Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Schule und Berufsbildung

Schulchiffre ____________

____/____
Kurs-Nr. / Schüler-Nr.

Schriftliche Abiturprüfung

Schuljahr 2012/ 2013

Kernfach Mathematik

auf grundlegendem Anforderungsniveau

an allgemeinbildenden und beruflichen gymnasialen Oberstufen

23. Januar 2013, 9.00 Uhr

Unterlagen für die Prüflinge

Allgemeine Arbeitshinweise

- Tragen Sie bitte rechts oben auf diesem Blatt die Schulchiffre ein, die Sie im Stempel auf Ihrem Arbeitspapier finden.
- Tragen Sie rechts oben auf diesem Blatt und auf Ihren Arbeitspapieren Ihre Kursnummer und Ihre Schülernummer ein, wie Sie sie auf Ihrem Namensschild finden.
- Verwenden Sie auf keinen Fall Ihren Namen und den Namen Ihrer Schule.
- Kennzeichnen Sie bitte Ihre Entwurfsblätter (Kladde) und Ihre Reinschrift.

Fachspezifische Arbeitshinweise

- Die Arbeitszeit beträgt **240 Minuten.**
- Eine Lese- und Auswahlzeit von **30 Minuten** ist der Arbeitszeit **vorgeschaltet**.
  In dieser Zeit darf noch nicht mit der Bearbeitung begonnen werden.
- Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner (nicht programmierbar und nicht grafikfähig), Formelsammlung „Das große Tafelwerk interaktiv“, Cornelsen-Verlag, Rechtschreiblexikon, Operatorenliste (s. S. 2 und 3).

Aufgabenauswahl

- Sie erhalten **zwei** Aufgaben.
- Überprüfen Sie anhand der Seitenzahlen, ob Sie alle Unterlagen vollständig erhalten haben.
- Bearbeiten Sie **beide** Aufgaben.
- Vermerken Sie auf der Reinschrift, welche Aufgabe (z.B. I.2) Sie jeweils bearbeitet haben.

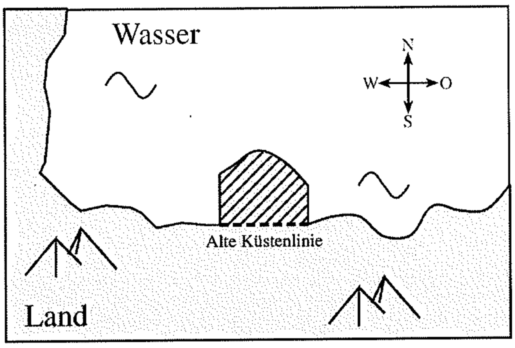
Operatoren	Definitionen	Beispiele
Angeben, nennen **I**	Ohne nähere Erläuterungen und Begründungen, ohne Lösungsweg aufzählen.	Geben Sie drei Punkte an, die in der Ebene liegen. Nennen Sie drei weitere Beispiele zu ...
Anwenden **I – II**	Einen bekannten Sachverhalt oder eine Handlungsanweisung, Formel, Vorschrift auf Elemente ihres jeweiligen Definitionsbereichs anwenden.	Wenden Sie das in Matrix L gegebene Populationsmodell auch auf den Bestand B an. Wenden Sie die Funktionsgleichung auch auf die gegebenen Zahlen an.
Begründen **II–III**	Einen angegebenen Sachverhalt auf Gesetzmäßigkeiten bzw. kausale Zusammenhänge zurückführen. Hierbei sind Regeln und mathematische Beziehungen zu nutzen.	Begründen Sie, dass die Funktion nicht mehr als drei Wendestellen aufweisen kann. Begründen Sie die Zurückweisung der Hypothese.
Berechnen **I**	Ergebnisse von einem Ansatz ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen.	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses.
Beschreiben **I–II**	Sachverhalt oder Verfahren in Textform unter Verwendung der Fachsprache in vollständigen Sätzen darstellen (hier sind auch Einschränkungen möglich: „Beschreiben Sie in Stichworten").	Beschreiben Sie den Bereich möglicher Ergebnisse. Beschreiben Sie, wie Sie dieses Problem lösen wollen, und führen Sie danach Ihre Lösung durch.
Bestätigen **I–II**	Eine Aussage oder einen Sachverhalt durch Anwendung einfacher Mittel (rechnerischer wie argumentativer) sichern. Der Anspruch liegt deswegen unterhalb von „Zeigen" oder „Beweisen".	Bestätigen Sie, dass die gegebene Funktion eine Stammfunktion zur Ursprungsfunktion ist. Bestätigen Sie die Parallelität der beiden Ebenen. Bestätigen Sie, dass in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit unter 0,1 liegt.
Bestimmen, ermitteln **II–III**	Einen Lösungsweg darstellen und das Ergebnis formulieren (die Wahl der Mittel kann unter Umständen eingeschränkt sein).	Ermitteln Sie grafisch den Schnittpunkt. Bestimmen Sie aus diesen Werten die Koordinaten der beiden Punkte.
Beurteilen **III**	Zu einem Sachverhalt ein selbstständiges Urteil unter Verwendung von Fachwissen und Fachmethoden formulieren.	Beurteilen Sie, welche der beiden vorgeschlagenen modellierenden Funktionen das ursprüngliche Problem besser darstellt.
Beweisen, widerlegen **III**	Beweisführung im mathematischen Sinne unter Verwendung von bekannten mathematischen Sätzen, logischer Schlüsse und Äquivalenzumformungen, ggf. unter Verwendung von Gegenbeispielen.	Beweisen Sie, dass die Gerade auf sich selbst abgebildet wird.
Entscheiden **II**	Bei Alternativen sich begründet und eindeutig auf eine Möglichkeit festlegen.	Entscheiden Sie, für welchen der beiden Beobachter der Aufschlagpunkt näher ist. Entscheiden Sie, welche der Ihnen bekannten Verteilungen auf die Problemstellung passt.

Operatoren	Definitionen	Beispiele
Ergänzen, vervollständigen **I**	Tabellen, Ausdrücke oder Aussagen nach bereits vorliegenden Kriterien, Formeln oder Mustern füllen.	Ergänzen Sie die Tabelle der Funktionswerte. Vervollständigen Sie die Zeichnung mit den in der Aufgabestellung gegebenen Punkten.
Erstellen **I**	Einen Sachverhalt in übersichtlicher, meist fachlich üblicher oder vorgegebener Form darstellen.	Erstellen Sie eine Wertetabelle für die Funktion.
Herleiten **II**	Die Entstehung oder Ableitung eines gegebenen oder beschriebenen Sachverhalts oder einer Gleichung aus anderen oder aus allgemeineren Sachverhalten darstellen.	Leiten Sie die gegebene Formel für die Stammfunktion her.
(Re-) Interpretieren **II–III**	Die Ergebnisse einer mathematischen Überlegung rückübersetzen auf das ursprüngliche Problem.	Interpretieren Sie: Was bedeutet Ihre Lösung für die ursprüngliche Frage?
Skizzieren **I–II**	Die wesentlichen Eigenschaften eines Objektes grafisch darstellen (auch Freihandskizze möglich).	Skizzieren Sie die gegenseitige Lage der drei Körper.
Untersuchen **II**	Sachverhalte nach bestimmten, fachlich üblichen bzw. sinnvollen Kriterien darstellen.	Untersuchen Sie die Funktion … Untersuchen Sie, ob die Verbindungskurve ohne Knick in die Gerade einmündet.
Vergleichen **II–III**	Nach vorgegebenen oder selbst gewählten Gesichtspunkten Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Unterschiede ermitteln und darstellen.	Vergleichen Sie die beiden Vorschläge … nach der von den Kurven eingeschlossenen Fläche.
Zeichnen, grafisch darstellen **I–II**	Eine hinreichend exakte grafische Darstellung anfertigen.	Zeichnen Sie den Graphen der Funktion. Stellen Sie die Punkte und Geraden im Koordinatensystem mit den gegebenen Achsen dar.
Zeigen, nachweisen **II–III**	Eine Aussage, einen Sachverhalt nach gültigen Schlussregeln, Berechnungen, Herleitungen oder logischen Begründungen bestätigen.	Zeigen Sie, dass das betrachtete Viereck ein Drachenviereck ist.
Zuordnen **I–II**	Ohne tiefer gehende Erläuterung eine Verbindung zwischen zwei Listen herstellen.	Ordnen Sie die Graphen den gegebenen Gleichungen zu.

Analysis 1

I.1 Halbinsel

Eine in einen See ragende künstlich angelegte Halbinsel soll neu gestaltet werden. Die Halbinsel ist in Ost-West-Richtung 30 m breit, auf der westlichen
Seite ragt die Halbinsel in Nordrichtung 15 m (Punkt C), auf der östlichen Seite 10 m (Punkt D) in den See (siehe Abbildung in der Anlage).



Ein neuer Praktikant erstellt für den Verlauf der nördlichen Strandlinie die Funktionsgleichung

$$g(x)=-\frac{7}{90}x^2+\frac{13}{6}x+15 \text{ für } 0\leq x\leq 30 \;.$$

Der Projektleiter zweifelt dieses Ergebnis an und fordert seinen Praktikanten auf, exemplarisch für drei Punkte mit x-Werten aus dem Intervall $[5; 25]$ zu überprüfen, ob der Funktionsgraph von g mit der Strandlinie übereinstimmt. Eine Abweichung der Funktionswerte von den gemessenen Werten (siehe Abbildung in der Anlage) von maximal 1 m soll akzeptiert werden.

a) • Bestätigen Sie durch Rechnung, dass der Zweifel des Projektleiters berechtigt ist.

• Begründen Sie, warum die nördliche Strandlinie nicht auf dem Graphen einer quadratischen Funktion (Parabel) liegen kann (siehe Abbildung in der Anlage). (20P)

Die Planungsabteilung geht davon aus, dass die Strandlinie durch eine Funktion f dritten Grades modelliert werden kann. Zur Erstellung der Funktionsgleichung werden an den beiden Punkten $C(0|15)$ und $D(30|10)$ noch Winkelpeilungen vorgenommen: Am Punkt C hat die Strandlinie einen Winkel von 45° zur Ost-West-Achse, am Punkt D einen Winkel von 116,57° (siehe Abbildung in der Anlage).

b) • Bestätigen Sie mithilfe des gegebenen Winkels, dass die Steigung der Strandlinie im Punkt D den Wert –2 aufweist.

• Zeigen Sie, dass die Koordinaten von D und die Steigung der Strandlinie in diesem Punkt zur Funktion f mit der folgenden Gleichung passen:

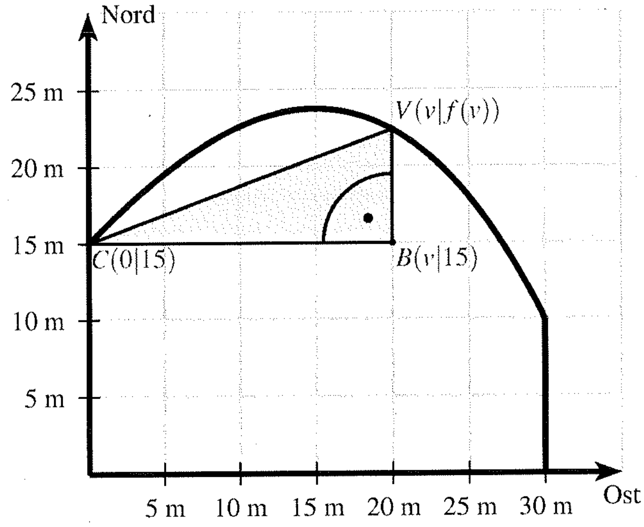
$$f(x)=-\frac{1}{1350}x^3-\frac{1}{60}x^2+x+15 \text{ für } 0\leq x\leq 30$$ (15P)

Im Folgenden wird die in Aufgabenteil b) genannte Funktion f genutzt.

c) Berechnen Sie, wie weit die Halbinsel in Nordrichtung in den See ragt. (20P)

Ein Plan sieht vor, dass auf dem Gebiet der Halbinsel eine Fläche in Form eines rechtwinkligen Dreiecks abgeteilt und bepflanzt werden soll, die im Punkt V auf die Strandlinie trifft. Die abgeteilte Dreiecksfläche soll maximal werden.

d) Bestimmen Sie den maximalen Inhalt der Dreiecksfläche und die Koordinaten des zugehörigen Punktes V. (20P)

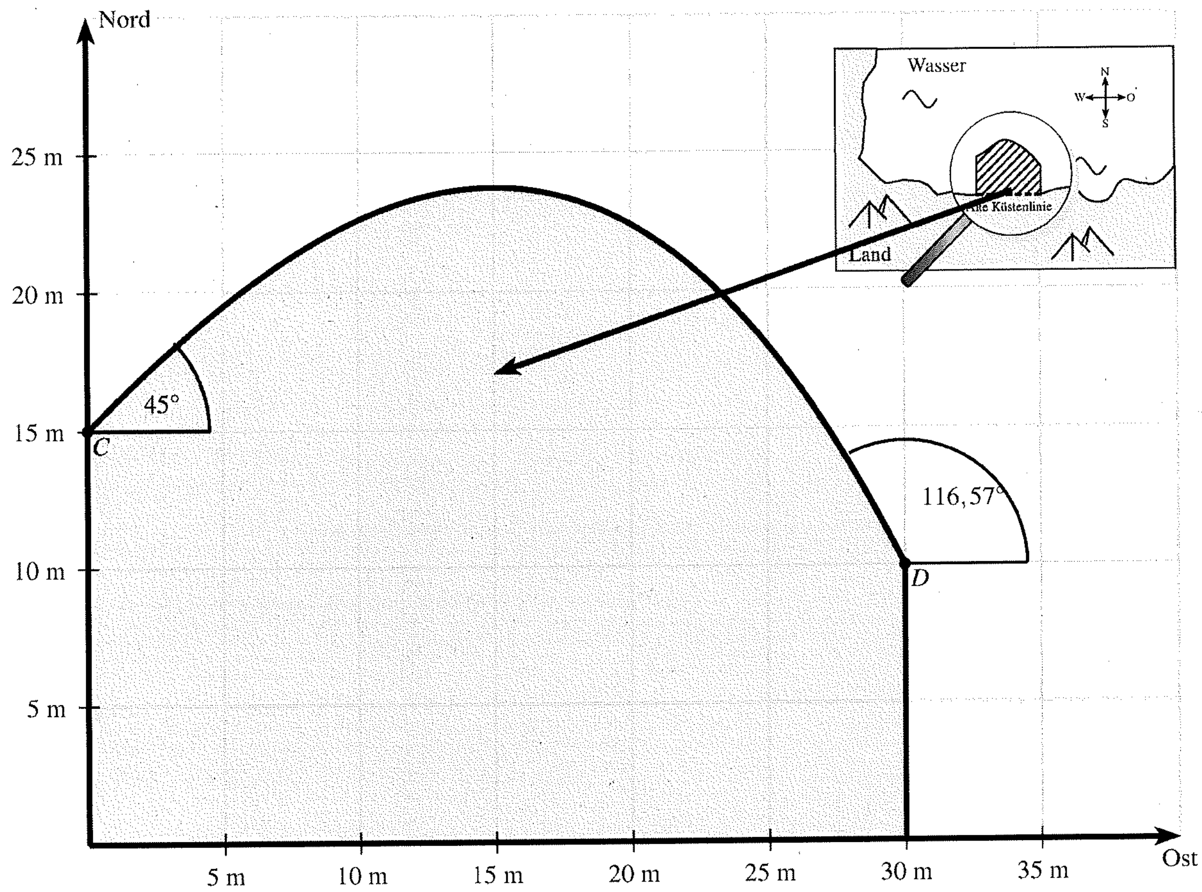


Die von der durch den Graphen der Funktion f gegebenen Strandlinie und der Hypotenuse $\overline{CV}$ des Dreiecks eingeschlossene Fläche soll 40 cm hoch mit Spielsand bedeckt werden.

e) Ermitteln Sie das Volumen des benötigten Sandes. (25P)

Hinweis: Wenn Sie Teilaufgabe d) nicht gelöst haben, rechnen Sie für den Punkt V mit dem unzutreffenden Ersatzwert $V_E(19{,}57 \mid f(19{,}57))$.

Anlage zur Aufgabe „Halbinsel“



Ausschnitt aus der Karte

Analysis 2

I.2 Smartphones

Die Markteinführung eines neuen Smartphones vom Elektronikhersteller PEAR wird stets aufgeregt erwartet. Zur Modellierung der Entwicklung der täglichen Verkaufszahlen eines neu eingeführten Smartphones schlägt die Planungsabteilung von PEAR die Modellfunktion v vor mit

$$v(t) = 10000 \cdot t \cdot e^{-0{,}02t} \text{ mit } t \geq 0$$

wobei t die Zeit in Tagen seit Beginn der Markteinführung und $v(t)$ die am Tag t verkaufte Anzahl von Smartphones darstellt.

Die folgende Tabelle zeigt, wie viele Smartphones des Modells S2013 nach seiner Markteinführung pro Tag verkauft wurden.

t in Tagen	0	10	30	60
Verkaufszahlen in Stück	0	81 870	164 640	180 720

a) Bestätigen Sie, dass die Funktion v die täglichen Verkaufszahlen des Smartphones S2013 angenähert wiedergibt. (10P)

In der Anlage ist der Graph von v dargestellt.

b)
- Beschreiben Sie kurz den Verlauf des Graphen qualitativ.
- Interpretieren Sie darauf Bezug nehmend die Entwicklung der Verkaufszahlen im Anwendungskontext. (15P)

c)
- Bestätigen Sie, dass gilt: $v'(t) = 10000 \cdot e^{-0{,}02t} \cdot (1 - 0{,}02t)$.
- Berechnen Sie, an welchem Tag die meisten Smartphones S2013 verkauft werden, und berechnen Sie die entsprechende Verkaufszahl. (20P)

  Hinweis: Da aus der Abbildung deutlich wird, dass der einzige Extrempunkt ein Hochpunkt ist, reicht die Untersuchung der notwendigen Bedingung.

Eine Stammfunktion V von v hat die Gleichung $V(t) = 10000 \cdot \left(-50t \cdot e^{-0{,}02t} - 2500 \cdot e^{-0{,}02t}\right)$.

d) • Ermitteln Sie den Wert des Integrals $\int_0^{100} v(t)\, dt$.

• Interpretieren Sie das Integral im gegebenen Anwendungskontext. (20P)

Für die Firma PEAR ist es aus verschiedenen Gründen sinnvoll, den Produktzyklus (d. h. die Zeit vom ersten bis zum letzten verkauften Smartphone) zu begrenzen. Zur Vereinfachung der Prognose der insgesamt in den Verkauf gehenden Smartphones S2013 setzt die Planungsabteilung ab dem Wendepunkt der Verkaufszahlenentwicklung eine lineare Abnahme der täglichen Verkaufszahlen an, d. h. man ersetzt ab dem Wendepunkt der Funktion v den weiteren Verlauf des Funktionsgraphen durch die Wendetangente. Die Koordinaten des Wendepunkts sind gerundet $W(100\,|\,135335)$.

e) • Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente.

• Zeichnen Sie die Wendetangente in das Koordinatensystem in der Anlage.

• Ermitteln Sie den Zeitpunkt, ab dem nach diesem Modell keine Smartphones mehr verkauft werden.

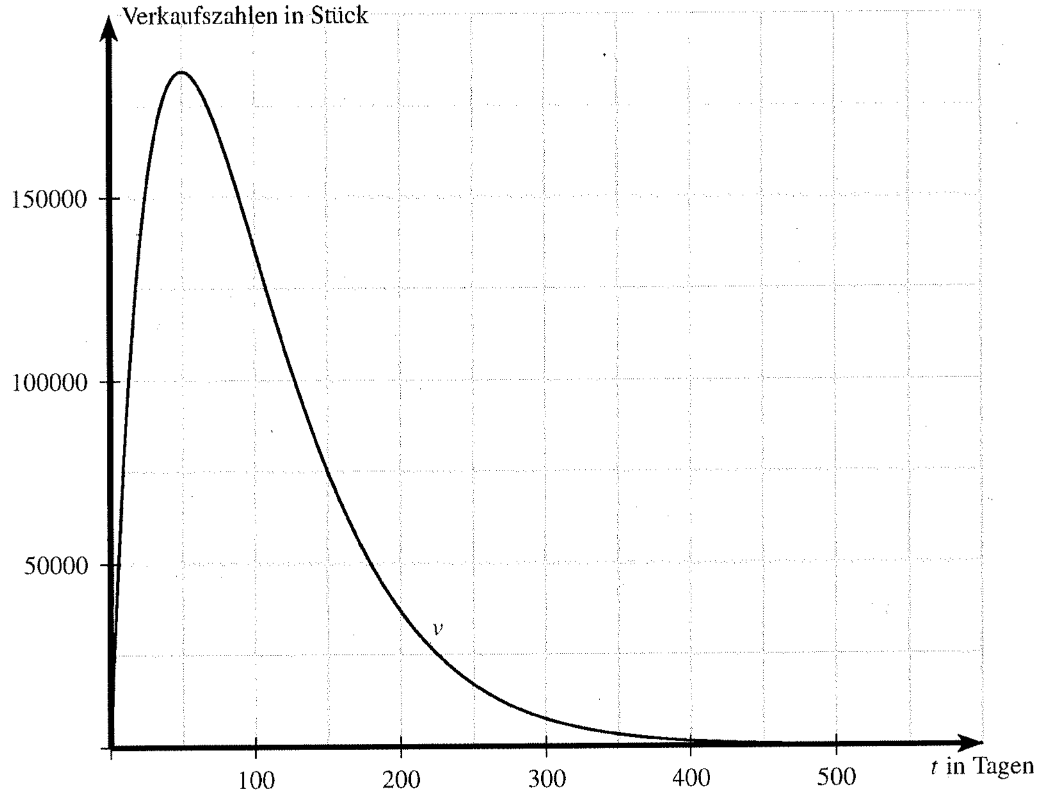
• Bestimmen Sie die Anzahl der Smartphones, die nach diesem Modell ab dem Zeitpunkt $t_W = 100$ insgesamt noch verkauft werden. (25P)

Die Planungsabteilung erwartet, dass sich die Verkaufszahlen des Nachfolgemodells des hier betrachteten Smartphones nach der Verkaufsfunktion w entwickeln, die zu v in folgender Beziehung steht:

$$w(t) = v\left(\frac{t}{2}\right).$$

f) Vergleichen Sie den Verlauf des Graphen von w mit dem Verlauf des Graphen von v. Gehen Sie bei diesem Vergleich auch auf die Lage der Nullstellen, der Hochpunkte und der Wendepunkte sowie auf das jeweilige Verhalten für $t \to \infty$ ein.
Hinweis: Hier wird eine beschreibende Darstellung in Textform gefordert; Rechnungen sind nicht notwendig. (10P)

Anlage zur Aufgabe „Smartphones“



Lineare Algebra/Analytische Geometrie 1

II.1 Bauernhaus mit Photovoltaikanlage

Die Besitzer eines Bauernhauses möchten eine Photovoltaik-Anlage (PV-Anlage) auf ihrem Dach anbringen lassen. Sie lassen sich zunächst beraten, inwiefern ihr Haus für die Installation so einer Anlage geeignet ist.

In einem kartesischen Koordinatensystem lässt sich die Grundfläche des Bauernhauses durch folgende Eckpunkte beschreiben:

$G_1(0|0|0)$, $G_2(10|3|0)$, $G_3(5{,}5|18|0)$ und $G_4(-4{,}5|15|0)$.

Die Eckpunkte des Dachbodens haben die Koordinaten

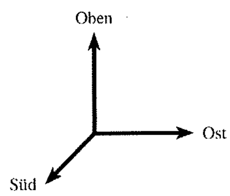
$S_1(0|0|3)$, $S_2(10|3|3)$, $S_3(5{,}5|18|3)$ und $S_4(-4{,}5|15|3)$.

Die Punkte G_1, G_2, G_3, G_4, S_1, S_2, S_3 und S_4 bilden die Eckpunkte eines Quaders.
Die obere Kante des Daches hat die Endpunkte

$D_1(5|1{,}5|7)$ und $D_2(0{,}5|16{,}5|7)$.

Die Koordinatenachsen verlaufen in Südrichtung, in Ostrichtung und senkrecht nach oben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Süd} \\ \text{Ost} \\ \text{Oben} \end{pmatrix}.$$



Die Längeneinheit in allen drei Richtungen beträgt 1 m.

a) Vervollständigen Sie das Bauernhaus im Koordinatensystem in der Anlage. (10P)

Die einzelnen Photovoltaik-Elemente sind rechteckig und haben eine Breite von 0,8 m und eine Länge von 1,6 m. Die Besitzer des Bauernhauses möchten 54 dieser Elemente auf ihrem Dach montieren lassen.

b)
- Bestätigen Sie zunächst, dass die Dachfläche $D_1S_2S_3D_2$ die Form eines Rechtecks hat.
- Zeigen Sie, dass es die Abmessungen der Dachfläche $D_1S_2S_3D_2$ erlauben, 54 Photovoltaik-Elemente zu montieren. (20P)

c)
- Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E, welche die Dachfläche $D_1S_2S_3D_2$ enthält.
- Bestimmen Sie auch eine Koordinatengleichung der Ebene E.

  Kontrollergebnis: $E\colon\ 80x_1 + 24x_2 + 109x_3 = 1199$ (15P)

Eine Ausrichtung der Hausseite, auf der sich die PV-Anlage befindet, nach Süden verspricht den höchsten Ertrag. Eine Abweichung von bis zu 30° von der Südrichtung wirkt sich nur gering aus.

d) Zeigen Sie, dass die Ausrichtung der Hausseitenfläche $G_2G_3S_3S_2$ nicht zu stark von der Südrichtung abweicht. (15P)

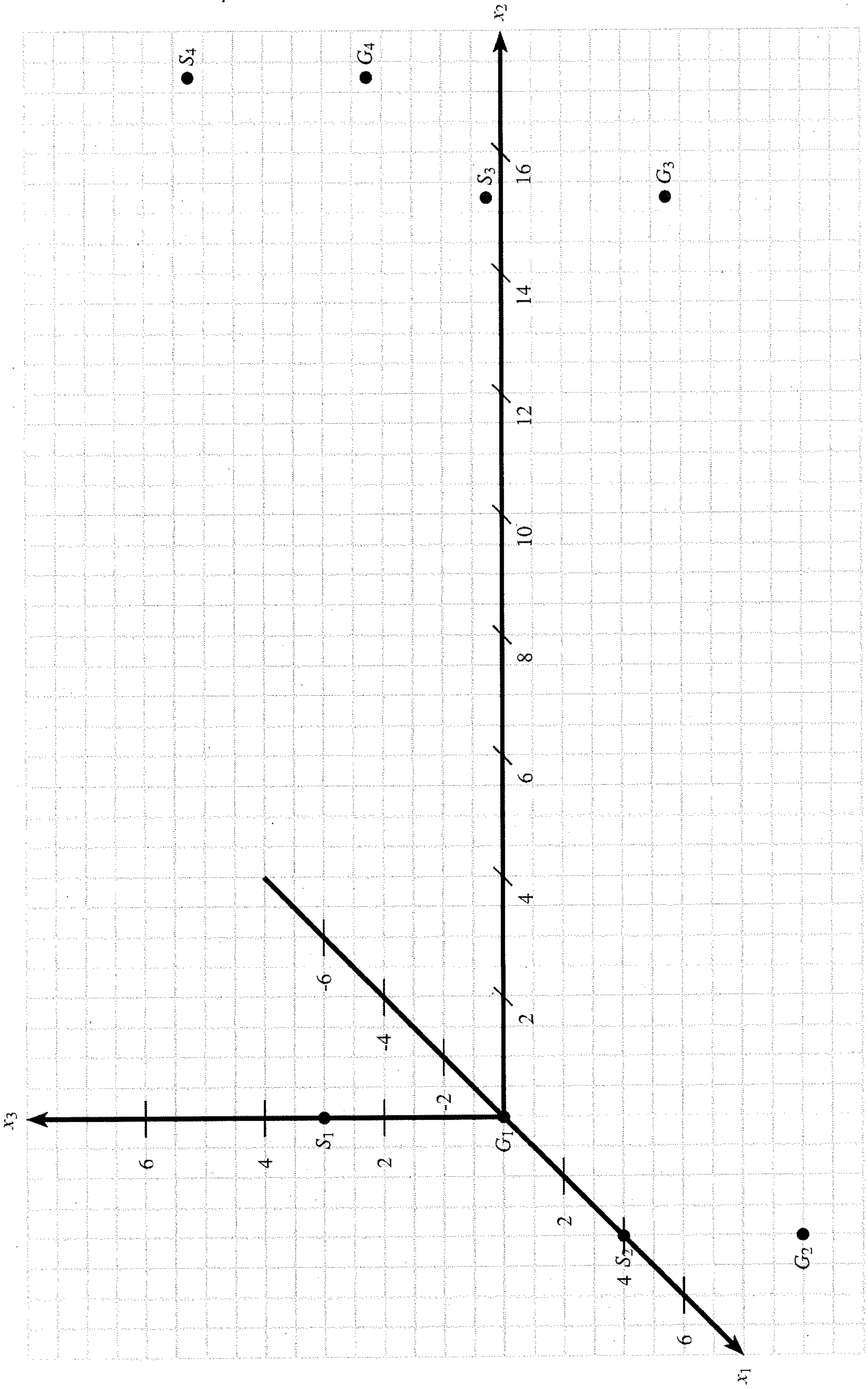
Der Ertrag einer PV-Anlage ist am größten, wenn das Sonnenlicht im rechten Winkel auf die Anlage trifft. Da sich die Richtung des einfallenden Sonnenlichtes im Laufe eines Tages ändert, ist es nicht möglich, dass die Sonnenstrahlen zu jeder Tageszeit senkrecht auf die PV-Anlage treffen. Es wird empfohlen, dass der Neigungswinkel der PV-Anlage gegenüber der x_1x_2-Ebene zwischen 20° und 60° liegt.

e)
- Untersuchen Sie, ob der Winkel zwischen der Ebene E und der x_1x_2-Ebene dieser Empfehlung entspricht.
- Zu einer bestimmten Tageszeit fällt das Sonnenlicht senkrecht auf die Dachfläche $D_1S_2S_3D_2$. Geben Sie den Vektor an, der die Richtung der einfallenden Sonnenstrahlen beschreibt. Ermitteln Sie, in welchem Winkel die Sonne dann über dem Horizont steht. (20P)

Schon durch kleinflächige Schatten auf der PV-Anlage wird der Ertrag beeinträchtigt. Im Garten steht ein 8 m hoher Mast mit dem Fußpunkt $(9{,}5|16|0)$. An einem Wintertag haben die einfallenden Sonnenstrahlen in der Mittagszeit die Richtung $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -0{,}3 \end{pmatrix}$. Die Mastspitze wirft einen Schatten auf die Dachfläche $D_1S_2S_3D_2$.

f)
- Ermitteln Sie die Koordinaten des Schattens der Mastspitze auf der Dachfläche $D_1S_2S_3D_2$. Runden Sie Ihre Angaben auf eine Nachkommastelle.
- Die Gegebenheiten des Grundstückes ermöglichen nur eine Versetzung des Mastes in Süd-Richtung.
  Bestimmen Sie, wie weit der Mast mindestens versetzt werden muss, damit bei dem angegebenen Sonnenstand kein Schatten mehr auf das Dach fällt. (20P)

Anlage zur Aufgabe „Bauernhaus mit Photovoltaikanlage"



Lineare Algebra/Analytische Geometrie 2

II.2 Pinguine

Pinguine leben in Kolonien in den kalten Regionen der Südhalbkugel. In einer dieser Kolonien mit etwa 50 000 Tieren finden Forscher 150 tote Tiere, die offensichtlich an einer bisher unbekannten Krankheit gestorben sind. Erkrankte Pinguine kann man daran erkennen, dass sie kurz nach der Infektion ein auffälliges Verhalten zeigen. An dem Tag, an dem 150 tote Tiere gefunden wurden, haben die Forscher 800 kranke Tiere gesichtet.

Zur Beschreibung der Ausbreitung der Krankheit mit einem Modell teilen die Forscher die gesamte Population von 50 000 Pinguinen in drei Gruppen ein: *Gesunde, Kranke* und *Tote.*

Im Vektor $\vec{v}_n = \begin{pmatrix} G_n \\ K_n \\ T_n \end{pmatrix}$ wird die Verteilung der Gesamtpopulation auf diese drei Gruppen am Tag n (nach Ausbruch der Krankheit) notiert. Die einzelnen Komponenten G_n, K_n und T_n geben jeweils die Anzahl der Pinguine in der betreffenden Gruppe an.

Im Rahmen des Modells gilt der Zusammenhang $\vec{v}_{n+1} = M \cdot \vec{v}_n$, wobei M die folgende Matrix ist:

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}99 & 0{,}15 & 0 \\ 0{,}01 & 0{,}55 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\vec{v}_0$ beschreibt die Population von 50 000 gesunden Pinguinen.

a)
- Erstellen Sie den zu der Übergangsmatrix M gehörenden Übergangsgraphen.
- Interpretieren Sie die Matrixeinträge $m_{11} = 0{,}99$ und $m_{32} = 0{,}3$ vor dem Hintergrund des Sachkontextes.
- Begründen Sie im Sachkontext, warum die Summe der Spalteneinträge der Matrix M jeweils 1 beträgt. (20P)

b)
- Berechnen Sie mithilfe des Modells die Verteilung der Gesamtpopulation von 50 000 Pinguinen für die ersten beiden Tage nach Ausbruch der Krankheit.
- Beurteilen Sie, ob das von den Forschern gewählte Modell die Beobachtungen der im Text beschriebenen Pinguinfunde angemessen beschreibt. (15P)

Aufgrund der schlechten Wetterbedingungen war an einem Mittwoch die Zählung der Tiere nicht möglich. Am darauf folgenden Tag werden insgesamt 1052 kranke und 1574 tote Pinguine gezählt.

c) Bestimmen Sie mithilfe des Modells die Anzahl der gesunden, kranken und toten Tiere für den Mittwoch, an dem die Zählung nicht möglich war. (20P)

d) • Begründen Sie, dass im Rahmen dieses Modells langfristig alle Pinguine sterben werden.

• Beurteilen Sie, inwiefern es sich bei der Abnahme der Anzahl der lebenden Pinguine um eine exponentielle Abnahme handelt. (15P)

Einige der genesenen Pinguine werden genauer untersucht. Es stellt sich heraus, dass diese gegen die Krankheit immun sind, also nicht wieder erkranken.
In einem erweiterten Modell geht man daher davon aus, dass alle Pinguine nach einer überstandenen Infektion gegen die Krankheit immun sind. Die Gruppe der *immunen* Pinguine wird in das Modell aufgenommen, sodass nun der Vektor

$$\vec{w}_n = \begin{pmatrix} G_n \\ K_n \\ T_n \\ I_n \end{pmatrix}$$

die Verteilung der Gesamtpopulation auf die vier Gruppen am Tag n beschreibt. In der Gruppe der *Gesunden* befinden sich also nur diejenigen gesunden Tiere, die zwar gesund, aber nicht immun sind.

e) • Geben Sie für das erweiterte Modell eine Übergangsmatrix L an und begründen Sie Ihre Angaben.

• Bestimmen Sie den Anteil der Tiere an der Gesamtpopulation, der nach diesem Modell die Epidemie überlebt. (15P)

Für die Matrix L gilt: $L^{180} \approx \begin{pmatrix} 0{,}164 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}004 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}555 & 0{,}667 & 1 & 0 \\ 0{,}277 & 0{,}333 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) Bestätigen Sie, dass man mithilfe der Matrix $P = \begin{pmatrix} 0{,}027 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}001 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}649 & 0{,}667 & 1 & 0 \\ 0{,}324 & 0{,}333 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ den Bestand der Pinguinpopulation nach etwa einem Jahr näherungsweise berechnen kann. (15P)

Stochastik 1

III.1 Ventilschäden

Im Jahr 1955 verfügte eine Kunstflugstaffel in Amarillo, Texas, über fünf Nachbauten der berühmten Fokker Dr1-III. Dieses Flugzeug hat einen 7-Zylinder-Motor, und da jeder Zylinder ein Auslassventil hat, sind bei einer Maschine 7 Auslassventile eingebaut.

Die Ersatzventile liefert eine örtliche Firma in Kisten mit je 50 Ventilen; die Erfahrung zeigt, dass 95% der gelieferten Ventile nach dem Einbau funktionsfähig sind. (Die Anzahl der funktionsfähigen Ventile sei binomialverteilt.)

Wenn ein Ventil defekt ist, lässt sich der Motor zwar anwerfen, aber er läuft dann mit geringerer Leistung. Bei zwei defekten Ventilen läuft der Motor gar nicht und lässt sich nicht einmal anwerfen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass in einer Kiste

- ... alle Ventile funktionsfähig sind.
- ... genau drei Ventile defekt sind.
- ...weniger als 45 Ventile funktionsfähig arbeiten. (20P)

Der Mechaniker merkt, dass einer der Motoren weniger leistet. Kurz darauf lässt sich der Motor nicht einmal mehr anwerfen. Der Mechaniker nimmt an, dass nunmehr genau zwei Ventile defekt sind. Er tauscht zwei Ventile im Motor aus, die er zufällig auswählt, und zwar durch Ventile, die erwiesenermaßen in Ordnung sind.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis:
Der Motor läuft jetzt wieder, aber mit geringerer Leistung. (20P)

Auslassventile sind hoch belastet. Ihre mittlere Lebensdauer beträgt nach aller Erfahrung 80 Stunden. Die Lebensdauer ist normalverteilt mit einer Standardabweichung von 18 Stunden.
Deswegen werden alle Ventile in regelmäßigen Abständen ersetzt, und zwar jeweils nach 40 Flugstunden.

c) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein nach dem Einbau funktionsfähiges Ventil noch vor Ablauf des Wartungsintervalls ausfällt. (15P)

Die Piloten sind mit ihren Maschinen jeweils eine Stunde in der Luft, bevor sie wieder landen (und gegebenenfalls die Hilfe des Mechanikers erhalten). Berechtigterweise möchte kein Pilot erleben, dass bei seiner Maschine während seiner Flugstunde unterwegs der Motor unrund zu laufen beginnt. Man einigt sich darauf, dass die Piloten bereit sind, ein solches Defekt-Risiko einzugehen, wenn es in keiner Betriebsstunde 1 % überschreitet.

d) • Begründen Sie, dass die gefährlichste Flugstunde die letzte Stunde vor der Wartung ist.

• Bestimmen Sie die Ausfallswahrscheinlichkeit für ein Ventil während dieser Stunde. (20P)

Die Mechaniker werden neuerdings auch von einer zweiten Firma mit Ventilen beliefert; die Ventile dieser Firma sind erfahrungsgemäß zu 97 % funktionsfähig. Die Firma liefert die Ventile in Kisten zu 70 Stück. Die Inhalte von je einer Kiste der ersten und der zweiten Firma werden von den Mechanikern zusammengetan; aus dieser „Mischkiste" wird das nächste benötigte Ventil zufällig herausgenommen und beim Einbau verwendet. Nach dem Einbau wird es als defekt erkannt.

e) • Untersuchen Sie mithilfe einer Vierfeldertafel für die Merkmalspaare *funktionsfähiges Ventil - defektes Ventil* und *Ventil von Firma 1 - Ventil von Firma 2*, ob die beiden Merkmalspaare stochastisch unabhängig sind.

• Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das defekte Ventil aus der Lieferung der Firma 2 kommt. (25P)

Stochastik 2

III.2 Wassertaxis

Viele Urlaubsinseln im Indischen Ozean sind nur mit Wasserflugzeugen, den sogenannten „Wassertaxis" zu erreichen.

Bei der Fluggesellschaft WT ist für jedes ihrer Flugzeuge ein Team von fünf Personen (A, B, C, D, E) fest verantwortlich. Wie die meisten Flugzeuge werden die Wassertaxis von zwei Piloten gesteuert. Die Passagiere und Flugzeuge werden am Boden von drei Personen betreut.

Von der Flugleitung werden die monatlichen Einsatzpläne zufällig festgelegt. Es wird für jeden Tag zufällig bestimmt, wer von den 5 Personen an welchem Tag als Pilot fliegt und wer als Bodenpersonal arbeitet. Dabei sind alle 5 Personen gleichberechtigt.

a) Geben Sie die möglichen Pilotenteams an. (10P)

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür an, dass am zweiten Tag zwei komplett andere Personen als Piloten im Einsatz sind als am ersten Tag. (10P)

Obwohl die Einteilung der Teammitglieder nach dem Zufallsprinzip erfolgt, gibt es immer wieder Diskussionen um die Arbeitsverteilung. Um die Situation zu beurteilen, lässt die Unternehmensleitung einige Punkte untersuchen.

c)
- Bestätigen Sie, dass die zufällige Einteilung eines bestimmten Teammitgliedes als Pilot durch die Flugleitung als Bernoulli-Experiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0{,}4$ beschrieben werden kann.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass ein bestimmtes Teammitglied innerhalb der nächsten 30 Tage genau 5-mal als Pilot eingesetzt wird.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein bestimmtes Teammitglied mehr als 25-mal innerhalb der nächsten 50 Tage als Pilot eingesetzt wird.
- Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes Teammitglied innerhalb der nächsten 11 Tage mindestens einmal als Pilot eingesetzt wird. (35P)

Ein älteres Teammitglied meint, dass er mit 28 Einsätzen in den letzten hundert Tagen viel zu selten als Pilot geflogen war. Er behauptet, dass bei der Verteilung der Flugeinsätze geschummelt wurde und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er zum Einsatz kam, geringer als $p = 0{,}4$ war. Nehmen Sie an, dass eine Binomialverteilung vorliegt.

d)
- Beurteilen Sie seine Behauptung mittels eines Hypothesentests zum Signifikanzniveau von 5 % ausgehend von der Nullhypothese $H_0 : p \geq 0{,}4$.
- Beurteilen Sie, welche Schlüsse er ziehen könnte, wenn er 35-mal innerhalb von 100 Tagen eingesetzt worden wäre. (20P)

Zur Qualitätssicherung hat die Geschäftsführung der WT eine Umfrage ihren Fluggästen durchführen lassen:

52% aller Fluggäste bleiben der Fluglinie treu, egal ob sie zufrieden oder unzufrieden sind.
Von den Zufriedenen wollen 8% die Fluglinie wechseln.
Bei den Unzufriedenen liegt der Anteil derjenigen, die der Fluglinie treu bleiben, bei 11 %.

Betrachten Sie die genannten relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten.

e) Ermitteln Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Fluggast

- der Fluglinie treu bleibt, wenn er zufrieden ist.
- zufrieden ist.
- der Fluglinie treu bleibt und zufrieden ist. (25P)