

Name des Prüflings	
--------------------	--

Punkteverteilung Aufgabe 1:

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	i	gesamt
Erreichbar	6	3	4	4	3	4	3	4	3	34
Erstkorrektur										
Zweitkorrektur										

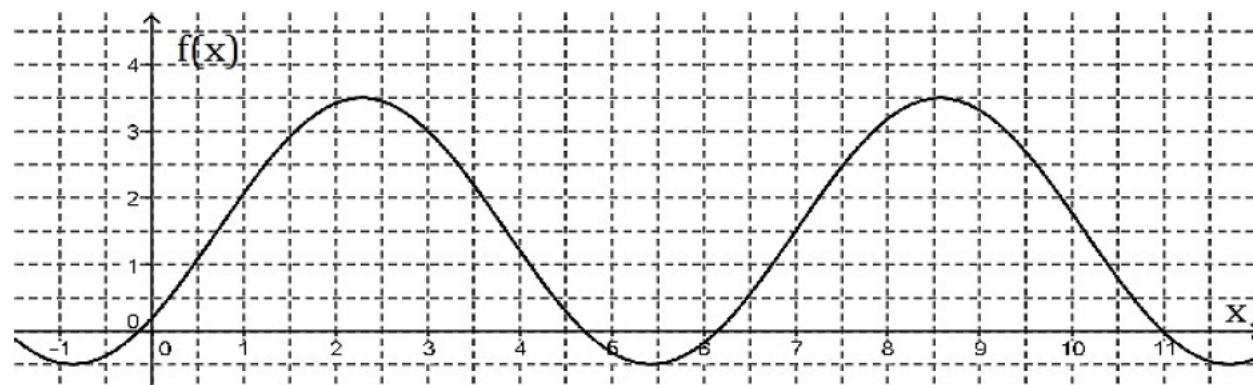
- a) Die Funktion f sowie deren erste und zweite Ableitung sind in der folgenden Wertetabelle dargestellt.

x	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{6}$
f'(x)	$\frac{32}{3}$	0	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	$-\frac{8}{3}$
f''(x)	-16	-6	0	2	0	-6

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Der Graph der Funktion f schneidet die x-Achse nur im Punkt $S(-3 0)$.	
Der Graph der Funktion hat im Punkt $P(-2 4,5)$ einen Tiefpunkt.	
Der Graph der Funktion hat an der Stelle $x = 1$ eine waagrechte Tangente.	

- b) Bestimmen Sie die Parameter der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x + c)) + d$ und tragen Sie diese in die Tabelle ein.



Parameter	a	b	c	d
Wert		1		

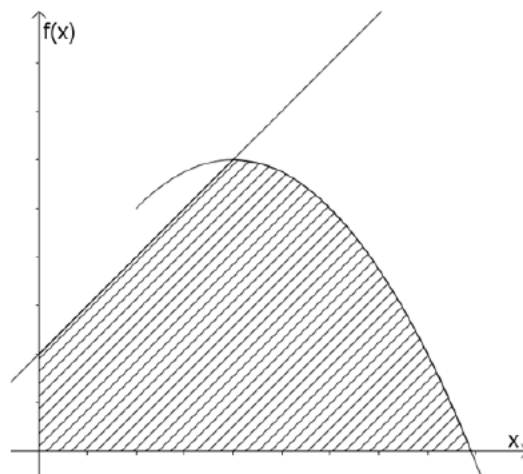
- c) Gegeben sind die Funktionen g und f mit den Funktionsgleichungen

$$g(x) = x + 1 \text{ und}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$$

mit $x \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie den Inhalt der in der Abbildung schraffierten Fläche.



- d) Berechnen Sie jeweils den Term der 1. Ableitung.

$f(x) = 3x^4 - 4x^2$	
$g(x) = 2x \cdot \sin(x)$	
$h(v) = 4tv^3 + 2t^2 - 6v$	
$k(x) = (2x - 3)^2$	

- e) • Der Vektor $\vec{c}$ ist der Summenvektor der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
Berechnen Sie den Wert des Parameters t mit $t \in \mathbb{R}$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2t \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie die Werte $x, y \in \mathbb{R}$, so dass gilt: $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-4 \\ y-1 \end{pmatrix}$.

- f) Gegeben sind die beiden Geraden g und h mit den Geradengleichungen

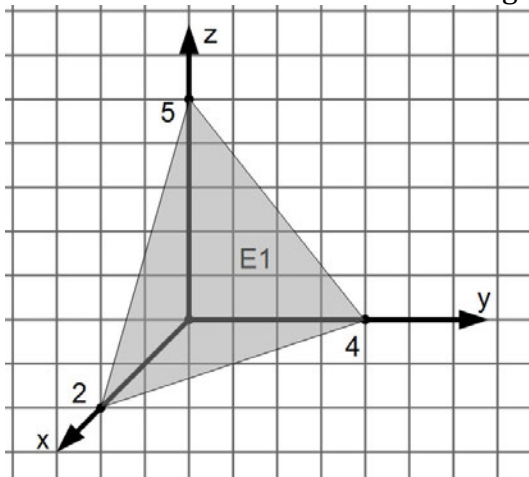
$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} b \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}.$$

Entscheiden Sie, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.

	wahr	falsch
Für $b = 4$ sind die Geraden parallel zueinander.		
Für $a = -2$ und $b = 5$ schneiden sich die Geraden in $P(5 2 8)$.		
Für $b = -10$ sind die Geraden orthogonal zueinander.		
Für $a = 0$ und $b = 0$ verläuft die Gerade g in der y - z -Ebene.		

- g) Bestimmen Sie jeweils eine Ebenengleichung in Koordinaten- oder Parameterform, die die entsprechende Ebene im Raum beschreibt.

- Ein Ausschnitt der Ebene E_1 ist in folgender Abbildung dargestellt:



- Die Ebene E_2 ist die x - z -Ebene.
- Die Ebene E_3 verläuft durch den Koordinatenursprung, durch den Punkt $A(1|2|5)$ und durch den Punkt $B(2|4|3)$.

h) Bestimmen Sie den Wert des Parameters a so, dass die Punkte $A(1|2|1)$, $B(3| - 1|5)$ und $C(-3|8|a)$ kein Dreieck bilden.

i) Weisen Sie nach, dass für die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ die Koordinatengleichung $E: x - 2y - 6z = -7$ lautet.

Punkteverteilung Aufgabe 2: Bergwerk

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	i	gesamt
Erreichbar	3	3	3	4	4	5	3	4	4	33
Erstkorrektur										
Zweitkorrektur										

Die ständig steigenden Preise für Rohstoffe am Weltmarkt lassen es zu, dass stillgelegte Bergwerksanlagen wieder profitabel betrieben werden können. Insbesondere die sogenannten „Seltene Erden“ sind stark nachgefragte Rohstoffe. 90% der weltweiten Förderung „Seltener Erden“ fällt auf China, das damit den Weltmarkt und damit die Preise kontrolliert. In jüngster Zeit wurden im Ruhrgebiet Spuren dieser „Seltene Erden“ nachgewiesen. Ein stillgelegtes Bergwerk muss hierfür allerdings zunächst vermessen und erweitert werden. Der prinzipielle Aufbau eines Bergwerkes ist als Querschnitt in Abb. 2.1 dargestellt.

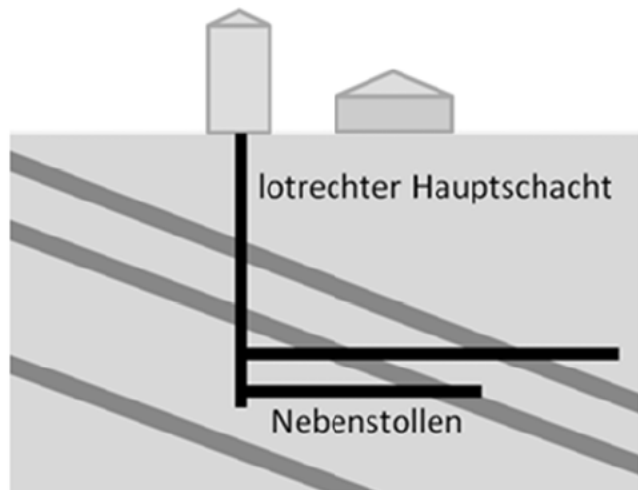


Abb. 2.1: Bergwerksquerschnitt mit schrägen Gesteinsschichten (nicht maßstäblich)

Die plane (ebene) Erdoberfläche wird hier als waagrecht angesehen. Soweit nicht anders angegeben, wird die räumliche Ausdehnung von Hauptschacht, Stollen und Bohrungen vernachlässigt. Der lotrecht nach unten führende Hauptschacht beginnt an der Oberfläche im Punkt $A(300|200|0)$ und hat eine Tiefe von 500 m (1 Längeneinheit (LE) $\triangleq$ 1 m).

- a) Nennen Sie den Endpunkt des Hauptschachtes und erläutern Sie, warum der Hauptschacht durch die folgende Gleichung vektoriell modelliert werden kann:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ein bereits vorhandener Nebenstollen 1 führt in einer Tiefe von 300 m vom Hauptschacht ausgehend zum Endpunkt $B(800|100|-280)$.

- b) Berechnen Sie die Länge des Nebenstollens 1.

Für die vorgesehenen Förderbänder zum Abtransport des Gesteins im Nebenstollen 1 ist es erforderlich, dass der Stollen nicht zu steil verläuft.

- c) Bestimmen Sie den Winkel des Nebenstollens 1 gegenüber dem Hauptschacht.

Eine Probebohrung im Punkt L(0|500| – 410) hat ergeben, dass dort ein Vorkommen an Lanthan (Element der „Seltenen Erden“) vermutet wird. Für den Abbau soll der 600 m lange Nebenstollen 2 (ebenfalls im Hauptschacht beginnend) genutzt werden, der durch die Gerade g_{NS2} mit der folgenden Geradengleichung modelliert werden kann:

$$g_{NS2}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ -400 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- d) Untersuchen Sie, ob man vom Nebenstollen 2 aus mit Hilfe einer lotrechten Bohrung den Punkt L erreichen könnte.

Eine weitere Probebohrung im Punkt N(–314|507| – 400) hat ergeben, dass dort ein Vorkommen an Neodym (Element der „Seltenen Erden“) vermutet wird.

- e) Zeigen Sie, dass das Neodymvorkommen erreicht werden kann, indem man den Nebenstollen 2 knickfrei verlängert.

Eine Alternative zur Verlängerung des 600 m langen Nebenstollens 2 ist eine lotrechte Bohrung von der Erdoberfläche aus. Die Kosten einer Lotrechtbohrung betragen 1500 € pro laufendem Meter im Vergleich zu 4500 € pro laufendem Meter bei einer unterirdischen Verlängerung des Nebenstollens 2.

- f) Untersuchen Sie, welche der beiden Möglichkeiten die preiswertere Variante ist.

Bei weiteren Probebohrungen stieß man auf eine Granitschicht, deren plane Oberfläche durch die Punkte $G_1(200|100| – 500)$, $G_2(300|100| – 550)$ und $G_3(400|300| – 600)$ verläuft.

Zur weiteren Planung wurde für die Ebene E_G die folgende Ebenengleichung der Granitschichtoberfläche erstellt:

$$E_G: x_1 + 2x_3 = -800.$$

- g) Begründen Sie, dass der Hauptschacht nicht orthogonal zur Granitschicht verläuft, und weisen Sie nach, dass der Punkt G_2 in der Ebene E_G liegt.

Zum Ausbau des Bergwerkes soll der Hauptschacht geradlinig verlängert werden. Allerdings ist das Durchbohren der Granitschicht so aufwändig, dass aus Rentabilitätsgründen darauf verzichtet werden soll.

- h) Bestimmen Sie, um wie viele Meter der Hauptschacht maximal verlängert werden kann.

Für die folgende Aufgabe wird davon ausgegangen, dass der Hauptschacht die Form eines Zylinders mit einem Radius von $r = 2,5$ m hat.

Infolge eines plötzlich eintretenden Wassereinbruchs füllt sich der Hauptschacht mit Wasser. Messungen der momentanen Änderungsrate (m^3/min) des im Hauptschacht vorhandenen Wasservolumens ergeben für die ersten Minuten folgende Werte:

Zeit t in min	0	1	2	3	4	5
Änderungsrate in m^3/min	16	10	7	3,5	2	1,5

- i) Bestimmen Sie das Wasservolumen in m^3 , das in den ersten zehn Minuten in den Hauptschacht strömen wird. Gehen Sie davon aus, dass der zeitliche Verlauf der Änderungsrate näherungsweise durch eine exponentielle Funktion in der Form $f(t) = a \cdot e^{k \cdot t}$ mit $a, k, t \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ beschrieben werden kann.

Name des Prüflings	
--------------------	--

Punkteverteilung Aufgabe 1:

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	i	gesamt
Erreichbar	6	3	4	4	3	3	3	4	4	34
Erstkorrektur										
Zweitkorrektur										

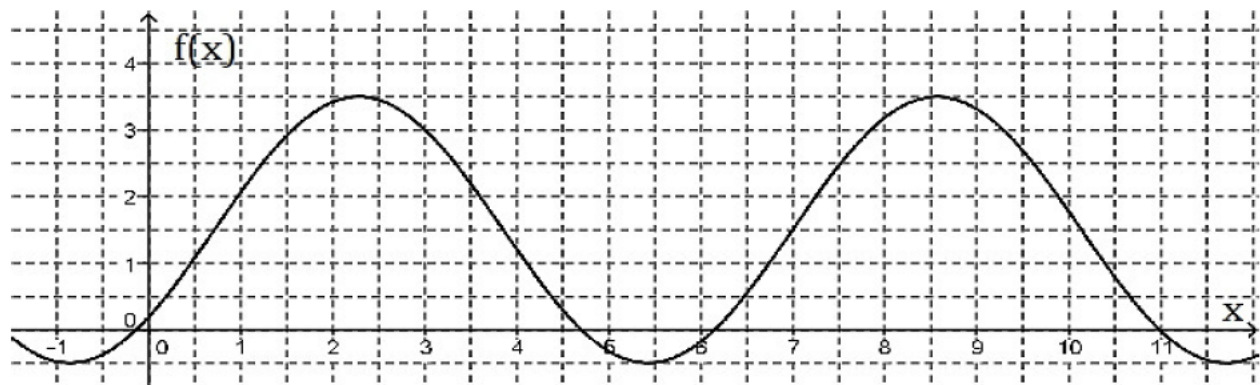
- a) Die Funktion f sowie deren erste und zweite Ableitung sind in der folgenden Wertetabelle dargestellt.

x	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{6}$
f'(x)	$\frac{32}{3}$	0	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	$-\frac{8}{3}$
f''(x)	-16	-6	0	2	0	-6

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Der Graph der Funktion f schneidet die x-Achse nur im Punkt $S(-3 0)$.	
Der Graph der Funktion hat im Punkt $P(-2 4,5)$ einen Tiefpunkt.	
Der Graph der Funktion hat an der Stelle $x = 1$ eine waagrechte Tangente.	

- b) Bestimmen Sie die Parameter der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x + c)) + d$ und tragen Sie diese in die Tabelle ein.



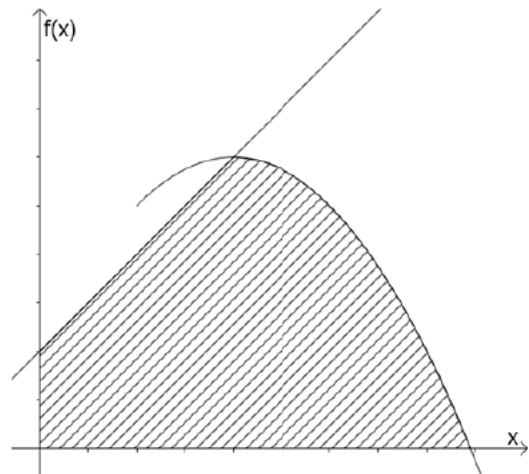
Parameter	a	b	c	d
Wert		1		

- c) Gegeben sind die Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen

$$g(x) = x + 1 \text{ und } f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$$

mit $x \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie den Inhalt der in der Abbildung schraffierten Fläche.



- d) Berechnen Sie jeweils den Term der 1. Ableitung.

$f(x) = 3x^4 - 4x^2$	
$g(x) = 2x \cdot \sin(x)$	
$h(v) = 4tv^3 + 2t^2 - 6v$	
$k(x) = (2x - 3)^2$	

- e) Gegeben sind die Matrizen A und B mit:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 2a & -b \\ 0,5c & d \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrizenelemente $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ so, dass $A = 2 \cdot B$ gilt.

- f) Gegeben sind zwei quadratische, invertierbare Matrizen A und B. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

	wahr	falsch
$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$		
$(A \cdot B)^T = (B \cdot A)^T$		
$(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$		

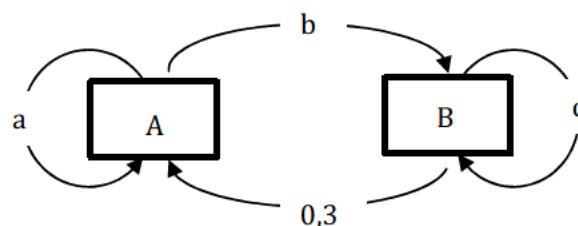
- g) Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & s \end{pmatrix}$.

- Berechnen Sie für $s = 3$ die Inverse der Matrix A.
- Begründen Sie, warum die Matrix A für $s = 4$ nicht invertierbar ist.

- h) Gegeben ist die Matrixgleichung: $A \cdot X = B$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 16 & 18 \\ 32 & 36 \end{pmatrix}$.

- Begründen Sie, unter welchen Bedingungen eine Matrix X existiert, die diese Matrixgleichung erfüllt.
- Berechnen Sie die Matrix X, sofern möglich.

- i) Gegeben sind die Startverteilung $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und die Verteilung $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ nach einem Übergang sowie der unvollständige Übergangsgraph.



Ermitteln Sie die fehlenden Werte für $a, b, c \in \mathbb{R}$ und die zugehörige stochastische Übergangsmatrix.

Punkteverteilung Aufgabe 2: Wechselverhalten von Stromkunden

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	gesamt
Erreichbar	2	4	4	5	6	6	6	33
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

In Deutschland wurde im Jahr 2011 die Energiewende beschlossen. Langfristig soll die Stromproduktion in Kernkraftwerken durch alternative Verfahren (sowohl über Wind-, Wasser- und Solarenergie als auch über die Nutzung von fossilen Brennstoffen) vollständig ersetzt werden. Vor allem durch den Atomunfall 2011 in Fukushima (Japan) hat sich das Bewusstsein der Stromkonsumenten verändert. Für viele Haushalte ist seitdem nicht mehr ausschließlich der Strompreis für die Wahl eines Tarifes ausschlaggebend, sondern auch die Art der Stromerzeugung.

Viele Energieversorger bieten schon jetzt Kombinationen an, bei denen die elektrische Energie aus unterschiedlichen Energiequellen stammt. Vereinfacht werden dazu folgende drei Kombinationen betrachtet: „Strom vorwiegend aus fossilen Brennstoffen“ (F), „Strom vorwiegend aus Kernenergie“ (K) und „Strom ausschließlich aus erneuerbaren Energiequellen“ (E).

Im Jahr 2012 wurden 1000 Haushalte zu ihrem Wechselverhalten im vergangenen Jahr befragt. Ein Wechsel kann nur einmal jährlich erfolgen. Diese Untersuchung ergab folgende Werte:

Wechselverhalten innerhalb eines Jahres (absolute Häufigkeiten)		von		
		F	K	E
nach	F	135	120	20
	K	45	m_{22}	20
	E	120	180	60

Tabelle 2.1

- a) Weisen Sie nach, dass das Element m_{22} in der Tabelle 2.1 den Wert 300 haben muss.
- b) Ermitteln Sie anhand der Tabelle 2.1 die absoluten Häufigkeiten für r , s und t in dem dargestellten Diagramm und erläutern Sie deren Bedeutung.

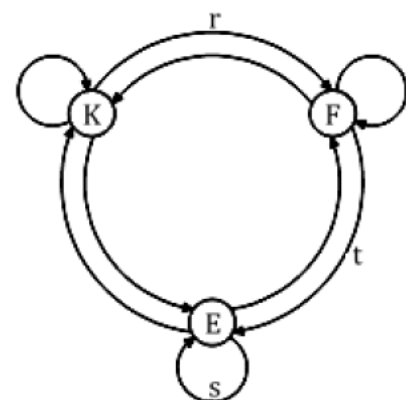


Abbildung 2.1

Das in der Tabelle 2.1 dargestellte Wechselverhalten der Haushalte wird durch die folgende stochastische Matrix $W = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,2 & 0,2 \\ 0,15 & 0,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$ beschrieben.

- c) Erläutern Sie, wie auf Grundlage der Tabelle 2.1 die Elemente der Matrix W berechnet wurden. Es ist ausreichend diese Erläuterungen beispielhaft an einem Element der Matrix W auszuführen.
- d) Berechnen Sie den Vektor $\vec{v}$ und erläutern Sie die Bedeutung der Matrizengleichung:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,2 & 0,2 \\ 0,15 & 0,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 600 \\ 100 \end{pmatrix}$$

im Sachzusammenhang.

Für die Übergangsmatrix W gilt: $W^{30} = \begin{pmatrix} 4/15 & 4/15 & 4/15 \\ 4/15 & 4/15 & 4/15 \\ 7/15 & 7/15 & 7/15 \end{pmatrix}$.

- e) Interpretieren Sie diese Matrix hinsichtlich der Verteilung auf die verschiedenen Stromkombinationen (F), (K) und (E).

Beurteilen Sie die Bedeutung der Matrix W^{30} vor dem Hintergrund der angestrebten Energiewende.

Die Entwicklung des prozentualen Anteils der Haushalte $p(t)$, die „Strom ausschließlich aus erneuerbaren Energiequellen“ (E) beziehen, kann in Abhängigkeit von den vergangenen Jahren t (Beginn des Untersuchungszeitraumes 2011 mit $t = 0$) annähernd durch die Exponentialfunktion p mit der Funktionsgleichung

$$p(t) = a \cdot e^{-1,235 \cdot t} + \frac{7}{15} \quad \text{mit } a, t \in \mathbb{R} \text{ und } t \geq 0$$

beschrieben werden.

- f) Weisen Sie rechnerisch nach, dass $a = -\frac{11}{30}$ ist, wenn zu Beginn des Untersuchungszeitraumes im Jahr 2011 genau 10% der befragten Haushalte „Strom ausschließlich aus erneuerbaren Energiequellen“ (E) bezogen haben.

Berechnen Sie den prozentualen Anteil $p(t)$ der Haushalte nach einem Jahr (2012) und nach 30 Jahren (2041), die „Strom ausschließlich aus erneuerbaren Energiequellen“ (E) beziehen.

Beschreiben Sie, wie sich der prozentuale Anteil $p(t)$ der Haushalte, die „Strom ausschließlich aus erneuerbaren Energiequellen“ (E) beziehen, vor dem Hintergrund des Sachzusammenhangs langfristig entwickeln wird. (Ein rechnerischer Nachweis ist hier nicht erforderlich.)

Eine ältere Umfrage aus dem Jahr 2002 unter 900 Haushalten ergab ein abweichendes Wechselverhalten für den Zeitraum von 2001 bis 2002 (siehe Tabelle 2.2):

Wechselverhalten der Stromkunden (in Prozent)		von		
nach	F	F	K	E
	K	30	70	20
	E	70	20	0
		0	10	80

Tabelle 2.2

Dieses Wechselverhalten der Stromkunden kann auch durch die Übergangsmatrix

$$Q = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 & 0,2 \\ 0,7 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden.

Im Jahr 2002 bezogen 380 der befragten Haushalte „Strom vorwiegend aus fossilen Brennstoffen“ (F), 410 Haushalte einen „Strom vorwiegend aus Kernenergie“ (K) und 110 Haushalte „Strom ausschließlich aus erneuerbaren Energiequellen“ (E).

- g) Erstellen Sie ein mathematisches Modell (ein lineares Gleichungssystem oder eine Matrizengleichung), mit dem die Verteilung der verschiedenen Energiearten auf die Haushalte im Jahr 2001 ermittelt werden kann.

Ermitteln Sie, wie viele Haushalte ihren Strom „vorwiegend aus fossilen Brennstoffen“ (F), „Strom vorwiegend aus Kernenergie“ (K), und „Strom ausschließlich aus erneuerbaren Energiequellen“ (E) im Jahr 2001 bezogen haben.

Name des Prüflings	
--------------------	--

Punkteverteilung Aufgabe 1:

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	gesamt
Erreichbar	6	3	4	4	8	6	3	34
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

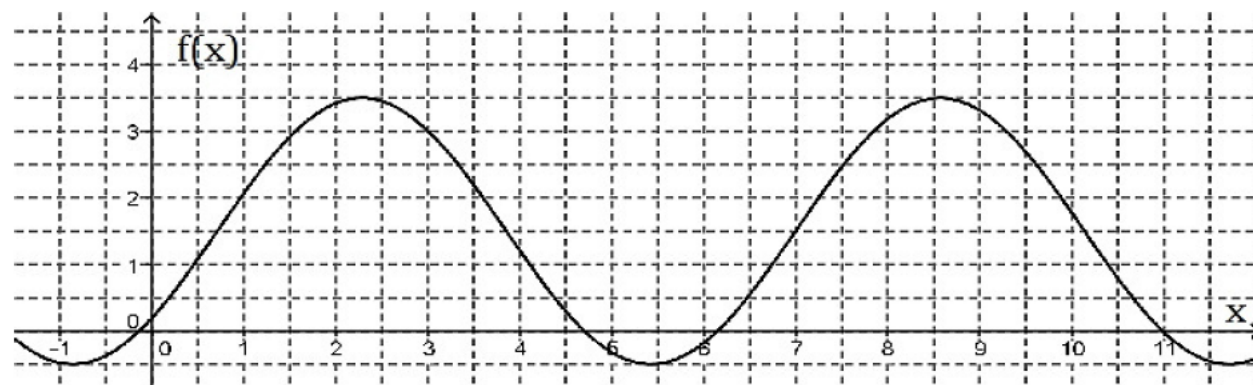
- a) Die Funktion f sowie deren erste und zweite Ableitung sind in der folgenden Wertetabelle dargestellt.

x	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{6}$
f'(x)	$\frac{32}{3}$	0	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	$-\frac{8}{3}$
f''(x)	-16	-6	0	2	0	-6

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Der Graph der Funktion f schneidet die x-Achse nur im Punkt $S(-3 0)$.	
Der Graph der Funktion hat im Punkt $P(-2 4,5)$ einen Tiefpunkt.	
Der Graph der Funktion hat an der Stelle $x = 1$ eine waagrechte Tangente.	

- b) Bestimmen Sie die Parameter der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x + c)) + d$ und tragen Sie diese in die Tabelle ein.



Parameter	a	b	c	d
Wert		1		

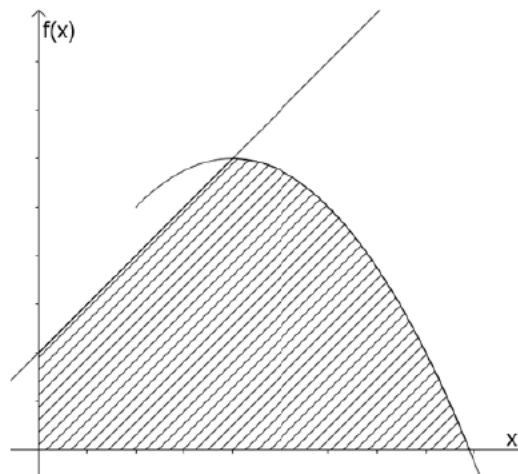
- c) Gegeben sind die Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen

$$g(x) = x + 1 \text{ und}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$$

mit $x \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie den Inhalt der in der Abbildung schraffierten Fläche.



- d) Berechnen Sie jeweils den Term der 1. Ableitung.

$f(x) = 3x^4 - 4x^2$	
$g(x) = 2x \cdot \sin(x)$	
$h(v) = 4tv^3 + 2t^2 - 6v$	
$k(x) = (2x - 3)^2$	

- e) Gegeben ist eine Bernoullikette der Länge $n = 50$ mit der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0,3$.
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Die Wahrscheinlichkeit für genau 10 Erfolge beträgt 5%.	
Die Wahrscheinlichkeit für mindestens 10 Erfolge beträgt ca. 96%.	
Das Maximum der Wahrscheinlichkeitsverteilung wird bei $k = 15$ erreicht.	
Man berechnet den Erwartungswert für diese Verteilung mit der Formel $\mu = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$.	

- f) In einer Urne befinden sich 20 schwarze und 5 weiße Kugeln. Es werden nach dem Zufallsprinzip nacheinander ohne Zurücklegen zwei Kugeln gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
- Es werden genau zwei weiße Kugeln gezogen.
 - Es wird mindestens eine schwarze Kugel gezogen.
 - Es wird genau eine weiße Kugel gezogen.

- g) Betrachtet wird die Zufallsgröße X mit $X \in \{-3; 0; 2; 5\}$, deren Wahrscheinlichkeitsverteilung in der folgenden Tabelle dargestellt wird.

$X = k$	$P(X = k)$	$P(X \leq k)$
-3	0,13	
0		0,60
2	0,25	
5		1

Bestimmen Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten.

Punkteverteilung **Aufgabe 2: Fast Food**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	1	4	6	4	6	5	2	5	33
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Laut einer aktuellen Umfrage nutzen bei Zeitdruck viele Deutsche das Angebot von Fast-Food-Restaurants. Das Ergebnis der Umfrage ist in Tabelle 2.1 dargestellt.

Hinweis: Bei der Umfrage waren Mehrfachantworten nicht erlaubt.

	weniger als einmal pro Monat	einmal pro Monat	einmal pro Woche	mindestens zweimal pro Woche
Wie oft nehmen Sie im Durchschnitt einen Imbiss in einem Fast-Food- Restaurant ein?	9%	51%	25%	15%

Tabelle 2.1: Ergebnis der Umfrage

- a) Zeigen Sie, dass laut Umfrage über 90% aller Deutschen mindestens einmal monatlich ein Fast-Food-Restaurant besuchen.

Die 11. Klasse eines Beruflichen Gymnasiums mit dem Profulfach „Ernährung“ führt in der Innenstadt von Neumünster eine Umfrage durch, bei der 100 Personen zu ihrem Essverhalten Auskunft geben sollen. Der Umfragebogen enthält unter anderem die folgende Frage:

	Ja	Nein
Gehen Sie regelmäßig, das bedeutet mindestens einmal pro Woche, in ein Fast-Food-Restaurant?		

- b) Erläutern Sie, unter welchen Voraussetzungen es sinnvoll ist, die Anzahl X der Personen, die regelmäßig ein Fast-Food-Restaurant besuchen, als binomialverteilt anzusehen.

Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Ja“ 40% beträgt.

- c) Setzen Sie in den folgenden Aufgabenteilen das Vorliegen einer Binomialverteilung voraus und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
- Genau die Hälfte aller befragten Personen gibt an, regelmäßig ein Fast-Food-Restaurant zu besuchen.
 - Höchstens 40 der befragten Personen geben an, regelmäßig ein Fast-Food-Restaurant zu besuchen.
 - Mindestens 30 und weniger als 40 der befragten Personen geben an, regelmäßig ein Fast-Food-Restaurant zu besuchen.

Um zu untersuchen, ob durch den Ernährungslehreunterricht das Essverhalten der Schülerinnen und Schüler beeinflusst wurde, wird den Schülerinnen und Schülern des 13. Jahrgangs des Beruflichen Gymnasiums die gleiche Frage gestellt. 50 Antworten werden abgegeben und sollen ausgewertet werden.

- d) Ermitteln Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung, wenn man davon ausgeht, dass unter den Schülerinnen und Schülern des 13. Jahrgangs ebenfalls 40% regelmäßig ein Fast-Food-Restaurant besuchen.

Erläutern Sie Ihre Ergebnisse im Sachzusammenhang.

Die einhellige Meinung in der Klasse ist, dass das Essverhalten der Schülerinnen und Schüler im 13. Jahrgang positiv durch den Ernährungslehreunterricht beeinflusst worden ist. Dies soll bei der Auswertung der 50 Antworten getestet werden.

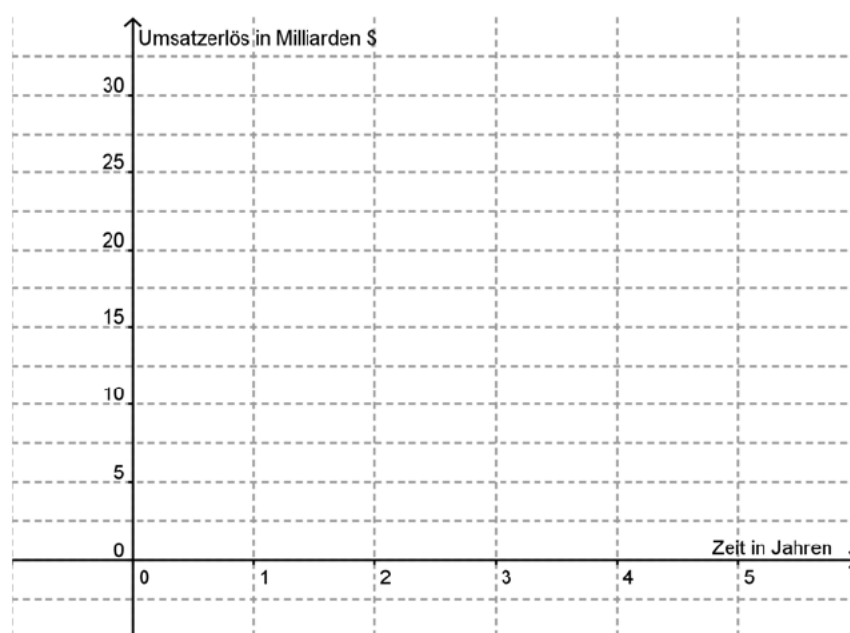
- e) Erstellen Sie eine Entscheidungsregel mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5%.
- f) Unter den 50 ausgewerteten Antworten waren neun Schülerinnen und sechs Schüler, die die Frage mit „Ja“ beantwortet haben.
Beurteilen Sie das Ergebnis.

Die Umsatzerlöse einer bekannten Fast-Food-Kette sind in der Tabelle 2.2 dargestellt.

Jahr	2007	2008	2009	2010	2011
Umsatzerlös in Milliarden \$	22,8	23,5	22,7	24,1	27,0

Tabelle 2.2: Umsatzerlöse in Milliarden US-Dollar einer bekannten Fast-Food-Kette

- g) Stellen Sie die Entwicklung der Umsatzerlöse in dem vorgegebenen Koordinatensystem dar.



Der Geschäftsführer der Fast-Food-Kette behauptet, dass die Entwicklung der Umsatzerlöse durch die Funktion U mit der Funktionsgleichung

$$U(t) = 0,25t^3 - 1,03t^2 + 1,16t + 22,8 \text{ mit } t \in \mathbb{R} \text{ und } t \geq 0,$$

dargestellt werden kann, wobei t die Jahre ($t = 0$ steht für das Jahr 2007) und $U(t)$ die Umsatzerlöse in Milliarden US-Dollar beschreibt.

h) Beurteilen Sie die Aussage des Geschäftsführers in Hinblick auf

- die Wiedergabe der tatsächlichen Werte und
- die Aussagekraft bezüglich eines Schätzwertes für das Jahr 2012.

Kumulierte Binomialverteilung n = 100

k	P(X ≤ k)										
	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	1/3	0,35	0,4	0,45	0,5
0	0,0059										
1	0,0371	0,0003									
2	0,1183	0,0019									
3	0,2578	0,0078	0,0001								
4	0,4360	0,0237	0,0004								
5	0,6160	0,0576	0,0016								
6	0,7660	0,1172	0,0047	0,0001							
7	0,8720	0,2061	0,0122	0,0003							
8	0,9369	0,3209	0,0275	0,0009							
9	0,9718	0,4513	0,0551	0,0023							
10	0,9885	0,5832	0,0994	0,0057	0,0001						
11	0,9957	0,7030	0,1635	0,0126	0,0004						
12	0,9985	0,8018	0,2473	0,0253	0,0010						
13	0,9995	0,8761	0,3474	0,0469	0,0025	0,0001					
14	0,9999	0,9274	0,4572	0,0804	0,0054	0,0002					
15	1,0000	0,9601	0,5683	0,1285	0,0111	0,0004					
16		0,9794	0,6725	0,1923	0,0211	0,0010	0,0001				
17		0,9900	0,7633	0,2712	0,0376	0,0022	0,0002	0,0001			
18		0,9954	0,8372	0,3621	0,0630	0,0045	0,0005	0,0001			
19		0,9980	0,8935	0,4602	0,0995	0,0089	0,0011	0,0003			
20		0,9992	0,9337	0,5595	0,1488	0,0165	0,0024	0,0008			
21		0,9997	0,9607	0,6540	0,2114	0,0288	0,0048	0,0017			
22		0,9999	0,9779	0,7389	0,2864	0,0479	0,0091	0,0034	0,0001		
23		1,0000	0,9881	0,8109	0,3711	0,0755	0,0164	0,0066	0,0003		
24			0,9939	0,8686	0,4617	0,1136	0,0281	0,0121	0,0006		
25			0,9970	0,9125	0,5535	0,1631	0,0458	0,0211	0,0012		
26			0,9986	0,9442	0,6417	0,2244	0,0715	0,0351	0,0024	0,0001	
27			0,9994	0,9658	0,7224	0,2964	0,1066	0,0558	0,0046	0,0002	
28			0,9997	0,9800	0,7925	0,3768	0,1524	0,0848	0,0084	0,0004	
29			0,9999	0,9888	0,8505	0,4623	0,2093	0,1236	0,0148	0,0008	
30			1,0000	0,9939	0,8962	0,5491	0,2766	0,1730	0,0248	0,0015	
31				0,9969	0,9307	0,6331	0,3525	0,2331	0,0398	0,0030	0,0001
32				0,9984	0,9554	0,7107	0,4344	0,3029	0,0615	0,0055	0,0002
33				0,9993	0,9724	0,7793	0,5188	0,3803	0,0913	0,0098	0,0004
34				0,9997	0,9836	0,8371	0,6019	0,4624	0,1303	0,0166	0,0009
35				0,9999	0,9906	0,8839	0,6803	0,5458	0,1795	0,0272	0,0018
36				0,9999	0,9948	0,9201	0,7511	0,6269	0,2386	0,0429	0,0033
37				1,0000	0,9973	0,9470	0,8123	0,7024	0,3068	0,0651	0,0060
38					0,9986	0,9660	0,8630	0,7699	0,3822	0,0951	0,0105
39					0,9993	0,9790	0,9034	0,8276	0,4621	0,1343	0,0176
40					0,9997	0,9875	0,9341	0,8750	0,5433	0,1831	0,0284
41					0,9999	0,9928	0,9566	0,9123	0,6225	0,2415	0,0443
42					0,9999	0,9960	0,9724	0,9406	0,6967	0,3087	0,0666
43					1,0000	0,9979	0,9831	0,9611	0,7635	0,3828	0,0967
44						0,9989	0,9900	0,9754	0,8211	0,4613	0,1356
45						0,9995	0,9943	0,9850	0,8689	0,5413	0,1841
46						0,9997	0,9969	0,9912	0,9070	0,6196	0,2421
47						0,9999	0,9983	0,9950	0,9362	0,6931	0,3086
48						0,9999	0,9991	0,9973	0,9577	0,7596	0,3822
49						1,0000	0,9996	0,9985	0,9729	0,8173	0,4602
50							0,9998	0,9993	0,9832	0,8654	0,5398
51							0,9999	0,9996	0,9900	0,9040	0,6178
52							1,0000	0,9998	0,9942	0,9338	0,6914
53								0,9999	0,9968	0,9559	0,7579
54								1,0000	0,9983	0,9716	0,8159
55									0,9991	0,9824	0,8644
56									0,9996	0,9894	0,9033
57									0,9998	0,9939	0,9334
58									0,9999	0,9966	0,9557
59									1,0000	0,9982	0,9716
60										0,9991	0,9824
61										0,9995	0,9895
62										0,9998	0,9940
63										0,9999	0,9967
64										1,0000	0,9982
65											0,9991
66											0,9996
67											0,9998
68											0,9999
69											1,0000

Zur besseren Lesbarkeit sind Werte von 0,0000 und 1,0000 weggelassen worden.

Kumulierte Binomialverteilung n = 50

k	P(X ≤ k)										
	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	1/3	0,35	0,4	0,45	0,5
0	0,0769	0,0052	0,0003	0,0000							
1	0,2794	0,0338	0,0029	0,0002							
2	0,5405	0,1117	0,0142	0,0013	0,0001						
3	0,7604	0,2503	0,0460	0,0057	0,0005						
4	0,8964	0,4312	0,1121	0,0185	0,0021	0,0002					
5	0,9622	0,6161	0,2194	0,0480	0,0070	0,0007	0,0001	0,0001			
6	0,9882	0,7702	0,3613	0,1034	0,0194	0,0025	0,0005	0,0002			
7	0,9968	0,8779	0,5188	0,1904	0,0453	0,0073	0,0017	0,0008	0,0001		
8	0,9992	0,9421	0,6681	0,3073	0,0916	0,0183	0,0050	0,0025	0,0002		
9	0,9998	0,9755	0,7911	0,4437	0,1637	0,0402	0,0127	0,0067	0,0008		
10	1,0000	0,9906	0,8801	0,5836	0,2622	0,0789	0,0284	0,0160	0,0022		
11		0,9968	0,9372	0,7107	0,3816	0,1390	0,0570	0,0342	0,0057	0,0001	
12		0,9990	0,9699	0,8139	0,5110	0,2229	0,1035	0,0661	0,0133	0,0002	0,0002
13		0,9997	0,9868	0,8894	0,6370	0,3279	0,1715	0,1163	0,0280	0,0006	0,0005
14		0,9999	0,9947	0,9393	0,7481	0,4468	0,2612	0,1878	0,0540	0,0018	0,0013
15		1,0000	0,9981	0,9692	0,8369	0,5692	0,3690	0,2801	0,0955	0,0045	0,0033
16			0,9993	0,9856	0,9017	0,6839	0,4868	0,3889	0,1561	0,0104	0,0077
17			0,9998	0,9937	0,9449	0,7822	0,6046	0,5060	0,2369	0,0220	0,0164
18			0,9999	0,9975	0,9713	0,8594	0,7126	0,6216	0,3356	0,0427	0,0325
19			1,0000	0,9991	0,9861	0,9152	0,8036	0,7264	0,4465	0,0765	0,0595
20				0,9997	0,9937	0,9522	0,8741	0,8139	0,5610	0,1273	0,1013
21				0,9999	0,9974	0,9749	0,9244	0,8813	0,6701	0,1974	0,1611
22				1,0000	0,9990	0,9877	0,9576	0,9290	0,7660	0,2862	0,2399
23					0,9996	0,9944	0,9778	0,9604	0,8438	0,3900	0,3359
24					0,9999	0,9976	0,9892	0,9793	0,9022	0,5019	0,4439
25					1,0000	0,9991	0,9951	0,9900	0,9427	0,6134	0,5561
26						0,9997	0,9979	0,9955	0,9686	0,7160	0,6641
27						0,9999	0,9992	0,9981	0,9840	0,8034	0,7601
28						1,0000	0,9997	0,9993	0,9924	0,8721	0,8389
29							0,9999	0,9997	0,9966	0,9220	0,8987
30							1,0000	0,9999	0,9986	0,9556	0,9405
31								1,0000	0,9995	0,9765	0,9675
32									0,9998	0,9884	0,9836
33									0,9999	0,9947	0,9923
34									1,0000	0,9978	0,9967
35										0,9991	0,9987
36										0,9997	0,9995
37										0,9999	0,9998
38										1,0000	1,0000
39											
40											
41											
42											
43											
44											
45											
46											
47											
48											
49											
50											

Zur besseren Lesbarkeit sind Werte von 0,0000 und 1,0000 weggelassen worden.

Name des Prüflings

Punkteverteilung Aufgabe 3: Apfelbaumplantage

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	6	7	2	2	3	4	4	5	33
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Hinweis: Rechnen Sie bitte immer auf 2 Nachkommastellen genau, es sei denn, es ist etwas anderes in der Aufgabe angegeben!

Südöstlich einer Hauptstraße befindet sich die Bio-Obstplantage der Familie Johannsen. Sie dehnt sich vom Punkt P in Richtung Osten aus und endet an der geradlinigen Verbindung zwischen den Punkten R und S. Ihre südlichste Ausdehnung reicht bis zum Bauernhof der Familie, der sich im Punkt Q befindet. (1 Längeneinheit $\triangleq$ 100 m)

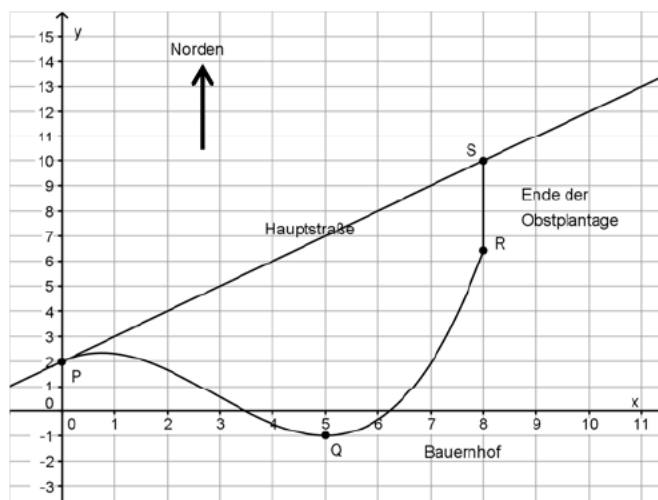


Abbildung 3.1

Bauer Johannsen hat beim zuständigen Bauamt den Antrag für einen neuen Wirtschaftsweg (Feldweg) f gestellt, um bei der Ernte besser an seine Obstplantage zu gelangen. Er möchte, dass seine Obstplantage in Zukunft an ihrem äußeren Rand von diesem Wirtschaftsweg f umgeben wird. Der Wirtschaftsweg f soll ohne Knick im Punkt P von der Hauptstraße abzweigen, danach zunächst zum Bauernhof im Punkt Q führen und weiter bis zum Punkt R reichen, um dann geradlinig in nördlicher Richtung bis zum Punkt S zu führen und dort wieder in die Hauptstraße einzumünden (siehe Abbildung 3.1).

- a) Begründen Sie, warum man den Verlauf des neuen Wirtschaftsweges f vom Punkt P bis zum Punkt R durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades beschreiben kann.

Ermitteln Sie die Bedingungen, die für eine ganzrationale Funktion $f(x)$ gelten müssen und bestimmen Sie den Funktionsterm dieser Funktion $f(x)$.

Im zuständigen Bauamt, das den Antrag von Bauer Johannsen bearbeitet, wird der Verlauf des Wirtschaftsweges durch die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = \frac{11}{125}x^3 - \frac{19}{25}x^2 + x + 2 \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

modelliert.

- b) Zeichnen Sie in die Abbildung 3.1 den Bereich der Obstplantage ein.

Weisen Sie nach, dass die Fläche der Obstplantage des Bauern Johannsen mit Hilfe der Funktionsgleichung $A(x) = -\frac{11}{500}x^4 + \frac{19}{75}x^3$ ermittelt werden kann.

Berechnen Sie die Größe der Obstplantage in Hektar (1 Hektar $\triangleq$ 10000 m²).

Bauer Johannsen hat auf seiner Plantage 800 Apfelbäume verschiedener Sorten gepflanzt. Große Sorge bereitete ihm, dass bereits am 07. Mai 2012 ($t = 0$) 5 Apfelbäume von den Raupen des Apfelwicklers, einem tierischem Schädling im Obstbau, befallen waren. Er erkundigte sich daher bei der zuständigen Landwirtschaftskammer und erfuhr, dass sich die Anzahl der befallenen Bäume näherungsweise durch die Funktion H mit der Funktionsgleichung

$$H(t) = S - C \cdot e^{k \cdot t} \quad \text{mit } S, C, k, t \in \mathbb{R} \text{ und } S, C, t \geq 0 \text{ sowie } k < 0$$

(t in Tagen, $H(t)$ Anzahl der befallenen Bäume) ermitteln lässt, wenn der Schädling nicht bekämpft wird.

- c) Erläutern Sie, warum in diesem Fall $S = 800$ und $C = 795$ zu wählen sind und erläutern Sie dabei die Bedeutung der Parameter S und C im Sachzusammenhang.

Genau eine Woche später, am 14. Mai 2012, zählte Bauer Johannsen 39 befallene Apfelbäume.

- d) Weisen Sie nach, dass aufgrund der jetzt vorliegenden Zahlen in diesem Fall für den Parameter k in der Funktionsgleichung $H(t) = S - C \cdot e^{k \cdot t}$ gilt: $k \approx -0,006$.

Verwenden Sie für Ihre weiteren Berechnungen die Funktionsgleichung

$$H(t) = 800 - 795 \cdot e^{-0,006 \cdot t} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R} \text{ und } t \geq 0,$$

wobei t die Tage und $H(t)$ die Anzahl der befallenen Bäume darstellt.

- e) Bestimmen Sie mit Hilfe der Funktion $H(t)$ den Zeitpunkt, an dem 30% der Apfelbäume befallen wären, falls Bauer Johannsen keine Gegenmittel einsetzen würde.
- f) Ermitteln Sie den durchschnittlichen täglichen Anstieg der Anzahl befallener Apfelbäume vom 3. bis zum 7. Beobachtungstag sowie den momentanen Anstieg der befallenen Apfelbäume am 14. Mai 2012.

Zur Schädlingsbekämpfung wurde Bauer Johannsen der Einsatz von Schlupfwespen empfohlen. Am 12. Tag nach dem festgestellten Befall konnte er diese Wespen einsetzen. Bauer Johannsen wurde mitgeteilt, dass die Anzahl der befallenen Apfelbäume ab dem 12. Tag und nachdem er die Schlupfwespen eingesetzt hat, näherungsweise mit der Funktion K mit der Funktionsgleichung

$$K(t) = (-1,7t + 80,4) \cdot e^{0,07t - 0,84} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R} \text{ und } t \geq 12$$

beschrieben werden kann.

- g) Weisen Sie nach, dass ungefähr am 33. Tag die meisten Apfelbäume vom Schädling befallen sind. (Eine Überprüfung der hinreichenden Bedingung ist nicht erforderlich.)
Ermitteln Sie, wie viele Apfelbäume befallen sind.

- h) Ermitteln Sie eine abschnittsweise definierte Funktion B mit der Funktionsgleichung

$$B(t) = \begin{cases} \boxed{} & \text{mit } t \in \mathbb{R} \text{ und } 0 \leq t < \boxed{}, \\ \boxed{} & \text{mit } t \in \mathbb{R} \text{ und } \boxed{} \leq t \leq \boxed{}, \end{cases}$$

die die Anzahl der befallenen Apfelbäume ab dem Tag Null bis zur vollständigen Beseitigung des Schädlings wiedergibt.

Zeichnen Sie diese Funktion B in das folgende Koordinatensystem (Abbildung 3.2) ein und beschriften Sie die Achsen des Koordinatensystems entsprechend des beschriebenen Sachverhalts.

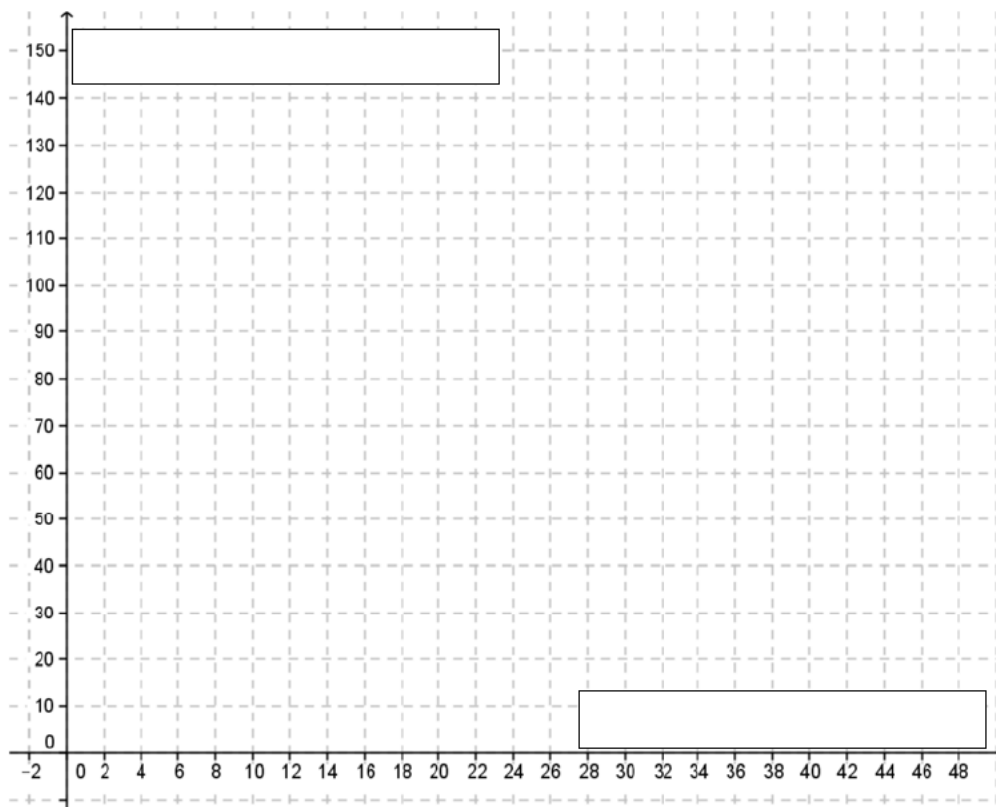


Abbildung 3.2

Aufgabe 1 mit Analytischer Geometrie:

	Anforderungen	Modelllösungen					
A1	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.					BE
1a	entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind, und begründet seine Entscheidungen.	Aussage		Entscheidung und Begründung			6
		Der Graph der Funktion f schneidet die x -Achse nur im Punkt $S(-3 0)$.		Die Aussage ist falsch. Für den Schnittpunkt mit der x -Achse gilt: $f(x_N) = 0$. Dies ist der Fall an den Stellen $x_{N1} = -3$ und $x_{N2} = 1$. Daher schneidet der Graph der Funktion die x -Achse im Punkt $S_1(-3 0)$ und im Punkt $S_2(1 0)$.			
		Der Graph der Funktion hat im Punkt $P(-2 4,5)$ einen Tiefpunkt.		Die Aussage ist falsch. Die hinreichende Bedingung für einen Tiefpunkt lautet: $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) > 0$. Für den Punkt P gilt jedoch: $f'(-2) = 0$ und $f''(-2) = -6 < 0$. Der Graph der Funktion f hat daher im Punkt P einen Hochpunkt.			
		Der Graph der Funktion hat an der Stelle $x = 1$ eine waagrechte Tangente.		Die Aussage ist wahr. Bedingung für eine waagrechte Tangente ist $f'(x) = 0$. Diese Bedingung ist für $x = 1$ erfüllt.			
1b	bestimmt die Parameter a , c und d .	Parameter	a	b	c	d	3
		Wert	2	1	4	1,5	
		Im Vergleich zum Graphen von $\cos(x)$ ist der Graph hier um 4 Einheiten horizontal in die negative Richtung verschoben; $c = 4$. Die Amplitude hat den Wert 2, damit ist $a = 2$, und schwingt um den Wert 1,5 (vertikale Verschiebung in die positive Richtung). Damit hat der Parameter d den Wert 1,5.					
1c	berechnet den Inhalt der markierten Fläche.	Schnittstelle zwischen den Funktionen g und f : $\{x_1 = 0\} \notin \mathbb{L}$, $x_2 = 2$, Nullstellen der Funktion f : $\{x_3 \approx -0,45\} \notin \mathbb{L}$, $x_4 \approx 4,45$ Berechnen des markierten Flächeninhalts: $A = A_1 + A_2 = \int_0^2 (x + 1)dx + \int_2^{4,45} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1\right) dx$ $A \approx 8,9 \text{ FE}$					4
1d	berechnet den Term der 1. Ableitung.	$f(x) = 3x^4 - 4x^2$		$f'(x) = 12x^3 - 8x$			4
		$g(x) = 2x \cdot \sin(x)$		$g'(x) = 2 \sin(x) + 2x \cdot \cos(x)$			
		$h(v) = 4tv^3 + 2t^2 - 6v$		$h'(v) = 12tv^2 - 6$			
		$k(x) = (2x - 3)^2$		$k'(x) = 4 \cdot (2x - 3)$			

	Anforderungen	Modelllösungen																
1e	berechnet den Wert des Parameters t und bestimmt x und y.	(1) $4 + 2t = -4 \Rightarrow t = -4$ (2) $4 + 0 = x - 4 \wedge 1 - 2 = y - 1 \Rightarrow x = 8, y = 0$	3															
1f	entscheidet, welche Aussagen wahr oder falsch sind.	<table><tr><td></td><td>wahr</td><td>falsch</td></tr><tr><td>Für $b = 4$ sind die Geraden parallel zueinander.</td><td>x</td><td></td></tr><tr><td>Für $a = -2$ und $b = 5$ schneiden sich die Geraden in $P(5/2/8)$.</td><td></td><td>x</td></tr><tr><td>Für $b = -10$ sind die Geraden orthogonal zueinander.</td><td>x</td><td></td></tr><tr><td>Für $a = 0$ und $b = 0$ verläuft die Gerade g in der y-z-Ebene.</td><td>x</td><td></td></tr></table>		wahr	falsch	Für $b = 4$ sind die Geraden parallel zueinander.	x		Für $a = -2$ und $b = 5$ schneiden sich die Geraden in $P(5/2/8)$.		x	Für $b = -10$ sind die Geraden orthogonal zueinander.	x		Für $a = 0$ und $b = 0$ verläuft die Gerade g in der y-z-Ebene.	x		4
	wahr	falsch																
Für $b = 4$ sind die Geraden parallel zueinander.	x																	
Für $a = -2$ und $b = 5$ schneiden sich die Geraden in $P(5/2/8)$.		x																
Für $b = -10$ sind die Geraden orthogonal zueinander.	x																	
Für $a = 0$ und $b = 0$ verläuft die Gerade g in der y-z-Ebene.	x																	
1g	bestimmt die Ebenengleichungen in Parameter- oder Koordinatenform.	$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $E_1: \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$ $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $E_2: y = 0$ $E_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ oder $E_3: -2 \cdot x + y = 0$	3															
1h	bestimmt den Wert des Parameters a.	Die Punkte bilden dann kein Dreieck, wenn sie auf einer Geraden liegen. $g_{AB}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Soll Punkt C auf dieser Geraden liegen, ergibt sich aus $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ a \end{pmatrix}$ der Wert $r = -2$. Wenn $a = -7$, dann liegen die Punkte A, B und C auf einer Geraden.	4															
1i	weist die Koordinatengleichung nach.	$x = 1 + 2 \cdot r + 3 \cdot t$ $y = 1 + r \Rightarrow r = y - 1$ $z = 1 + 0,5 \cdot t \Rightarrow t = 2 \cdot (z - 1)$ Nach Einsetzen in die erste Gleichung und Umformungen folgt: $E: x - 2 \cdot y - 6 \cdot z = -7$	3															
			34															

Aufgabe 2: Bergwerk

	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
2a	nennt den Endpunkt des Schachtes und erläutert die Geradengleichung.	Endpunkt: $E(300 200 -500)$. Stützvektor der Geraden $\triangleq$ Ortsvektor von Punkt A $\left(\vec{a} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, Richtungsvektor $\triangleq$ Vektor in z-Richtung $\left(r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$, da der Hauptschacht lotrecht verläuft.	3
2b	berechnet die Länge des Nebenstollens 1.	Beginn des Nebenstollens 1: $B_N(300 200 -300)$ Richtungsvektor des Nebenstollens: $\vec{v}_N = \begin{pmatrix} 800 - 300 \\ 100 - 200 \\ -280 - (-300) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ -100 \\ 20 \end{pmatrix}$ Stollenlänge: $l = \sqrt{500^2 + (-100)^2 + 20^2} \approx 510,29 \text{ m}$	3
2c	bestimmt den Winkel des Nebenstollens 1 gegenüber dem Hauptschacht.	Richtungsvektor Hauptschacht: $\vec{v}_H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\cos \alpha = \frac{\vec{v}_H \cdot \vec{v}_N}{ \vec{v}_H \cdot \vec{v}_N } \approx \frac{20}{1 \cdot 510,29} \approx 0,0391934$, d.h. $\alpha \approx 87,75^\circ$.	3
2d	untersucht, ob eine lotrechte Bohrung vom Nebenstollen 2 den Punkt L erreicht.	Lotrechte Gerade durch Punkt L: $g_L: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 500 \\ -410 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Schnittpunktuntersuchung der Geraden g_L und der Geraden g_{NS2} führt auf folgendes LGS: $\begin{array}{rcl} 0 & = & 300 - s \\ 500 & = & 200 + 0,5 \cdot s \\ -410 + r & = & -400 \end{array}$ Dieses LGS hat keine Lösung. Das bedeutet, dass sich der Punkt L nicht durch eine lotrechte Bohrung erreichen lässt.	4
2e	zeigt, dass eine Verlängerung des Stollens knickfrei bis zum Punkt N möglich ist.	Knickfreie Verlängerung bedeutet, dass der Punkt N auf der Geraden g_{NS2} liegen muss. Der Nachweis geschieht mit Hilfe einer Punktprobe: $\begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ -400 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -314 \\ 507 \\ -400 \end{pmatrix}$ $s = 614$ führt für $200 + 614 \cdot 0,5 = 507$ und $-400 + 614 \cdot 0 = -400$ zu wahren Aussagen. Somit ist eine knickfreie Verlängerung des Nebenstollens 2 möglich.	4

	Anforderungen	Modelllösungen	
2f	untersucht, welche Möglichkeit die preiswertere Variante ist.	Notwendige Länge von Nebenstollen 2: $l_2 = \left \begin{pmatrix} -314 \\ 507 \\ -400 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ -400 \end{pmatrix} \right = \left \begin{pmatrix} -614 \\ 307 \\ 0 \end{pmatrix} \right \approx 686,47 \text{ m}$ D.h., der Nebenstollen 2 muss um 86,47 m verlängert werden. Die Kosten betragen: $86,47 \text{ m} \cdot 4500 \frac{\text{€}}{\text{m}} = 389115 \text{ €}$. Da sich Punkt N in einer Tiefe von 400 m befindet, würde eine lotrechte Bohrung $400 \text{ m} \cdot 1500 \frac{\text{€}}{\text{m}} = 600000 \text{ €}$ kosten. Die Verlängerung von Nebenstollen 2 ist demnach die preiswertere Variante.	5
2g	begründet, dass der Hauptschacht nicht orthogonal zur Granitschicht verläuft und weist nach, dass der Punkt in der Ebene liegt.	Damit der lotrecht verlaufende Hauptschacht orthogonal zur Granitschichtebene verläuft, müsste diese waagerecht verlaufen. Da die z-Koordinaten der Punkte G_1, G_2 und G_3 aber nicht gleich sind, verläuft die Ebene nicht waagerecht. Einsetzen der Koordinaten des Punktes G_2 in die Ebenengleichung ergibt eine wahre Aussage: $300 + 2 \cdot (-550) = -800$. Demnach liegt der Punkt G_2 in der Ebene.	3
2h	bestimmt, um wie viele Meter der Hauptschacht verlängert werden kann.	Gesucht ist zunächst der Durchstoßpunkt D der Hauptschachtgeraden mit der Granitschichtebene. Es ergibt sich folgende Gleichung: $300 + 2 \cdot (-r) = -800$, d.h. $r = 550$. Der Durchstoßpunkt ist der Punkt $D(300 200 -550)$. Da der Hauptschacht bereits 500 m tief ist, könnte er noch um 50 m verlängert werden.	4
2i	bestimmt das Wasservolumen in m^3 .	Bestimmung der Parameter a und k aus Tabellenwerten: $f(0) = 16 \Rightarrow a = 16$ $f(1) = 16 \cdot e^k = 10 \Rightarrow k \approx -0,47$ Da $f(t)$ eine Änderungsrate darstellt, ergibt sich das in 10 Minuten eingeflossene Wasser durch Integration von $\int_0^{10} f(t) dt$: $V(10) = \int_0^{10} 16 \cdot e^{-0,47 \cdot t} dt = \left[\frac{16}{-0,47} \cdot e^{-0,47 \cdot t} \right]_0^{10} \approx 33,73 \text{ m}^3$	4
			33

Aufgabe 1 mit Linearer Algebra:

	Anforderungen	Modelllösungen					
A1	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.					BE
1a	entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind, und begründet seine Entscheidungen.	Aussage		Entscheidung und Begründung			6
		Der Graph der Funktion f schneidet die x -Achse nur im Punkt $S(-3 0)$.		Die Aussage ist falsch. Für den Schnittpunkt mit der x -Achse gilt: $f(x_N) = 0$. Dies ist der Fall an den Stellen $x_{N1} = -3$ und $x_{N2} = 1$. Daher schneidet der Graph der Funktion die x -Achse im Punkt $S_1(-3 0)$ und im Punkt $S_2(1 0)$.			
		Der Graph der Funktion hat im Punkt $P(-2 4,5)$ einen Tiefpunkt.		Die Aussage ist falsch. Die hinreichende Bedingung für einen Tiefpunkt lautet: $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) > 0$. Für den Punkt P gilt jedoch: $f'(-2) = 0$ und $f''(-2) = -6 < 0$. Der Graph der Funktion f hat daher im Punkt P einen Hochpunkt.			
		Der Graph der Funktion hat an der Stelle $x = 1$ eine waagrechte Tangente.		Die Aussage ist wahr. Bedingung für eine waagrechte Tangente ist $f'(x) = 0$. Diese Bedingung ist für $x = 1$ erfüllt.			
1b	bestimmt die Parameter a , c und d .	Parameter	a	b	c	d	3
		Wert	2	1	4	1,5	
		Im Vergleich zum Graphen von $\cos(x)$ ist der Graph hier um 4 Einheiten horizontal in die negative Richtung verschoben; $c = 4$. Die Amplitude hat den Wert 2, damit ist $a = 2$, und schwingt um den Wert 1,5 (vertikale Verschiebung in die positive Richtung). Damit hat der Parameter d den Wert 1,5.					
1c	berechnet den Inhalt der markierten Fläche.	Schnittstelle zwischen den Funktionen f und g : $\{x_1 = 0\} \notin \mathbb{L}$, $x_2 = 2$, Nullstellen der Funktion f : $\{x_3 \approx -0,45\} \notin \mathbb{L}$, $x_4 \approx 4,45$ Berechnen des markierten Flächeninhalts: $A = A_1 + A_2 = \int_0^2 (x + 1)dx + \int_2^{4,45} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1\right) dx$ $A \approx 8,9 \text{ FE}$					4
1d	berechnet den Term der 1. Ableitung.	$f(x) = 3x^4 - 4x^2$		$f'(x) = 12x^3 - 8x$			4
		$g(x) = 2x \cdot \sin(x)$		$g'(x) = 2 \sin(x) + 2x \cdot \cos(x)$			
		$h(v) = 4tv^3 + 2t^2 - 6v$		$h'(v) = 12tv^2 - 6$			
		$k(x) = (2x - 3)^2$		$k'(x) = 4 \cdot (2x - 3)$			

	Anforderungen	Modelllösungen													
1e	bestimmt die Matrizenzelemente a, b, c und d.	Laut Aufgabenstellung muss gelten: $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & -2b \\ c & 2d \end{pmatrix}$. Durch Vergleich der Matrizenzelemente ergibt sich $c = 2$. Weiterhin sind $-2 = 4a$, $-1 = -2b$ und $1 = 2d$. Durch Umformen ergeben sich die weiteren Werte: $a = -0,5$, $b = 0,5$ und $d = 0,5$.	3												
1f	entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.	<table><tr><td></td><td>wahr</td><td>falsch</td></tr><tr><td>$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$</td><td>x</td><td></td></tr><tr><td>$(A \cdot B)^T = (B \cdot A)^T$</td><td></td><td>x</td></tr><tr><td>$(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$</td><td></td><td>x</td></tr></table>		wahr	falsch	$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$	x		$(A \cdot B)^T = (B \cdot A)^T$		x	$(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$		x	3
	wahr	falsch													
$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$	x														
$(A \cdot B)^T = (B \cdot A)^T$		x													
$(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$		x													
1g	berechnet die inverse Matrix für $s = 3$ und begründet, dass die Matrix A für $s = 4$ nicht invertierbar ist.	$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ Für eine inverse Matrix A^{-1} gilt: $A \cdot A^{-1} = E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Daraus folgen die linearen Gleichungssysteme: $1a + 2b = 1$ und $1c + 2d = 0$ $2a + 4b = 0$ und $2c + 4d = 1$ Da diese linearen Gleichungssysteme keine Lösung besitzen, existiert auch keine inverse Matrix A^{-1} .	3												
1h	begründet, unter welchen Bedingungen die Matrix X existiert und berechnet die Matrix X.	Die Matrix A ist vom Typ (2, 1), die Matrix B ist vom Typ (2, 2). Wenn eine Matrix X existiert, muss sie vom Typ (1, 2) sein. Es muss noch geprüft werden, ob die Matrizenzelemente x_{11} und x_{12} mit $x_{11}, x_{12} \in \mathbb{R}$ derart existieren, dass die folgende Matrixgleichung erfüllt ist: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 18 \\ 32 & 36 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2x_{11} & 2x_{12} \\ 4x_{11} & 4x_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 18 \\ 32 & 36 \end{pmatrix}$ Vergleich der Matrizenzelemente liefert $x_{11} = 8$ und $x_{12} = 9$, daraus folgt die Matrix $X = \begin{pmatrix} 8 & 9 \end{pmatrix}$.	4												
1i	ermittelt die fehlenden Werte für a, b, c und die zugehörige stochastische Übergangsmatrix.	Die Übergangsmatrix für den abgebildeten Übergangsgraphen lautet $M = \begin{pmatrix} a & 0,3 \\ b & c \end{pmatrix}$. Da es sich um eine stochastische Matrix handelt, ist $c = 1 - 0,3 = 0,7$. Für den dargestellten Übergang gilt: $M \cdot \vec{x}_0 = \vec{x}_1$ bzw. $\begin{pmatrix} a & 0,3 \\ b & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Daraus folgen die Gleichungen $2a + 1,8 = 3$ und $2b + 4,2 = 5$. Somit ist $a = 0,6$ und $b = 0,4$. Die zugehörige Übergangsmatrix ist $M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{pmatrix}$. alternativ: Aus $M = \begin{pmatrix} c & b \\ 0,3 & a \end{pmatrix}$ mit $c = 0,7$ folgt $\begin{pmatrix} 0,7 & b \\ 0,3 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow 1,4 + 6b = 3$ und $0,6 + 6a = 5$ $\Rightarrow a = \frac{11}{15}$ und $b = \frac{4}{15}$. Die zugehörige Übergangsmatrix ist $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 4/15 \\ 0,3 & 11/15 \end{pmatrix}$.	4												
			34												

Aufgabe 2: Wechselverhalten von Stromkunden

	Anforderungen	Modelllösungen																											
A2	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE																										
2a	weist nach, dass $m_{22} = 300$ ist.	Alle Elemente aus der Tabelle 2.1 müssen addiert die Anzahl der befragten Haushalte ergeben. Daher gilt: $m_{22} = 1000 - 135 - 120 - 20 - 45 - 20 - 120 - 180 - 60 = 300$	2																										
2b	ermittelt anhand der Tabelle 2.1 die Werte für r, s und t und erläutert deren Bedeutung.	$r = 120, s = 60, t = 120$ Der Wert r gibt die Anzahl der Haushalte an, die in dem vergangenen Jahr von der Stromkombination (K) zur Kombination (F) und der Wert t gibt die Anzahl der Haushalte an, die von der Kombination (F) zur Kombination (E) gewechselt haben. Der Wert s beschreibt dagegen die Anzahl der Haushalte, die eine Stromkombination (E) in 2011 bezogen und im vergangenen Jahr nicht gewechselt haben.	4																										
2c	erläutert die Vorgehensweise zur Berechnung der Elemente der Matrix W.	Da jeweils die Spaltensumme der stochastischen Matrix den Wert Eins ergibt, beschreibt die stochastische Matrix wie die Tabelle das Wechselverhalten „von - nach“ – das „Transponieren der Tabelle 2.1“ ist daher nicht notwendig. Die Spaltensummen ergeben die Gesamtanzahl der Haushalte, die zu Beginn des Jahres die jeweilige Stromkombination bezogen haben. <table><tr><th colspan="2" rowspan="2">Wechselverhalten innerhalb eines Jahres (absolute Häufigkeiten)</th><th colspan="3">von</th></tr><tr><th>F</th><th>K</th><th>E</th></tr><tr><th rowspan="3">nach</th><th>F</th><td>135</td><td>120</td><td>20</td></tr><tr><th>K</th><td>45</td><td>300</td><td>20</td></tr><tr><th>E</th><td>120</td><td>180</td><td>60</td></tr><tr><td colspan="2">Gesamt:</td><td>300</td><td>600</td><td>100</td></tr></table> Die Elemente der Matrix W entsprechen damit dem prozentualen Anteil der Haushalte (bezogen auf alle Haushalte einer Stromkombination). $z.B.: m_{11} = \frac{135}{300} = 0,45, \quad m_{22} = \frac{300}{600} = 0,5, \quad m_{33} = \frac{60}{100} = 0,6$	Wechselverhalten innerhalb eines Jahres (absolute Häufigkeiten)		von			F	K	E	nach	F	135	120	20	K	45	300	20	E	120	180	60	Gesamt:		300	600	100	4
Wechselverhalten innerhalb eines Jahres (absolute Häufigkeiten)		von																											
		F	K	E																									
nach	F	135	120	20																									
	K	45	300	20																									
	E	120	180	60																									
Gesamt:		300	600	100																									
2d	berechnet den Vektor $\vec{v}$ und erläutert die Bedeutung der Matrixgleichung im Sachzusammenhang.	$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,2 & 0,2 \\ 0,15 & 0,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 600 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 275 \\ 365 \\ 360 \end{pmatrix}$ Zum Zeitpunkt t_0 bezogen 300 Haushalte die Stromkombination (F), 600 Haushalte die Stromkombination (K) und 100 Haushalte die Stromkombination (E), (siehe Tabelle 2.1). Diese Daten gibt der Vektor $\begin{pmatrix} 300 \\ 600 \\ 100 \end{pmatrix} = \vec{v}_0$ wieder. Die Matrix $\begin{pmatrix} 0,45 & 0,2 & 0,2 \\ 0,15 & 0,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$ stellt das Wechselverhalten innerhalb eines Übergangs (eines Jahres) auf Grundlage der Tabelle 2.1 dar. <i>Fortsetzung nächste Seite</i>	5																										

Fortsetzung nächste Seite

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2d		Nach einem Übergang (nach einem Jahr) werden 275 Haushalte die Stromkombination (F), 365 Haushalte die Stromkombination (K) und 360 Haushalte die Stromkombination (E) beziehen, $\begin{pmatrix} 275 \\ 365 \\ 360 \end{pmatrix} = \vec{v}_1.$ Die Matrixgleichung $\vec{v} = \vec{v}_1 = W \cdot \vec{v}_0$ gibt das Wechselverhalten der Haushalte nach einem Übergang bzw. nach einem Jahr wieder.	
2e	interpretiert die Matrix W hinsichtlich der Verteilung auf die verschiedenen Stromkombinationen und beurteilt die Bedeutung der Matrix W^{30}.	Da die Werte der stochastischen Matrix W^{30} pro Spalte jeweils identisch sind, handelt es sich hier um eine Grenzmatrix. Unabhängig von der Ausgangsverteilung werden demnach nach 30 Übergängen bzw. in 30 Jahren bei unverändertem Wechselverhalten $\frac{4}{15} \approx 26,27\%$ aller Haushalte mit der Stromkombination (F), $\frac{4}{15} \approx 26,27\%$ die Stromkombination (K) und $\frac{7}{15} \approx 46,67\%$ werden mit der Stromkombination (E) versorgt werden. Die angestrebte Energiewende setzt voraus, dass Strom nicht mehr vorwiegend aus Kernenergie (K) bezogen wird. Dies wäre nach der Grenzmatrix nicht der Fall – demnach würden immer noch ca. 26,27% aller Haushalte die Stromkombination (K) beziehen. Die Grenzmatrix gilt allerdings auch nur für den Fall, dass sich sowohl das Wechselverhalten der Haushalte, als auch das Angebot an den Stromkombinationen über einen Zeitraum von 30 Übergängen (30 Jahren) nicht verändert. Dies ist sehr unrealistisch: Das Wechselverhalten kann sich beispielsweise durch Preisänderungen und die zeitliche Distanz zu dem Reaktorunfall in Fukushima jederzeit ändern. Vor dem Hintergrund der angestrebten Energiewende wird wahrscheinlich langfristig keine Stromkombination mehr angeboten werden, die vorwiegend aus Kernenergie besteht.	6
2f	weist nach, dass der Koeffizient a den Wert $-\frac{11}{30}$ annimmt, berechnet den prozentualen Anteil der Haushalte für $t = 1$ und $t = 30$ und beschreibt, wie sich der prozentuale Anteil der Haushalte langfristig entwickeln wird.	Aus $p(t) = a \cdot e^{-1,235 \cdot t} + \frac{7}{15}$ mit $t = 0$ und $p(0) = 0,1$, folgt: $0,1 = a \cdot e^{-1,235 \cdot 0} + \frac{7}{15} = a \cdot 1 + \frac{7}{15} \Rightarrow a = -\frac{11}{30}$ $t = 1$: $p(1) = -\frac{11}{30} \cdot e^{-1,235 \cdot 1} + \frac{7}{15} \approx 0,36$ (36%) $t = 30$: $p(30) = -\frac{11}{30} \cdot e^{-1,235 \cdot 30} + \frac{7}{15} = \frac{7}{15}$ (ca. 46,67%) Nach dem angegebenen Wechselverhalten sollen langfristig (also für große t) $\frac{7}{15}$ aller Haushalte die Stromkombination (E) beziehen. Für $t \rightarrow +\infty$ muss sich demnach der Grenzwert $\frac{7}{15}$ ergeben. Dies wird durch die Berechnung von $p(30)$ und die entsprechenden Werte in der Grenzmatrix gestützt. (Rechnerische Begründung (nicht gefordert): Da $e^{-1,235 \cdot t} = \frac{1}{e^{1,235 \cdot t}}$, ist $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{e^{1,235 \cdot t}} \right) = 0$ und damit auch $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{11}{30} \cdot \frac{1}{e^{1,235 \cdot t}} \right) = 0$. Daraus folgt: $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{11}{30} \cdot \frac{1}{e^{1,235 \cdot t}} + \frac{7}{15} \right) = \frac{7}{15}$.)	6

	Anforderungen	Modelllösungen	
2g	erstellt ein mathematisches Modell zur Berechnung der Verteilung aus dem Vorjahr auf und ermittelt, wie viele Haushalte im Jahr 2001 ihren Strom aus (F), (K) bzw. (E) bezogen.	Modell einer Matrixengleichung $\begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 & 0,2 \\ 0,7 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 380 \\ 410 \\ 110 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} f \\ k \\ e \end{pmatrix}, \text{ also}$ $\begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 & 0,2 \\ 0,7 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f \\ k \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 380 \\ 410 \\ 110 \end{pmatrix},$ oder lineares Gleichungssystem: I) $0,3f + 0,7k + 0,2e = 380$ II) $0,7f + 0,2k = 410$ III) $0,1k + 0,8e = 110$ Durch Lösung der aufgestellten Matrixengleichung, ergibt sich die Startverteilung von: $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 500 \\ 300 \\ 100 \end{pmatrix}$ bzw. durch schrittweises Lösen des aufgestellten linearen Gleichungssystems (mit einem beliebigen Verfahren) ergeben sich die Lösungen: $f = 500, k = 300$ und $e = 100$. Im Jahr 2001 bezogen 500 Haushalte ihren Strom „vorwiegend aus fossilen Brennstoffen“ (F), 300 Haushalte „Strom vorwiegend aus Kernenergie“(K) und 100 Haushalte „Strom ausschließlich aus erneuerbaren Energiequellen“(E).	6
			33

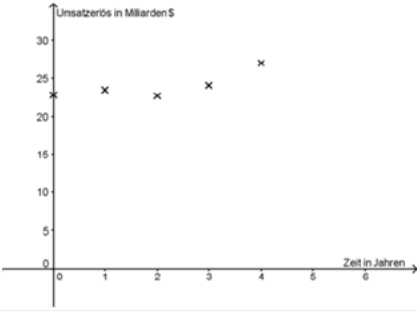
Aufgabe 1 mit Stochastik:

Anforderungen		Modelllösungen					
A1	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.					BE
1a	entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind, und begründet seine Entscheidungen.	Aussage		Entscheidung und Begründung			6
		Der Graph der Funktion f schneidet die x -Achse nur im Punkt $S(-3 0)$.		Die Aussage ist falsch. Für den Schnittpunkt mit der x -Achse gilt: $f(x_N) = 0$. Dies ist der Fall an den Stellen $x_{N1} = -3$ und $x_{N2} = 1$. Daher schneidet der Graph der Funktion die x -Achse im Punkt $S_1(-3 0)$ und im Punkt $S_2(1 0)$.			
		Der Graph der Funktion hat im Punkt $P(-2 4,5)$ einen Tiefpunkt.		Die Aussage ist falsch. Die hinreichende Bedingung für einen Tiefpunkt lautet: $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) > 0$. Für den Punkt P gilt jedoch: $f(-2) = 0$ und $f''(-2) = -6 < 0$. Der Graph der Funktion f hat daher im Punkt P einen Hochpunkt.			
		Der Graph der Funktion hat an der Stelle $x = 1$ eine waagrechte Tangente.		Die Aussage ist wahr. Bedingung für eine waagrechte Tangente ist $f'(x) = 0$. Diese Bedingung ist für $x = 1$ erfüllt.			
1b	bestimmt die Parameter a , c und d .	Parameter	a	b	c	d	3
		Wert	2	1	4	1,5	
		Im Vergleich zum Graphen von $\cos(x)$ ist der Graph hier um 4 Einheiten horizontal in die negative Richtung verschoben; $c = 4$. Die Amplitude hat den Wert 2, damit ist $a = 2$, und schwingt um den Wert 1,5 (vertikale Verschiebung in die positive Richtung). Damit hat der Parameter d den Wert 1,5.					
1c	berechnet den Inhalt der markierten Fläche.	Schnittstelle zwischen den Funktionen f und g : $\{x_1 = 0\} \notin \mathbb{L}$, $x_2 = 2$, Nullstellen der Funktion f : $\{x_3 \approx -0,45\} \notin \mathbb{L}$, $x_4 \approx 4,45$ Berechnen des markierten Flächeninhalts: $A = A_1 + A_2 = \int_0^2 (x + 1)dx + \int_2^{4,45} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1\right)dx$ $A \approx 8,9 \text{ FE}$					4
1d	berechnet den Term der 1. Ableitung.	$f(x) = 3x^4 - 4x^2$		$f'(x) = 12x^3 - 8x$			4
		$g(x) = 2x \cdot \sin(x)$		$g'(x) = 2 \sin(x) + 2x \cdot \cos(x)$			
		$h(v) = 4tv^3 + 2t^2 - 6v$		$h'(v) = 12tv^2 - 6$			
		$k(x) = (2x - 3)^2$		$k'(x) = 4 \cdot (2x - 3)$			

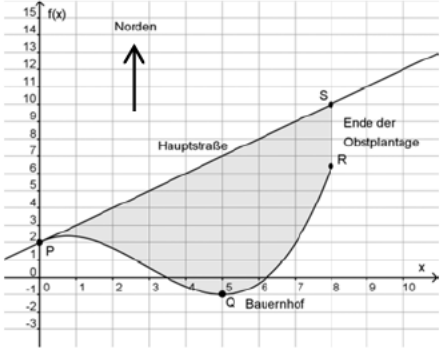
Anforderungen		Modelllösungen			
1e	entscheidet und begründet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.	Aussage	Entscheidung und Begründung		8
		Die Wahrscheinlichkeit für genau 10 Erfolge beträgt 5%.	X sei die Anzahl der Erfolge. Die Aussage ist falsch, da $P(X = 10) = \binom{50}{10} \cdot 0,3^{10} \cdot 0,7^{40} \approx 0,0386$. Die Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 3,9%.		
		Die Wahrscheinlichkeit für mindestens 10 Erfolge beträgt ca. 96%.	X sei die Anzahl der Erfolge. Die Aussage ist richtig, da $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - 0,0402 = 0,9597$ (aus Tabelle) . Die Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 96%.		
		Das Maximum der Wahrscheinlichkeitsverteilung wird bei k = 15 erreicht.	Das Maximum der Wahrscheinlichkeitsverteilung wird um den Erwartungswert erreicht. Die Aussage ist richtig, da für den Erwartungswert μ gilt: $\mu = n \cdot p = 50 \cdot 0,3 = 15$.		
		Man berechnet den Erwartungswert für diese Verteilung mit der Formel $\mu = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$.	Die Aussage ist falsch. Der Erwartungswert wird mit der Formel $\mu = n \cdot p$ berechnet. Mit der gegebenen Formel berechnet man die Standardabweichung σ .		
1f	berechnet die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.	Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau zwei weiße Kugeln gezogen werden, berechnet man durch $\left(\frac{5}{25}\right) \cdot \left(\frac{4}{24}\right) = \frac{1}{30} \approx 0,033$. Sie beträgt ca. 3,3%. Das Ereignis „mindestens eine schwarze Kugel“ ist das Gegenereignis zu „genau zwei weiße Kugeln“. Daher lässt sich die Wahrscheinlichkeit berechnen durch $1 - 0,033 = 0,967$. Sie beträgt 96,7%. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau eine weiße Kugel gezogen wird, berechnet man durch $\left(\frac{20}{25} \cdot \frac{5}{24}\right) + \left(\frac{5}{25} \cdot \frac{20}{24}\right) = \frac{1}{3} \approx 0,33$. Sie beträgt ca. 33%.			6
1g	ermittelt die fehlenden Wahrscheinlichkeiten.	X = k	P(X = k)	P(X ≤ k)	3
		-3	0,13	0,13	
		0	0,47	0,60	
		2	0,25	0,85	
		5	0,15	1	
					34

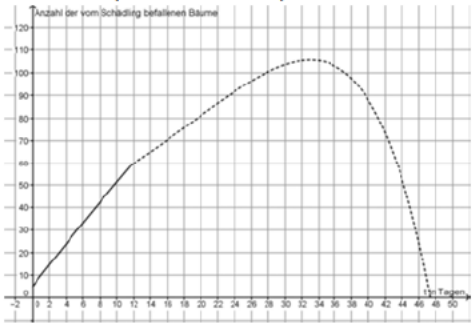
Aufgabe 2: Fast Food

	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
2a	zeigt, dass man die Wahrscheinlichkeit mit über 90% annehmen kann.	Als Wahrscheinlichkeit $p > 90\%$ übernimmt man die Werte aus der Umfrage: $51\% + 25\% + 15\% = 91\% > 90\%$.	1
2b	erläutert die Annahmen zur Anwendung der Binomialverteilung und begründet, dass die Wahrscheinlichkeit 40% beträgt.	X: „Anzahl der Personen, die regelmäßig ein Fast-Food-Restaurant besuchen“ kann als binomialverteilt angenommen werden, wenn bei der Auswertung nur zwei mögliche Ergebnisse zugelassen sind: Erfolg: Ja-Stimme, Misserfolg: keine Ja-Stimme. Die 100 Antworten ($n = 100$) werden unabhängig voneinander gegeben. Dabei ist die Unabhängigkeit problematisch, da angenommen werden müsste, dass jeder Befragte unabhängig von den Freunden, mit denen er in der Stadt ist, antwortet, was in der Realität nicht unbedingt anzunehmen ist. Als Wahrscheinlichkeit $p = 0,40$ übernimmt man die Werte aus der Umfrage: $25\% + 15\% = 40\%$. Bei jeder Stimmabgabe wird mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0,40$ mit einer Ja-Stimme gerechnet.	4
2c	berechnet die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.	Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der Ja-Stimmen, $X \in \{0; 1; 2; 3; \dots; 100\}$, X ist binomialverteilt mit $p = 0,40$ und $n = 100$. Die Wahrscheinlichkeit, dass ... - genau die Hälfte aller befragten Personen regelmäßig ein Fast-Food-Restaurant besuchen, berechnet man durch $P(x = 50) = P(X \leq 50) - P(X \leq 49) = 0,9832 - 0,9729 = 0,0103$ (Tabelle). Sie beträgt ca. 1%. - höchstens 40 der befragten Personen regelmäßig ein Fast-Food-Restaurant besuchen, berechnet man durch $P(X \leq 40) = 0,5433$. Sie beträgt ca. 5,4%. - mindestens 30 und weniger als 40 der befragten Personen regelmäßig ein Fast-Food-Restaurant besuchen, berechnet man durch $P(30 \leq X \leq 39) = P(X \leq 39) - P(X \leq 29) = 0,4621 - 0,0148 = 0,4473$. Sie beträgt ca. 44,7%.	6
2d	ermittelt den Erwartungswert und die Standardabweichung und erläutert die Ergebnisse im Sachzusammenhang.	Erwartungswert: $E(X) = n \cdot p = 50 \cdot 0,4 = 20$ Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} \approx 3,46$ Man kann unter den 50 befragten Schülerinnen und Schülern mit 20 Ja-Antworten rechnen, das heißt, dass man 20 Schülerinnen und Schüler, die regelmäßig ein Fast-Food-Restaurant besuchen, erwarten kann. Die Streuung um den Erwartungswert kann mit drei bis vier Personen angegeben werden.	4

	Anforderungen	Modelllösungen																						
2e	ermittelt eine Entscheidungsregel für den Test.	Es wird die Zufallsgröße X mit $n = 50$ und $p = 0,4$ betrachtet. Nullhypothese $H_0: p \geq 0,4$, Gegenhypothese $H_1: p < 0,4$, Irrtumswahrscheinlichkeit: $\alpha = 5\%$. Abschätzen der Grenzen des Annahmebereichs A von H_0 : Aus der Tabelle kann man entnehmen $P(X \leq 13) = 0,0280$ und $P(X \leq 14) = 0,0540$. Damit lautet der Annahmebereich von $H_0: A = \{14; 15; 16; \dots; 50\}$ und man kann die Hypothese ablehnen, wenn $X < 14$ ist. Entscheidungsregel: Wenn höchstens 13 Schülerinnen und Schüler angeben, dass sie regelmäßig ein Fast-Food-Restaurant besuchen, die Frage also mit „Ja“ beantworten, kann man behaupten, dass der Ernährungslehreunterricht einen positiven Einfluss auf das Essverhalten der Schülerinnen und Schüler hat. Die Irrtumswahrscheinlichkeit beträgt bei dieser Regel ca. 2,8%.	6																					
2f	beurteilt das Ergebnis.	Von den befragten Schülerinnen und Schülern haben insgesamt 15 angegeben, dass sie regelmäßig ein Fast-Food-Restaurant besuchen. Daraus ergibt sich zwar nur ein Prozentsatz von 30% und ist somit geringer als die laut Pressemitteilung 40% der regelmäßigen Fast-Food-Konsumenten. Da jedoch der Wert $X = 15$ im Annahmebereich von H_0 liegt, kann nicht behauptet werden, dass der Ernährungslehreunterricht einen positiven Einfluss auf das Essverhalten hatte. Eine solche Behauptung könnte nur mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von ca. 9,6% aufgestellt werden. Aus der Tabelle: $P(X \leq 15) = 0,955$	5																					
2g	stellt die Entwicklung der Umsatzerlöse graphisch dar.		2																					
2h	beurteilt die Aussage hinsichtlich der Wiedergabe der tatsächlichen Werte und der Aussagekraft bezüglich eines Schätzwerts für das Jahr 2012	Erstellt man eine Wertetabelle zum vorgeschlagenen Funktionsterm und vergleicht die rechnerischen Werte mit den tatsächlichen Werten, so stellt man eine Abweichung fest, die jedoch geringfügig ist. Der Schätzwert für das Jahr 2012 beträgt auf Basis des vorgeschlagenen Funktionsterms 34,1 Milliarden US-Dollar. Das erscheint in dieser Modellierung als eine sehr starke Steigerung, eine andere Modellierung ist wohl eher angemessen. Zudem können die Umsätze nicht laufend weiter steigen, da ein Umdenken in den Ernährungsgewohnheiten erfolgen sollte. <table><tr><th>Jahr</th><td>2007</td><td>2008</td><td>2009</td><td>2010</td><td>2011</td><td>2012</td></tr><tr><th>Umsatzerlös</th><td>22,8</td><td>23,5</td><td>22,7</td><td>24,1</td><td>27,0</td><td></td></tr><tr><th>$U(t)$</th><td>22,8</td><td>23,18</td><td>23</td><td>23,76</td><td>26,96</td><td>34,1</td></tr></table>	Jahr	2007	2008	2009	2010	2011	2012	Umsatzerlös	22,8	23,5	22,7	24,1	27,0		$U(t)$	22,8	23,18	23	23,76	26,96	34,1	5
Jahr	2007	2008	2009	2010	2011	2012																		
Umsatzerlös	22,8	23,5	22,7	24,1	27,0																			
$U(t)$	22,8	23,18	23	23,76	26,96	34,1																		
			33																					

Aufgabe 3: Apfelbaumplantage

	Anforderungen	Modelllösungen	
A3	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
3a	begründet den Verlauf des neuen Wirtschaftsweges f, ermittelt die Bedingungen für eine ganzrationale Funktion 3. Grades und bestimmt die zugehörige Funktionsgleichung.	Die dargestellte Funktion f, die den Verlauf des Feldweges darstellt, weist sowohl einen Hochpunkt als auch einen Tiefpunkt auf. Zwischen diesen Extrempunkten liegt ein Wendepunkt. Ein weiterer Verlauf der Straße f ist ohne weitere Wendestelle möglich, daher kann eine Beschreibung des Straßenverlaufs durch eine ganzrationale Funktion (mind. 3. Grad) erfolgen. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $f(0) = 2, \quad f'(0) = 1,$ $f(5) = -1, \quad f'(5) = 0$ Aus den Bedingungen folgt das LGS mit den Lösungen: $d = 2 \wedge c = 1 \wedge 125a + 25b = -8 \wedge 75a + 10b = -1$ $\Rightarrow a = \frac{11}{125} \text{ und } b = -\frac{19}{25}$ $f(x) = \frac{11}{125}x^3 - \frac{19}{25}x^2 + x + 2$	6
3b	zeichnet die Fläche in die vorhandene Abbildung 3.1 ein, weist nach, dass mit der Funktion A(x) die Fläche der Obstplantage ermittelt werden kann und berechnet die Größe der Obstplantage in ha.	 Aus den Punkten P(0 2) und S(8 10) folgt die Gleichung für die geradlinige Verbindung zwischen den Punkten P und S: $g(x) = x + 2$, die den Verlauf der Hauptstraße beschreibt. Die Fläche zwischen den beiden Randfunktionen g und f kann mit Hilfe $A = \int_0^8 (g(x) - f(x)) dx = \left -\frac{11}{500}x^4 + \frac{19}{75}x^3 \right _0^8$ beschrieben werden. Da die eine Grenze der Obstplantage bei $x = 0$ festgelegt ist, lässt sich die Fläche A dieser Obstplantage mit der Gleichung $A(x) = -\frac{11}{500}x^4 + \frac{19}{75}x^3$ bestimmen. $A(8) = \frac{14848}{375} \approx 39,6$ (1 FE $\triangleq$ 100m $\cdot$ 100m = 10000m² = 1ha) Die Obstplantage hat eine Größe von ca. 39,6 ha.	7

	Anforderungen	Modelllösungen	
3c	erläutert, warum für die Parameter $S = 800$ u. $C = 795$ zu wählen sind und erläutert deren Bedeutung im Sachzusammenhang.	S ist obere Grenze, da es sich um eine Exponentialfunktion mit beschränktem Wachstum handelt. Da nur 800 Apfelbäume auf der Plantage stehen, können maximal 800 Apfelbäume befallen werden, daher ist $S = 800$. C gibt den Anfangsbestand der unversehrten Apfelbäume an. Es waren 5 Apfelbäume zum Zeitpunkt $t = 0$ befallen, also waren 795 unversehrte Apfelbäume vorhanden und daraus folgt $C = 795$.	2
3d	weist nach, dass für $k \approx -0,006$ gilt.	Aus der Gleichung $39 = 800 - 795 \cdot e^{k \cdot 7}$ folgt $k = \frac{\ln(\frac{761}{795})}{7} \approx -0,006$.	2
3e	bestimmt den Zeitpunkt, an dem 30% der Apfelbäume befallen wären.	30% von 800 Apfelbäumen = 240 Apfelbäume $240 = 800 - 795 \cdot e^{-0,006 \cdot t} \Rightarrow t = \frac{\ln(\frac{560}{795})}{-0,006} \approx 58,4$ Nach etwa 58,4 Tagen sind 30% aller Apfelbäume befallen.	3
3f	ermittelt den durchschnittlichen täglichen Anstieg und den momentanen Anstieg der befallenen Apfelbäume am 14. Mai 2012.	mittlere Änderungsrate: $m = \frac{h(7)-h(3)}{7-3} \approx 4,63$ In dem Zeitraum vom 3. bis zum 7. Tag wurden täglich durchschnittlich 4,63 Apfelbäume zusätzlich befallen. Berechnung der momentanen Änderungsrate: $H'(t) = 4,77 \cdot e^{-0,006 \cdot t}$, $H'(7) \approx 4,57$. Am 14. Mai 2012 (Tag 7) wurden weitere 4,57 Apfelbäume befallen.	4
3g	weist nach, dass zu dem gegebenen Zeitpunkt am meisten Apfelbäume vom Schädling befallen sind und ermittelt die zugehörige Baumanzahl.	Für den gesuchten Hochpunkt gilt: $K'(t) = 0$ und $K''(t) < 0$. (Auf den Nachweis (hinreichende Bedingung) des Extrempunktes kann verzichtet werden.) $K'(t) = (-0,119t + 3,928) \cdot e^{0,07t-0,84}$ aus $0 = (-0,119t + 3,928) \cdot e^{0,07t-0,84}$ folgt $t \approx 33$ $K(33) \approx 105,69$ Am 33. Tag sind ca. 106 Apfelbäume vom Schädling befallen.	4
3h	ermittelt eine abschnittsweise definierte Funktion, zeichnet die Funktion in das gegebene Koordinatensystem ein und beschriftet die Koordinatenachsen.	Aus $K(t) = 0$ folgt: $0 = (-1,7t + 80,4) \cdot e^{0,07t-0,84} \Rightarrow t \approx 47,3$ $B(t) = \begin{cases} 800 - 795 \cdot e^{-0,006t} & \text{mit } 0 \leq t < 12 \\ (-1,7t + 80,4) \cdot e^{0,07t-0,84} & \text{mit } 12 \leq t \leq 47,3 \end{cases}$ 	5
			33