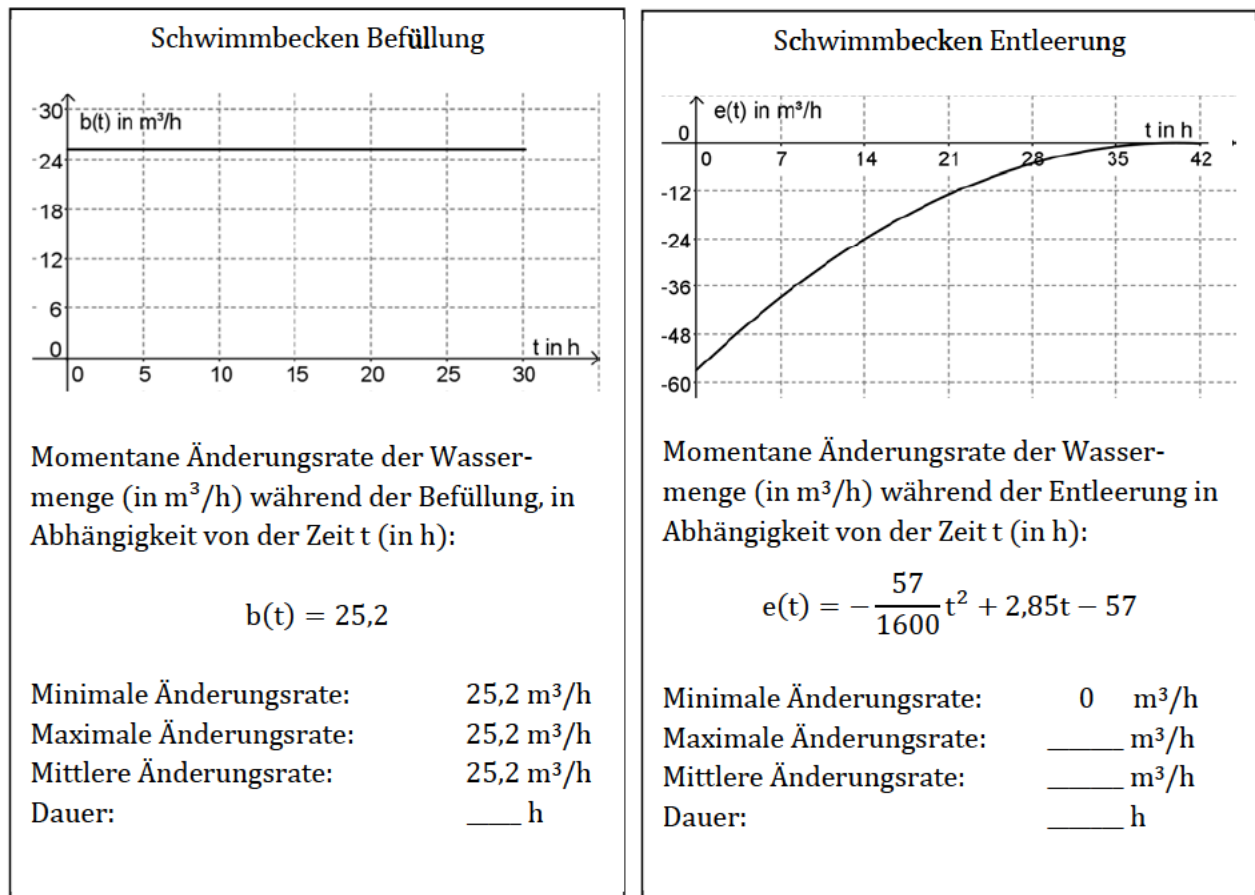


Abbildung 3.3

- f) Beschreiben Sie sowohl den Befüllungs- als auch den Entleerungsprozess des Schwimmbeckens im Sachkontext der gegebenen Datenblätter.

Die Gemeindevertretung möchte, dass die Datenblätter ergänzt werden und teilt der technischen Abteilung die Maße des Schwimmbeckens mit. Es ist 25 m lang und 16 m breit. Bei der Tiefe ist sich die Gemeinde nicht ganz sicher, sie vermutet eine Tiefe von 1,85 m. Sie würde aber noch einmal nachmessen lassen wollen. Ein Mitarbeiter der technischen Abteilung versichert der Gemeinde, dass ein Nachmessen nicht nötig sei, da er mit Hilfe der Funktion $e(t)$ (siehe Abb. 3.3) die vollständige Wassermenge des Schwimmbeckens bestimmen kann.

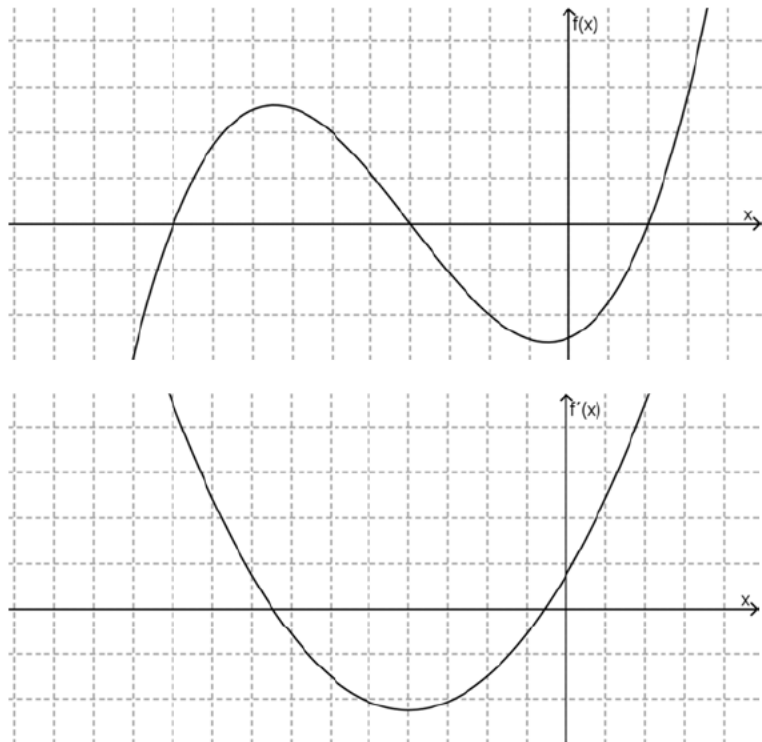
- g) Weisen Sie nach, dass das Schwimmbecken eine Gesamtwassermenge von 760 m³ beinhaltet.

Erläutern Sie, wie der Mitarbeiter mit Hilfe der Gesamtwassermenge die Tiefe des Beckens bestimmen kann und bestimmen Sie die Tiefe.

Ermitteln Sie die fehlenden vier Angaben der Datenblätter.

Aufgabe 1 mit Analytischer Geometrie:

	Anforderungen	Modelllösungen																	
A1	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. Bemerkung: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	BE																
1a	bestimmt eine ganzrationale Funktion dritten Grades.	$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ bzw. $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 2$ $f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$ Aus den Bedingungen: $f(0) = 2, f(2) = 1, f'(-2) = 0$ und $f'(2) = 0$ folgt das lineare Gleichungssystem mit $d = 2$: $\begin{cases} 1=8a+4b+2c+2 \\ 0=12a+4b+c \\ 0=12a-4b+c \end{cases} \quad a, b, c$$\left\{ a=\frac{1}{16}, b=0, c=-\frac{3}{4} \right\}$ $\square$ Die gesuchte Funktionsgleichung lautet: $f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{4}x + 2$.	4																
1b	entscheidet, welche Aussagen wahr und welche falsch sind.	<u>Hinweis:</u> Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte). Bei der Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot e^{-1,5} \cdot x + 15 \cdot e^2$ handelt es sich um eine Exponentialfunktion. Zu der Exponentialfunktion f mit der Gleichung $f(x) = 2^{3x+2}$ mit $x \in \mathbb{R}$ passt die folgende Wertetabelle: <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>3</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>4</td><td>512</td></tr></table> Der Definitionsbereich der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = e^x$ besteht nur aus allen positiven reellen Zahlen. Der Graph der Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = a^{b \cdot x}$ mit $a, b, x \in \mathbb{R}, a \neq 0$ verläuft durch den Punkt $P(0 1)$. <table><tr><td>w</td><td>f</td></tr><tr><td></td><td>X</td></tr><tr><td></td><td>X</td></tr><tr><td></td><td>X</td></tr><tr><td>X</td><td></td></tr></table>	x	0	3	$f(x)$	4	512	w	f		X		X		X	X		4
x	0	3																	
$f(x)$	4	512																	
w	f																		
	X																		
	X																		
	X																		
X																			
1c	ermittelt die Intervallgrenze b.	Als Integrationsgrenzen müssen zunächst die Nullstellen ermittelt werden. Fläche unterhalb der x-Achse: $A_1 = \left \int_1^2 f(x) dx \right = 1,125$. Fläche oberhalb der x-Achse: $A_2 = \int_2^b f(x) dx = 1,125$. Ermittlung der Grenze b: $b = \sqrt{7}$. Der einzige Wert, der die Bedingung $b > 2$ erfüllt, ist $b = \sqrt{7}$. <pre>solve(0.5*x^3-2*x {x=-2, x=0, x=2} -1.125 solve(1.125=integral(0.5*x^3-2*x,x,2,b) {b=-1, b=1, b=-sqrt(7), b=sqrt(7)} solve(1.125=integral(0.5*x^3-2*x,x,2,b) {b=-1, b=1, b=-2.645751311, b=2.645751311} \square</pre>	4																

	Anforderungen	Modelllösungen											
1d	skizziert die erste Ableitung der Funktion in das Koordinatensystem.				3								
1e	entscheidet, welche Aussagen wahr und welche falsch sind.	<u>Hinweis:</u> Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte). <table><tr><th></th><th>w</th><th>f</th></tr><tr><td>Die Steigung eines Funktionsgraphen an einer Stelle x wird mit der ersten Ableitung berechnet.</td><td>X</td><td></td></tr><tr><td>Eine Funktion kann an keiner Stelle die Steigung 100% haben, da es dann keine Funktion mehr wäre (der Graph würde senkrecht nach oben verlaufen).</td><td></td><td>X</td></tr></table>		w	f	Die Steigung eines Funktionsgraphen an einer Stelle x wird mit der ersten Ableitung berechnet.	X		Eine Funktion kann an keiner Stelle die Steigung 100% haben, da es dann keine Funktion mehr wäre (der Graph würde senkrecht nach oben verlaufen).		X	2	
	w	f											
Die Steigung eines Funktionsgraphen an einer Stelle x wird mit der ersten Ableitung berechnet.	X												
Eine Funktion kann an keiner Stelle die Steigung 100% haben, da es dann keine Funktion mehr wäre (der Graph würde senkrecht nach oben verlaufen).		X											
1f	gibt die Koordinaten der Punkte A und H an, ermittelt das Volumen und bestimmt eine Ebenengleichung in Parameterform.	A(5 0 0) H(0 0 4) Das Volumen beträgt $V = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 60 \text{ [LE}^3\text{]}$. E: $\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$			5								
1g	überprüft, ob der Richtungsvektor ein Einheitsvektor ist, gibt einen anderen möglichen Richtungsvektor an,	$\left \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right = \sqrt{6} \neq 1$, woraus folgt, dass es sich nicht um einen Einheitsvektor handelt. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$			4								

Fortsetzung nächste Seite

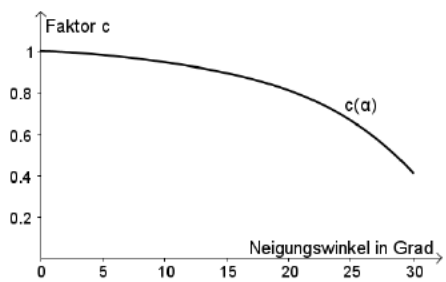
	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 1g	gibt eine Geradengleichung der Geraden h an und gibt eine Geradengleichung der Geraden k an.	$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit } s \in \mathbb{R}$ $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } s \in \mathbb{R}$	
1h	weist nach, dass sich der Vektor $\vec{d}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellen lässt und gibt die Linearkombination an.	Ansatz: $\vec{d} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c}$ mit $x, y, z \in \mathbb{R}$ Es ist das entstehende LGS zu lösen. $x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\text{solve}\left(x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, x, y, z\right) \rightarrow x = -\frac{8}{3} \text{ and } y = \frac{4}{3} \text{ and } z = \frac{11}{3}$ Aus der Lösungsmenge folgt, dass sich der Vektor $\vec{d}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellen lässt. Die entsprechende Linearkombination lautet: $\vec{d} = -\frac{8}{3} \cdot \vec{a} + \frac{4}{3} \cdot \vec{b} + \frac{11}{3} \cdot \vec{c}.$	4
1i	bestimmt, für welches y die Geraden keine Ebene aufspannen.	Da die Richtungsvektoren der beiden Geraden nicht linear unabhängig sind, verlaufen die Geraden nicht parallel, sondern liegen windschief zueinander oder schneiden sich. Prüfung auf gemeinsamen Schnittpunkt: $\begin{pmatrix} 4 \\ y \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\mathbf{g}(r) := \begin{bmatrix} 4 \\ y \\ 7 \end{bmatrix} + r \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Fertig}$ $\mathbf{h}(s) := \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Fertig}$ $\text{solve}(\mathbf{g}(r) = \mathbf{h}(s), r, s, y) \rightarrow r = -2 \text{ and } s = 1 \text{ and } y = 1$ Für $y = 1$ schneiden sich die Geraden g und h und spannen eine Ebene auf. Für $y \neq 1$ liegen die beiden Geraden g und h windschief zueinander und spannen somit keine Ebene auf.	4
			34

Aufgabe 2: Fabrikhalle

	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
2a	zeichnet das Schrägbild.		5
2b	weist nach, dass die Werte richtig sind.	Volumenberechnung: $V = A_{\text{Querschnitt}} \cdot \text{Länge} = (30 \cdot 15 + 0,5 \cdot 30 \cdot 7) \cdot 40 = 22200$ Das Volumen beträgt 22200 m ³ . Dachflächenberechnung: $ \vec{EF} = \left \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \right \approx 30,8 \text{ m}$ $A \approx 30,8 \text{ m} \cdot 40 \text{ m} \approx 1232,23 \text{ m}^2$	3
2c	berechnet die Koordinaten von Punkt M und die Leitungslänge.	Für den Ortsvektor von Punkt M ergibt sich: $\vec{OM} = \vec{OE} + \frac{1}{2}\vec{EH} + \frac{1}{2}\vec{EF} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 40 \\ 18,5 \end{pmatrix}$ Die gesuchten Koordinaten lauten also M(45 40 18,5). Punkt R ist der Mittelpunkt der Kante $\vec{EF}$. $l = \vec{MR} + \frac{1}{2} \cdot \vec{EF} \approx 20 + \frac{1}{2} \cdot 30,8 \approx 35,4$ Die Leitungslänge l beträgt 35,4 m.	3
2d	bestimmt die Höhe des Firstes.	Bezeichnet man die gesuchte Firsthöhe mit x ($x \in \mathbb{R}$), so gilt $ \vec{EF} = \left \begin{pmatrix} 60 \\ 20 \\ x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} \right = \left \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ x - 15 \end{pmatrix} \right $ Da die Dachseite in x_2 -Richtung 40 m lang ist, folgt: $ \vec{EF} = \frac{1600}{40} = 40.$	3

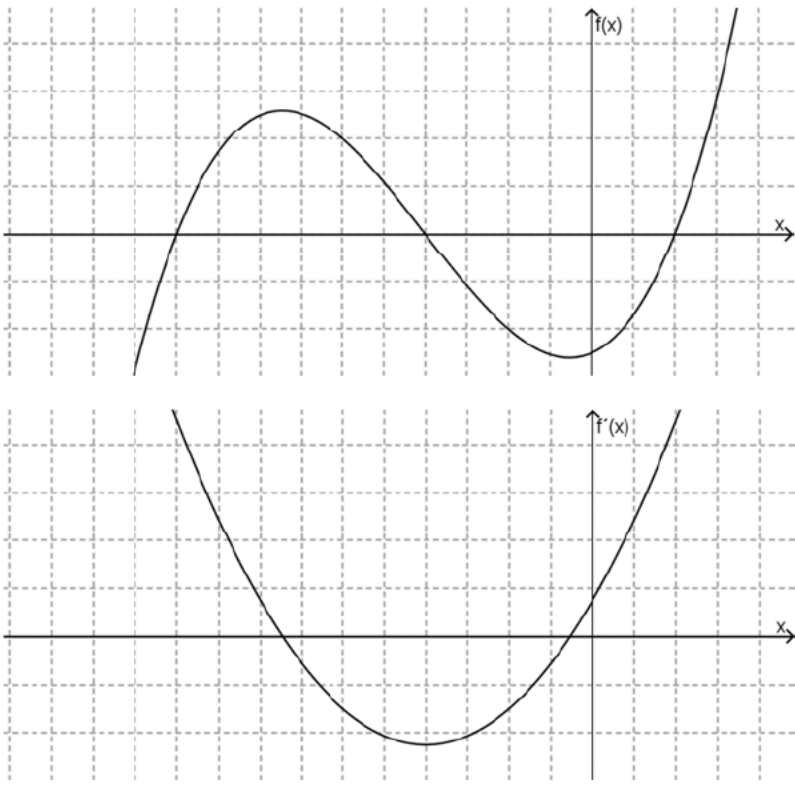
Fortsetzung nächste Seite

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2d		Mit Hilfe des CAS ergibt sich: $\text{solve}\left(\text{norm}\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ x-15 \end{pmatrix}=40, x\right) \rightarrow x=-11.4575 \text{ or } x=41.4575$ Der Dachfirst müsste auf eine Höhe von ca. 41,46 m erhöht werden.	
2e	erläutert die Geradengleichung, zeichnet den Uferverlauf ein und weist nach, dass der Punkt auf der Geraden liegt.	Das Ufer verläuft 40 m südlich der Halle. Die Strecke $\overline{AB}$ verläuft genau in südliche Richtung. Geht man von Punkt B(60 20 0) aus 40 m in diese Richtung, so erreicht man den Punkt U(100 20 0), welcher somit am Flussufer liegt und dessen Ortsvektor damit als Stützvektor der Geraden geeignet ist. Das Flussufer verläuft parallel zur x_2-Achse. Da der angegebene Richtungsvektor nur eine von Null verschiedene Koordinate in x_2-Richtung besitzt, ist er als Richtungsvektor der Geraden geeignet. Zeichnung siehe EWH Aufgabe 2a. $\text{solve}\left(\begin{pmatrix} 100 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix}, r\right) \rightarrow r=30$ Für $r = 30$ liegt der Punkt P auf der Geraden g_U.	4
2f	zeigt, dass das Förderband die Hallenwand erreichen wird.	Die Gerade g_{PS} beschreibt den Verlauf des Förderbandes durch die Punkte P und S, die zugehörige Geradengleichung lautet: $g_{PS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \left[\begin{pmatrix} 90 \\ 50 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$ Beschreibung der Seitenwandebene BCGF z.B. in Parameterform: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 60 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$ Eine Schnittpunktuntersuchung der Geraden g_{PS} und der Ebene E ergibt: $\text{solve}\left(\begin{pmatrix} 60 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, r, s, t\right) \rightarrow r=4 \text{ and } s=30 \text{ and } t=20$ Da $s < 40$ und $t < 22$ gilt, befindet sich der Schnittpunkt innerhalb der Hallenwand BCGF.	5
2g	zeigt, dass der Punkt P der Punkt am Ufer mit dem kürzesten Abstand zu Punkt Q ist.	Der Verbindungsvektor vom Punkt Q zu einem Punkt G der Geraden g_U lautet: $\overrightarrow{QG} = \begin{pmatrix} 100 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 60 \\ 50 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ -30 \\ -20 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$ <i>Fortsetzung nächste Seite</i>	4

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2g		Der kürzeste Verbindungsvektor ist orthogonal zum Richtungsvektor der Geraden, d.h. $\text{solve}\left(\text{dotP}\begin{pmatrix} 40 \\ -30 \\ -20 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, r\right) \rightarrow r=30$ Alternativ könnte der Wert auch über das Minimum des Vektorbetrags von $\overrightarrow{QG}$ berechnet werden: $\text{fMin}\left(\text{norm}\begin{pmatrix} 40 \\ -30+r \\ -20 \end{pmatrix}, r\right) \rightarrow r=30$ Für den Wert $r = 30$ ergibt sich aus der Geraden g_U der Punkt P, so dass dieser zum Punkt Q den geringsten Abstand hat.	
2h	beschreibt die Abhängigkeit, weist den Neigungswinkel nach und berechnet die Entladezeit.	Im CAS könnte der Graphenverlauf dargestellt werden. Je steiler das Förderband verläuft, umso kleiner wird der Faktor c und damit die Leistung des Förderbandes. Das bedeutet, dass die Entladezeit eines Frachters umso länger ist, je steiler das Förderband verläuft.  Bezeichnet man mit $Q_0(60 50 0)$ den Punkt am Boden lotrecht unter Punkt $Q(60 50 20)$, so ist zunächst der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PQ_0}$ gesucht. Mit $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{PQ_0} = \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt für den Neigungswinkel: $\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} \right \cdot \left \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right } \approx \frac{1600}{44,72 \cdot 40} \approx 0,8945 \Rightarrow \alpha \approx 26,56^\circ$ Mit Hilfe der Funktion $c(\alpha)$ ergibt sich ein Faktor $c(26,56) \approx 0,64$. Die Förderleistung beträgt $0,64 \cdot 800 \frac{t}{h} = 512 \frac{t}{h}$. $6000/512 \approx 11,72$. Es dauert also ca. 11,72 Stunden (ca. 11 h 43 min), um das Schiff zu entladen.	6
			33

Aufgabe 1 mit Linearer Algebra:

	Anforderungen	Modelllösungen																	
A1	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. Bemerkung: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	BE																
1a	bestimmt eine ganzrationale Funktion dritten Grades.	$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ bzw. $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 2$ $f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$ Aus den Bedingungen: $f(0) = 2, f(2) = 1, f'(-2) = 0$ und $f'(2) = 0$ folgt das lineare Gleichungssystem mit $d = 2$: $\begin{cases} 1=8a+4b+2c+2 \\ 0=12a+4b+c \\ 0=12a-4b+c \end{cases}$$\{a=\frac{1}{16}, b=0, c=-\frac{3}{4}\}$ $\square$ Die gesuchte Funktionsgleichung lautet: $f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{4}x + 2$.	4																
1b	entscheidet, welche Aussagen wahr und welche falsch sind.	<u>Hinweis:</u> Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte). Bei der Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot e^{-1,5} \cdot x + 15 \cdot e^2$ handelt es sich um eine Exponentialfunktion. Zu der Exponentialfunktion f mit der Gleichung $f(x) = 2^{3x+2}$ mit $x \in \mathbb{R}$ passt die folgende Wertetabelle: <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>3</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>4</td><td>512</td></tr></table> Der Definitionsbereich der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = e^x$ besteht nur aus allen positiven reellen Zahlen. Der Graph der Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = a^{b \cdot x}$ mit $a, b, x \in \mathbb{R}, a \neq 0$ verläuft durch den Punkt $P(0 1)$. <table><tr><td>w</td><td>f</td></tr><tr><td></td><td>X</td></tr><tr><td></td><td>X</td></tr><tr><td></td><td>X</td></tr><tr><td>X</td><td></td></tr></table>	x	0	3	$f(x)$	4	512	w	f		X		X		X	X		4
x	0	3																	
$f(x)$	4	512																	
w	f																		
	X																		
	X																		
	X																		
X																			
1c	ermittelt die Intervallgrenze b.	Als Integrationsgrenzen müssen zunächst die Nullstellen ermittelt werden. Fläche unterhalb der x-Achse: $A_1 = \int_1^2 f(x)dx = 1,125$. Fläche oberhalb der x-Achse: $A_2 = \int_2^b f(x)dx = 1,125$. Ermittlung der Grenze b: $b = \sqrt{7}$. Der einzige Wert, der die Bedingung $b > 2$ erfüllt, ist $b = \sqrt{7}$. <pre>solve(0, 5x^3-2x {x=-2, x=0, x=2} 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111 112 113 114 115 116 117 118 119 120 121 122 123 124 125 126 127 128 129 130 131 132 133 134 135 136 137 138 139 140 141 142 143 144 145 146 147 148 149 150 151 152 153 154 155 156 157 158 159 160 161 162 163 164 165 166 167 168 169 170 171 172 173 174 175 176 177 178 179 180 181 182 183 184 185 186 187 188 189 190 191 192 193 194 195 196 197 198 199 200 201 202 203 204 205 206 207 208 209 210 211 212 213 214 215 216 217 218 219 220 221 222 223 224 225 226 227 228 229 230 231 232 233 234 235 236 237 238 239 240 241 242 243 244 245 246 247 248 249 250 251 252 253 254 255 256 257 258 259 260 261 262 263 264 265 266 267 268 269 270 271 272 273 274 275 276 277 278 279 280 281 282 283 284 285 286 287 288 289 290 291 292 293 294 295 296 297 298 299 300 301 302 303 304 305 306 307 308 309 310 311 312 313 314 315 316 317 318 319 320 321 322 323 324 325 326 327 328 329 330 331 332 333 334 335 336 337 338 339 340 341 342 343 344 345 346 347 348 349 350 351 352 353 354 355 356 357 358 359 360 361 362 363 364 365 366 367 368 369 370 371 372 373 374 375 376 377 378 379 380 381 382 383 384 385 386 387 388 389 390 391 392 393 394 395 396 397 398 399 400 401 402 403 404 405 406 407 408 409 410 411 412 413 414 415 416 417 418 419 420 421 422 423 424 425 426 427 428 429 430 431 432 433 434 435 436 437 438 439 440 441 442 443 444 445 446 447 448 449 450 451 452 453 454 455 456 457 458 459 460 461 462 463 464 465 466 467 468 469 470 471 472 473 474 475 476 477 478 479 480 481 482 483 484 485 486 487 488 489 490 491 492 493 494 495 496 497 498 499 500 501 502 503 504 505 506 507 508 509 510 511 512 513 514 515 516 517 518 519 520 521 522 523 524 525 526 527 528 529 530 531 532 533 534 535 536 537 538 539 540 541 542 543 544 545 546 547 548 549 550 551 552 553 554 555 556 557 558 559 560 561 562 563 564 565 566 567 568 569 570 571 572 573 574 575 576 577 578 579 580 581 582 583 584 585 586 587 588 589 590 591 592 593 594 595 596 597 598 599 600 601 602 603 604 605 606 607 608 609 610 611 612 613 614 615 616 617 618 619 620 621 622 623 624 625 626 627 628 629 630 631 632 633 634 635 636 637 638 639 640 641 642 643 644 645 646 647 648 649 650 651 652 653 654 655 656 657 658 659 660 661 662 663 664 665 666 667 668 669 670 671 672 673 674 675 676 677 678 679 680 681 682 683 684 685 686 687 688 689 690 691 692 693 694 695 696 697 698 699 700 701 702 703 704 705 706 707 708 709 710 711 712 713 714 715 716 717 718 719 720 721 722 723 724 725 726 727 728 729 730 731 732 733 734 735 736 737 738 739 740 741 742 743 744 745 746 747 748 749 750 751 752 753 754 755 756 757 758 759 760 761 762 763 764 765 766 767 768 769 770 771 772 773 774 775 776 777 778 779 780 781 782 783 784 785 786 787 788 789 790 791 792 793 794 795 796 797 798 799 800 801 802 803 804 805 806 807 808 809 810 811 812 813 814 815 816 817 818 819 820 821 822 823 824 825 826 827 828 829 830 831 832 833 834 835 836 837 838 839 840 841 842 843 844 845 846 847 848 849 850 851 852 853 854 855 856 857 858 859 860 861 862 863 864 865 866 867 868 869 870 871 872 873 874 875 876 877 878 879 880 881 882 883 884 885 886 887 888 889 890 891 892 893 894 895 896 897 898 899 900 901 902 903 904 905 906 907 908 909 910 911 912 913 914 915 916 917 918 919 920 921 922 923 924 925 926 927 928 929 930 931 932 933 934 935 936 937 938 939 940 941 942 943 944 945 946 947 948 949 950 951 952 953 954 955 956 957 958 959 960 961 962 963 964 965 966 967 968 969 970 971 972 973 974 975 976 977 978 979 980 981 982 983 984 985 986 987 988 989 990 991 992 993 994 995 996 997 998 999 1000 1001 1002 1003 1004 1005 1006 1007 1008 1009 1010 1011 1012 1013 1014 1015 1016 1017 1018 1019 1020 1021 1022 1023 1024 1025 1026 1027 1028 1029 1030 1031 1032 1033 1034 1035 1036 1037 1038 1039 1040 1041 1042 1043 1044 1045 1046 1047 1048 1049 1050 1051 1052 1053 1054 1055 1056 1057 1058 1059 1060 1061 1062 1063 1064 1065 1066 1067 1068 1069 1070 1071 1072 1073 1074 1075 1076 1077 1078 1079 1080 1081 1082 1083 1084 1085 1086 1087 1088 1089 1090 1091 1092 1093 1094 1095 1096 1097 1098 1099 1100 1101 1102 1103 1104 1105 1106 1107 1108 1109 1110 1111 1112 1113 1114 1115 1116 1117 1118 1119 1120 1121 1122 1123 1124 1125 1126 1127 1128 1129 1130 1131 1132 1133 1134 1135 1136 1137 1138 1139 1140 1141 1142 1143 1144 1145 1146 1147 1148 1149 1150 1151 1152 1153 1154 1155 1156 1157 1158 1159 1160 1161 1162 1163 1164 1165 1166 1167 1168 1169 1170 1171 1172 1173 1174 1175 1176 1177 1178 1179 1180 1181 1182 1183 1184 1185 1186 1187 1188 1189 1190 1191 1192 1193 1194 1195 1196 1197 1198 1199 1200 1201 1202 1203 1204 1205 1206 1207 1208 1209 1210 1211 1212 1213 1214 1215 1216 1217 1218 1219 1220 1221 1222 1223 1224 1225 1226 1227 1228 1229 1230 1231 1232 1233 1234 1235 1236 1237 1238 1239 1240 1241 1242 1243 1244 1245 1246 1247 1248 1249 1250 1251 1252 1253 1254 1255 1256 1257 1258 1259 1260 1261 1262 1263 1264 1265 1266 1267 1268 1269 1270 1271 1272 1273 1274 1275 1276 1277 1278 1279 1280 1281 1282 1283 1284 1285 1286 1287 1288 1289 1290 1291 1292 1293 1294 1295 1296 1297 1298 1299 1300 1301 1302 1303 1304 1305 1306 1307 1308 1309 1310 1311 1312 1313 1314 1315 1316 1317 1318 1319 1320 1321 1322 1323 1324 1325 1326 1327 1328 1329 1330 1331 1332 1333 1334 1335 1336 1337 1338 1339 1340 1341 1342 1343 1344 1345 1346 1347 1348 1349 1350 1351 1352 1353 1354 1355 1356 1357 1358 1359 1360 1361 1362 1363 1364 1365 1366 1367 1368 1369 1370 1371 1372 1373 1374 1375 1376 1377 1378 1379 1380 1381 1382 1383 1384 1385 1386 1387 1388 1389 1390 1391 1392 1393 1394 1395 1396 1397 1398 1399 1400 1401 1402 1403 1404 1405 1406 1407 1408 1409 1410 1411 1412 1413 1414 1415 1416 1417 1418 1419 1420 1421 1422 1423 1424 1425 1426 1427 1428 1429 1430 1431 1432 1433 1434 1435 1436 1437 1438 1439 1440 1441 1442 1443 1444 1445 1446 1447 1448 1449 1450 1451 1452 1453 1454 1455 1456 1457 1458 1459 1460 1461 1462 1463 1464 1465 1466 1467 1468 1469 1470 1471 1472 1473 1474 1475 1476 1477 1478 1479 1480 1481 1482 1483 1484 1485 1486 1487 1488 1489 1490 1491 1492 1493 1494 1495 1496 1497 1498 1499 1500 1501 1502 1503 1504 1505 1506 1507 1508 1509 1510 1511 1512 1513 1514 1515 1516 1517 1518 1519 1520 1521 1522 1523 1524 1525 1526 1527 1528 1529 1530 1531 1532 1533 1534 1535 1536 1537 1538 1539 1540 1541 1542 1543 1544 1545 1546 1547 1548 1549 1550 1551 1552 1553 1554 1555 1556 1557 1558 1559 1560 1561 1562 1563 1564 1565 1566 1567 1568 1569 1570 1571 1572 1573 1574 1575 1576 1577 1578 1579 1580 1581 1582 1583 1584 1585 1586 1587 1588 1589 1590 1591 1592 1593 1594 1595 1596 1597 1598 1599 1600 1601 1602 1603 1604 1605 1606 1607 1608 1609 1610 1611 1612 1613 1614 1615 1616 1617 1618 1619 1620 1621 1622 1623 1624 1625 1626 1627 1628 1629 1630 1631 1632 1633 1634 1635 1636 1637 1638 1639 1640 1641 1642 1643 1644 1645 1646 1647 1648 1649 1650 1651 1652 1653 1654 1655 1656 1657 1658 1659 1660 1661 1662 1663 1664 1665 1666 1667 1668 1669 1670 1671 1672 1673 1674 1675 1676 1677 1678 1679 1680 1681 1682 1683 1684 1685 1686 1687 1688 1689 1690 1691 1692 1693 1694 1695 1696 1697 1698 1699 1700 1701 1702 1703 1704 1705 1706 1707 1708 1709 1710 1711 1712 1713 1714 1715 1716 1717 1718 1719 1720 1721 1722 1723 1724 1725 1726 1727 1728 1729 1730 1731 1732 1733 1734 1735 1736 1737 1738 1739 1740 1741 1742 1743 1744 1745 1746 1747 1748 1749 1750 1751 1752 1753 1754 1755 1756 1757 1758 1759 1760 1761 1762 1763 1764 1765 1766 1767 1768 1769 1770 1771 1772 1773 1774 1775 1776 1777 1778 1779 1780 1781 1782 1783 1784 1785 1786 1787 1788 1789 1790 1791 1792 1793 1794 1795 1796 1797 1798 1799 1800 1801 1802 1803 1804 1805 1806 1807 1808 1809 1810 1811 1812 1813 1814 1815 1816 1817 1818 1819 1820 1821 1822 1823 1824 1825 1826 1827 1828 1829 1830 1831 1832 1833 1834 1835 1836 1837 1838 1839 1840 1841 1842 1843 1844 1845 1846 1847 1848 1849 1850 1851 1852 1853 1854 1855 1856 1857 1858 1859 1860 1861 1862 1863 1864 1865 1866 1867 1868 1869 1870 1871 1872 1873 1874 1875 1876 1877 1878 1879 1880 1881 1882 1883 1884 1885 1886 1887 1888 1889 1890 1891 1892 1893 1894 1895 1896 1897 1898 1899 1900 1901 1902 1903 1904 1905 1906 1907 1908 1909 1910 1911 1912 1913 1914 1915 1916 1917 1918 1919 1920 1921 1922 1923 1924 1925 1926 1927 1928 1929 1930 1931 1932 1933 1934 1935 1936 1937 1938 1939 1940 1941 1942 1943 1944 1945 1946 1947 1948 1949 1950 1951 1952 1953 1954 1955 1956 1957 1958 1959 1960 1961 1962 1963 1964 1965 1966 1967 1968 1969 1970 1971 1972 1973 1974 1975 1976 1977 1978 1979 1980 1981 1982 1983 1984 1985 1986 1987 1988 1989 1990 1991 1992 1993 1994 1995 1996 1997 1998 1999 2000 2001 2002 2003 2004 2005 2006 2007 2008 2009 2010 2011 2012 2013 2014 2015 2016 2017 2018 2019 2020 2021 2022 2023 2024 2025 2026 2027 2028 2029 2030 2031 2032 2033 2034 2035 2036 2037 2038 2039 2040 2041 2042 2043 2044 2045 2046 2047 2048 2049 2050 2051 2052 2053 2054 2055 2056 2057 2058 2059 2060 2061 2062 2063 2064 2065 2066 2067 2068 2069 2070 2071 2072 2073 2074 2075 2076 2077 2078 2079 2080 2081 2082 2083 2084 2085 2086 2087 2088 2089 2090 2091 2092 2093 2094 2095 2096 2097 2098 2099 2100 2101 2102 2103 2104 2105 2106 2107 2108 2109 2110 2111 2112 2113 2114 2115 2116 2117 2118 2119 2120 2121 2122 2123 2124 2125 2126 2127 2128 2129 2130 2131 2132 2133 2134 2135 2136 2137 2138 2139 2140 2141 2142 2143 2144 2145 2146 2147 2148 2149 2150 2151 2152 2153 2154 2155 2156 2157 2158 2159 2160 2161 2162 2163 2164 2165 2166 2167 2168 2169 2170 2171 2172 2173 2174 2175 2176 2177 2178 2179 2180 2181 2182 2183 2184 2185 2186 2187 2188 2189 2190 2191 2192 2193 2194 2195 2196 2197 2198 2199 2200 2201 2202 2203 2204 2205 2206 2207 2208 2209 2210 2211 2212 2213 2214 2215 2216 2217 2218 2219 2220 2221 2222 2223 2224 2225 2226 2227 2228 2229 2230 2231 2232 2233 2234 2235 2236 2237 2238 2239 2240 2241 2242 2243 2244 2245 2246 2247 2248 2249 2250 2251 2252 2253 2254 2255 2256 2257 2258 2259 2260 2261 2262 2263 2264 2265 2266 2267 2268 2269 2270 2271 2272 2273 2274 2275 2276 2277 2278 2279 2280 2281 2282 2283 2284 2285 2286 2287 2288 2289 2290 2291 2292 2293 2294 2295 2296 2297 2298 2299 2300 2301 2302 2303 2304 2305 2306 2307 2308 2309 2310 2311 2312 2313 2314 2315 2316 2317 2318 2319 2320 2321 2322 2323 2324 2325 2326 2327 2328 2329 2330 2331 2332 2333 2334 2335 2336 2337 2338 2339 2340 2341 2342 2343 2344 2345 2346 2347 2348 2349 2350 2351 2352 2353 2354 2355 2356 2357 2358 2359 2360 2361 2362</pre>																	

	Anforderungen	Modelllösungen									
1d	skizziert die erste Ableitung der Funktion in das Koordinatensystem.				3						
1e	entscheidet, welche Aussagen wahr und welche falsch sind.	<u>Hinweis:</u> Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte). <table><tr><td>Die Steigung eines Funktionsgraphen an einer Stelle x wird mit der ersten Ableitung berechnet.</td><td>X</td><td></td></tr><tr><td>Eine Funktion kann an keiner Stelle die Steigung 100% haben, da es dann keine Funktion mehr wäre (der Graph würde senkrecht nach oben verlaufen).</td><td></td><td>X</td></tr></table>	Die Steigung eines Funktionsgraphen an einer Stelle x wird mit der ersten Ableitung berechnet.	X		Eine Funktion kann an keiner Stelle die Steigung 100% haben, da es dann keine Funktion mehr wäre (der Graph würde senkrecht nach oben verlaufen).		X	w	f	2
Die Steigung eines Funktionsgraphen an einer Stelle x wird mit der ersten Ableitung berechnet.	X										
Eine Funktion kann an keiner Stelle die Steigung 100% haben, da es dann keine Funktion mehr wäre (der Graph würde senkrecht nach oben verlaufen).		X									
1f	ermittelt die Zahlenwerte r und s so, dass die Gleichung erfüllt ist.	Aus dem Ansatz mit der Gleichung: $r \cdot A + s \cdot B = C$ $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow a \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -3 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow b \qquad \begin{bmatrix} -3 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $r \cdot a + s \cdot b \qquad \begin{bmatrix} r-3 \cdot s & 7 \cdot s-2 \cdot r & 3 \cdot r-2 \cdot s \\ 5 \cdot r & s & 6 \cdot r+3 \cdot s \end{bmatrix}$ folgt: $\begin{pmatrix} r-3s & 7s-2r & 3r-2s \\ 5r & s & 6r+3s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -25 & 12 \\ 10 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$ Aus dem Vergleich der Matrixelemente ergeben sich: $s = -3$ und $r = 2$. $\begin{bmatrix} r-3 \cdot s & 7 \cdot s-2 \cdot r & 3 \cdot r-2 \cdot s \\ 5 \cdot r & s & 6 \cdot r+3 \cdot s \end{bmatrix} \Big _{r=2 \text{ and } s=-3} \qquad \begin{bmatrix} 11 & -25 & 12 \\ 10 & -3 & 3 \end{bmatrix}$			3						

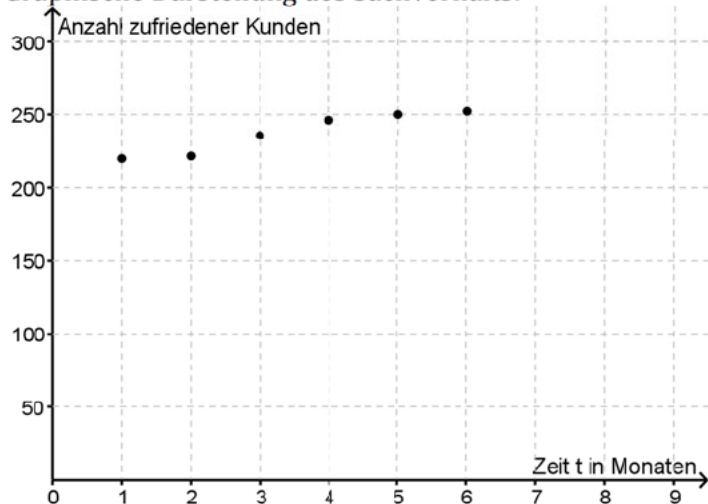
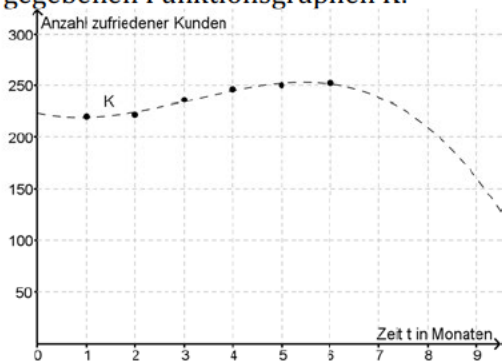
	Anforderungen	Modelllösungen	
1g	bestimmt die fehlenden Elemente der Matrix A.	Wenn die Matrix B die Inverse der Matrix A ist, gilt: $A \cdot B = E$. $\begin{bmatrix} a & b \\ 1 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a-b & -a-2b \\ -c-1 & -2c-1 \end{bmatrix}$ $\begin{pmatrix} -a-b & -a-2b \\ -c-1 & -2c-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Daraus folgen: $c = -1$ und das LGS: $\text{solve}\left(\left\{\begin{matrix} -a-b=1 \\ -a-2b=0 \end{matrix}\right\}, \{a,b\}\right) \quad a=-2 \text{ and } b=1$ mit den Lösungen: $a = -2$ und $b = 1$.	3
1h	bestimmt die Matrix A so, dass $A \cdot B = B \cdot A$ gilt.	$\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ x & y \end{bmatrix} \rightarrow a \quad \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ x & y \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow b \quad \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ $a \cdot b \quad \begin{bmatrix} 20 & 30 \\ 3 \cdot y - x & 3 \cdot x + 6 \cdot y \end{bmatrix}$ $b \cdot a \quad \begin{bmatrix} 3 \cdot x + 2 & 3 \cdot y - 6 \\ 6 \cdot x - 6 & 6 \cdot y + 18 \end{bmatrix}$ Durch Vergleich der Matrixelemente ergeben sich z.B. die Gleichungen (mit den zugehörigen Lösungen): $20 = 3x + 2$ mit $x = 6$, $30 = 3y - 6$ mit $y = 12$.	3
1i	weist durch Umstellen der Matrixgleichung nach, dass für die Matrix $C = B \cdot (A - 2 \cdot E)^{-1}$ gilt.	Umstellen der Matrixgleichung: $2 \cdot C = C \cdot A - B$ $B = C \cdot A - 2 \cdot C$ $B = C \cdot A - 2 \cdot C \cdot E$ $B = C \cdot (A - 2 \cdot E)$ $C = B \cdot (A - 2 \cdot E)^{-1}$	3
1j	ermittelt die Matrix A^4 und erläutert, ob es sich um eine stochastische Matrix handelt.	$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.7 \\ 0.5 & 0 & 0.3 \end{bmatrix} \rightarrow a \quad \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.7 \\ 0.5 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}$ $a^4 \quad \begin{bmatrix} 0.3775 & 0.3375 & 0.399 \\ 0.399 & 0.3775 & 0.3129 \\ 0.2235 & 0.285 & 0.2881 \end{bmatrix}$ Da die Spaltensummen der quadratischen Matrizen A und A^4 jeweils 1 ergeben und alle Matrixelemente positiv sind, handelt es sich bei den Matrizen A und A^4 um stochastische Matrizen.	3
1k	prüft durch Rechnung die Richtigkeit des gekennzeichneten Matrixelementes.	$a_{11} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 0 = -1$ Das gekennzeichnete Element $a_{11} = -1$ ist korrekt.	2
			34

Aufgabe 2: Kundenzufriedenheit

	Anforderungen	Modelllösungen																																
A2	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE																															
2a	erläutert, anhand eines ausgewählten Elementes der Matrix A, warum diese Matrix das Änderungsverhalten der Kundenzufriedenheit angibt und ermittelt die fehlenden Werte in der Tabelle 2.1.	45% der unzufriedenen Kunden (U) wechselten laut Abbildung 2.1 innerhalb eines Monats zu den sehr zufriedenen Kunden (S). $45\% = \frac{45}{100} = 0,45 = a_{12}$ Dabei gibt beispielsweise das Element $a_{12} = 0,45$ den prozentualen Übergang der unzufriedenen Kunden (U) zu den sehr zufriedenen Kunden (S) innerhalb dieses Monats an. Mit Hilfe der Abbildung 2.1 oder mittels der Matrix A und dem Startvektor $(200 \ 500 \ 340)^T$ können die fehlenden Tabellenwerte ermittelt werden. <table><tr><th colspan="2" rowspan="2">Anzahl der Kunden</th><th colspan="3">von</th><th rowspan="2">Kundenanz.</th></tr><tr><th>S</th><th>U</th><th>Z</th></tr><tr><td rowspan="3">nach</td><td>S</td><td>120</td><td>225</td><td>102</td><td>447</td></tr><tr><td>U</td><td>30</td><td>275</td><td>68</td><td>373</td></tr><tr><td>Z</td><td>50</td><td>0</td><td>170</td><td>220</td></tr><tr><td colspan="2">Kundenanz.:</td><td>200</td><td>500</td><td>340</td><td>1040</td></tr></table>	Anzahl der Kunden		von			Kundenanz.	S	U	Z	nach	S	120	225	102	447	U	30	275	68	373	Z	50	0	170	220	Kundenanz.:		200	500	340	1040	5
Anzahl der Kunden		von			Kundenanz.																													
		S	U	Z																														
nach	S	120	225	102	447																													
	U	30	275	68	373																													
	Z	50	0	170	220																													
Kundenanz.:		200	500	340	1040																													
2b	ermittelt A^2 und interpretiert die Matrix A^2 im Sachzusammenhang und erläutert die erste Zeile der Matrix A^2 .	$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.45 & 0.3 \\ 0.15 & 0.55 & 0.2 \\ 0.25 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \xrightarrow{A^2} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.45 & 0.3 \\ 0.15 & 0.55 & 0.2 \\ 0.25 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$ $A^2 = \begin{bmatrix} 0.5025 & 0.5175 & 0.42 \\ 0.2225 & 0.37 & 0.255 \\ 0.275 & 0.1125 & 0.325 \end{bmatrix}$ Die Matrix A^2 beschreibt das Änderungsverhalten bzgl. der Kundenzufriedenheit nach zwei Monaten (unter der Voraussetzung, dass sich dieses Übergangsverhalten nicht verändert). Die erste Zeile der Matrix gibt an, wie hoch der Anteil der sehr zufriedenen Kunden nach zwei Monaten sein wird. 50,25% der anfänglich 200 sehr zufriedenen Kunden, 51,75% der zu Beginn der Untersuchung 500 unzufriedenen Kunden und 42% der anfänglich 340 zufriedenen Kunden bilden die Gesamtzahl der sehr zufriedenen Kunden nach zwei Monaten.	4																															
2c	ermittelt die Werte nach sechs Monaten.	Anzahl der unzufriedenen Kunden: $1040 - 340 - 200 = 500$ (unzufriedene Kunden)	2																															

	Anforderungen	Modelllösungen	
2d	prüft, ob der Seniorchef Recht hat.	Ermittlung der Kundenanzahl nach einem Jahr (nach 12 Monaten): $a^{12} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 500 \\ 340 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 505.947 \\ 281.081 \\ 252.973 \end{bmatrix}$ Nach einem Jahr werden 506 Kunden sehr zufrieden sein, 281 Kunden unzufrieden und 253 Kunden zufrieden sein. 281 unzufriedene Kunden der 1040 Kunden entspricht einem Anteil von etwa 27%. Das entspricht fast der Behauptung, dass etwa 25% aller Kunden nur noch unzufrieden sein werden. Der Seniorchef hat somit Recht.	4
2e	untersucht, ob die gegebene Verteilung aus einer Verteilung des Vormonats entstanden sein kann.	Aufstellen einer Matrizengleichung oder eines linearen Gleichungssystems. Es ergibt sich die Matrizengleichung: $\begin{pmatrix} 0,60 & 0,45 & 0,30 \\ 0,15 & 0,55 & 0,20 \\ 0,25 & 0 & 0,50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \\ 340 \end{pmatrix}, \text{ wobei } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ die Verteilung der Kunden im Vormonat angibt.}$ $\text{solve}\left(a \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 500 \\ 340 \end{bmatrix}, \{x, y, z\}\right)$ $x = -737.778 \text{ and } y = 728.889 \text{ and } z = 1048.89$ oder: $A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 500 \\ 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $a^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 500 \\ 340 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -737.778 \\ 728.889 \\ 1048.89 \end{bmatrix}$ Nein, die angegebene Verteilung kann, wenn das Änderungsverhalten bezgl. der Kundenzufriedenheit schon im letzten Monat galt, nicht aus der Verteilung des Vormonats hervorgegangen sein, da die Anzahl der Kunden nicht negativ sein kann.	3
2f	ergänzt die Wertetabelle 2.2, die angibt, wie viele zufriedene Kunden in den ersten sechs Monaten zu erwarten sind und	Ermittlung der Anzahl zufriedener Kunden mit Hilfe des CAS: $a^{2.} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 500 \\ 340 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 502.05 \\ 316.2 \\ 221.75 \end{bmatrix}$ $a^{3.} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 500 \\ 340 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 510.045 \\ 293.568 \\ 236.388 \end{bmatrix}$ $a^{4.} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 500 \\ 340 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 509.049 \\ 285.246 \\ 245.705 \end{bmatrix}$ $a^{5.} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 500 \\ 340 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 507.502 \\ 282.384 \\ 250.115 \end{bmatrix}$ $a^{6.} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 500 \\ 340 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 506.608 \\ 281.459 \\ 251.933 \end{bmatrix}$	7

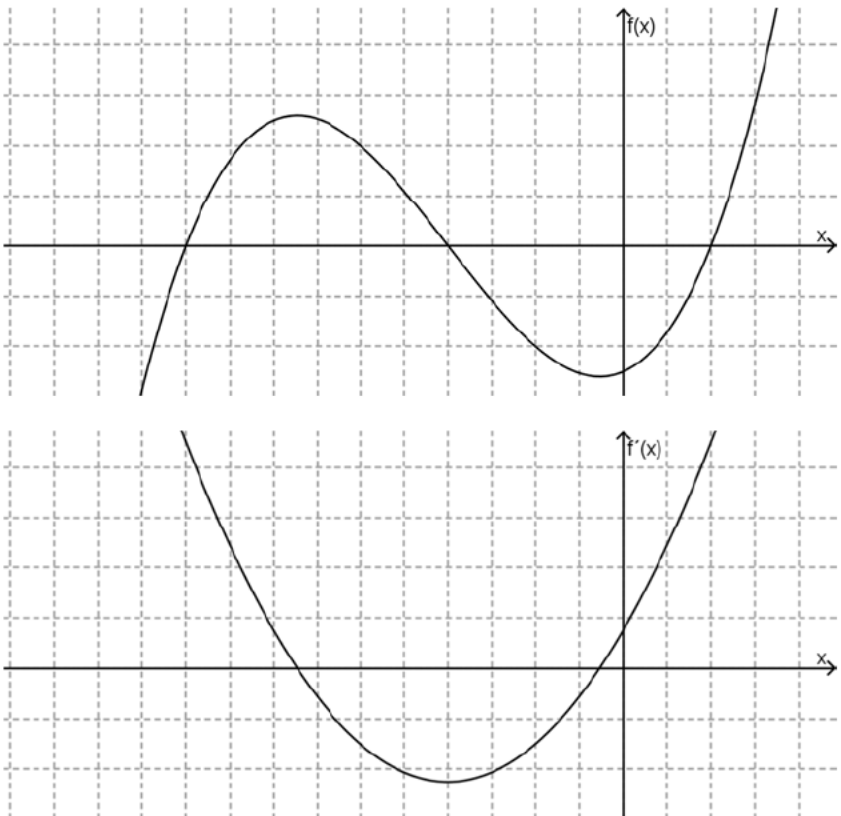
Fortsetzung nächste Seite

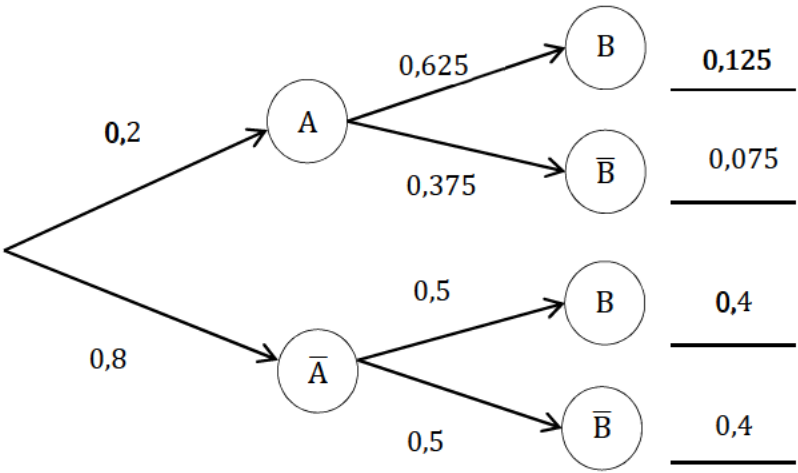
	Anforderungen	Modelllösungen															
zu 2f	stellt den Sachverhalt graphisch dar und beurteilt, ob der Sachverhalt mit Hilfe der Funktion K beschrieben werden kann.	tabellarische Zusammenstellung der Daten über die Anzahl zufriedener Kunden in den ersten sechs Monaten: <table><tr><th>nach... Monaten</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th></tr><tr><td>Anzahl zufriedener Kunden</td><td>220</td><td>222</td><td>236</td><td>246</td><td>250</td><td>252</td></tr></table> (Zahlenwerte gerundet) Graphische Darstellung des Sachverhalts:  Vervollständigung der graphischen Darstellung durch den gegebenen Funktionsgraphen K:  Da man davon ausgehen sollte, dass die Anzahl zufriedener Kunden nicht zurückgehen sollte, wäre die Beschreibung durch eine ganzrationale Funktion dritten Grades nicht geeignet, da für diese Funktion $\lim_{t \rightarrow +\infty} K(t) = -\infty$ gilt, auch wenn der Graph der Funktion K die Daten für die ersten sechs Monate gut abbildet.	nach... Monaten	1	2	3	4	5	6	Anzahl zufriedener Kunden	220	222	236	246	250	252	
nach... Monaten	1	2	3	4	5	6											
Anzahl zufriedener Kunden	220	222	236	246	250	252											
2g	untersucht, mit wie vielen sehr zufriedenen, zufriedenen und unzufriedenen Kunden langfristig zu rechnen ist.	$\alpha^{20} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 500 \\ 340 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 505.946 \\ 281.081 \\ 252.973 \end{bmatrix}$ $\alpha^{30} \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 500 \\ 340 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 505.946 \\ 281.081 \\ 252.973 \end{bmatrix}$ Fortsetzung nächste Seite	3														

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2g		Langfristig ist mit 506 sehr zufriedenen Kunden, 281 unzufriedenen Kunden und 253 zufriedenen Kunden zu rechnen, wenn sich das Änderungsverhalten bezüglich der Zufriedenheit der Kunden nicht verändert. (Lösung mit Hilfe der Grenzmatrix A^n auch möglich.) $A^n = \begin{pmatrix} 0,487 & 0,487 & 0,487 \\ 0,270 & 0,270 & 0,270 \\ 0,243 & 0,243 & 0,243 \end{pmatrix}$	
2h	weist nach, dass nach Einführung der Marketingmaßnahme die Anzahl der unzufriedenen Kunden zugunsten der zufriedenen Kunden gesenkt werden kann.	Vor der Imagewerbung gilt die Matrix A mit: $A = \begin{pmatrix} 0,60 & 0,45 & 0,30 \\ 0,15 & 0,55 & 0,20 \\ 0,25 & 0 & 0,50 \end{pmatrix}.$ Nach der Imagewerbung gilt die Matrix B mit: $B = \begin{pmatrix} 0,60 & 0,45 & 0,30 \\ 0,15 & \mathbf{0,45} & 0,20 \\ 0,25 & \mathbf{0,10} & 0,50 \end{pmatrix}.$ $\begin{bmatrix} 0,6 & 0,45 & 0,3 \\ 0,15 & 0,45 & 0,2 \\ 0,25 & 0,1 & 0,5 \end{bmatrix} \rightarrow b$ $\begin{bmatrix} 0,6 & 0,45 & 0,3 \\ 0,15 & 0,45 & 0,2 \\ 0,25 & 0,1 & 0,5 \end{bmatrix}$ $b \cdot \begin{bmatrix} 200 \\ 500 \\ 340 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 447 \\ 323 \\ 270 \end{bmatrix}$ Nach der Imagewerbung ergaben sich nur noch 323 unzufriedene Kunden und 270 zufriedene Kunden. Damit konnte der Anteil unzufriedener Kunden (zugunsten zufriedener Kunden) innerhalb eines Monats um 50 Kunden gesenkt werden (vorher: 373 unzufriedene Kunden) und der Anteil zufriedener Kunden um 50 Kunden vergrößert werden (vorher: 220 zufriedene Kunden).	5
			33

Aufgabe 1 mit Stochastik:

	Anforderungen	Modelllösungen																										
A1	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. Bemerkung: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	BE																									
1a	bestimmt eine ganzrationale Funktion dritten Grades.	$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ bzw. $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 2$ $f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$ Aus den Bedingungen: $f(0) = 2, f(2) = 1, f'(-2) = 0$ und $f'(2) = 0$ folgt das lineare Gleichungssystem mit $d = 2$: $\begin{cases} 1=8a+4b+2c+2 \\ 0=12a+4b+c \\ 0=12a-4b+c \end{cases}$$\{a=\frac{1}{16}, b=0, c=-\frac{3}{4}\}$ $\square$ Die gesuchte Funktionsgleichung lautet: $f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{4}x + 2$.	4																									
1b	entscheidet, welche Aussagen wahr und welche falsch sind.	<table><tr><td> <u>Hinweis:</u> Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte). Bei der Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot e^{-1,5} \cdot x + 15 \cdot e^2$ handelt es sich um eine Exponentialfunktion. Zu der Exponentialfunktion f mit der Gleichung $f(x) = 2^{3x+2}$ mit $x \in \mathbb{R}$ passt die folgende Wertetabelle: <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>3</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>4</td><td>512</td></tr></table> Der Definitionsbereich der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = e^x$ besteht nur aus allen positiven reellen Zahlen. Der Graph der Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = a^{b \cdot x}$ mit $a, b, x \in \mathbb{R}, a \neq 0$ verläuft durch den Punkt $P(0 1)$. </td><td>w</td><td>f</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>X</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>X</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>X</td></tr><tr><td></td><td></td><td>X</td><td></td></tr></table>	<u>Hinweis:</u> Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte). Bei der Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot e^{-1,5} \cdot x + 15 \cdot e^2$ handelt es sich um eine Exponentialfunktion. Zu der Exponentialfunktion f mit der Gleichung $f(x) = 2^{3x+2}$ mit $x \in \mathbb{R}$ passt die folgende Wertetabelle: <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>3</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>4</td><td>512</td></tr></table> Der Definitionsbereich der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = e^x$ besteht nur aus allen positiven reellen Zahlen. Der Graph der Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = a^{b \cdot x}$ mit $a, b, x \in \mathbb{R}, a \neq 0$ verläuft durch den Punkt $P(0 1)$.	x	0	3	$f(x)$	4	512	w	f				X				X				X			X		4
<u>Hinweis:</u> Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte). Bei der Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot e^{-1,5} \cdot x + 15 \cdot e^2$ handelt es sich um eine Exponentialfunktion. Zu der Exponentialfunktion f mit der Gleichung $f(x) = 2^{3x+2}$ mit $x \in \mathbb{R}$ passt die folgende Wertetabelle: <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>3</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>4</td><td>512</td></tr></table> Der Definitionsbereich der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = e^x$ besteht nur aus allen positiven reellen Zahlen. Der Graph der Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = a^{b \cdot x}$ mit $a, b, x \in \mathbb{R}, a \neq 0$ verläuft durch den Punkt $P(0 1)$.	x	0	3	$f(x)$	4	512	w	f																				
x	0	3																										
$f(x)$	4	512																										
			X																									
			X																									
			X																									
		X																										
1c	ermittelt die Intervallgrenze b.	Als Integrationsgrenzen müssen zunächst die Nullstellen ermittelt werden. Fläche unterhalb der x-Achse: $A_1 = \int_1^2 f(x)dx = 1,125$. Fläche oberhalb der x-Achse: $A_2 = \int_2^b f(x)dx = 1,125$. Ermittlung der Grenze b: $b = \sqrt{7}$. Der einzige Wert, der die Bedingung $b > 2$ erfüllt, ist $b = \sqrt{7}$. <pre>solve(0, 5x^3-2x {x=-2, x=0, x=2} ∫₁² 0,5·x³-2·xdx -1.125 solve(1.125=∫₂^b 0,5·x³-2·xdx, b {b=-1, b=1, b=-√7, b=√7} solve(1.125=∫₂^b 0,5·x³-2·xdx, b {b=-1, b=1, b=-2.645751311, b=2.645751311} □</pre>	4																									

	Anforderungen	Modelllösungen														
1d	skizziert die erste Ableitung der Funktion in das Koordinatensystem.			3												
1e	entscheidet, welche Aussagen wahr und welche falsch sind.	<u>Hinweis:</u> Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte). <table><tr><td>Die Steigung eines Funktionsgraphen an einer Stelle x wird mit der ersten Ableitung berechnet.</td><td>X</td><td></td></tr><tr><td>Eine Funktion kann an keiner Stelle die Steigung 100% haben, da es dann keine Funktion mehr wäre (der Graph würde senkrecht nach oben verlaufen).</td><td></td><td>X</td></tr></table>	Die Steigung eines Funktionsgraphen an einer Stelle x wird mit der ersten Ableitung berechnet.	X		Eine Funktion kann an keiner Stelle die Steigung 100% haben, da es dann keine Funktion mehr wäre (der Graph würde senkrecht nach oben verlaufen).		X	<table><tr><th>w</th><th>f</th></tr><tr><td>X</td><td></td></tr><tr><td></td><td>X</td></tr></table>	w	f	X			X	2
Die Steigung eines Funktionsgraphen an einer Stelle x wird mit der ersten Ableitung berechnet.	X															
Eine Funktion kann an keiner Stelle die Steigung 100% haben, da es dann keine Funktion mehr wäre (der Graph würde senkrecht nach oben verlaufen).		X														
w	f															
X																
	X															
1f	begründet, dass $a = 0,32$ gilt, weist nach, dass $E(X) = 1$ ist und berechnet die Standardabweichung.	Da die Gesamtwahrscheinlichkeit 1 ist, folgt: $0,32 + 0,36 + a = 1 \Rightarrow a = 0,32$. $E(X) = 0,32 \cdot 0 + 0,36 \cdot 1 + 0,32 \cdot 2 = 1$ $\sigma = \sqrt{(0 - 1)^2 \cdot 0,32 + (1 - 1)^2 \cdot 0,36 + (2 - 1)^2 \cdot 0,32} = 0,8$		4												

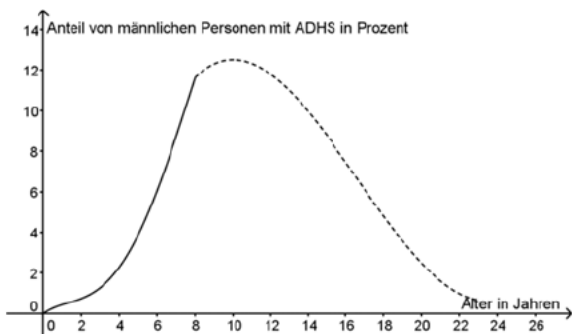
	Anforderungen	Modelllösungen	
1g	beschriftet das zugehörige Baumdiagramm und ermittelt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	 $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0,125 + 0,4 = 0,525$ Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von Ereignis B beträgt 52,5%.	7
1h	gibt den Ablehnungsbereich an, ermittelt die Irrtumswahrscheinlichkeit und beurteilt das Ergebnis.	$\bar{A}_{\text{links}} = \{0; 1; 2; \dots; 12\} \cup \bar{A}_{\text{rechts}} = \{28; 29; 30; \dots; 50\}$ Betrachtet wird die binomialverteilte Zufallsgröße X mit $n = 50$ und $p = 0,4$. $\alpha = 1 - P(13 \leq X \leq 27) = 0,029285$ $1 - \text{binomCdf}(50, 0,4, 13, 27) = 0,029285$ Die Irrtumswahrscheinlichkeit beträgt ca. 2,93%. Da die Anzahl der Erfolge nicht im Annahmebereich liegt, kann die Nullhypothese mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 2,93% verworfen werden und die Gegenhypothese angenommen werden.	6
			34

Aufgabe 2: Aufmerksamkeitsdefizitstörung (ADHS)

	Anforderungen	Modelllösungen							
A2	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE						
2a	erläutert die Voraussetzungen zur Anwendung der Binomialverteilung.	X: „Anzahl der Kinder mit ADHS“ kann als binomialverteilt angenommen werden, wenn nur zwei mögliche Ergebnisse zugelassen sind: Erfolg: ADHS diagnostiziert, Misserfolg: ADHS nicht diagnostiziert. Verschiedene Stadien oder Stufen werden nicht betrachtet. Das Auftreten bzw. die Diagnose bei einzelnen Kindern muss voneinander unabhängig sein und die ADHS-Prävalenz wird mit einer gleichbleibenden Wahrscheinlichkeit $p = 0,039$ festgelegt.	3						
2b	ermittelt die gesuchten Werte.	Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der Kinder mit ADHS, $X \in \{0; 1; 2; 3; \dots; 26\}$, X ist binomialverteilt mit $p = 0,039$ und $n = 26$. - Die Anzahl der Kinder mit ADHS, die man in dieser Gruppe erwarten kann, berechnet man durch: $\mu = n \cdot p = 26 \cdot 0,039 = 1,014$. Man kann in der Gruppe ein Kind mit ADHS erwarten. - Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in dieser Gruppe genau zwei Fälle von ADHS vorliegen, berechnet man durch: $P(X = 2) \approx 0,1903$. Sie beträgt ca. 19%. - Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in dieser Gruppe mindestens ein Fall von ADHS auftritt, berechnet man durch: $P(X \geq 1) \approx 0,6445$. Sie beträgt 64,45%. - Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in dieser Gruppe mindestens ein aber weniger als vier Fälle von ADHS auftreten berechnet man durch: $P(1 \leq X \leq 3) \approx 0,6271$. Sie beträgt ca. 62,71%. <table> <tr> <td>binomPdf(26,0.039,2)</td> <td>0.190272</td> </tr> <tr> <td>binomCdf(26,0.039,1,26)</td> <td>0.644526</td> </tr> <tr> <td>binomCdf(26,0.039,1,3)</td> <td>0.627124</td> </tr> </table>	binomPdf(26,0.039,2)	0.190272	binomCdf(26,0.039,1,26)	0.644526	binomCdf(26,0.039,1,3)	0.627124	7
binomPdf(26,0.039,2)	0.190272								
binomCdf(26,0.039,1,26)	0.644526								
binomCdf(26,0.039,1,3)	0.627124								
2c	berechnet die gesuchte Gruppengröße.	Betrachtet wird die binomialverteilte Zufallsgröße X „Anzahl der Kinder mit ADHS“ mit $p = 0,039$ und unbekannter Kettenlänge n. Gesucht ist: $P(X = 0) \geq 0,7$ $\Rightarrow \binom{n}{0} \cdot 0,039^0 \cdot 0,961^n \geq 0,7 \Rightarrow 0,961^n \geq 0,7$. <table> <tr> <td>solve((0.961)^n >= 0.7, n)</td> <td>n <= 8.96599</td> </tr> </table> Da die Wahrscheinlichkeit mindestens 70% betragen soll, liegt die maximale Gruppengröße bei 8 Kindern.	solve((0.961)^n >= 0.7, n)	n <= 8.96599	3				
solve((0.961)^n >= 0.7, n)	n <= 8.96599								
2d	widerlegt mit Hilfe eines geeigneten Testverfahrens die Behauptung.	Es wird die Zufallsgröße X „Anzahl der Kinder mit ADHS“ mit $X \in \{0; 1; 2; 3; \dots; 120\}$, $n = 120$ und $p = 0,039$ betrachtet. Da die Behauptung lautet, der Anteil der ADHS-Fälle sei höher, wird ein rechtsseitiger Test durchgeführt. Nullhypothese $H_0: p \leq 0,039$, Gegenhypothese $H_1: p > 0,039$, Irrtumswahrscheinlichkeit: $\alpha = 2\%$.	6						

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung nächste Seite

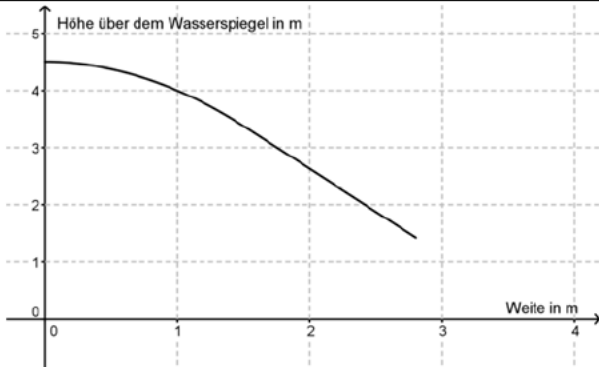
	Anforderungen	Modelllösungen											
zu 2d		Abschätzen der Grenzen des Annahmebereichs A von H_0: <table border="1"> <tr> <td>$\text{binomCDF}(120, 0.039, 0, 8)$</td> <td>0.95428</td> </tr> <tr> <td>$\text{binomCDF}(120, 0.039, 0, 9)$</td> <td>0.980659</td> </tr> </table> Damit lautet der Annahmebereich von H_0: $A = \{0; 1; 2; 3; \dots; 9\}$ und man kann die Nullhypothese ablehnen, wenn $X > 9$ ist. Da aber nur acht Kinder mit ADHS in der Kindertagesstätte sind, kann die Behauptung der Leiterin verworfen werden.	$\text{binomCDF}(120, 0.039, 0, 8)$	0.95428	$\text{binomCDF}(120, 0.039, 0, 9)$	0.980659							
$\text{binomCDF}(120, 0.039, 0, 8)$	0.95428												
$\text{binomCDF}(120, 0.039, 0, 9)$	0.980659												
2e	weist die Wahrscheinlichkeit nach.	Insgesamt wird eine Wahrscheinlichkeit für eine ADHS-Diagnose von 0,039 zugrunde gelegt. Der Anteil von Jungen zu Mädchen mit 3:1 bedeutet, dass von dem Gesamtanteil 75% auf die Jungen entfallen. Daher gilt: $0,039 \cdot 0,75 = 0,02925$. Somit liegt die Wahrscheinlichkeit für einen Jungen mit ADHS bei 2,925%.	3										
2f	entscheidet begründet, ob die Aussage zutrifft.	Die Aussage der Leiterin ist richtig. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Kind ein Junge oder ein Kind mit ADHS ist, berechnet man durch: $P(J \cup A) = P(J) + P(A) - P(J \cap A)$ $P(J \cup A) = \frac{66}{120} + 0,039 - 0,02925 = 0,55975.$ Dabei steht J für das Ereignis „Junge“ und A für das Ereignis „ADHS diagnostiziert“. Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit ca. 56% und liegt damit über 50%.	3										
2g	stellt die Funktion H graphisch dar, berechnet das Alter mit der höchsten Häufigkeit und gibt den Anteil an und	 Für den Hochpunkt gelten: $H'_2(t_E) = 0$ und $H''_2(t_E) < 0$. <table border="1"> <tr> <td>Define $h2(t) = 0.01 \cdot t^3 - 0.5 \cdot t^2 + 7 \cdot t - 17.5$</td> <td>Fertig</td> </tr> <tr> <td>Define $h22(t) = \frac{d}{dt}(h2(t))$</td> <td>Fertig</td> </tr> <tr> <td>solve($h22(t) = 0, t$)</td> <td>$t = 10$ or $t = 23.3333$</td> </tr> <tr> <td>$\frac{d^2}{dt^2}(h2(t)) _{t=10}$</td> <td>-0.4</td> </tr> <tr> <td>$h2(10)$</td> <td>12.5</td> </tr> </table> Im Alter von 10 Jahren liegt die höchste Häufigkeit von ADHS mit einem Anteil von 12,5% vor.	Define $h2(t) = 0.01 \cdot t^3 - 0.5 \cdot t^2 + 7 \cdot t - 17.5$	Fertig	Define $h22(t) = \frac{d}{dt}(h2(t))$	Fertig	solve($h22(t) = 0, t$)	$t = 10$ or $t = 23.3333$	$\frac{d^2}{dt^2}(h2(t)) _{t=10}$	-0.4	$h2(10)$	12.5	8
Define $h2(t) = 0.01 \cdot t^3 - 0.5 \cdot t^2 + 7 \cdot t - 17.5$	Fertig												
Define $h22(t) = \frac{d}{dt}(h2(t))$	Fertig												
solve($h22(t) = 0, t$)	$t = 10$ or $t = 23.3333$												
$\frac{d^2}{dt^2}(h2(t)) _{t=10}$	-0.4												
$h2(10)$	12.5												

Fortsetzung nächste Seite

	Anforderungen	Modelllösungen							
zu 2g	weist nach, dass im Alter von 16 Jahren bis 17 Jahren die stärkste Abnahme vorliegt.	Für den Wendepunkt gelten: $H_2''(t_W) = 0$ und $H_2'''(t_W) = 0,06 \neq 0$. <table><tr><td>Define $h222(t) = \frac{d}{dt}(h22(t))$</td><td>Fertig</td></tr><tr><td>$solve(h222(t)=0, t)$</td><td>$t=16.6667$</td></tr><tr><td>$\frac{d^3}{dt^3}(h2(t)) _{t=16.6667}$</td><td>0.06</td></tr></table> Im Alter von ca. 16,7 Jahren liegt die stärkste Abnahme der Häufigkeit von ADHS vor.	Define $h222(t) = \frac{d}{dt}(h22(t))$	Fertig	$solve(h222(t)=0, t)$	$t=16.6667$	$\frac{d^3}{dt^3}(h2(t)) _{t=16.6667}$	0.06	
Define $h222(t) = \frac{d}{dt}(h22(t))$	Fertig								
$solve(h222(t)=0, t)$	$t=16.6667$								
$\frac{d^3}{dt^3}(h2(t)) _{t=16.6667}$	0.06								
			33						

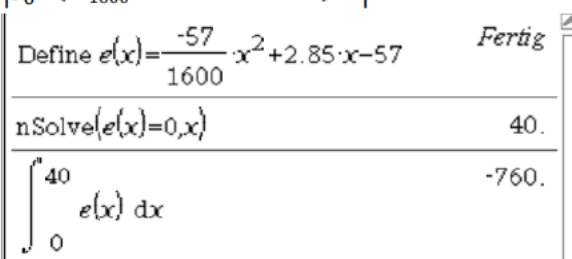
Aufgabe 3: Freibad

	Anforderungen	Modelllösungen	
A3	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
3a	bestimmt die Parameter a, b, c und d aufgrund des Kurvenverlaufs.	$a = \frac{32-27}{2} = 2,5$ $b = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ $c = 3 - \frac{1}{4} \cdot 4 = 2$ $d = \frac{32+27}{2} = 29,5$	4
3b	bestimmt die minimale und maximale Temperatur und vergleicht die beiden Reglereinstellungen (N(t) und W(t)) hinsichtlich der zugesicherten Temperatur und berechnet die gesuchten Zeitpunkte.	Bei W(t) liegt die maximale Temperatur bei $W_{\max} = 32^\circ\text{C}$ und die minimale Temperatur bei $W_{\min} = 27^\circ\text{C}$. (Ablesewerte aus Abb. 3.1) Daher wurden die Vorgaben bei der alten Einstellung W(t) gar nicht eingehalten, da die zugesicherte maximale Temperatur überschritten und die zugesicherte minimale Temperatur unterschritten wird. $N(t) = 1,5 \cdot \sin\left(\frac{5}{6}\pi \cdot (t - 1,2)\right) + 29,5$ Aus $a = 1,5$ und $d = 29,5$ folgen: $N_{\max} = 31^\circ\text{C}$ und $N_{\min} = 28^\circ\text{C}$. Die Vorgaben der Werbung werden bei der neuen Einstellung besser eingehalten, da 28°C nicht unterschritten werden, lediglich nach oben weicht die Temperatur um 1°C von den beworbenen 30°C ab. Gesucht sind die Extrempunkte innerhalb der ersten zwei Stunden. Bedingungen: $N'(t_E) = 0 \wedge N''(t_E) \neq 0$ <pre> Define n(x)=1.5*sin(5/6*pi*(x-1.2))+29.5 Fertig ----- d/dx(n(x)) -3.92699*cos(2.61799*x) ----- nSolve(-3.9269908169873*cos(2.617993877* 0.6 ----- d^2/dx^2(n(x)) x=0.6 10.2808 </pre> Da $N'(0,6) = 0 \wedge N''(0,6) > 0$ liegt nach 0,6 Stunden ein Tiefpunkt und damit die niedrigste Wassertemperatur vor. Aufgrund der trigonometrischen Eigenschaften liegt dann der folgende Hochpunkt und damit die höchste Wassertemperatur nach 1,8 Stunden ($0,6 + \frac{\pi}{2} = 0,6 + 1,2 = 1,8$) vor.	6

	Anforderungen	Modelllösungen													
3c	stellt die ersten beiden Abschnitte graphisch dar.		2												
3d	weist nach, dass die Funktion f an der Stelle $x = 1,5$ knickfrei ist.	<table><tr><td>Define $f1(x) = -0.5 \cdot x^2 + 4.5$</td><td>Fertig</td></tr><tr><td>Define $f2(x) = -1.5 \cdot x + 5.625$</td><td>Fertig</td></tr><tr><td>$f1(1.5)$</td><td>3.375</td></tr><tr><td>$f2(1.5)$</td><td>3.375</td></tr><tr><td>$\frac{d}{dx}(f1(x)) _{x=1.5}$</td><td>-1.5</td></tr><tr><td>$\frac{d}{dx}(f2(x)) _{x=1.5}$</td><td>-1.5</td></tr></table> Da die Funktionswerte und die Steigungswerte an der Stelle $x = 1,5$ übereinstimmen, ist der Übergang knickfrei.	Define $f1(x) = -0.5 \cdot x^2 + 4.5$	Fertig	Define $f2(x) = -1.5 \cdot x + 5.625$	Fertig	$f1(1.5)$	3.375	$f2(1.5)$	3.375	$\frac{d}{dx}(f1(x)) _{x=1.5}$	-1.5	$\frac{d}{dx}(f2(x)) _{x=1.5}$	-1.5	3
Define $f1(x) = -0.5 \cdot x^2 + 4.5$	Fertig														
Define $f2(x) = -1.5 \cdot x + 5.625$	Fertig														
$f1(1.5)$	3.375														
$f2(1.5)$	3.375														
$\frac{d}{dx}(f1(x)) _{x=1.5}$	-1.5														
$\frac{d}{dx}(f2(x)) _{x=1.5}$	-1.5														
3e	erläutert den Grad der Funktion und bestimmt den Funktionsterm der Funktion h.	Ausgehend von den gegebenen vier Bedingungen können vier Gleichungen mit maximal vier Parameter in einem lösaren Gleichungssystem berechnet werden. Daraus ergibt sich eine ganzrationale Funktion dritten Grades. Ansatz: $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ Aus den vorgegebenen Auflagen lassen sich die folgenden Bedingungen formulieren: $h(2,8) = 1,425 \wedge h(3,5) = 0,05 \wedge h'(2,8) = -1,5 \wedge h'(3,5) = -0,2.$ <table><tr><td>Define $h(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$</td><td>Fertig</td></tr><tr><td>Define $h1(x) = \frac{d}{dx}(h(x))$</td><td>Fertig</td></tr><tr><td>$\text{linSolve}\left(\begin{Bmatrix} h(2.8)=1.425 \\ h(3.5)=0.05 \\ h1(2.8)=-1.5 \\ h1(3.5)=-0.2 \end{Bmatrix}, \{a,b,c,d\}\right)$</td><td>$\{4.5481, -42.051, 127.014, -124.375\}$</td></tr></table> Die Funktion h hat die Funktionsgleichung: $h(x) = 4,5481x^3 - 42,051x^2 + 127,014x - 124,375.$	Define $h(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$	Fertig	Define $h1(x) = \frac{d}{dx}(h(x))$	Fertig	$\text{linSolve}\left(\begin{Bmatrix} h(2.8)=1.425 \\ h(3.5)=0.05 \\ h1(2.8)=-1.5 \\ h1(3.5)=-0.2 \end{Bmatrix}, \{a,b,c,d\}\right)$	$\{4.5481, -42.051, 127.014, -124.375\}$	6						
Define $h(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$	Fertig														
Define $h1(x) = \frac{d}{dx}(h(x))$	Fertig														
$\text{linSolve}\left(\begin{Bmatrix} h(2.8)=1.425 \\ h(3.5)=0.05 \\ h1(2.8)=-1.5 \\ h1(3.5)=-0.2 \end{Bmatrix}, \{a,b,c,d\}\right)$	$\{4.5481, -42.051, 127.014, -124.375\}$														
3f	beschreibt die graphisch und formal dargestellten Prozesse.	Befüllungsprozess: Das Wasser läuft konstant mit einer Änderungsrate von $25,2 \text{ m}^3/\text{h}$ ein, das heißt das Becken füllt sich gleichmäßig.	5												

Fortsetzung nächste Seite

Fortsetzung nächste Seite

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 3f		<u>Entleerungsprozess:</u> Das Wasser läuft mit abnehmender Änderungsrate ab, das heißt das Becken leert sich immer langsamer (bzw. im Laufe der Zeit fließt immer weniger Wasser pro h ab). Zu Beginn hat die Änderungsrate einen Wert von $-57 \text{ m}^3/\text{h}$. Der Entleerungsprozess endet nach ca. 40 Stunden.	
3g	weist nach, dass die Gesamtwassermenge 760 m^3 beträgt und erläutert, warum die Tiefe nicht nachgemessen werden muss, bestimmt die Tiefe und ermittelt die fehlenden Angaben.	Die gesamte abgelaufene Menge Wasser kann mittels Integralrechnung auf Basis der Funktion $e(t)$ ermittelt werden. Nullstellen von $e(t)$ berechnen: Aus $e(t) = 0$ folgt $t_{1/2} = 40$. Die Fläche zwischen der Abszisse und dem Graphen von $e(t)$ im Intervall $[0; 40]$ stellt das insgesamt abgeflossene Wasservolumen dar. $\left \int_0^{40} \left(-\frac{57}{1600}t^2 + 2,85t - 57 \right) dt \right = -760 $  $V = 760 \text{ [m}^3\text{]}$ Somit hat das Schwimmbecken eine Gesamtwassermenge von 760 m^3. Mit Hilfe der Volumenformel $V = b \cdot l \cdot h$ lässt sich dann die Tiefe berechnen. $760 = 16 \cdot 25 \cdot h \Rightarrow h = 1,9$ Das Schwimmbecken hat eine Tiefe von $1,9 \text{ m}$. <u>Entleerungsprozess</u> Maximale Änderungsrate: $e(0) = -57 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{h}} \right]$ Dauer: $e(t) = 0 \Rightarrow t = 40 \text{ [h]}$ Mittlere Änderungsrate: $\frac{\text{Gesamtmenge}}{\text{Zeit}} = \left \frac{-760}{40} \right = 19 \left[\frac{\text{m}^3}{\text{h}} \right]$ <u>Befüllungsprozess</u> Dauer: $\frac{\text{Gesamtmenge}}{\text{Änderungsrate}} = \frac{760}{25,2} \approx 30,16 \text{ [h]}$	7
			33