

Name des Prüflings	
--------------------	--

Punkteverteilung Aufgabe 1:

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	i	gesamt
Erreichbar	6	3	4	4	4	3	3	4	3	34
Erstkorrektur										
Zweitkorrektur										

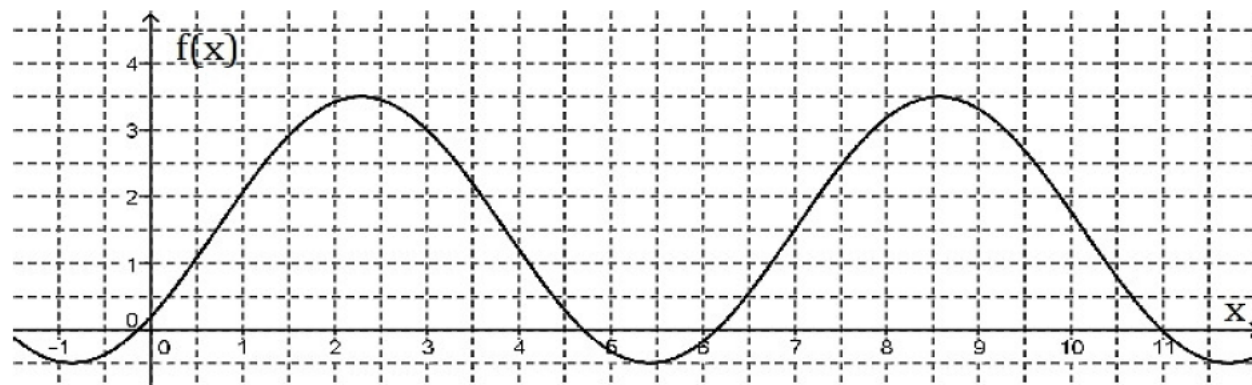
- a) Die Funktion f sowie deren erste und zweite Ableitung sind in der folgenden Wertetabelle dargestellt.

x	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{6}$
f'(x)	$\frac{32}{3}$	0	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	$-\frac{8}{3}$
f''(x)	-16	-6	0	2	0	-6

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Der Graph der Funktion f schneidet die x-Achse nur im Punkt $S(-3 0)$.	
Der Graph der Funktion hat im Punkt $P(-2 4,5)$ einen Tiefpunkt.	
Der Graph der Funktion hat an der Stelle $x = 1$ eine waagrechte Tangente.	

- b) Bestimmen Sie die Parameter der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x + c)) + d$ und tragen Sie diese in die Tabelle ein.



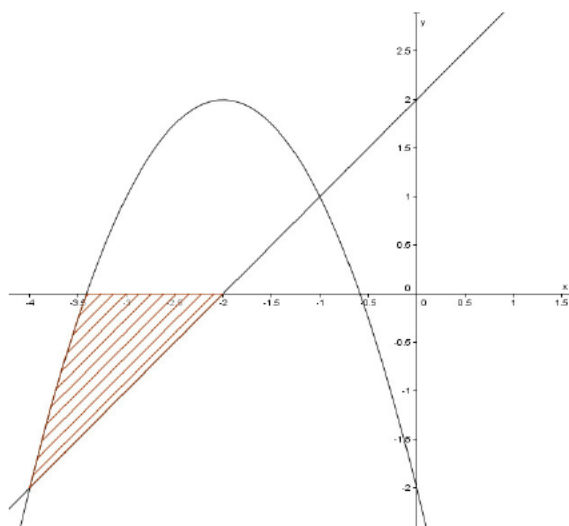
Parameter	a	b	c	d
Wert		1		

- c) Gegeben sind die Funktionen g und f mit den Funktionsgleichungen

$$g(x) = x + 2 \text{ und } f(x) = -(x + 2)^2 + 2$$

mit $x \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie den Inhalt der in der Abbildung schraffierten Fläche.

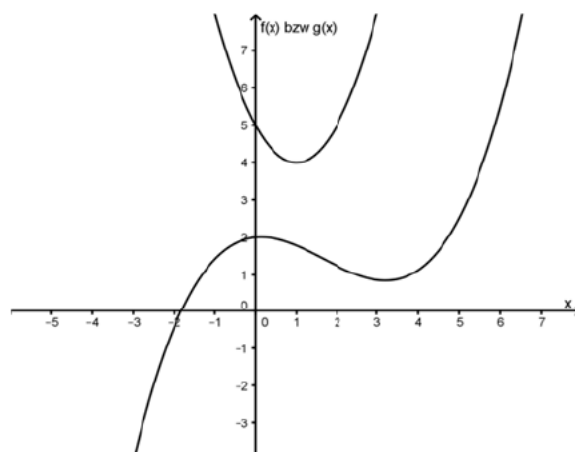


- d) Gegeben sind die Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen

$$f(x) = 0,08x^3 - 0,4x^2 + 0,1x + 2 \text{ und } g(x) = x^2 - 2x + 5$$

mit $x \in \mathbb{R}$ im Intervall $[-5;5]$.

Berechnen Sie die Stelle x, an der die Differenz der Funktionswerte von f und g minimal wird. Die Auswertung der notwendigen Bedingung ist ausreichend.



- e) • Der Vektor $\vec{c}$ ist der Summenvektor der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
Berechnen Sie den Wert des Parameters t mit $t \in \mathbb{R}$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3s+t \\ 4t-s \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -s \\ 2t-s \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2t \\ -4s+t \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- Bestimmen Sie die Werte $x, y \in \mathbb{R}$, so dass gilt: $\begin{pmatrix} x-y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y+x \end{pmatrix} = 4$.

- f) Gegeben sind die beiden Geraden g und h mit den Geradengleichungen

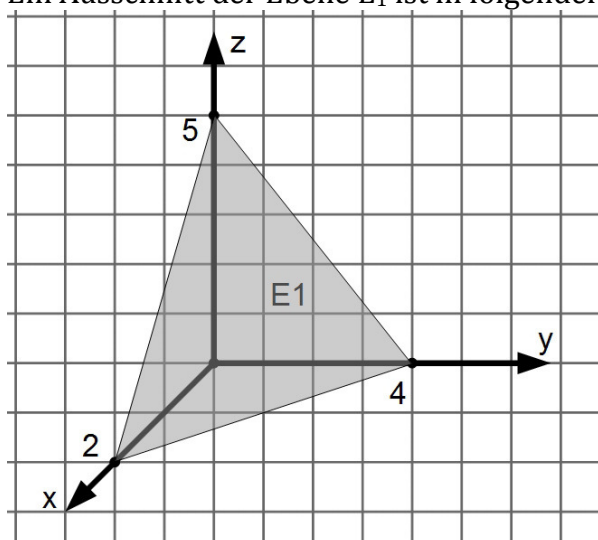
$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} b \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}.$$

Entscheiden Sie, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.

	wahr	falsch
Für $b = 4$ sind die Geraden parallel zueinander.		
Für $a = -2$ und $b = 5$ liegen die Geraden in einer Ebene.		
Für $a = 0$ und $b = 0$ verläuft die Gerade g in der y - z -Ebene.		

- g) Bestimmen Sie jeweils eine Ebenengleichung in Koordinaten- oder Parameterform, die die entsprechende Ebene im Raum beschreibt.

- Ein Ausschnitt der Ebene E_1 ist in folgender Abbildung dargestellt:



- Die Ebene E_2 ist die x - z -Ebene.
- Die Ebene E_3 verläuft durch den Koordinatenursprung, durch den Punkt $A(1|2|5)$ und durch den Punkt $B(2|4|3)$.

h) Bestimmen Sie den Wert des Parameters a so, dass die Punkte $A(1|2|1)$, $B(3| - 1|5)$ und $C(-3|8|a)$ kein Dreieck bilden.

i) Gegeben sind die beiden Geraden g und h mit den Geradengleichungen

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ t \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie den Wert des Parameters t , so dass die beiden Geraden eine Ebene aufspannen.

Punkteverteilung Aufgabe 2: Bergwerk

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	i	gesamt
Erreichbar	3	3	3	4	4	5	2	5	4	33
Erstkorrektur										
Zweitkorrektur										

Die ständig steigenden Preise für Rohstoffe am Weltmarkt lassen es zu, dass stillgelegte Bergwerksanlagen wieder profitabel betrieben werden können. Insbesondere die sogenannten „Seltenen Erden“ sind stark nachgefragte Rohstoffe. 90% der weltweiten Förderung „Seltener Erden“ fällt auf China, das damit den Weltmarkt und damit die Preise kontrolliert. In jüngster Zeit wurden im Ruhrgebiet Spuren dieser „Seltenen Erden“ nachgewiesen. Ein stillgelegtes Bergwerk muss hierfür allerdings zunächst vermessen und erweitert werden. Der prinzipielle Aufbau eines Bergwerkes ist als Querschnitt in Abb. 2.1 dargestellt.

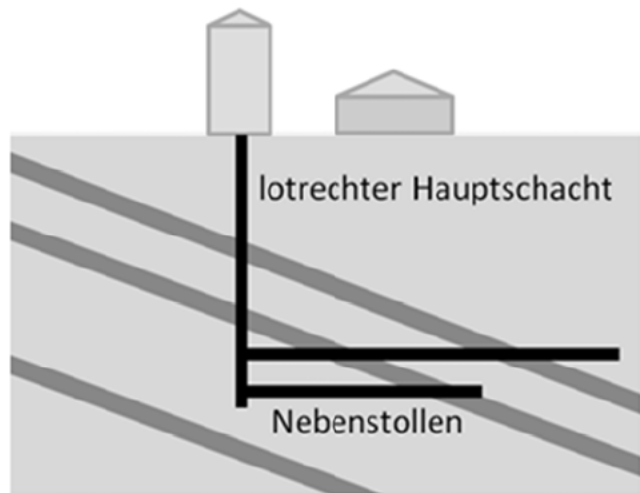


Abb. 2.1: Bergwerksquerschnitt mit schrägen Gesteinsschichten (nicht maßstäblich)

Die plane (ebene) Erdoberfläche wird hier als waagrecht angesehen. Soweit nicht anders angegeben, wird die räumliche Ausdehnung von Hauptschacht, Stollen und Bohrungen vernachlässigt. Der lotrecht nach unten führende Hauptschacht beginnt an der Oberfläche in Punkt A(300|200|0) und hat eine Tiefe von 500 m (1 Längeneinheit (LE) $\triangleq$ 1 m).

- a) Nennen Sie den Endpunkt des Hauptschachtes und erläutern Sie, warum der Hauptschacht durch die folgende Gleichung vektoriell modelliert werden kann:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ein bereits vorhandener Nebenstollen 1 führt in einer Tiefe von 300 m vom Hauptschacht ausgehend zum Endpunkt B(800|100| - 280).

- b) Berechnen Sie die Länge des Nebenstollens 1.

Für die vorgesehenen Förderbänder zum Abtransport des Gesteins im Nebenstollen 1 ist es erforderlich, dass der Stollen nicht zu steil verläuft.

- c) Bestimmen Sie den Winkel des Nebenstollens 1 gegenüber dem Hauptschacht.

Eine Probebohrung im Punkt $L(0|500| - 410)$ hat ergeben, dass dort ein Vorkommen an Lanthan (Element der „Seltene Erden“) vermutet wird. Für den Abbau soll der 600 m lange Nebenstollen 2 (ebenfalls im Hauptschacht beginnend) genutzt werden, der durch die Gerade g_{NS2} mit der folgenden Geradengleichung modelliert werden kann:

$$g_{NS2}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ -400 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- d) Untersuchen Sie, ob man vom Nebenstollen 2 aus mit Hilfe einer lotrechten Bohrung den Punkt L erreichen könnte.

Eine weitere Probebohrung im Punkt $N(-314|507| - 400)$ hat ergeben, dass dort ein Vorkommen an Neodym (Element der „Seltene Erden“) vermutet wird.

- e) Zeigen Sie, dass das Neodymvorkommen erreicht werden kann, indem man den Nebenstollen 2 knickfrei verlängert.

Eine Alternative zur Verlängerung des 600 m langen Nebenstollens 2 ist eine lotrechte Bohrung von der Erdoberfläche aus. Die Kosten einer Lotrechtbohrung betragen 1500 € pro laufendem Meter im Vergleich zu 4500 € pro laufendem Meter bei einer unterirdischen Verlängerung des Nebenstollens 2.

- f) Untersuchen Sie, welche der beiden Möglichkeiten die preiswertere Variante ist.

Bei weiteren Probebohrungen stieß man auf eine Granitschicht, deren plane Oberfläche durch die Punkte $G_1(200|100| - 500)$, $G_2(300|100| - 550)$ und $G_3(400|300| - 600)$ verläuft.

- g) Begründen Sie, dass der Hauptschacht nicht orthogonal zur Granitschicht verläuft.

Zum Ausbau des Bergwerkes soll der Hauptschacht geradlinig verlängert werden. Allerdings ist das Durchbohren der Granitschicht so aufwändig, dass aus Rentabilitätsgründen darauf verzichtet werden soll.

- h) Bestimmen Sie, um wie viele Meter der Hauptschacht maximal verlängert werden kann.

Für die folgende Aufgabe wird davon ausgegangen, dass der Hauptschacht die Form eines Zylinders mit einem Radius von $r = 2,5$ m hat.

Infolge eines plötzlich eintretenden Wassereinbruchs füllt sich der Hauptschacht mit Wasser. Messungen der momentanen Änderungsrate (m^3/min) des im Hauptschacht vorhandenen Wasservolumens ergeben für die ersten Minuten folgende Werte:

Zeit t in min	0	1	2	3	4	5
Änderungsrate in m^3/min	16	10	7	3,5	2	1,5

- i) Bestimmen Sie, wie lange es gedauert hat, bis 30 m^3 Wasser in den Hauptschacht geflossen sind. Gehen Sie davon aus, dass der zeitliche Verlauf der Änderungsrate näherungsweise durch eine exponentielle Funktion in der Form $f(t) = a \cdot e^{k \cdot t}$ mit $a, k, t \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ beschrieben werden kann.

Name des Prüflings	
--------------------	--

Punkteverteilung Aufgabe 1:

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	i	gesamt
Erreichbar	6	3	4	4	2	3	4	4	4	34
Erstkorrektur										
Zweitkorrektur										

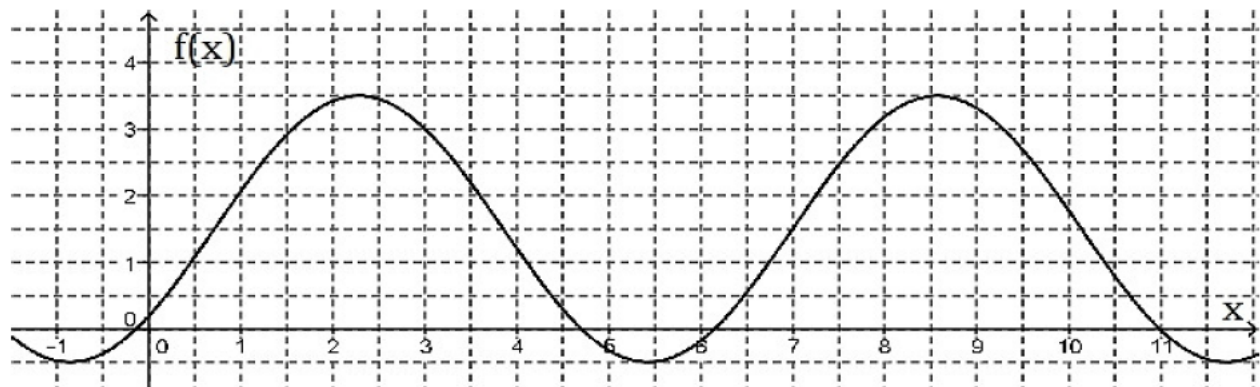
- a) Die Funktion f sowie deren erste und zweite Ableitung sind in der folgenden Wertetabelle dargestellt.

x	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{6}$
f'(x)	$\frac{32}{3}$	0	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	$-\frac{8}{3}$
f''(x)	-16	-6	0	2	0	-6

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Der Graph der Funktion f schneidet die x-Achse nur im Punkt $S(-3 0)$.	
Der Graph der Funktion hat im Punkt $P(-2 4,5)$ einen Tiefpunkt.	
Der Graph der Funktion hat an der Stelle $x = 1$ eine waagrechte Tangente.	

- b) Bestimmen Sie die Parameter der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x + c)) + d$ und tragen Sie diese in die Tabelle ein.



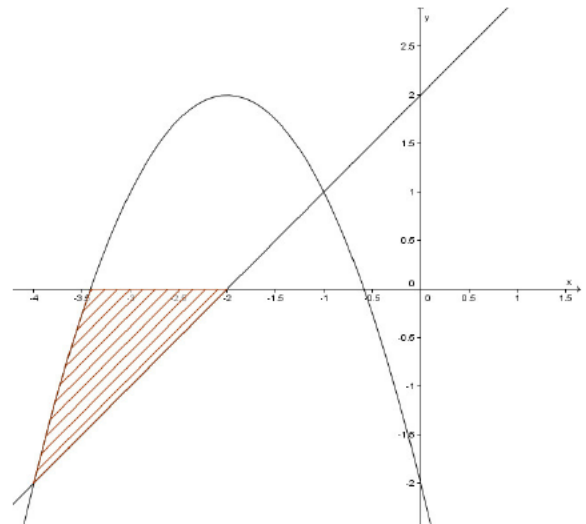
Parameter	a	b	c	d
Wert		1		

- c) Gegeben sind die Funktionen g und f mit den Funktionsgleichungen

$$g(x) = x + 2 \text{ und } f(x) = -(x + 2)^2 + 2$$

mit $x \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie den Inhalt der in der Abbildung schraffierten Fläche.

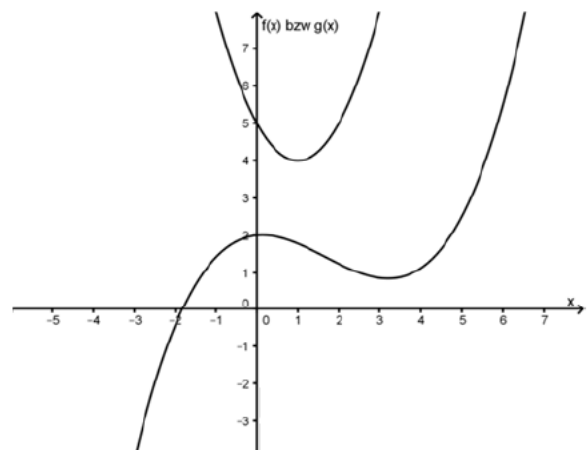


- d) Gegeben sind die Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen

$$f(x) = 0,08 x^3 - 0,4 x^2 + 0,1 x + 2 \text{ und } g(x) = x^2 - 2 x + 5$$

mit $x \in \mathbb{R}$ im Intervall $[-5;5]$.

Berechnen Sie die Stelle x, an der die Differenz der Funktionswerte von f und g minimal wird. Die Auswertung der notwendigen Bedingung ist ausreichend.



e) Gegeben sind die Matrizen A und B mit:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 2a & -b \\ 0,5c & d \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrizenelemente a, b, c, d $\in \mathbb{R}$ so, dass $A = 2 \cdot B$ gilt.

f) Gegeben sind zwei quadratische, invertierbare Matrizen A und B.
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

	wahr	falsch
$(A^{-2})^2 = A^{-4}$		
$(4 \cdot A)^{-1} = -4 \cdot A^{-4}$		
$(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$		

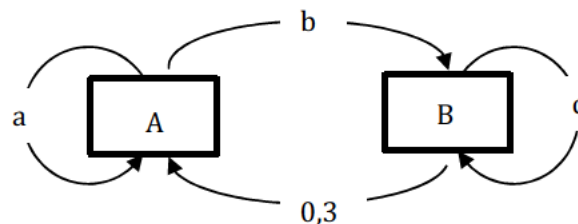
g) Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & s \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$.

- Entscheiden Sie begründet, ob für $s = 3$ eine inverse Matrix für die Matrix A existiert.
- Bestimmen Sie das Matrizenelement s derart, dass keine inverse Matrix für die Matrix A existiert.

h) Gegeben ist die Matrizenungleichung: $A \cdot X = B$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 16 & 18 \\ 32 & 36 \end{pmatrix}$.

- Begründen Sie, unter welchen Bedingungen eine Matrix X existiert, die diese Matrizenungleichung erfüllt.
- Berechnen Sie die Matrix X, sofern möglich.

i) Gegeben sind die Startverteilung $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und die Verteilung $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ nach einem Übergang sowie der unvollständige Übergangsgraph.



Ermitteln Sie die fehlenden Werte für a, b, c $\in \mathbb{R}$ und die zugehörige stochastische Übergangsmatrix.

Punkteverteilung Aufgabe 2: Wechselverhalten von Stromkunden

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	2	4	4	4	6	5	4	4	33
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

In Deutschland wurde im Jahr 2011 die Energiewende beschlossen. Langfristig soll die Stromproduktion in Kernkraftwerken durch alternative Verfahren (sowohl über Wind-, Wasser- und Solarenergie als auch über die Nutzung von fossilen Brennstoffen) vollständig ersetzt werden. Vor allem durch den Atomunfall 2011 in Fukushima (Japan) hat sich das Bewusstsein der Stromkonsumenten verändert. Für viele Haushalte ist seitdem nicht mehr ausschließlich der Strompreis für die Wahl eines Tarifes ausschlaggebend, sondern auch die Art der Stromerzeugung.

Viele Energieversorger bieten schon jetzt Kombinationen an, bei denen die elektrische Energie aus unterschiedlichen Energiequellen stammt. Vereinfacht werden dazu folgende drei Kombinationen betrachtet: „Strom vorwiegend aus fossilen Brennstoffen“ (F), „Strom vorwiegend aus Kernenergie“ (K) und „Strom ausschließlich aus erneuerbaren Energiequellen“ (E).

Im Jahr 2012 wurden 1000 Haushalte zu ihrem Wechselverhalten im vergangenen Jahr befragt. Ein Wechsel kann nur einmal jährlich erfolgen. Diese Untersuchung ergab folgende Werte:

Wechselverhalten innerhalb eines Jahres (absolute Häufigkeiten)		von		
		F	K	E
nach	F	135	120	20
	K	45	m_{22}	20
	E	120	180	60

Tabelle 2.1

a) Weisen Sie nach, dass das Element m_{22} in der Tabelle 2.1 den Wert 300 haben muss.

b) Ermitteln Sie anhand der Tabelle 2.1 die absoluten Häufigkeiten für r , s und t in dem dargestellten Diagramm und erläutern Sie deren Bedeutung.

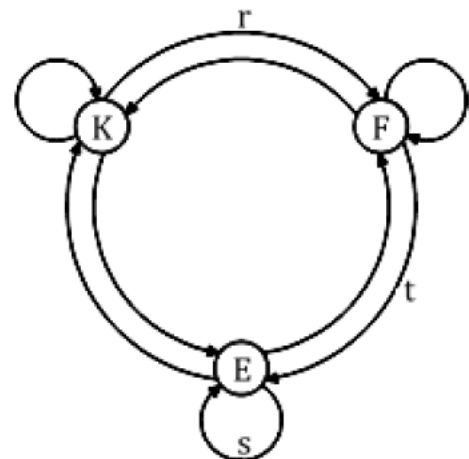


Abbildung 2.1

Das in der Tabelle 2.1 dargestellte Wechselverhalten der Haushalte wird durch die folgen-

de stochastische Matrix $W = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,2 & 0,2 \\ 0,15 & 0,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$ beschrieben.

c) Erläutern Sie, wie auf Grundlage der Tabelle 2.1 die Elemente der Matrix W berechnet wurden. Es ist ausreichend diese Erläuterung beispielhaft an einem Element der Matrix W auszuführen.

d) Berechnen Sie den Vektor $\vec{v}$ und erläutern Sie die Bedeutung der Matrixgleichung:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,2 & 0,2 \\ 0,15 & 0,5 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 600 \\ 100 \end{pmatrix}$$

im Sachzusammenhang.

Für die Übergangsmatrix W gilt: $W^{30} = \begin{pmatrix} 4/15 & 4/15 & 4/15 \\ 4/15 & 4/15 & 4/15 \\ 7/15 & 7/15 & 7/15 \end{pmatrix}$.

e) Interpretieren Sie diese Matrix hinsichtlich der Verteilung auf die verschiedenen Stromkombinationen (F), (K) und (E).

Beurteilen Sie die Bedeutung der Matrix W^{30} vor dem Hintergrund der angestrebten Energiewende.

Bei einer statistischen Datenerfassung über das Wechselverhalten der Stromkunden innerhalb eines Jahres konnten nicht alle Daten vollständig erfasst werden. Es wurden insgesamt 600 Haushalte befragt, von denen zu Beginn der Datenerfassung 120 Haushalte „Strom vorwiegend aus fossilen Brennstoffen“ (F) und 100 Haushalte „Strom ausschließlich aus erneuerbaren Energiequellen“ (E) nutzten. Die restlichen Haushalte bezogen ihren „Strom vorwiegend aus Kernenergie“ (K). Ein Praktikant konnte tabellarisch die folgenden Werte über das Wechselverhalten der Stromkunden dokumentieren.

Wechselverhalten innerhalb eines Jahres (absolute Häufigkeiten)		von		
		F	K	E
nach	F	x	25	23
	K	3	y	5
	E	42	25	72

Tabelle 2.2

f) Ermitteln Sie die Werte für x und y in der Tabelle 2.2.

Zeigen Sie, dass am Ende des Untersuchungszeitraumes immer noch etwa doppelt so viele Haushalte ihren „Strom vorwiegend aus Kernenergie“ (K) beziehen wie Haushalte, die ihren „Strom vorwiegend aus fossilen Brennstoffen“ (F) erhalten.

Die Entwicklung des prozentualen Anteils der Haushalte $p(t)$, die „Strom ausschließlich aus erneuerbaren Energiequellen“ (E) beziehen, kann in Abhängigkeit von den vergangenen Jahren t (Beginn des Untersuchungszeitraumes 2011 mit $t = 0$) annähernd durch die Exponentialfunktion p mit der Funktionsgleichung

$$p(t) = a \cdot e^{-1,235 \cdot t} + \frac{7}{15} \quad \text{mit } a, t \in \mathbb{R} \text{ und } t \geq 0$$

beschrieben werden.

- g) Ermitteln Sie den Wert des Koeffizienten a , wenn zu Beginn des Untersuchungszeitraumes im Jahr 2011 genau 10% der befragten Haushalte „Strom ausschließlich aus erneuerbaren Energiequellen“ (E) bezogen haben.

Ermitteln Sie den prozentualen Anteil $p(t)$ der Haushalte nach einem Jahr (2012) und nach 30 Jahren (2041), die „Strom ausschließlich aus erneuerbaren Energiequellen“ (E) beziehen.

Beschreiben Sie, wie sich der prozentuale Anteil $p(t)$ der Haushalte, die „Strom ausschließlich aus erneuerbaren Energiequellen“ (E) beziehen, vor dem Hintergrund des Sachzusammenhangs langfristig entwickeln wird. (Ein rechnerischer Nachweis ist hier nicht erforderlich.)

Eine ältere Umfrage aus dem Jahr 2002 unter 900 Haushalten ergab ein abweichendes Wechselverhalten Q für den Zeitraum von 2001 bis 2002 (siehe Tabelle 2.2):

Wechselverhalten der Stromkunden (in Prozent)		von		
		F	K	E
nach	F	30	70	20
	K	70	20	0
	E	0	10	80

Tabelle 2.2

Dieses Wechselverhalten der Stromkunden kann auch durch die Übergangsmatrix

$$Q = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 & 0,2 \\ 0,7 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden.

Im Jahr 2002 bezogen 380 der befragten Haushalte „Strom vorwiegend aus fossilen Brennstoffen“ (F), 410 Haushalte einen „Strom- vorwiegend aus Kernenergie“ (K) und 110 Haushalte „Strom ausschließlich aus erneuerbaren Energiequellen“ (E).

- h) Erstellen Sie ein mathematisches Modell (ein lineares Gleichungssystem oder eine Matrixengleichung), mit dem die Verteilung der verschiedenen Energiearten auf die Haushalte im Jahr 2001 ermittelt werden kann.

Ermitteln Sie, wie viele Haushalte ihren Strom „vorwiegend aus fossilen Brennstoffen“ (F), „Strom vorwiegend aus Kernenergie“ (K), und „Strom ausschließlich aus erneuerbaren Energiequellen“ (E) im Jahr 2001 bezogen haben.

Name des Prüflings	
--------------------	--

Punkteverteilung **Aufgabe 1:**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	gesamt
Erreichbar	6	3	4	4	8	6	3	34
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

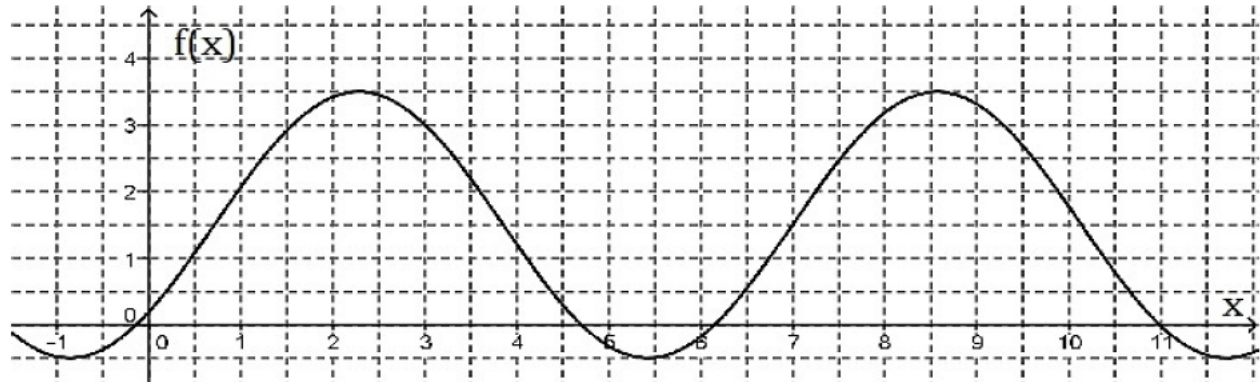
- a) Die Funktion f sowie deren erste und zweite Ableitung sind in der folgenden Wertetabelle dargestellt.

x	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{6}$
f'(x)	$\frac{32}{3}$	0	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	$-\frac{8}{3}$
f''(x)	-16	-6	0	2	0	-6

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Der Graph der Funktion f schneidet die x-Achse nur im Punkt $S(-3 0)$.	
Der Graph der Funktion hat im Punkt $P(-2 4,5)$ einen Tiefpunkt.	
Der Graph der Funktion hat an der Stelle $x = 1$ eine waagrechte Tangente.	

- b) Bestimmen Sie die Parameter der Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x + c)) + d$ und tragen Sie diese in die Tabelle ein.



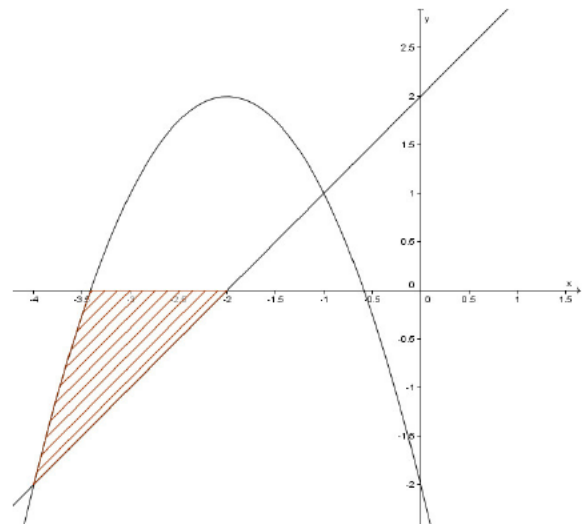
Parameter	a	b	c	d
Wert		1		

- c) Gegeben sind die Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen

$$g(x) = x + 2 \text{ und} \\ f(x) = -(x + 2)^2 + 2$$

mit $x \in \mathbb{R}$.

Berechnen Sie den Inhalt der in der Abbildung schraffierten Fläche.

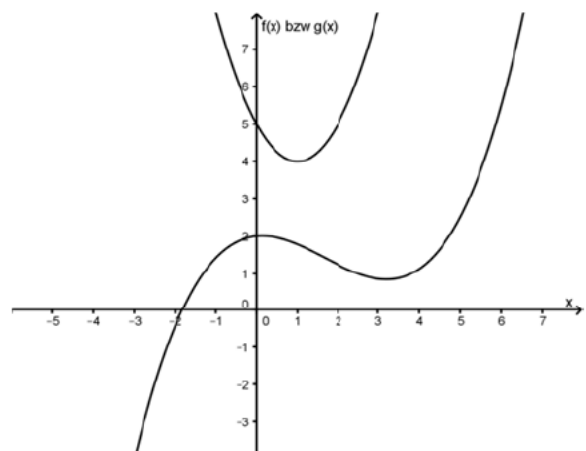


- d) Gegeben sind die Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen

$$f(x) = 0,08x^3 - 0,4x^2 + 0,1x + 2 \text{ und} \\ g(x) = x^2 - 2x + 5$$

mit $x \in \mathbb{R}$ im Intervall $[-5;5]$.

Berechnen Sie die Stelle x, an der die Differenz der Funktionswerte von f und g minimal wird. Die Auswertung der notwendigen Bedingung ist ausreichend.



- e) Gegeben ist eine Bernoullikette der Länge $n = 45$ mit der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0,65$.
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Die Wahrscheinlichkeit für genau 30 Erfolge beträgt 13%.	
Die Wahrscheinlichkeit für mindestens 30 Erfolge beträgt ca. 47,5%.	
Das Maximum der Wahrscheinlichkeitsverteilung wird bei $k = 25$ erreicht.	
Man berechnet den Erwartungswert für diese Verteilung mit der Formel $\mu = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$.	

- f) In einer Urne befinden sich 20 schwarze und 5 weiße Kugeln. Es werden nach dem Zufallsprinzip nacheinander ohne Zurücklegen zwei Kugeln gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
- Es werden genau zwei weiße Kugeln gezogen.
 - Es wird mindestens eine schwarze Kugel gezogen.
 - Es wird genau eine weiße Kugel gezogen.

- g) Betrachtet wird die Zufallsgröße X mit $X \in \{-3; 0; 2; 5\}$, deren Wahrscheinlichkeitsverteilung in der folgenden Tabelle dargestellt wird.

$X = k$	$P(X = k)$	$P(X \leq k)$
-3	0,13	
0		0,60
2	0,25	
5		1

Bestimmen Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten.

Punkteverteilung **Aufgabe 2: Fast Food**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	i	gesamt
Erreichbar	1	4	6	4	6	5	2	3	2	33
Erstkorrektur										
Zweitkorrektur										

Laut einer aktuellen Umfrage nutzen bei Zeitdruck viele Deutsche das Angebot von Fast-Food-Restaurants. Das Ergebnis der Umfrage ist in Tabelle 2.1 dargestellt.

Hinweis: Bei der Umfrage waren Mehrfachantworten nicht erlaubt.

	weniger als einmal pro Monat	einmal pro Monat	einmal pro Woche	mindestens zweimal pro Woche
Wie oft nehmen Sie im Durchschnitt einen Imbiss in einem Fast-Food- Restaurant ein?	10%	51%	25%	14%

Tabelle 2.1: Ergebnis der Umfrage

- a) Zeigen Sie, dass laut Umfrage 90% aller Deutschen mindestens einmal monatlich ein Fast-Food-Restaurant besuchen.

Die 11. Klasse eines Beruflichen Gymnasiums mit dem Profulfach „Ernährung“ führt in der Innenstadt von Neumünster eine Umfrage durch, bei der 90 Personen zu ihrem Essverhalten Auskunft geben sollen. Der Umfragebogen enthält unter anderem die folgende Frage:

	Ja	Nein
Gehen Sie regelmäßig, das bedeutet mindestens einmal pro Woche, in ein Fast-Food-Restaurant?		

- b) Erläutern Sie, unter welchen Voraussetzungen es sinnvoll ist, die Anzahl X der Personen, die regelmäßig ein Fast-Food-Restaurant besuchen, als binomialverteilt anzusehen.

Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Ja“ 39% beträgt.

- c) Setzen Sie in den folgenden Aufgabenteilen das Vorliegen einer Binomialverteilung voraus und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
- Genau ein Drittel aller befragten Personen gibt an, regelmäßig ein Fast-Food-Restaurant zu besuchen.
 - Höchstens 37 der befragten Personen geben an, regelmäßig ein Fast-Food-Restaurant zu besuchen.
 - Mindestens 30 und weniger als 37 der befragten Personen geben an, regelmäßig ein Fast-Food-Restaurant zu besuchen.

Um zu untersuchen, ob durch den Ernährungslehreunterricht das Essverhalten der Schülerinnen und Schüler beeinflusst wurde, wird den Schülerinnen und Schülern des 13. Jahrgangs des Beruflichen Gymnasiums die gleiche Frage gestellt. 55 Antworten werden abgegeben und sollen ausgewertet werden.

- d) Ermitteln Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung, wenn man davon ausgeht, dass unter den Schülerinnen und Schülern des 13. Jahrgangs ebenfalls 39% regelmäßig ein Fast-Food-Restaurant besuchen.

Erläutern Sie Ihre Ergebnisse im Sachzusammenhang.

Die einhellige Meinung in der Klasse ist, dass das Essverhalten der Schülerinnen und Schüler im 13. Jahrgang positiv durch den Ernährungslehreunterricht beeinflusst worden ist. Dies soll bei der Auswertung der 55 Antworten getestet werden.

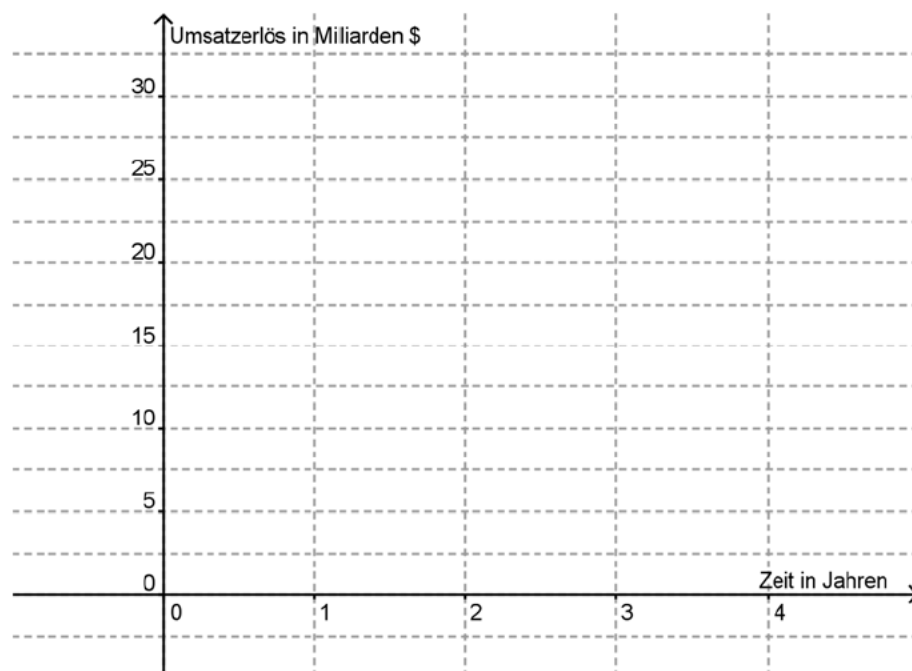
- e) Erstellen Sie eine Entscheidungsregel mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5%.
- f) Unter den 55 ausgewerteten Antworten waren elf Schülerinnen und sechs Schüler, die die Frage mit „Ja“ beantwortet haben.
Beurteilen Sie das Ergebnis.

Die Umsatzerlöse einer bekannten Fast-Food-Kette sind in der Tabelle 2.2 dargestellt.

Jahr	2008	2009	2010	2011
Umsatzerlös in Milliarden \$	23,5	22,7	24,1	27,0

Tabelle 2.2: Umsatzerlöse in Milliarden US-Dollar einer bekannten Fast-Food-Kette

- g) Stellen Sie die Entwicklung der Umsatzerlöse in dem vorgegebenen Koordinatensystem dar.



- h) Leiten Sie anhand der gegebenen Werte in Tabelle 2.2 die Umsatzerlösfunktion U als ganzrationale Funktion dritten Grades her.
- i) Beurteilen Sie den Verlauf des von Ihnen ermittelten Funktionsgraphen ab dem Jahr 2012 hinsichtlich einer sinnvollen Beschreibung der Entwicklung der Umsatzerlöse. Hinweis: Sollten Sie unter h) zu keinem Ergebnis gelangt sein, können Sie alternativ auch allgemein den Verlauf einer ganzrationalen Funktion dritten Grades ab dem Jahr 2012 zu Grunde legen.

Name des Prüflings

Punkteverteilung Aufgabe 3: Apfelplantage

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	6	7	2	3	2	4	4	5	33
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Hinweis: Rechnen Sie bitte immer auf 2 Nachkommastellen genau, es sei denn, es ist etwas anderes in der Aufgabe angegeben!

Südöstlich einer Hauptstraße befindet sich die Bio-Obstplantage der Familie Johannsen. Sie dehnt sich vom Punkt P in Richtung Osten aus und endet an der geradlinigen Verbindung zwischen den Punkten R und S. Ihre südlichste Ausdehnung reicht bis zum Bauernhof der Familie Johannsen, der sich im Punkt Q befindet. (1 Längeneinheit $\triangleq$ 100 m)

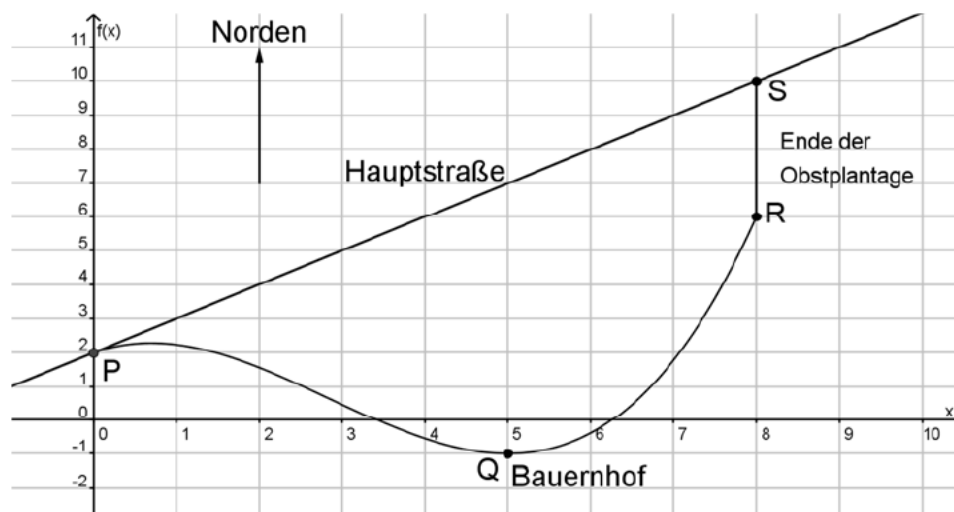


Abbildung 3.1

Bauer Johannsen hat beim zuständigen Bauamt den Antrag für einen neuen Wirtschaftsweg (Feldweg) f gestellt, um bei der Ernte besser an seine Obstplantage zu gelangen. Er möchte, dass seine Obstplantage in Zukunft an ihrem äußeren Rand von diesem Wirtschaftsweg f umgeben wird. Der Wirtschaftsweg f soll im Punkt P von der Hauptstraße abzweigen, danach zunächst zum Bauernhof im Punkt Q führen und weiter bis zum Punkt R reichen, um dann geradlinig in nördlicher Richtung bis zum Punkt S zu führen und dort wieder in die Hauptstraße einzumünden (siehe Abbildung 3.1).

- a) Begründen Sie, warum man den Verlauf des neuen Wirtschaftsweges (Feldweg f) vom Punkt P bis zum Punkt R durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades beschreiben kann.

Ermitteln Sie die Bedingungen, die für eine ganzrationale Funktion $f(x)$ gelten müssen und bestimmen Sie den Funktionsterm dieser Funktion $f(x)$.

Im zuständigen Bauamt, das den Antrag von Bauer Johannsen bearbeitet, wird der Verlauf des Wirtschaftsweges durch die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = \frac{37}{450}x^3 - \frac{158}{225}x^2 + \frac{77}{90}x + 2 \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

modelliert.

- b) Zeichnen Sie in die Abbildung 3.1 den Bereich der Obstplantage ein.

Weisen Sie nach, dass die Fläche der Obstplantage des Bauern Johannsen mit Hilfe der Funktionsgleichung $A(x) = -\frac{37}{1800}x^4 + \frac{158}{675}x^3 + \frac{13}{180}x^2$ ermittelt werden kann.

Berechnen Sie die Größe der Obstplantage in Hektar. (1 Hektar $\triangleq$ 10000 m²)

Bauer Johannsen hat auf seiner Plantage 800 Apfelbäume verschiedener Sorten gepflanzt. Große Sorge bereitete ihm, dass bereits am 07. Mai 2012 ($t = 0$) 5 Apfelbäume von den Raupen des Apfelwicklers, einem tierischem Schädling im Obstbau, befallen waren. Er erkundigte sich daher bei der zuständigen Landwirtschaftskammer und erfuhr, dass sich die Anzahl der befallenen Bäume näherungsweise durch die Funktion H mit der Funktionsgleichung

$$H(t) = S - C \cdot e^{k \cdot t} \quad \text{mit } S, C, k, t \in \mathbb{R} \text{ und } S, C, t \geq 0 \text{ sowie } k < 0$$

(t in Tagen, $H(t)$ Anzahl der befallenen Bäume) ermitteln lässt, wenn der Schädling nicht bekämpft wird.

- c) Erklären Sie, warum in diesem Fall $S = 800$ und $C = 795$ zu wählen sind und erläutern Sie dabei die Bedeutung der Parameter S und C im Sachzusammenhang.

Genau eine Woche später, am 14. Mai 2012, zählte Bauer Johannsen 39 befallene Apfelbäume.

- d) Bestimmen Sie aufgrund der jetzt vorliegenden Zahlen den Wert für den Parameter k in der Funktion H auf 3 Kommastellen genau.

Verwenden Sie für Ihre weiteren Berechnungen die Funktionsgleichung

$$H(t) = 800 - 795 \cdot e^{-0,006 \cdot t} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R} \text{ und } t \geq 0,$$

wobei t die Tage und $H(t)$ die Anzahl der befallenen Bäume darstellt.

- e) Bestimmen Sie mit Hilfe der Funktion $H(t)$ den Zeitpunkt, an dem 30 % der Apfelbäume befallen wären, falls Bauer Johannsen keine Gegenmittel einsetzen würde.
- f) Ermitteln Sie den durchschnittlichen täglichen Anstieg der Anzahl der befallenen Apfelbäume vom 3. bis zum 7. Beobachtungstag sowie den momentanen Anstieg der Anzahl befallener Apfelbäume am 14. Mai 2012.

Zur Schädlingsbekämpfung wurde Bauer Johannsen der Einsatz von Schlupfwespen empfohlen. Am 12. Tag nach dem festgestellten Befall konnte er diese Wespen einsetzen. Bauer Johannsen wurde mitgeteilt, dass die Anzahl der befallenen Apfelbäume ab dem 12. Tag und nachdem er die Schlupfwespen eingesetzt hat, näherungsweise mit Hilfe der Funktion K mit der Funktionsgleichung

$$K(t) = ((-1,7) \cdot (t - 12) + 60) \cdot e^{0,07 \cdot (t-12)} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R} \text{ und } t \geq 12$$

mit t in Tagen beschrieben werden kann.

- g) Berechnen Sie auf dieser Grundlage, zu welchem Zeitpunkt die meisten Apfelbäume befallen sein werden und bestimmen Sie, wie viele Apfelbäume zu diesem Zeitpunkt vom Schädling befallen sein werden.
- h) Ermitteln Sie eine abschnittsweise definierte Funktion B mit der Funktionsgleichung

$$B(t) = \begin{cases} \boxed{} & \text{mit } t \in \mathbb{R} \text{ und } 0 \leq t < \boxed{}, \\ \boxed{} & \text{mit } t \in \mathbb{R} \text{ und } \boxed{} \leq t \leq \boxed{}, \end{cases}$$

die die Entwicklung des Baumbefalls ab dem Tag Null bis zur vollständigen Beseitigung des Schädlings wiedergibt.

Zeichnen Sie diese Funktion B in das folgende Koordinatensystem (Abbildung 3.2) ein. Beschriften Sie die Achsen des Koordinatensystems entsprechend des beschriebenen Sachverhalts.

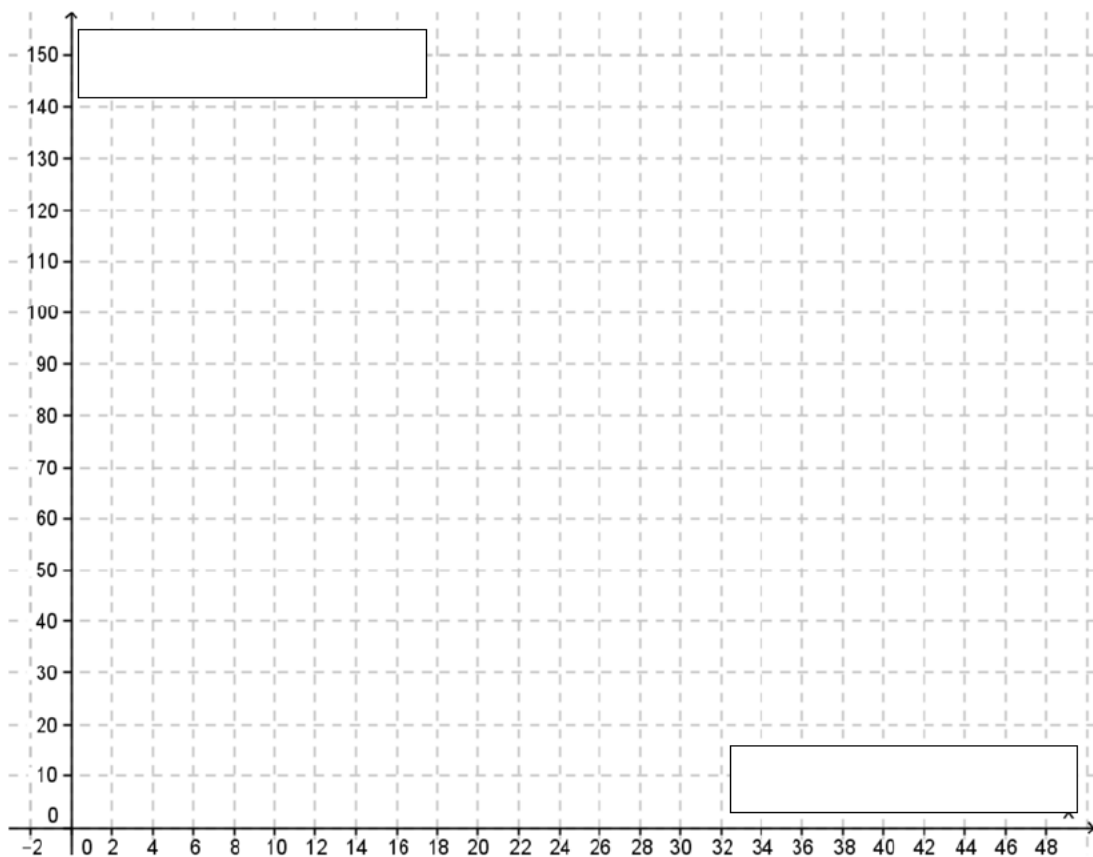
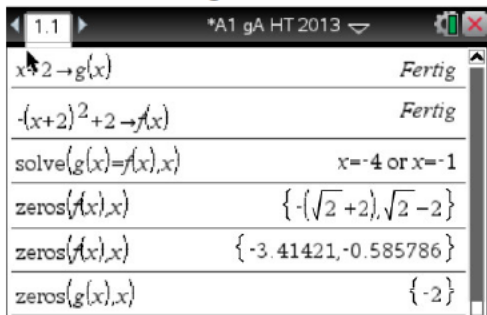
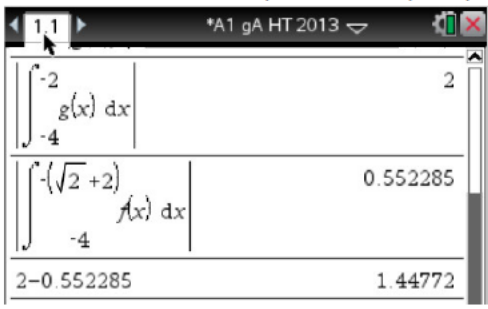


Abbildung 3.2

Aufgabe 1 mit Analytischer Geometrie:

	Anforderungen	Modelllösungen											
A1	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE										
1a	entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind, und begründet seine Entscheidungen.	<table><tr><th>Aussage</th><th>Entscheidung und Begründung</th></tr><tr><td>Der Graph der Funktion f schneidet die x-Achse nur im Punkt $S(-3 0)$.</td><td>Die Aussage ist falsch. Für den Schnittpunkt mit der x-Achse gilt: $f(x_N) = 0$. Dies ist der Fall an den Stellen $x_{N1} = -3$ und $x_{N2} = 1$. Daher schneidet der Graph der Funktion die x-Achse im Punkt $S_1(-3 0)$ und im Punkt $S_2(1 0)$.</td></tr><tr><td>Der Graph der Funktion hat im Punkt $P(-2 4,5)$ einen Tiefpunkt.</td><td>Die Aussage ist falsch. Die hinreichende Bedingung für einen Tiefpunkt lautet: $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) > 0$. Für den Punkt P gilt jedoch: $f'(-2) = 0$ und $f''(-2) = -6 < 0$. Der Graph der Funktion f hat daher im Punkt P einen Hochpunkt.</td></tr><tr><td>Der Graph der Funktion hat an der Stelle $x = 1$ eine waagrechte Tangente.</td><td>Die Aussage ist wahr. Bedingung für eine waagrechte Tangente ist $f'(x) = 0$. Diese Bedingung ist für $x = 1$ erfüllt.</td></tr></table>	Aussage	Entscheidung und Begründung	Der Graph der Funktion f schneidet die x -Achse nur im Punkt $S(-3 0)$.	Die Aussage ist falsch. Für den Schnittpunkt mit der x -Achse gilt: $f(x_N) = 0$. Dies ist der Fall an den Stellen $x_{N1} = -3$ und $x_{N2} = 1$. Daher schneidet der Graph der Funktion die x -Achse im Punkt $S_1(-3 0)$ und im Punkt $S_2(1 0)$.	Der Graph der Funktion hat im Punkt $P(-2 4,5)$ einen Tiefpunkt.	Die Aussage ist falsch. Die hinreichende Bedingung für einen Tiefpunkt lautet: $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) > 0$. Für den Punkt P gilt jedoch: $f'(-2) = 0$ und $f''(-2) = -6 < 0$. Der Graph der Funktion f hat daher im Punkt P einen Hochpunkt.	Der Graph der Funktion hat an der Stelle $x = 1$ eine waagrechte Tangente.	Die Aussage ist wahr. Bedingung für eine waagrechte Tangente ist $f'(x) = 0$. Diese Bedingung ist für $x = 1$ erfüllt.	6		
Aussage	Entscheidung und Begründung												
Der Graph der Funktion f schneidet die x -Achse nur im Punkt $S(-3 0)$.	Die Aussage ist falsch. Für den Schnittpunkt mit der x -Achse gilt: $f(x_N) = 0$. Dies ist der Fall an den Stellen $x_{N1} = -3$ und $x_{N2} = 1$. Daher schneidet der Graph der Funktion die x -Achse im Punkt $S_1(-3 0)$ und im Punkt $S_2(1 0)$.												
Der Graph der Funktion hat im Punkt $P(-2 4,5)$ einen Tiefpunkt.	Die Aussage ist falsch. Die hinreichende Bedingung für einen Tiefpunkt lautet: $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) > 0$. Für den Punkt P gilt jedoch: $f'(-2) = 0$ und $f''(-2) = -6 < 0$. Der Graph der Funktion f hat daher im Punkt P einen Hochpunkt.												
Der Graph der Funktion hat an der Stelle $x = 1$ eine waagrechte Tangente.	Die Aussage ist wahr. Bedingung für eine waagrechte Tangente ist $f'(x) = 0$. Diese Bedingung ist für $x = 1$ erfüllt.												
1b	bestimmt die Parameter a , c und d .	<table><tr><th>Parameter</th><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>d</th></tr><tr><td>Wert</td><td>2</td><td>1</td><td>4</td><td>1,5</td></tr></table> Im Vergleich zum Graphen von $\cos(x)$ ist der Graph hier um 4 Einheiten horizontal in die negative Richtung verschoben; $c = 4$. Die Amplitude hat den Wert 2, damit ist $a = 2$, und schwingt um den Wert 1,5 (vertikale Verschiebung in die positive Richtung). Damit hat der Parameter d den Wert 1,5.	Parameter	a	b	c	d	Wert	2	1	4	1,5	3
Parameter	a	b	c	d									
Wert	2	1	4	1,5									
1c	berechnet den Inhalt der markierten Fläche.	Schnittstelle/n zwischen den Funktionen g und f und Nullstellen der Funktionen g und f berechnen:  Schnittstellen zwischen den Funktionen: $x_1 = -4, \{x_2 = -1\} \notin \mathbb{L}$ Nullstellen der Funktion f: $x_3 \approx -3,41, \{x_4 \approx -0,59\} \notin \mathbb{L}$, Nullstelle der Funktion g: $x_5 = -2$ <i>Fortsetzung nächste Seite</i>	4										

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 1c		Berechnen des markierten Flächeninhalts: z.B.: $A = A_1 - A_2 = \left \int_{-4}^{-2} g(x) dx \right - \left \int_{-4}^{-\sqrt{2}-2} f(x) dx \right $  $A \approx 1,45 \text{ FE}$	
1d	berechnet die Stelle x , an der die Differenz der Funktionswerte von f und g minimal wird.	$f(x) = 0,08x^3 - 0,4x^2 + 0,1x + 2$ und $g(x) = x^2 - 2x + 5, \quad x \in \mathbb{R} \text{ und } x \in [-5; 5]$ Differenz $d(x) = f(x) - g(x) = 0,08x^3 - 1,4x^2 + 2,1x - 3$ minimieren, $d'(x) = 0,24x^2 - 2,8x + 2,1 = 0$ $\Rightarrow x_1 \approx 10,86$ (außerhalb des Intervalls) und $x_2 \approx 0,81$. An der Stelle $x \approx 0,81$ ist die Differenz der Funktionswerte minimal.	4
1e	berechnet den Wert des Parameters t und bestimmt x und y .	(1) $\mathbf{a}(s,t) := \begin{bmatrix} 3 \cdot s + t \\ 4 \cdot t - s \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{Fertig}$ $\mathbf{b}(s,t) := \begin{bmatrix} -1 \cdot s \\ 2 \cdot t - s \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{Fertig}$ $\mathbf{c}(s,t) := \begin{bmatrix} 2 \cdot t \\ -4 \cdot s + t \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{Fertig}$ $\text{solve}(\mathbf{a}(s,t) + \mathbf{b}(s,t) = \mathbf{c}(s,t), t, s) \quad \text{Fertig} \quad t=0 \text{ and } s=0$ (2) $\mathbf{e}(x,y) := \begin{bmatrix} x - y \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{Fertig}$ $\mathbf{f}(x,y) := \begin{bmatrix} 1 \\ y + x \end{bmatrix} \quad \text{Fertig}$ $\text{solve}(\text{dotP}(\mathbf{e}(x,y), \mathbf{f}(x,y)) = 4, x, y) \quad \text{Fertig} \quad x=2 \text{ and } y=8$ $x = 2 \text{ und } y = t \text{ mit } t \in \mathbb{R}$	4

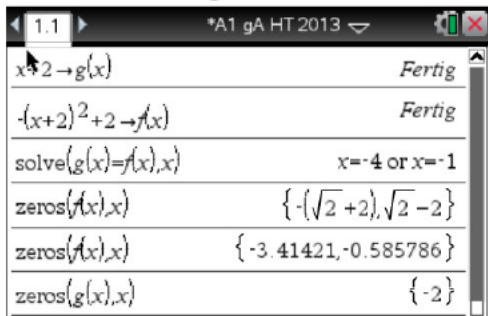
	Anforderungen	Modelllösungen													
1f	entscheidet, welche Aussagen wahr oder falsch sind.	<table><thead><tr><th></th><th>wahr</th><th>falsch</th></tr></thead><tbody><tr><td>Für $b = 4$ sind die Geraden parallel zueinander.</td><td>X</td><td></td></tr><tr><td>Für $a = -2$ und $b = 5$ liegen die Geraden in einer Ebene.</td><td>X</td><td></td></tr><tr><td>Für $a = 0$ und $b = 0$ verläuft die Gerade g in der y-z-Ebene.</td><td>X</td><td></td></tr></tbody></table>		wahr	falsch	Für $b = 4$ sind die Geraden parallel zueinander.	X		Für $a = -2$ und $b = 5$ liegen die Geraden in einer Ebene.	X		Für $a = 0$ und $b = 0$ verläuft die Gerade g in der y - z -Ebene.	X		3
	wahr	falsch													
Für $b = 4$ sind die Geraden parallel zueinander.	X														
Für $a = -2$ und $b = 5$ liegen die Geraden in einer Ebene.	X														
Für $a = 0$ und $b = 0$ verläuft die Gerade g in der y - z -Ebene.	X														
1g	bestimmt die Ebenengleichungen in Parameter- oder Koordinatenform.	$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $E_1: \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$ $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $E_2: y = 0$ $E_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ oder $E_3: -2 \cdot x + y = 0$	3												
1h	bestimmt den Wert des Parameters a .	Die Punkte A, B und C bilden dann kein Dreieck, wenn sie auf einer Geraden liegen. $g_{AB}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Soll Punkt C auf dieser Geraden liegen, ergibt sich aus $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ a \end{pmatrix}$ der Wert $r = -2$. Wenn $a = -7$, dann liegen die Punkte A, B und C auf einer Geraden.	4												
1i	bestimmt den Wert des Parameters t .	Zwei Geraden spannen dann eine Ebene auf, wenn sie sich schneiden. $g(r) := \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + r \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Fertig}$ $h(t,s) := \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ t \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Fertig}$ $\text{solve}(g(r)=h(t,s), r, t, s) \rightarrow r = \frac{12}{11} \text{ and } s = \frac{5}{11} \text{ and } t = \frac{50}{11}$ Das aufgestellte LGS ist eindeutig lösbar. Da die Geraden g und h sich in genau einem Punkt schneiden, spannen sie auch eine Ebene auf.	3												
			34												

Aufgabe 2: Bergwerk

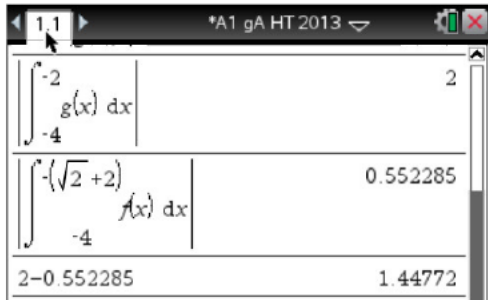
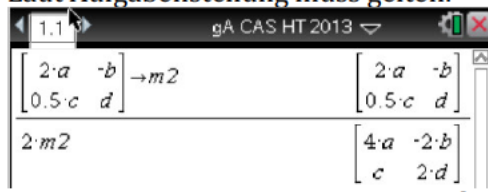
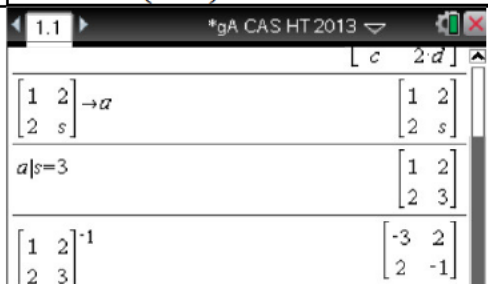
	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
2a	nennt den Endpunkt des Schachtes und erläutert die Geradengleichung.	Endpunkt: $E(300 200 -500)$. Stützvektor der Geraden $\triangleq$ Ortsvektor von Punkt A $\left(\vec{a} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, Richtungsvektor $\triangleq$ Vektor in z-Richtung $\left(r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$, da der Hauptschacht lotrecht verläuft.	3
2b	berechnet die Länge des Nebentollens 1.	Beginn des Nebentollens 1: $B_N(300 200 -300)$ Richtungsvektor des Nebentollens: $\vec{v}_N = \begin{pmatrix} 800 - 300 \\ 100 - 200 \\ -280 - (-300) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ -100 \\ 20 \end{pmatrix}$ Stollenlänge: $l = \sqrt{500^2 + (-100)^2 + 20^2} \approx 510,29 \text{ m}$	3
2c	bestimmt den Winkel des Nebentollens 1 gegenüber dem Hauptschacht.	Richtungsvektor Hauptschacht: $\vec{v}_H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\cos \alpha = \frac{\vec{v}_H \cdot \vec{v}_N}{ \vec{v}_H \cdot \vec{v}_N } \approx \frac{20}{1 \cdot 510,29} \approx 0,0391934$, d.h. $\alpha \approx 87,75^\circ$	3
2d	untersucht, ob eine lotrechte Bohrung vom Nebentollen 2 den Punkt L erreicht.	Lotrechte Gerade g_L durch Punkt L: $g_L: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 500 \\ -410 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Schnittpunktuntersuchung der Geraden g_L und der Geraden g_{NS2} führt auf folgendes LGS: $\begin{array}{rcl} 0 & = & 300 - s \\ 500 & = & 200 + 0,5 \cdot s \\ -410 + r & = & -400 \end{array}$ Dieses LGS hat keine Lösung. Das bedeutet, dass sich der Punkt L nicht durch eine lotrechte Bohrung erreichen lässt.	4
2e	zeigt, dass eine Verlängerung des Stollens knickfrei bis zum Punkt N möglich ist.	Knickfreie Verlängerung bedeutet, dass der Punkt N auf der Geraden g_{NS2} liegen muss. Der Nachweis geschieht mit Hilfe einer Punktprobe: $\begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ -400 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -314 \\ 507 \\ -400 \end{pmatrix}$ $s = 614$ führt für $200 + 614 \cdot 0,5 = 507$ und $-400 + 614 \cdot 0 = -400$ zu wahren Aussagen. Somit ist eine knickfreie Verlängerung des Nebentollens 2 möglich.	4

	Anforderungen	Modelllösungen	
2f	untersucht, welche Möglichkeit die preiswertere Variante ist.	Notwendige Länge des Nebenstollens 2: $l_2 = \left \begin{pmatrix} -314 \\ 507 \\ -400 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ -400 \end{pmatrix} \right = \left \begin{pmatrix} -614 \\ 307 \\ 0 \end{pmatrix} \right \approx 686,47 \text{ m}$ D.h., der Nebenstollen 2 muss um 86,47 m verlängert werden. Die Kosten betragen $86,47 \text{ m} \cdot 4500 \text{ €/m} = 389115 \text{ €}$. Da sich Punkt N in einer Tiefe von 400 m befindet, würde eine lotrechte Bohrung $400 \text{ m} \cdot 1500 \text{ €/m} = 600000 \text{ €}$ kosten. Die Verlängerung des Nebenstollens 2 ist demnach die preiswertere Variante.	5
2g	begründet, dass der Hauptschacht nicht orthogonal zur Granitschicht verläuft.	Damit der lotrecht verlaufende Hauptschacht orthogonal zur Granitschichtebene verläuft, müsste diese waagerecht verlaufen. Da die z-Koordinaten der Punkte G_1, G_2 und G_3 aber nicht gleich sind, verläuft die Ebene nicht waagerecht.	2
2h	bestimmt, um wie viele Meter der Hauptschacht verlängert werden kann.	Gesucht ist zunächst der Durchstoßpunkt D der Hauptschachtgeraden mit der Granitschichtebene. Es ergibt sich zunächst folgende Gleichung der Ebene: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ -500 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ -50 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ -100 \end{pmatrix}.$ Mithilfe der Geradengleichung für den Hauptschacht berechnet man dann die Koordinaten des Durchstoßpunkts D: $\begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ -500 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ -50 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ -100 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} 200+100s+200t=300 \\ 100+200t=200 \\ -r=-500-50s-100t \end{cases} \quad r,s,t$ $\{r=550, s=0, t=0.5\}$ Der Durchstoßpunkt ist der Punkt D $(300 200 -550)$. Da der Hauptschacht bereits 500 m tief ist, könnte er noch um 50 m verlängert werden.	5
2i	bestimmt die Zeit, bis 30 m^3 Wasser in den Hauptschacht geflossen sind.	Bestimmung der Parameter a und k aus Tabellenwerten: $f(0) = 16 \Rightarrow a = 16$ $f(1) = 16 \cdot e^k = 10 \Rightarrow k \approx -0,47$ Da $f(t)$ eine Änderungsrate darstellt, ergibt sich das eingeflossene Wasser durch Integration von $f(t)$. Die gesuchte Zeit a ist hierbei die obere Integrationsgrenze. Die Gleichung wird mit Hilfe des CAS gelöst. <pre> define f(t)=16*x^(-0.47*t) done solve(integral(f(t),t,0,a)=30,a) </pre> $\{a=4.533478375\}$ Nach ca. 4,5 min werden 30 m^3 Wasser in den Hauptschacht hineingeflossen sein.	4
			33

Aufgabe 1 mit Linearer Algebra:

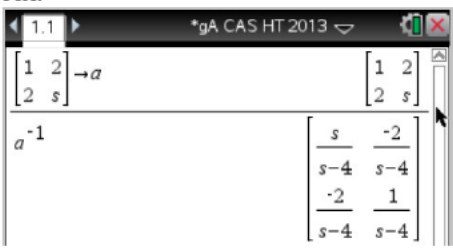
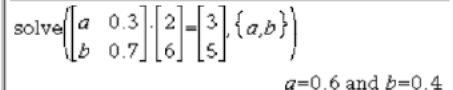
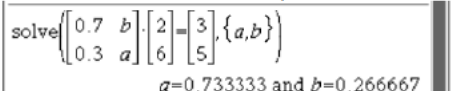
	Anforderungen	Modelllösungen											
A1	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE										
1a	entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind, und begründet seine Entscheidungen.	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Aussage</th> <th>Entscheidung und Begründung</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Der Graph der Funktion f schneidet die x-Achse nur im Punkt $S(-3 0)$.</td> <td>Die Aussage ist falsch. Für den Schnittpunkt mit der x-Achse gilt: $f(x_N) = 0$. Dies ist der Fall an den Stellen $x_{N1} = -3$ und $x_{N2} = 1$. Daher schneidet der Graph der Funktion die x-Achse im Punkt $S_1(-3 0)$ und im Punkt $S_2(1 0)$.</td> </tr> <tr> <td>Der Graph der Funktion hat im Punkt $P(-2 4,5)$ einen Tiefpunkt.</td> <td>Die Aussage ist falsch. Die hinreichende Bedingung für einen Tiefpunkt lautet: $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) > 0$. Für den Punkt P gilt jedoch: $f'(-2) = 0$ und $f''(-2) = -6 < 0$. Der Graph der Funktion f hat daher im Punkt P einen Hochpunkt.</td> </tr> <tr> <td>Der Graph der Funktion hat an der Stelle $x = 1$ eine waagrechte Tangente.</td> <td>Die Aussage ist wahr. Bedingung für eine waagrechte Tangente ist $f'(x) = 0$. Diese Bedingung ist für $x = 1$ erfüllt.</td> </tr> </tbody> </table>	Aussage	Entscheidung und Begründung	Der Graph der Funktion f schneidet die x -Achse nur im Punkt $S(-3 0)$.	Die Aussage ist falsch. Für den Schnittpunkt mit der x -Achse gilt: $f(x_N) = 0$. Dies ist der Fall an den Stellen $x_{N1} = -3$ und $x_{N2} = 1$. Daher schneidet der Graph der Funktion die x -Achse im Punkt $S_1(-3 0)$ und im Punkt $S_2(1 0)$.	Der Graph der Funktion hat im Punkt $P(-2 4,5)$ einen Tiefpunkt.	Die Aussage ist falsch. Die hinreichende Bedingung für einen Tiefpunkt lautet: $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) > 0$. Für den Punkt P gilt jedoch: $f'(-2) = 0$ und $f''(-2) = -6 < 0$. Der Graph der Funktion f hat daher im Punkt P einen Hochpunkt.	Der Graph der Funktion hat an der Stelle $x = 1$ eine waagrechte Tangente.	Die Aussage ist wahr. Bedingung für eine waagrechte Tangente ist $f'(x) = 0$. Diese Bedingung ist für $x = 1$ erfüllt.	6		
Aussage	Entscheidung und Begründung												
Der Graph der Funktion f schneidet die x -Achse nur im Punkt $S(-3 0)$.	Die Aussage ist falsch. Für den Schnittpunkt mit der x -Achse gilt: $f(x_N) = 0$. Dies ist der Fall an den Stellen $x_{N1} = -3$ und $x_{N2} = 1$. Daher schneidet der Graph der Funktion die x -Achse im Punkt $S_1(-3 0)$ und im Punkt $S_2(1 0)$.												
Der Graph der Funktion hat im Punkt $P(-2 4,5)$ einen Tiefpunkt.	Die Aussage ist falsch. Die hinreichende Bedingung für einen Tiefpunkt lautet: $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) > 0$. Für den Punkt P gilt jedoch: $f'(-2) = 0$ und $f''(-2) = -6 < 0$. Der Graph der Funktion f hat daher im Punkt P einen Hochpunkt.												
Der Graph der Funktion hat an der Stelle $x = 1$ eine waagrechte Tangente.	Die Aussage ist wahr. Bedingung für eine waagrechte Tangente ist $f'(x) = 0$. Diese Bedingung ist für $x = 1$ erfüllt.												
1b	bestimmt die Parameter a , c und d .	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Parameter</th> <th>a</th> <th>b</th> <th>c</th> <th>d</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Wert</td> <td>2</td> <td>1</td> <td>4</td> <td>1,5</td> </tr> </tbody> </table> Im Vergleich zum Graphen von $\cos(x)$ ist der Graph hier um 4 Einheiten horizontal in die negative Richtung verschoben; $c = 4$. Die Amplitude hat den Wert 2, damit ist $a = 2$, und schwingt um den Wert 1,5 (vertikale Verschiebung in die positive Richtung). Damit hat der Parameter d den Wert 1,5.	Parameter	a	b	c	d	Wert	2	1	4	1,5	3
Parameter	a	b	c	d									
Wert	2	1	4	1,5									
1c	berechnet den Inhalt der markierten Fläche.	Schnittstelle/n zwischen den Funktionen g und f und Nullstellen der Funktionen g und f berechnen:  Schnittstellen zwischen den Funktionen: $x_1 = -4, \{x_2 = -1\} \notin \mathbb{L}$ Nullstellen der Funktion f: $x_3 \approx -3,41$ und $\{x_4 \approx -0,59\} \notin \mathbb{L}$, Nullstelle der Funktion g: $x_5 = -2$	4										

Fortsetzung nächste Seite

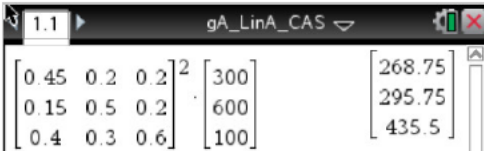
	Anforderungen	Modelllösungen													
zu 1c		Berechnen des markierten Flächeninhalts: z.B.: $A = A_1 - A_2 = \left \int_{-4}^{-2} g(x) dx \right - \left \int_{-4}^{-\sqrt{2}-2} f(x) dx \right$  $A \approx 1,45 \text{ FE}$													
1d	berechnet die Stelle x, an der die Differenz der Funktionswerte von f und g minimal wird.	$f(x) = 0,08 x^3 - 0,4 x^2 + 0,1 x + 2$ und $g(x) = x^2 - 2x + 5, x \in \mathbb{R}, x \in [-5; 5]$ Differenz $d(x) = f(x) - g(x) = 0,08 x^3 - 1,4 x^2 + 2,1 x - 3$ minimieren, $d'(x) = 0,24 x^2 - 2,8 x + 2,1 = 0$ $\Rightarrow x_1 \approx 10,86$ (außerhalb des Intervalls) und $x_2 \approx 0,81$. An der Stelle $x \approx 0,81$ ist die Differenz der Funktionswerte minimal.	4												
1e	bestimmt die Matrizenelemente a, b, c und d.	Laut Aufgabenstellung muss gelten:  $A = 2 \cdot B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & -2b \\ c & 2d \end{pmatrix}$ Damit ergibt sich durch Vergleich der Matrizenelemente: $c = 2$, weiterhin sind $-2 = 4a$, $-1 = -2b$ und $1 = 2d$. Durch Umformen ergeben sich: $a = -0,5$, $b = 0,5$ und $d = 0,5$.	2												
1f	entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.	<table> <tr> <th></th> <th>wahr</th> <th>falsch</th> </tr> <tr> <td>$(A^{-2})^2 = A^{-4}$</td> <td>x</td> <td></td> </tr> <tr> <td>$(4 \cdot A)^{-1} = -4 \cdot A^{-1}$</td> <td></td> <td>x</td> </tr> <tr> <td>$(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$</td> <td></td> <td>x</td> </tr> </table>		wahr	falsch	$(A^{-2})^2 = A^{-4}$	x		$(4 \cdot A)^{-1} = -4 \cdot A^{-1}$		x	$(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$		x	3
	wahr	falsch													
$(A^{-2})^2 = A^{-4}$	x														
$(4 \cdot A)^{-1} = -4 \cdot A^{-1}$		x													
$(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$		x													
1g	begründet, ob für $s = 3$ die inverse Matrix A^{-1} existiert und	 Die inverse Matrix: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Eine inverse Matrix zur Matrix A existiert nur dann, wenn sie regulär ist bzw. wenn deren Zeilen linear unabhängig sind bzw.	4												

Fortsetzung nächste Seite

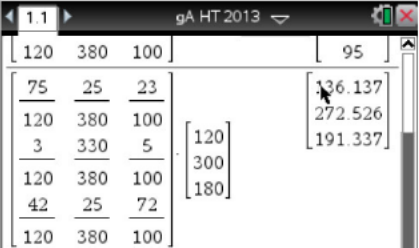
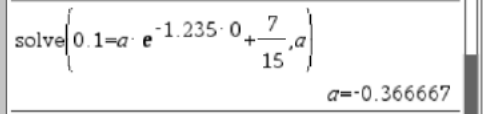
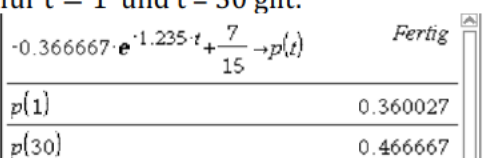
Fortsetzung nächste Seite

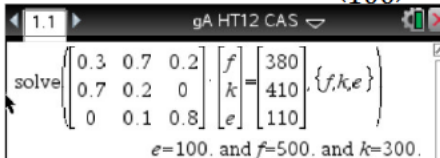
	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 1g	bestimmt das Matrizenelement s derart, dass keine inverse Matrix existiert.	wenn bei Umformung auf Dreiecksform keine Nullzeile entsteht. Für eine inverse Matrix A^{-1} gilt: $A \cdot A^{-1} = E$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Diese Bedingungen sind erfüllt, für $s = 3$ existiert eine inverse Matrix.  Da $s - 4 \neq 0 \Leftrightarrow s \neq 4$ gelten muss, ist die Matrix A für $s = 4$ nicht invertierbar.	
1h	begründet die Existenz der Matrix X und berechnet die Matrix X .	Die Matrix A ist vom Typ $(2, 1)$, die Matrix B ist vom Typ $(2, 2)$. Wenn eine Matrix X existiert, muss sie vom Typ $(1, 2)$ sein. Es muss außerdem geprüft werden, ob die Matrizenelemente $x, y \in \mathbb{R}$ derart existieren, dass die folgende Matrixgleichung erfüllt ist. $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow a \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \rightarrow b \quad \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ $a \cdot b = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 4x & 4y \end{bmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 4x & 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 18 \\ 32 & 36 \end{pmatrix}$ Ein Vergleich der Matrizenelemente liefert $x = 8$ und $y = 9$ und damit erfüllt die Matrix $X = \begin{pmatrix} 8 & 9 \end{pmatrix}$ die gegebenen Matrixgleichung.	4
1i	ermittelt die fehlenden Werte für a, b, c und die zugehörige stochastische Übergangsmatrix.	Die Übergangsmatrix für den abgebildeten Übergangsgraphen lautet $M = \begin{pmatrix} a & 0,3 \\ b & c \end{pmatrix}$. Da es sich um eine stochastische Matrix handelt, ist $c = 1 - 0,3 = 0,7$. Für den dargestellten Übergang gilt: $M \cdot \vec{x}_0 = \vec{x}_1$  Somit ist $a = 0,6$ und $b = 0,4$. Die zugehörige Übergangsmatrix ist $M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,4 & 0,7 \end{pmatrix}$. alternativ: Aus $M = \begin{pmatrix} c & b \\ 0,3 & a \end{pmatrix}$ mit $c = 0,7$ folgt  $a = \frac{11}{15}$ und $b = \frac{4}{15}$ Die zugehörige Übergangsmatrix ist dann $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 4/15 \\ 0,3 & 11/15 \end{pmatrix}$.	4
			34

Aufgabe 2: Wechselverhalten von Stromkunden

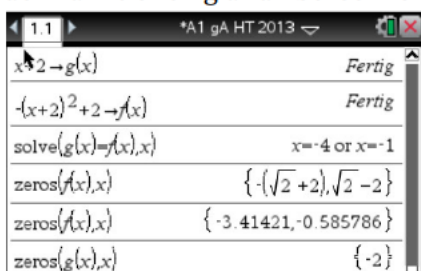
	Anforderungen	Modelllösungen																											
A2	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE																										
2a	weist nach, dass das $m_{22} = 300$ ist.	Alle Elemente aus der Tabelle 2.1 müssen addiert die Anzahl der befragten Haushalte ergeben. Daher gilt: $m_{22} = 1000 - 135 - 120 - 20 - 45 - 20 - 120 - 180 - 60 = 300$	2																										
2b	ermittelt anhand der Tabelle 2.1 die Werte für r, s und t und erläutert deren Bedeutung.	$r = 120, s = 60, t = 120$ Der Wert r gibt die Anzahl der Haushalte an, die in dem vergangenen Jahr von der Stromkombination (K) zur Kombination (F), und t die Anzahl der Haushalte, die von der Kombination (F) zur Kombination (E) gewechselt haben. Der Wert s beschreibt dagegen die Anzahl der Haushalte, die eine Stromkombination (E) in 2011 bezogen und im vergangenen Jahr nicht gewechselt haben.	4																										
2c	erläutert die Vorgehensweise zur Berechnung am Beispiel eines Elementes der Matrix W.	Da jeweils die Spaltensumme der stochastischen Matrix den Wert Eins ergibt, beschreibt die stochastische Matrix wie die Tabelle das Wechselverhalten „von - nach“ – das Transponieren der Tabelle 2.1 ist daher nicht notwendig. Die Spaltensummen ergeben die Gesamtanzahl der Haushalte, die zu Beginn des Jahres die jeweilige Stromkombination bezogen haben. <table border="1"><thead><tr><th colspan="2" rowspan="2">Wechselverhalten innerhalb eines Jahres (absolute Häufigkeiten)</th><th colspan="3">von</th></tr><tr><th>F</th><th>K</th><th>E</th></tr></thead><tbody><tr><td rowspan="3">nach</td><td>F</td><td>135</td><td>120</td><td>20</td></tr><tr><td>K</td><td>45</td><td>300</td><td>20</td></tr><tr><td>E</td><td>120</td><td>180</td><td>60</td></tr><tr><td colspan="2">gesamt:</td><td>300</td><td>600</td><td>100</td></tr></tbody></table> Die Elemente entsprechen dem prozentualen Anteil der Haushalte (bezogen auf alle Haushalte einer Stromkombination), z.B.: $m_{11} = \frac{135}{300} = 0,45, \quad m_{22} = \frac{300}{600} = 0,5, \quad m_{33} = \frac{60}{100} = 0,6.$	Wechselverhalten innerhalb eines Jahres (absolute Häufigkeiten)		von			F	K	E	nach	F	135	120	20	K	45	300	20	E	120	180	60	gesamt:		300	600	100	4
Wechselverhalten innerhalb eines Jahres (absolute Häufigkeiten)		von																											
		F	K	E																									
nach	F	135	120	20																									
	K	45	300	20																									
	E	120	180	60																									
gesamt:		300	600	100																									
2d	berechnet den Lösungsvektor $\vec{v}$ und erläutert die Bedeutung der Matrixgleichung im Sachzusammenhang.	 Die Matrixgleichung beschreibt das Wechselverhalten der Stromkunden über den Zeitraum von zwei Übergängen bzw. zwei Jahren. Zwei Jahre (bzw. 2 Übergänge) nach der Erhebung werden ≈ 269 Haushalte die Stromkombination (F), ≈ 296 Haushalte die Stromkombination (K) und ≈ 435 Haushalte die Stromkombination (E) beziehen, vorausgesetzt, dass das Wechselverhalten der Kunden über diesen Zeitraum unverändert bleibt. Der Vektor $\begin{pmatrix} 300 \\ 600 \\ 100 \end{pmatrix}$ beschreibt die Anfangsverteilung zu Beginn der Datenerhebung, zu diesem Zeitpunkt bezogen 300 Haushalte die Stromkombination (F), 600 Haushalte die Stromkombination (K) und 100 Haushalte die Stromkombination (E).	4																										

	Anforderungen	Modelllösungen																										
2e	entscheidet be- gründet, ob es sich um eine Grenz- matrix handelt, interpretiert Mat- rix W hinsichtlich der Verteilung und beurteilt die Be- deutung der Mat- rix W^{30}.	1.1 *gA_LinA_CAS 0.450.20.2 0.150.50.2 0.40.30.6 →W 0.450.20.2 0.150.50.2 0.40.30.6 W^{30} 0.2666670.2666670.266667 0.2666670.2666670.266667 0.4666670.4666670.466667 W^{40} 0.2666670.2666670.266667 0.2666670.2666670.266667 0.4666670.4666670.466667 Vergleich der Matrizenele- mente: $4/15 \approx 0,266667$, $7/15 \approx 0,466667$ Durch z.B. Bilden der Matrix W^{30} oder W^{40} erkennt man, dass sich diese Matrix W (mit zunehmenden, unveränderten Übergängen) stabilisiert und nicht mehr verändert. Da die Werte der Matrix W^{30} pro Spalte jeweils identisch sind, handelt es sich um eine Grenzma- trix (alle Matrizenelemente positiv, Spaltensumme jeweils 1 $\Rightarrow$ stochastische Matrix). Damit kann begründet werden, dass es sich bei der Matrix W^{30} um eine Grenzmatrix handelt. Unabhängig von der Ausgangsverteilung werden demnach nach 30 Übergängen (30 Jahren) bei unverändertem Wechselverhalten $\frac{4}{15} \approx 26,27\%$ aller Haushalte mit der Stromkombination (F) ver- sorgt werden, $\frac{4}{15} \approx 26,27\%$ die Stromkombination (K) beziehen und $\frac{7}{15} \approx 46,67\%$ der Haushalte werden mit der Stromkombina- tion (E) versorgt werden. Die angestrebte Energiewende setzt voraus, dass Strom nicht mehr vorwiegend aus Kernenergie (K) bezogen wird. Dies wäre nach der Grenzmatrix W nicht der Fall – demnach würden immer noch ca. 26,27% aller Haushalte die Stromkombination (K) beziehen. Die Grenzmatrix gilt allerdings auch nur für den Fall, dass sich sowohl das Wechselverhalten der Haushalte, als auch das Angebot an den Stromkombinationen über einen Zeitraum von 30 Jahren nicht ver- ändert. Dies erscheint unrealistisch: Das Wechselverhalten kann sich beispielsweise durch Preisänderungen und die zeitliche Dis- tanz zu dem Reaktorunfall in Fukushima jederzeit ändern. Vor dem Hintergrund der angestrebten Energiewende wird wahrscheinlich langfristig keine Stromkombination mehr angeboten werden, die vorwiegend aus Kernenergie besteht.	6																									
2f	ermittelt die Wer- te x, y und zeigt, dass die Anzahl der Haushalte, die Strom aus (K) beziehen immer noch doppelt so hoch wie die An- zahl der Haushal- te, die Strom aus (F) beziehen, ist.	$x = 120 - 3 - 42 = 75$, $y = 600 - 120 - 100 - 2 \cdot 25 = 330$ $K_0 = 600 - 120 - 100 = 380$ (Anzahl der Haushalte, die ihren Strom aus (K) zu Beginn der Untersuchung bezogen) Das Wechselverhalten aus Tabelle 2.2: <table><tr><th>von/nach</th><th>F</th><th>K</th><th>E</th><th></th></tr><tr><td>F</td><td>75</td><td>25</td><td>23</td><td></td></tr><tr><td>K</td><td>3</td><td>330</td><td>5</td><td></td></tr><tr><td>E</td><td>42</td><td>25</td><td>72</td><td></td></tr><tr><td></td><td>120</td><td>380</td><td>100</td><td>600</td></tr></table> kann z.B. durch die Übergangsmatrix... <i>Fortsetzung nächste Seite</i>	von/nach	F	K	E		F	75	25	23		K	3	330	5		E	42	25	72			120	380	100	600	5
von/nach	F	K	E																									
F	75	25	23																									
K	3	330	5																									
E	42	25	72																									
	120	380	100	600																								

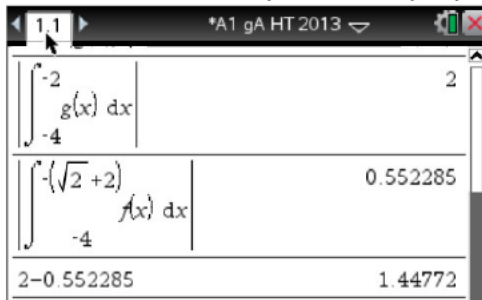
	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 2f		$\begin{pmatrix} 75/120 & 25/380 & 23/100 \\ 3/120 & 330/380 & 5/100 \\ 42/120 & 25/380 & 72/100 \end{pmatrix}$ dargestellt werden. Daraus kann die Matrizengleichung $\begin{pmatrix} 75/120 & 25/380 & 23/100 \\ 3/120 & 330/380 & 5/100 \\ 42/120 & 25/380 & 72/100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 120 \\ 380 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ K \\ E \end{pmatrix}$ hergeleitet und gelöst werden.  Daraus folgt, dass etwa 136 Haushalte die Stromkombination (F), etwa 273 Haushalte die Stromkombination (K) und etwa 191 Haushalte die Stromkombination (E) am Ende des Untersuchungszeitraumes beziehen. Es gilt $2 \cdot 136$ (F) $\approx$ 273 (K). Das bedeutet, dass am Ende des Untersuchungszeitraumes immer noch etwa doppelt so viele Haushalte ihren Strom aus (K) beziehen gegenüber den Haushalten, die Strom aus (F) beziehen.	
2g	ermittelt den Wert des Koeffizienten a, ermittelt den prozentualen Anteil der Haushalte für t = 1 und t = 30 und beschreibt, wie sich der prozentuale Anteil der Haushalte langfristig entwickeln wird.	Aus $p(t) = a \cdot e^{-1,235 \cdot t} + \frac{7}{15}$ mit $t = 0$ und $p(0) = 0,1$, folgt:  $a \approx -0,367$, für $t = 1$ und $t = 30$ gilt:  Für 2012 gilt: $p(1) \approx 0,36$ (36%) und für 2041 gilt: $p(30) \approx 0,4667$ (ca. 46,67%). Nach dem angegebenen Wechselverhalten sollen langfristig (also für große t) $7/15$ aller Haushalte die Stromkombination (E) beziehen. Für $t \rightarrow +\infty$ muss sich demnach der Grenzwert $7/15$ ergeben. Dies wird durch die Berechnung von $p(30)$ und die entsprechenden Werte in der Grenzmatrix gestützt. Rechnerische Begründung (nicht gefordert): Da $e^{-1,235 \cdot t} = \frac{1}{e^{1,235 \cdot t}}$, ist $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^{1,235 \cdot t}} \right) = 0 \text{ und damit auch } \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{11}{30} \cdot \frac{1}{e^{1,235 \cdot t}} \right) = 0.$ Daraus folgt: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{11}{30} \cdot \frac{1}{e^{1,235 \cdot t}} + \frac{7}{15} \right) = \frac{7}{15}$.	4

	Anforderungen	Modelllösungen	
2h	erstellt ein mathematisches Modell zur Berechnung der Verteilung aus dem Vorjahr auf und ermittelt, wie viele Haushalte im Jahr 2001 ihren Strom aus (F), (K) bzw. (E) bezogen.	Modell einer Matrixgleichung $\begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 & 0,2 \\ 0,7 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 380 \\ 410 \\ 110 \end{pmatrix} \text{ mit } \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} F \\ K \\ E \end{pmatrix}, \text{ also}$ $\begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 & 0,2 \\ 0,7 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F \\ K \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 380 \\ 410 \\ 110 \end{pmatrix},$ oder lineares Gleichungssystem: I) $0,3f + 0,7k + 0,2e = 380$ II) $0,7f + 0,2k = 410$ III) $0,1k + 0,8e = 110$ Durch Lösung der aufgestellten Matrixgleichung ergibt sich die Startverteilung von: $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 500 \\ 300 \\ 100 \end{pmatrix}$  $f = 500, k = 300$ und $e = 100$. Im Jahr 2001 bezogen 500 Haushalte ihren Strom „vorwiegend aus fossilen Brennstoffen“ (F), 300 Haushalte „Strom- vorwiegend aus Kernenergie“(K) und 100 Haushalte „Strom ausschließlich aus erneuerbaren Energiequellen“(E).	4
			33

Aufgabe 1 mit Stochastik:

	Anforderungen	Modelllösungen											
A1	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE										
1a	entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind, und begründet seine Entscheidungen.	<table><tr><th>Aussage</th><th>Entscheidung und Begründung</th></tr><tr><td>Der Graph der Funktion f schneidet die x-Achse nur im Punkt $S(-3 0)$.</td><td>Die Aussage ist falsch. Für den Schnittpunkt mit der x-Achse gilt: $f(x_N) = 0$. Dies ist der Fall an den Stellen $x_{N1} = -3$ und $x_{N2} = 1$. Daher schneidet der Graph der Funktion die x-Achse im Punkt $S_1(-3 0)$ und im Punkt $S_2(1 0)$.</td></tr><tr><td>Der Graph der Funktion hat im Punkt $P(-2 4,5)$ einen Tiefpunkt.</td><td>Die Aussage ist falsch. Die hinreichende Bedingung für einen Tiefpunkt lautet: $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) > 0$. Für den Punkt P gilt jedoch: $f'(-2) = 0$ und $f''(-2) = -6 < 0$. Der Graph der Funktion f hat daher im Punkt P einen Hochpunkt.</td></tr><tr><td>Der Graph der Funktion hat an der Stelle $x = 1$ eine waagrechte Tangente.</td><td>Die Aussage ist wahr. Bedingung für eine waagrechte Tangente ist $f'(x) = 0$. Diese Bedingung ist für $x = 1$ erfüllt.</td></tr></table>	Aussage	Entscheidung und Begründung	Der Graph der Funktion f schneidet die x -Achse nur im Punkt $S(-3 0)$.	Die Aussage ist falsch. Für den Schnittpunkt mit der x -Achse gilt: $f(x_N) = 0$. Dies ist der Fall an den Stellen $x_{N1} = -3$ und $x_{N2} = 1$. Daher schneidet der Graph der Funktion die x -Achse im Punkt $S_1(-3 0)$ und im Punkt $S_2(1 0)$.	Der Graph der Funktion hat im Punkt $P(-2 4,5)$ einen Tiefpunkt.	Die Aussage ist falsch. Die hinreichende Bedingung für einen Tiefpunkt lautet: $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) > 0$. Für den Punkt P gilt jedoch: $f'(-2) = 0$ und $f''(-2) = -6 < 0$. Der Graph der Funktion f hat daher im Punkt P einen Hochpunkt.	Der Graph der Funktion hat an der Stelle $x = 1$ eine waagrechte Tangente.	Die Aussage ist wahr. Bedingung für eine waagrechte Tangente ist $f'(x) = 0$. Diese Bedingung ist für $x = 1$ erfüllt.	6		
Aussage	Entscheidung und Begründung												
Der Graph der Funktion f schneidet die x -Achse nur im Punkt $S(-3 0)$.	Die Aussage ist falsch. Für den Schnittpunkt mit der x -Achse gilt: $f(x_N) = 0$. Dies ist der Fall an den Stellen $x_{N1} = -3$ und $x_{N2} = 1$. Daher schneidet der Graph der Funktion die x -Achse im Punkt $S_1(-3 0)$ und im Punkt $S_2(1 0)$.												
Der Graph der Funktion hat im Punkt $P(-2 4,5)$ einen Tiefpunkt.	Die Aussage ist falsch. Die hinreichende Bedingung für einen Tiefpunkt lautet: $f'(x_E) = 0 \wedge f''(x_E) > 0$. Für den Punkt P gilt jedoch: $f'(-2) = 0$ und $f''(-2) = -6 < 0$. Der Graph der Funktion f hat daher im Punkt P einen Hochpunkt.												
Der Graph der Funktion hat an der Stelle $x = 1$ eine waagrechte Tangente.	Die Aussage ist wahr. Bedingung für eine waagrechte Tangente ist $f'(x) = 0$. Diese Bedingung ist für $x = 1$ erfüllt.												
1b	bestimmt die Parameter a , c und d .	<table><tr><th>Parameter</th><th>a</th><th>b</th><th>c</th><th>d</th></tr><tr><td>Wert</td><td>2</td><td>1</td><td>4</td><td>1,5</td></tr></table> Im Vergleich zum Graphen von $\cos(x)$ ist der Graph hier um 4 Einheiten horizontal in die negative Richtung verschoben; $c = 4$. Die Amplitude hat den Wert 2, damit ist $a = 2$, und schwingt um den Wert 1,5 (vertikale Verschiebung in die positive Richtung). Damit hat der Parameter d den Wert 1,5.	Parameter	a	b	c	d	Wert	2	1	4	1,5	3
Parameter	a	b	c	d									
Wert	2	1	4	1,5									
1c	berechnet den Inhalt der markierten Fläche.	Schnittstelle/n zwischen den Funktionen g und f und Nullstellen der Funktionen g und f berechnen:  Schnittstellen zwischen den Funktionen: $x_1 = -4, \{x_2 = -1\} \notin \mathbb{L}$ Nullstellen der Funktion f: $x_3 \approx -3,41, \{x_4 \approx -0,59\} \notin \mathbb{L}$, Nullstelle der Funktion g: $x_5 = -2$	4										

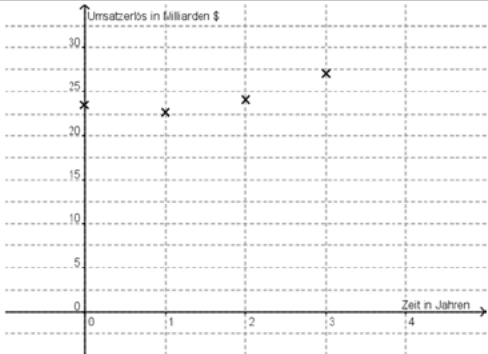
Fortsetzung nächste Seite

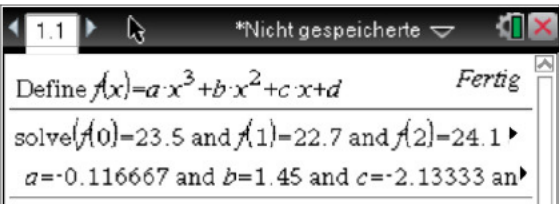
	Anforderungen	Modelllösungen											
zu 1c		Berechnen des markierten Flächeninhalts: z.B.: $A = A_1 - A_2 = \left \int_{-4}^{-2} g(x) dx \right - \left \int_{-4}^{-\sqrt{2}-2} f(x) dx \right$  $A \approx 1,45 \text{ FE}$											
1d	berechnet die Stelle x, an der die Differenz der Funktionswerte von f und g minimal wird.	$f(x) = 0,08x^3 - 0,4x^2 + 0,1x + 2$ und $g(x) = x^2 - 2x + 5$, $x \in \mathbb{R}$ und $x \in [-5; 5]$ Differenz $d(x) = f(x) - g(x) = 0,08x^3 - 1,4x^2 + 2,1x - 3$ minimieren, $d'(x) = 0,24x^2 - 2,8x + 2,1 = 0$ $\Rightarrow x_1 \approx 10,86$ (außerhalb des Intervalls) und $x_2 \approx 0,81$. An der Stelle $x \approx 0,81$ ist die Differenz der Funktionswerte minimal.	4										
1e	entscheidet und begründet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.	<table><tr><th>Aussage</th><th>Entscheidung und Begründung</th></tr><tr><td>Die Wahrscheinlichkeit für genau 30 Erfolge beträgt 13%.</td><td> X sei die Anzahl der Erfolge. Die Aussage ist falsch, da  Die Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 12,2%. </td></tr><tr><td>Die Wahrscheinlichkeit für mindestens 30 Erfolge beträgt ca. 47,5%.</td><td> X sei die Anzahl der Erfolge. Die Aussage ist richtig, da  Die Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 47,5%. </td></tr><tr><td>Das Maximum der Wahrscheinlichkeitsverteilung wird bei $k = 25$ erreicht.</td><td> Das Maximum der Wahrscheinlichkeitsverteilung wird um den Erwartungswert erreicht. Die Aussage ist falsch, da für den Erwartungswert μ gilt: $\mu = n \cdot p = 45 \cdot 0,65 = 29,25$. Das Maximum wird bei $k = 29$ erreicht. </td></tr><tr><td>Man berechnet den Erwartungswert für diese Verteilung mit der Formel $\mu = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$.</td><td> Die Aussage ist falsch. Der Erwartungswert wird mit der Formel $\mu = n \cdot p$ berechnet. Mit der gegebenen Formel berechnet man die Standardabweichung σ. </td></tr></table>	Aussage	Entscheidung und Begründung	Die Wahrscheinlichkeit für genau 30 Erfolge beträgt 13%.	X sei die Anzahl der Erfolge. Die Aussage ist falsch, da  Die Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 12,2%.	Die Wahrscheinlichkeit für mindestens 30 Erfolge beträgt ca. 47,5%.	X sei die Anzahl der Erfolge. Die Aussage ist richtig, da  Die Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 47,5%.	Das Maximum der Wahrscheinlichkeitsverteilung wird bei $k = 25$ erreicht.	Das Maximum der Wahrscheinlichkeitsverteilung wird um den Erwartungswert erreicht. Die Aussage ist falsch, da für den Erwartungswert μ gilt: $\mu = n \cdot p = 45 \cdot 0,65 = 29,25$. Das Maximum wird bei $k = 29$ erreicht.	Man berechnet den Erwartungswert für diese Verteilung mit der Formel $\mu = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$.	Die Aussage ist falsch. Der Erwartungswert wird mit der Formel $\mu = n \cdot p$ berechnet. Mit der gegebenen Formel berechnet man die Standardabweichung σ.	8
Aussage	Entscheidung und Begründung												
Die Wahrscheinlichkeit für genau 30 Erfolge beträgt 13%.	X sei die Anzahl der Erfolge. Die Aussage ist falsch, da  Die Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 12,2%.												
Die Wahrscheinlichkeit für mindestens 30 Erfolge beträgt ca. 47,5%.	X sei die Anzahl der Erfolge. Die Aussage ist richtig, da  Die Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 47,5%.												
Das Maximum der Wahrscheinlichkeitsverteilung wird bei $k = 25$ erreicht.	Das Maximum der Wahrscheinlichkeitsverteilung wird um den Erwartungswert erreicht. Die Aussage ist falsch, da für den Erwartungswert μ gilt: $\mu = n \cdot p = 45 \cdot 0,65 = 29,25$. Das Maximum wird bei $k = 29$ erreicht.												
Man berechnet den Erwartungswert für diese Verteilung mit der Formel $\mu = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$.	Die Aussage ist falsch. Der Erwartungswert wird mit der Formel $\mu = n \cdot p$ berechnet. Mit der gegebenen Formel berechnet man die Standardabweichung σ.												

	Anforderungen	Modelllösungen																
1f	berechnet die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.	Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau zwei weiße Kugeln gezogen werden, berechnet man durch $\left(\frac{5}{25}\right) \cdot \left(\frac{4}{24}\right) = \frac{1}{30} \approx 0,033. \text{ Sie beträgt ca. } 3,3\%.$ Das Ereignis „mindestens eine schwarze Kugel“ ist das Gegenereignis zu „genau zwei weiße Kugeln“. Daher lässt sich die Wahrscheinlichkeit berechnen durch $1 - 0,033 = 0,967$. Sie beträgt 96,7%. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau eine weiße Kugel gezogen wird, berechnet man durch $\left(\frac{20}{25} \cdot \frac{5}{24}\right) + \left(\frac{5}{25} \cdot \frac{20}{24}\right) = \frac{1}{3} \approx 0,33. \text{ Sie beträgt ca. } 33\%.$	6															
1g	ermittelt die fehlenden Wahrscheinlichkeiten.	<table><tr><th>X = k</th><th>P(X = k)</th><th>P(X ≤ k)</th></tr><tr><td>-3</td><td>0,13</td><td>0,13</td></tr><tr><td>0</td><td>0,47</td><td>0,60</td></tr><tr><td>2</td><td>0,25</td><td>0,85</td></tr><tr><td>5</td><td>0,15</td><td>1</td></tr></table>	X = k	P(X = k)	P(X ≤ k)	-3	0,13	0,13	0	0,47	0,60	2	0,25	0,85	5	0,15	1	3
X = k	P(X = k)	P(X ≤ k)																
-3	0,13	0,13																
0	0,47	0,60																
2	0,25	0,85																
5	0,15	1																
			34															

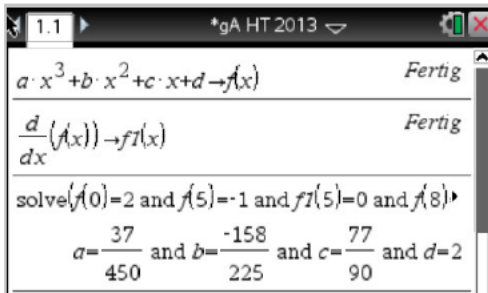
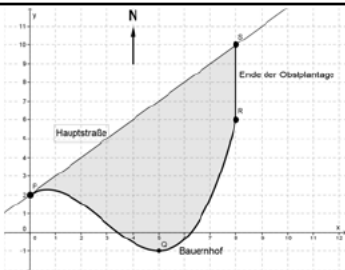
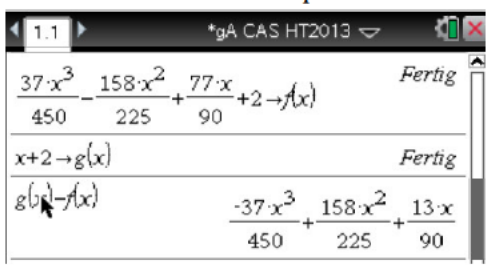
Aufgabe 2: Fast Food

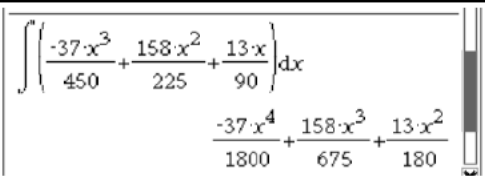
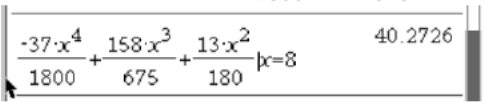
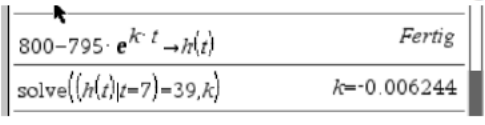
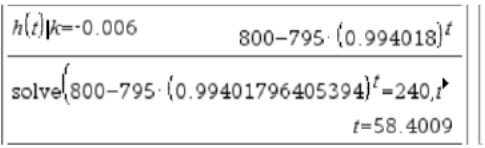
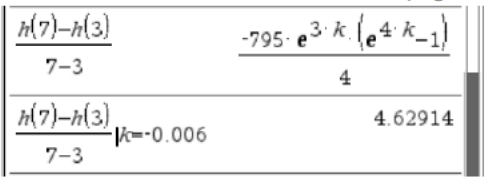
	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
2a	zeigt, dass man die Wahrscheinlichkeit mit 90% annehmen kann.	Als Wahrscheinlichkeit $p = 90\%$ übernimmt man die Werte aus der Umfrage: $51\% + 25\% + 14\% = 90\%$.	1
2b	erläutert die Annahmen zur Anwendung der Binomialverteilung und begründet, dass die Wahrscheinlichkeit 39% beträgt.	X: „Anzahl der Personen, die regelmäßig ein Fast-Food-Restaurant besuchen“ kann als binomialverteilt angenommen werden, wenn bei der Auswertung nur zwei mögliche Ergebnisse zugelassen sind: Erfolg: Ja-Stimme, Misserfolg: keine Ja-Stimme. Die 90 Antworten ($n = 90$) werden unabhängig voneinander gegeben. Dabei ist die Unabhängigkeit problematisch, da angenommen werden müsste, dass jeder Befragte unabhängig von den Freunden, mit denen er in der Stadt ist, antwortet, was in der Realität nicht unbedingt anzunehmen ist. Als Wahrscheinlichkeit $p = 0,39$ übernimmt man die Werte aus der Umfrage: $25\% + 14\% = 39\%$. Bei jeder Stimmabgabe wird mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0,39$ mit einer Ja-Stimme gerechnet.	4
2c	berechnet die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.	Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der Ja-Stimmen, $X \in \{0; 1; 2; 3; \dots; 90\}$, X ist binomialverteilt mit $p = 0,39$ und $n = 90$. Die Wahrscheinlichkeit, dass ... - genau ein Drittel aller befragten Personen regelmäßig ein Fast-Food-Restaurant besuchen, berechnet man durch $P(X = 30)$. Sie beträgt ca. 4,8%. - höchstens 37 der befragten Personen regelmäßig ein Fast-Food-Restaurant besuchen, berechnet man durch $P(X \leq 37)$. Sie beträgt ca. 70%. - mindestens 30 und weniger als 37 der befragten Personen regelmäßig ein Fast-Food-Restaurant besuchen, berechnet man durch $P(30 \leq X \leq 36)$. Sie beträgt ca. 51%. 	6

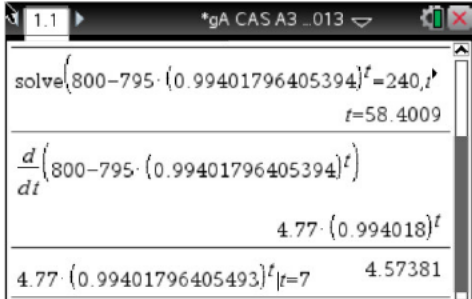
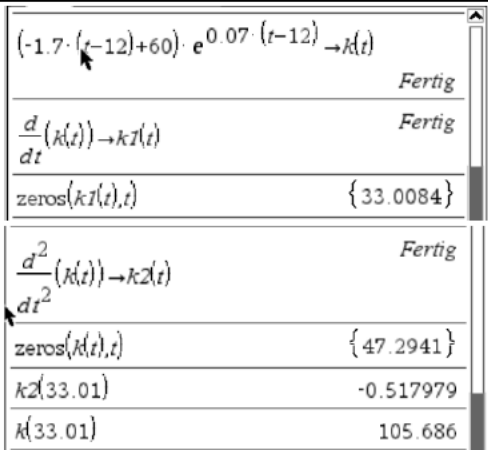
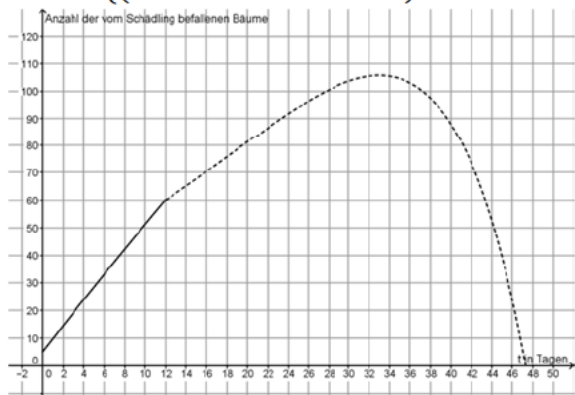
	Anforderungen	Modelllösungen	
2d	ermittelt den Erwartungswert und die Standardabweichung und erläutert die Ergebnisse im Sachzusammenhang.	Erwartungswert: $E(X) = n \cdot p = 55 \cdot 0,39 = 21,45$ Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} \approx 3,617$ Man kann unter den 55 befragten Schülerinnen und Schülern mit ca. 21 Ja-Antworten rechnen, das heißt, dass man 21 Schülerinnen und Schüler, die regelmäßig ein Fast-Food-Restaurant besuchen, erwarten kann. Die Streuung um den Erwartungswert kann mit drei bis vier Personen angegeben werden.	4
2e	ermittelt eine Entscheidungsregel für den Test.	Es wird die Zufallsgröße X mit $n = 55$ und $p = 0,39$ betrachtet. Nullhypothese $H_0: p \geq 0,39$, Gegenhypothese $H_1: p < 0,39$, Irrtumswahrscheinlichkeit: $\alpha = 5\%$. Abschätzen der Grenzen des Annahmebereichs A von H_0 :  Damit lautet der Annahmebereich von H_0 : $A = \{16; 17; 18; \dots; 55\}$ und man kann die Hypothese ablehnen, wenn $X < 16$ ist. Entscheidungsregel: Wenn höchstens 15 Schülerinnen und Schüler angeben, dass sie regelmäßig ein Fast-Food-Restaurant besuchen, die Frage also mit „Ja“ beantworten, kann man behaupten, dass der Ernährungslehreunterricht einen positiven Einfluss auf das Essverhalten der Schülerinnen und Schüler hat. Die Irrtumswahrscheinlichkeit beträgt bei dieser Regel ca. 4,8%.	6
2f	beurteilt das Ergebnis.	Von den befragten Schülerinnen und Schülern haben insgesamt 17 angegeben, dass sie regelmäßig ein Fast-Food-Restaurant besuchen. Daraus ergibt sich zwar nur ein Prozentsatz von ca. 31% und ist somit geringer als die laut Pressemitteilung 39% der regelmäßigen Fast-Food-Konsumenten. Da jedoch der Wert $X = 17$ im Annahmebereich von H_0 liegt, kann nicht behauptet werden, dass der Ernährungslehreunterricht einen positiven Einfluss auf das Essverhalten hatte. Eine solche Behauptung könnte nur mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von ca. 13,7% aufgestellt werden. 	5
2g	stellt die Entwicklung der Umsatzerlöse graphisch dar.		2

	Anforderungen	Modelllösungen	
2h	leitet die Umsatz- erlösfunktion U aus den gegebe- nen Werten her.	 Mit gerundeten Werten lautet der Term der Umsatzerlösfunktion $U(t) = -0,117t^3 + 1,45t^2 - 2,13t + 23,5$ mit t in Jahren, $t = 0$ entspricht dem Jahr 2008 und U(t) in Milliarden \$.	3
2i	beurteilt, ob der weitere Verlauf eine sinnvolle Beschreibung dar- stellen kann.	Für $t > 3$ steigt der Graph streng monoton bis zu seinem lokalen Hochpunkt und fällt dann streng monoton ab. Dies würde bedeuten, dass die Umsatzerlöse nach 2011 stetig zunehmen und einen maximalen Wert erreichen. Dies wäre vorstellbar, wenn kein Umdenken in den Ernährungsgewohnheiten erfolgen sollte. Unrealistisch jedoch ist, dass anschließend die Umsatzerlöse bis auf Null zurückgehen, da dies bedeuten würde, dass die Fast-Food-Kette Konkurs macht.	2
			33

Aufgabe 3: Apfelbaumplantage

	Anforderungen	Modelllösungen	
A3	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
3a	begründet den Verlauf des neuen Wirtschaftsweges f, ermittelt die Bedingungen für eine ganzrationale Funktion 3. Grades und bestimmt die zugehörige Funktionsgleichung	Die dargestellte Funktion f, die den Verlauf des Wirtschaftsweges darstellt, weist sowohl einen Hochpunkt als auch einen Tiefpunkt auf. Zwischen diesen Extrempunkten liegt ein Wendepunkt. Ein weiterer Verlauf des Wirtschaftsweges f ist ohne weitere Wendestelle möglich, daher kann eine Beschreibung des Straßenverlaufs durch eine ganzrationale Funktion (mind. 3. Grad) erfolgen. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $f(0) = 2, f(5) = -1,$ $f'(5) = 0, f(8) = 6$  Die zugehörige Funktionsgleichung lautet: $f(x) = \frac{37}{450}x^3 - \frac{158}{225}x^2 + \frac{77}{90}x + 2.$	6
3b	zeichnet die Fläche in die vorhandene Abbildung 3.1 ein, weist nach, dass die Fläche durch A(x) beschrieben werden kann und	 Aus den Punkten P(0 2) und S(8 10) folgt die Gleichung für die geradlinige Verbindung zwischen Punkten P und S: $g(x) = x + 2$, die den Verlauf der Hauptstraße beschreibt.  <i>Fortsetzung nächste Seite</i>	7

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 3b	berechnet deren Größe in ha.	 Die Fläche zwischen den beiden Funktionen g und f kann mit Hilfe $A = \int_0^8 (g(x) - f(x)) dx = \left[-\frac{37}{1800}x^4 + \frac{158}{675}x^3 + \frac{13}{180}x^2 \right]_0^8$ beschrieben werden. Da die eine Grenze der Obstplantage bei $x = 0$ festgelegt ist, lässt sich die Fläche A dieser Obstplantage mit der Gleichung $A(x) = -\frac{37}{1800}x^4 + \frac{158}{675}x^3 + \frac{13}{180}x^2$ bestimmen.  $A(8) \approx 40,27$ FE (1 FE $\triangleq$ 100m $\cdot$ 100m = 10000m² = 1ha) Die Fläche der Obstplantage beträgt 40,27 ha.	
3c	erklärt, warum für die Parameter $S = 800$ und $C = 795$ zu wählen sind und erläutert deren Bedeutung im Sachzusammenhang.	S ist obere Grenze, da es sich um eine Exponentialfunktion mit beschränktem Wachstum handelt. Da nur 800 Apfelbäume auf der Plantage stehen, können maximal 800 Apfelbäume befallen werden, daher ist $S = 800$. C gibt den Anfangsbestand der unversehrten Apfelbäume an. Es waren 5 Apfelbäume zum Zeitpunkt $t = 0$ befallen, also waren 795 unversehrte Apfelbäume vorhanden und daraus folgt $C = 795$.	2
3d	bestimmt den Wert des Parameters k.	Aus $H(t) = 800 - 795 \cdot e^{-k \cdot 7} = 39$ folgt:  $k = -0,006244 \approx -0,006$.	3
3e	bestimmt den Zeitpunkt, an dem 30% der Apfelbäume befallen wären.	30% von 800 Apfelbäumen = 240 Apfelbäume  Nach etwa 58,4 Tagen sind 30% aller Apfelbäume befallen.	2
3f	ermittelt den durchschnittlichen täglichen Anstieg und	mittlere Änderungsrate: $m = \frac{h(7) - h(3)}{7 - 3}$  $m \approx 4,63$ In dem Zeitraum vom 3. bis zum 7. Tag wurden täglich durchschnittlich 4,63 Apfelbäume zusätzlich befallen. <i>Fortsetzung nächste Seite</i>	4

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 3f	den momentanen Anstieg der Anzahl befallener Apfelbäume am 14.Mai 2012.	Berechnung der momentanen Änderungsrate:  Aus $H'(t) \approx 4,77 \cdot e^{-0,006 \cdot t}$ folgt $H'(7) \approx 4,57$. Am 14.Mai 2012 (Tag 7) wurden weitere 4,57 Apfelbäume befallen.	
3g	berechnet, zu welchem Zeitpunkt die meisten Apfelbäume vom Schädling befallen sind und ermittelt die zugehörige Apfelbaumanzahl.	 Aus $K'(t)=0$ folgt $t \approx 33,01$. Da $K''(33,01) < 0$, kann man davon ausgehen, dass am 33. Tag die meisten Bäume befallen sein werden und kann deren Anzahl mit $K(33,01) \approx 105,69$ ermitteln. Folglich sind am 33. Tag ca. 106 Apfelbäume befallen.	4
3h	ermittelt eine abschnittsweise definierte Funktion, zeichnet die Funktion in das gegebene Koordinatensystem ein und beschriftet die Koordinatenachsen.	Nullstelle der Funktion $K(t)$:  $x \approx 47,3$ $B(t) = \begin{cases} 800 - 795 \cdot e^{-0,006t} & \text{mit } 0 \leq t < 12 \\ ((-1,7) \cdot (t - 12) + 60) \cdot e^{0,07 \cdot (t-12)} & \text{mit } 12 \leq t \leq 47,3 \end{cases}$ 	5
			33