Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Schule und Berufsbildung

Schulchiffre ____________________

____________/____________
Kurs-Nr. / Schüler-Nr.

Schriftliche Abiturprüfung

Schuljahr 2012/ 2013

Kernfach Mathematik

auf erhöhtem Anforderungsniveau

an allgemeinbildenden und beruflichen gymnasialen Oberstufen

23. Januar 2013, 9.00 Uhr

Unterlagen für die Prüflinge

Allgemeine Arbeitshinweise

- Tragen Sie bitte rechts oben auf diesem Blatt die Schulchiffre ein, die Sie im Stempel auf Ihrem Arbeitspapier finden.
- Tragen Sie rechts oben auf diesem Blatt und auf Ihren Arbeitspapieren Ihre Kursnummer und Ihre Schülernummer ein, wie Sie sie auf Ihrem Namensschild finden.
- Verwenden Sie auf keinen Fall Ihren Namen und den Namen Ihrer Schule.
- Kennzeichnen Sie bitte Ihre Entwurfsblätter (Kladde) und Ihre Reinschrift.

Fachspezifische Arbeitshinweise

- Die Arbeitszeit beträgt **300 Minuten**.
- Eine Lese- und Auswahlzeit von **30 Minuten** ist der Arbeitszeit **vorgeschaltet**.
  In dieser Zeit darf noch nicht mit der Bearbeitung begonnen werden.
- Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner (nicht programmierbar und nicht grafikfähig), Formelsammlung „Das große Tafelwerk interaktiv", Cornelsen-Verlag, Rechtschreiblexikon, Operatorenliste (s. S. 2 und 3).

Aufgabenauswahl

- Sie erhalten **zwei** Aufgaben.
- Überprüfen Sie anhand der Seitenzahlen, ob Sie alle Unterlagen vollständig erhalten haben.
- Bearbeiten Sie **beide** Aufgaben.
- Vermerken Sie auf der Reinschrift, welche Aufgabe (z.B. I.2) Sie jeweils bearbeitet haben.

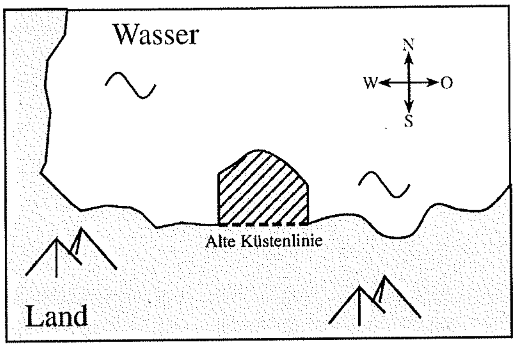
Operatoren	Definitionen	Beispiele
Angeben, nennen **I**	Ohne nähere Erläuterungen und Begründungen, ohne Lösungsweg aufzählen.	Geben Sie drei Punkte an, die in der Ebene liegen. Nennen Sie drei weitere Beispiele zu ...
Anwenden **I – II**	Einen bekannten Sachverhalt oder eine Handlungsanweisung, Formel, Vorschrift auf Elemente ihres jeweiligen Definitionsbereichs anwenden.	Wenden Sie das in Matrix L gegebene Populationsmodell auch auf den Bestand B an. Wenden Sie die Funktionsgleichung auch auf die gegebenen Zahlen an.
Begründen **II–III**	Einen angegebenen Sachverhalt auf Gesetzmäßigkeiten bzw. kausale Zusammenhänge zurückführen. Hierbei sind Regeln und mathematische Beziehungen zu nutzen.	Begründen Sie, dass die Funktion nicht mehr als drei Wendestellen aufweisen kann. Begründen Sie die Zurückweisung der Hypothese.
Berechnen **I**	Ergebnisse von einem Ansatz ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen.	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses.
Beschreiben **I–II**	Sachverhalt oder Verfahren in Textform unter Verwendung der Fachsprache in vollständigen Sätzen darstellen (hier sind auch Einschränkungen möglich: „Beschreiben Sie in Stichworten").	Beschreiben Sie den Bereich möglicher Ergebnisse. Beschreiben Sie, wie Sie dieses Problem lösen wollen, und führen Sie danach Ihre Lösung durch.
Bestätigen **I–II**	Eine Aussage oder einen Sachverhalt durch Anwendung einfacher Mittel (rechnerischer wie argumentativer) sichern. Der Anspruch liegt deswegen unterhalb von „Zeigen" oder „Beweisen".	Bestätigen Sie, dass die gegebene Funktion eine Stammfunktion zur Ursprungsfunktion ist. Bestätigen Sie die Parallelität der beiden Ebenen. Bestätigen Sie, dass in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit unter 0,1 liegt.
Bestimmen, ermitteln **II–III**	Einen Lösungsweg darstellen und das Ergebnis formulieren (die Wahl der Mittel kann unter Umständen eingeschränkt sein).	Ermitteln Sie grafisch den Schnittpunkt. Bestimmen Sie aus diesen Werten die Koordinaten der beiden Punkte.
Beurteilen **III**	Zu einem Sachverhalt ein selbstständiges Urteil unter Verwendung von Fachwissen und Fachmethoden formulieren.	Beurteilen Sie, welche der beiden vorgeschlagenen modellierenden Funktionen das ursprüngliche Problem besser darstellt.
Beweisen, widerlegen **III**	Beweisführung im mathematischen Sinne unter Verwendung von bekannten mathematischen Sätzen, logischer Schlüsse und Äquivalenzumformungen, ggf. unter Verwendung von Gegenbeispielen.	Beweisen Sie, dass die Gerade auf sich selbst abgebildet wird.
Entscheiden **II**	Bei Alternativen sich begründet und eindeutig auf eine Möglichkeit festlegen.	Entscheiden Sie, für welchen der beiden Beobachter der Aufschlagpunkt näher ist. Entscheiden Sie, welche der Ihnen bekannten Verteilungen auf die Problemstellung passt.

Operatoren	Definitionen	Beispiele
Ergänzen, vervollständigen **I**	Tabellen, Ausdrücke oder Aussagen nach bereits vorliegenden Kriterien, Formeln oder Mustern füllen.	Ergänzen Sie die Tabelle der Funktionswerte. Vervollständigen Sie die Zeichnung mit den in der Aufgabestellung gegebenen Punkten.
Erstellen **I**	Einen Sachverhalt in übersichtlicher, meist fachlich üblicher oder vorgegebener Form darstellen.	Erstellen Sie eine Wertetabelle für die Funktion.
Herleiten **II**	Die Entstehung oder Ableitung eines gegebenen oder beschriebenen Sachverhalts oder einer Gleichung aus anderen oder aus allgemeineren Sachverhalten darstellen.	Leiten Sie die gegebene Formel für die Stammfunktion her.
(Re-) Interpretieren **II–III**	Die Ergebnisse einer mathematischen Überlegung rückübersetzen auf das ursprüngliche Problem.	Interpretieren Sie: Was bedeutet Ihre Lösung für die ursprüngliche Frage?
Skizzieren **I–II**	Die wesentlichen Eigenschaften eines Objektes grafisch darstellen (auch Freihandskizze möglich).	Skizzieren Sie die gegenseitige Lage der drei Körper.
Untersuchen **II**	Sachverhalte nach bestimmten, fachlich üblichen bzw. sinnvollen Kriterien darstellen.	Untersuchen Sie die Funktion ... Untersuchen Sie, ob die Verbindungskurve ohne Knick in die Gerade einmündet.
Vergleichen **II–III**	Nach vorgegebenen oder selbst gewählten Gesichtspunkten Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Unterschiede ermitteln und darstellen.	Vergleichen Sie die beiden Vorschläge ... nach der von den Kurven eingeschlossenen Fläche.
Zeichnen, grafisch darstellen **I–II**	Eine hinreichend exakte grafische Darstellung anfertigen.	Zeichnen Sie den Graphen der Funktion. Stellen Sie die Punkte und Geraden im Koordinatensystem mit den gegebenen Achsen dar.
Zeigen, nachweisen **II–III**	Eine Aussage, einen Sachverhalt nach gültigen Schlussregeln, Berechnungen, Herleitungen oder logischen Begründungen bestätigen.	Zeigen Sie, dass das betrachtete Viereck ein Drachenviereck ist.
Zuordnen **I–II**	Ohne tiefer gehende Erläuterung eine Verbindung zwischen zwei Listen herstellen.	Ordnen Sie die Graphen den gegebenen Gleichungen zu.

Analysis 1

I.1 Halbinsel

Eine in einen See ragende künstlich angelegte Halbinsel soll neu gestaltet werden. Die Halbinsel ist in Ost-West-Richtung 30 m breit, auf der westlichen Seite ragt die Halbinsel in Nordrichtung 15 m (Punkt C), auf der östlichen Seite 10 m (Punkt D) in den See (siehe Abbildung in der Anlage).



Ein neuer Praktikant erstellt für den Verlauf der nördlichen Strandlinie die Funktionsgleichung

$$g(x) = -\frac{7}{90}x^2 + \frac{13}{6}x + 15 \text{ für } 0 \leq x \leq 30 .$$

Der Projektleiter zweifelt dieses Ergebnis an und fordert seinen Praktikanten auf, exemplarisch für drei Punkte mit x-Werten aus dem Intervall [5; 25] zu überprüfen, ob der Funktionsgraph von g mit der Strandlinie übereinstimmt. Eine Abweichung der Funktionswerte von den gemessenen Werten (siehe Abbildung in der Anlage) von maximal 1 m soll akzeptiert werden.

a) • Bestätigen Sie durch Rechnung, dass der Zweifel des Projektleiters berechtigt ist.

• Begründen Sie, warum die nördliche Strandlinie nicht auf dem Graphen einer quadratischen Funktion (Parabel) liegen kann (siehe Abbildung in der Anlage). (15P)

Die Planungsabteilung geht davon aus, dass die Strandlinie durch eine Funktion f dritten Grades modelliert werden kann. Zur Erstellung der Funktionsgleichung werden an den beiden Punkten $C(0|15)$ und $D(30|10)$ noch Winkelpeilungen vorgenommen: Am Punkt C hat die Strandlinie einen Winkel von 45° zur Ost-West-Achse, am Punkt D einen Winkel von 116,57° (siehe Abbildung in der Anlage).

b) • Bestätigen Sie, dass die Steigung der Strandlinie im Punkt C den Wert 1 und im Punkt D den Wert -2 aufweist.

• Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion f, deren Graph den Verlauf der Strandlinie modelliert.

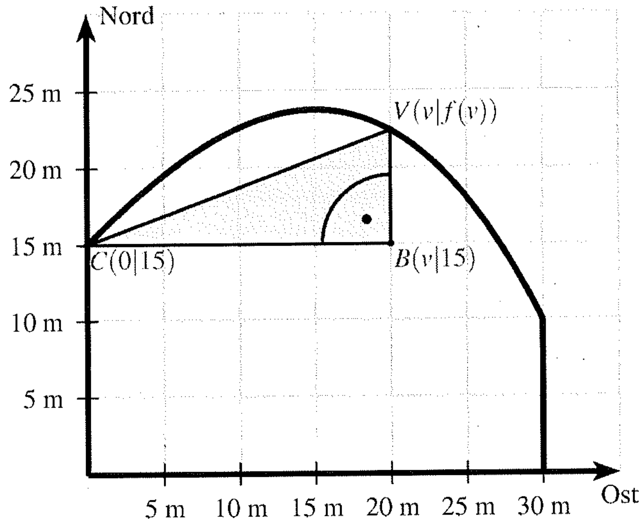
Kontrollergebnis: $f(x) = -\frac{1}{1350}x^3 - \frac{1}{60}x^2 + x + 15$ für $0 \leq x \leq 30$ (20P)

Im Folgenden wird die in Aufgabenteil b) genannte Funktion f genutzt.

c) Berechnen Sie, wie weit die Halbinsel in Nordrichtung in den See ragt. (20P)

Ein Plan sieht vor, dass auf dem Gebiet der Halbinsel eine Fläche in Form eines rechtwinkligen Dreiecks abgeteilt und bepflanzt werden soll, die im Punkt V auf die Strandlinie trifft. Die abgeteilte Dreiecksfläche soll maximal werden.

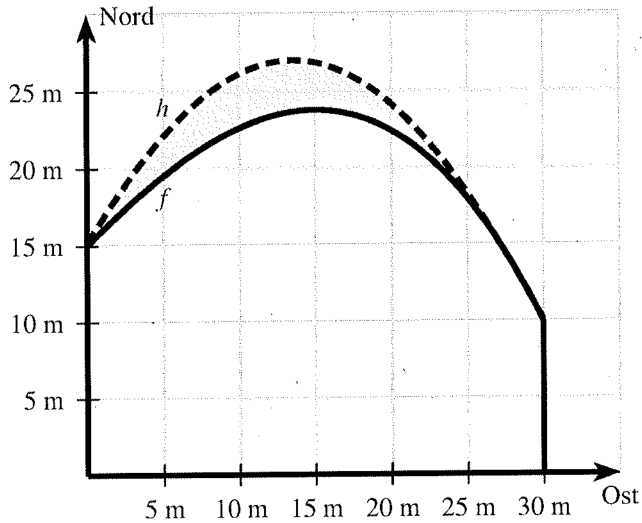
d) Bestimmen Sie den maximalen Inhalt der Dreiecksfläche und die Koordinaten des zugehörigen Punktes V. (20P)



Wegen lang anhaltender Trockenheit ist der Wasserstand des Sees abgesunken. Dadurch hat sich die weiterhin durch die Punkte C und D führende Strandlinie so verändert, dass ihr Verlauf im Intervall $0 \leq x \leq 30$ durch den Graphen einer Sinusfunktion h der Form

$$h(x) = a \cdot \sin(0{,}068 \cdot x + 0{,}65) + d$$

angenähert werden kann ($a > 0$).



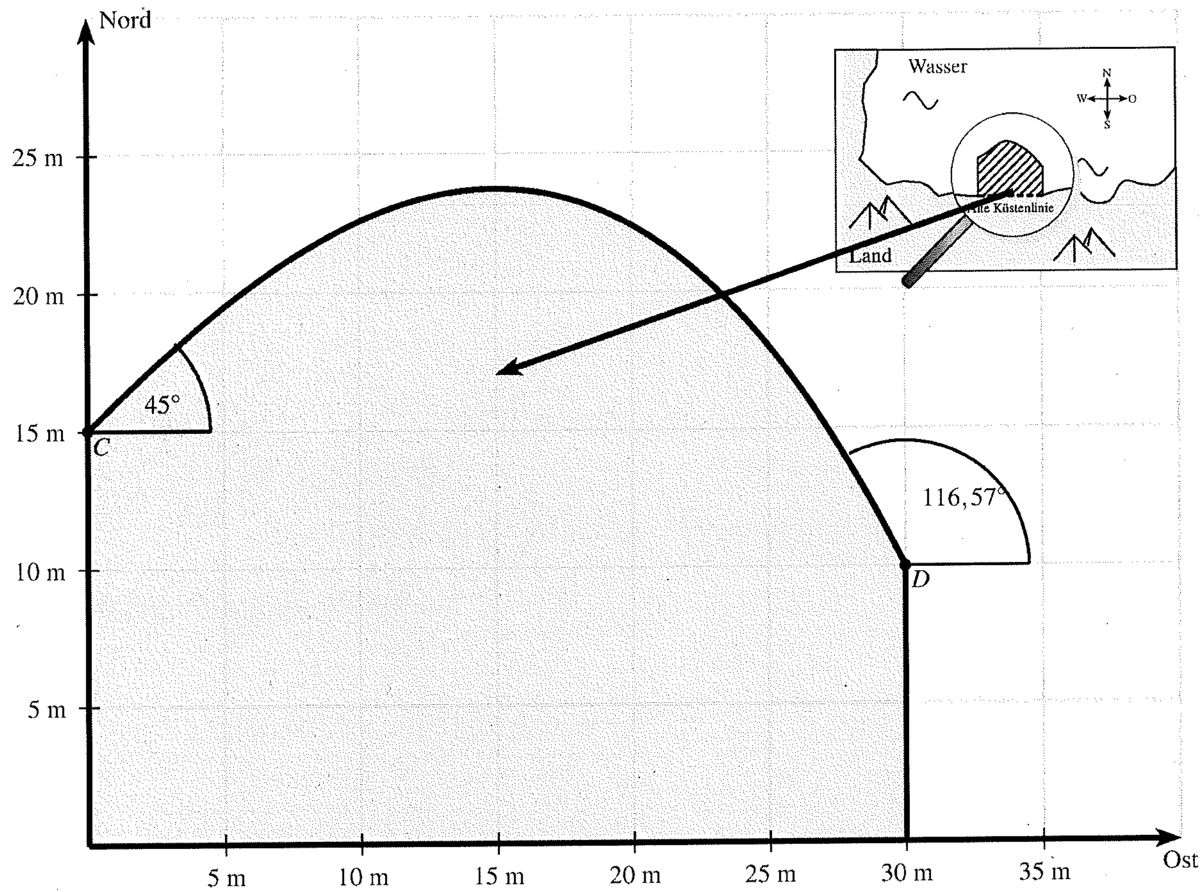
e) • Beschreiben Sie die Wirkung der Parameter a und d auf den Verlauf des Graphen der Funktion h.

• Bestimmen Sie die Parameter a und d und runden Sie Ihre Ergebnisse auf ganze Zahlen. (10P)

Rechnen Sie im Folgenden mit dem Kontrollergebnis $h(x) = 30 \cdot \sin(0{,}068x + 0{,}65) - 3$.

f) Bestimmen Sie mit Hilfe einer Stammfunktion von h den Inhalt der durch den Rückgang des Wassers im Norden der Halbinsel freigelegten Fläche im Intervall $0 \leq x \leq 30$. (15P)

Anlage zur Aufgabe „Halbinsel“



Ausschnitt aus der Karte

Analysis 2

I.2 Smartphones

Die Markteinführung eines neuen Smartphones vom Elektronikhersteller PEAR wird stets aufgeregt erwartet. Zur Modellierung der Entwicklung der täglichen Verkaufszahlen eines neu eingeführten Smartphones schlägt die Planungsabteilung von PEAR die Modellfunktion v vor mit

$$v(t) = 10000 \cdot t \cdot e^{-0,02t} \text{ mit } t \geq 0$$

wobei t die Zeit in Tagen seit Beginn der Markteinführung und $v(t)$ die am Tag t verkaufte Anzahl von Smartphones darstellt.

Die folgende Tabelle zeigt, wie viele Smartphones des Modells S2013 nach seiner Markteinführung pro Tag verkauft wurden.

t in Tagen	0	10	30	60
Verkaufszahlen in Stück	0	81 870	164 640	180 720

a) Bestätigen Sie, dass die Funktion v die täglichen Verkaufszahlen des Smartphones S2013 angenähert wiedergibt. (10P)

In der Anlage ist der Graph von v dargestellt.

b)
- Beschreiben Sie kurz den Verlauf des Graphen qualitativ.
- Interpretieren Sie darauf Bezug nehmend die Entwicklung der Verkaufszahlen im Anwendungskontext.
- Vergleichen Sie das Modell hinsichtlich des Langzeitverhaltens mit einer realistischen Entwicklung der Verkaufszahlen. (15P)

c)
- Bestätigen Sie, dass gilt: $v'(t) = 10000 \cdot e^{-0,02t} \cdot (1 - 0,02t)$.
- Berechnen Sie, an welchem Tag die meisten Smartphones S2013 verkauft werden, und berechnen Sie die entsprechende Verkaufszahl. (15P)

  Hinweis: Da aus der Abbildung deutlich wird, dass der einzige Extrempunkt ein Hochpunkt ist, reicht die Untersuchung der notwendigen Bedingung.

Eine Stammfunktion V von v hat die Gleichung $V(t) = 10000 \cdot \left(-50t \cdot e^{-0{,}02t} - 2500 \cdot e^{-0{,}02t}\right)$.

d) • Ermitteln Sie den Wert des Integrals $\int_0^{100} v(t)\, dt$.

• Interpretieren Sie das Integral im gegebenen Anwendungskontext. (15P)

Für die Firma PEAR ist es aus verschiedenen Gründen sinnvoll, den Produktzyklus (d. h. die Zeit vom ersten bis zum letzten verkauften Smartphone) zu begrenzen. Zur Vereinfachung der Prognose der insgesamt in den Verkauf gehenden Smartphones S2013 setzt die Planungsabteilung ab dem Wendepunkt der Verkaufszahlenentwicklung eine lineare Abnahme der täglichen Verkaufszahlen an, d. h. man ersetzt ab dem Wendepunkt der Funktion v den weiteren Verlauf des Funktionsgraphen durch die Wendetangente. Die Koordinaten des Wendepunkts sind gerundet $W(100 \mid 135335)$.

e) • Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente.

• Zeichnen Sie die Wendetangente in das Koordinatensystem in der Anlage.

• Ermitteln Sie den Zeitpunkt, ab dem nach diesem Modell keine Smartphones mehr verkauft werden.

• Bestimmen Sie die Anzahl der Smartphones, die nach diesem Modell ab dem Zeitpunkt $t_w = 100$ insgesamt noch verkauft werden. (20P)

Aus Erfahrung weiß die Planungsabteilung, dass sie die Verkaufszahlenfunktion v in regelmäßigen Abständen variieren muss, um sie an das sich verändernde Verbraucherverhalten anzupassen. Bereits für das Nachfolgemodell von dem hier betrachteten Smartphone S2013 ist damit zu rechnen, dass schon am 40. Tag das Verkaufszahlenmaximum von 200 000 Smartphones erreicht wird.
Die Planungsabteilung verwendet den allgemeinen Ansatz

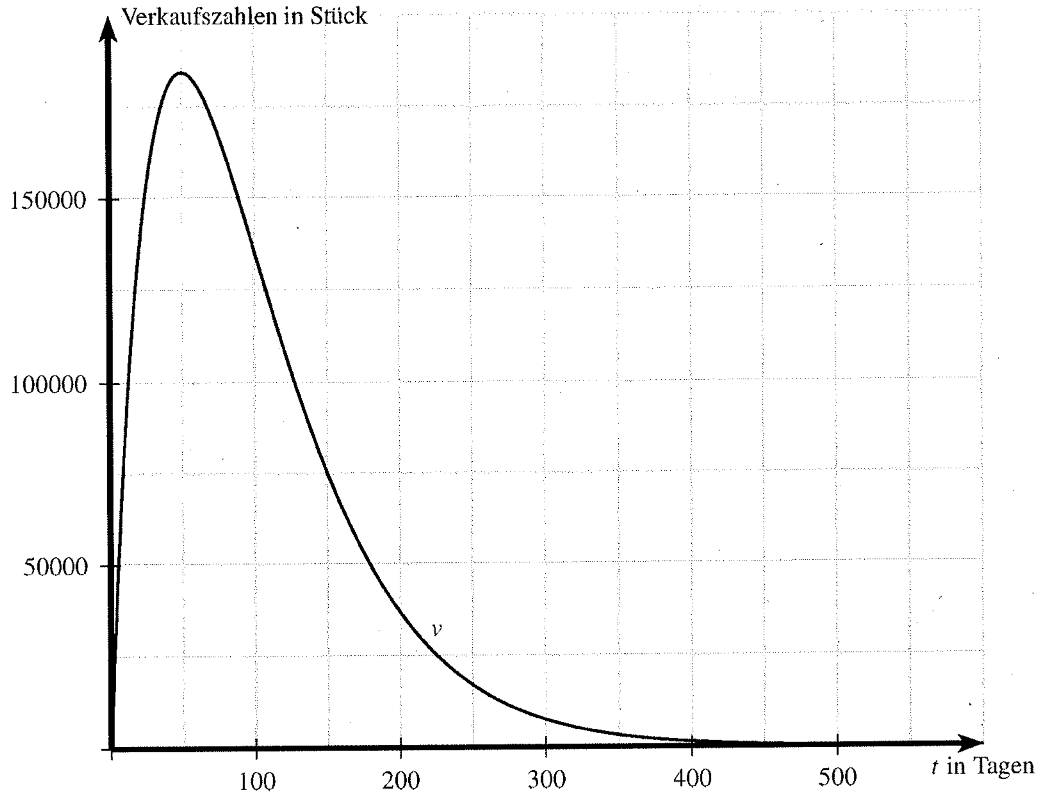
$$v_{a,b}(t) = 10000 \cdot t \cdot e^{\left(-\frac{1}{a} \cdot t + b\right)} \text{ mit } a > 0,\ b \geq 0.$$

f) Bestimmen Sie a und b so, dass die neue Verkaufszahlenfunktion die Prognose für den Zeitpunkt und den Wert des Verkaufszahlenmaximums für das Nachfolgemodell erfüllt. (15P)

g) • Ermitteln Sie, welchen Einfluss der Parameter a auf die Lage der Maximalstelle von $v_{a,b}$ hat.

• Ermitteln Sie, welchen Einfluss der Parameter b (für einen festen Wert des Parameters a) auf den Wert des Maximums von $v_{a,b}$ hat. (10P)

Anlage zur Aufgabe „Smartphones“



Lineare Algebra/Analytische Geometrie 1

II.1 Bauernhaus mit Photovoltaikanlage

Die Besitzer eines Bauernhauses möchten eine Photovoltaik-Anlage (PV-Anlage) auf ihrem Dach anbringen lassen. Sie lassen sich zunächst beraten, inwiefern ihr Haus für die Installation so einer Anlage geeignet ist.

In einem kartesischen Koordinatensystem lässt sich die Grundfläche des Bauernhauses durch folgende Eckpunkte beschreiben:

$G_1(0|0|0)$, $G_2(10|3|0)$, $G_3(5{,}5|18|0)$ und $G_4(-4{,}5|15|0)$.

Die Eckpunkte des Dachbodens haben die Koordinaten

$S_1(0|0|3)$, $S_2(10|3|3)$, $S_3(5{,}5|18|3)$ und $S_4(-4{,}5|15|3)$.

Die Punkte G_1, G_2, G_3, G_4, S_1, S_2, S_3 und S_4 bilden die Eckpunkte eines Quaders.

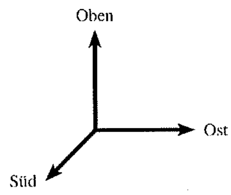
Die obere Kante des Daches hat die Endpunkte

$D_1(5|1{,}5|7)$ und $D_2(0{,}5|16{,}5|7)$.

Im Koordinatensystem in der Anlage sind alle Punkte und Verbindungslinien dargestellt.

Die Koordinatenachsen verlaufen in Südrichtung, in Ostrichtung und senkrecht nach oben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Süd} \\ \text{Ost} \\ \text{Oben} \end{pmatrix}.$$



Die Längeneinheit in allen drei Richtungen beträgt $1\,\text{m}$.

Die einzelnen Photovoltaik-Elemente sind rechteckig und haben eine Breite von 0,8 m und eine Länge von 1,6 m. Die Besitzer des Bauernhauses möchten 54 dieser Elemente auf ihrem Dach montieren lassen.

a) • Bestätigen Sie zunächst, dass die Dachfläche $D_1S_2S_3D_2$ die Form eines Rechtecks hat.

• Zeigen Sie, dass es die Abmessungen der Dachfläche $D_1S_2S_3D_2$ erlauben, 54 Photovoltaik-Elemente zu montieren. (20P)

b) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, welche die Dachfläche $D_1S_2S_3D_2$ enthält.

Kontrollergebnis: E: $80x_1 + 24x_2 + 109x_3 = 1199$ (10P)

Eine Ausrichtung der Hausseite, auf der sich PV-Anlage befindet, nach Süden verspricht den höchsten Ertrag. Eine Abweichung von bis zu 30° von der Südrichtung wirkt sich nur gering aus.

c) Bestätigen Sie, dass die Ausrichtung der Hausseitenfläche $G_2G_3S_3S_2$ nicht zu stark von der Südrichtung abweicht. (15P)

Der Ertrag einer PV-Anlage ist am größten, wenn das Sonnenlicht im rechten Winkel auf die Anlage trifft. Da sich die Richtung des einfallenden Sonnenlichtes im Laufe eines Tages ändert, ist es nicht möglich, dass die Sonnenstrahlen zu jeder Tageszeit senkrecht auf die PV-Anlage treffen. Es wird empfohlen, dass der Neigungswinkel der PV-Anlage gegenüber der x_1x_2-Ebene zwischen 20° und 60° liegt.

d) Untersuchen Sie, ob der Winkel zwischen der Ebene E und der x_1x_2-Ebene dieser Empfehlung entspricht. (10P)

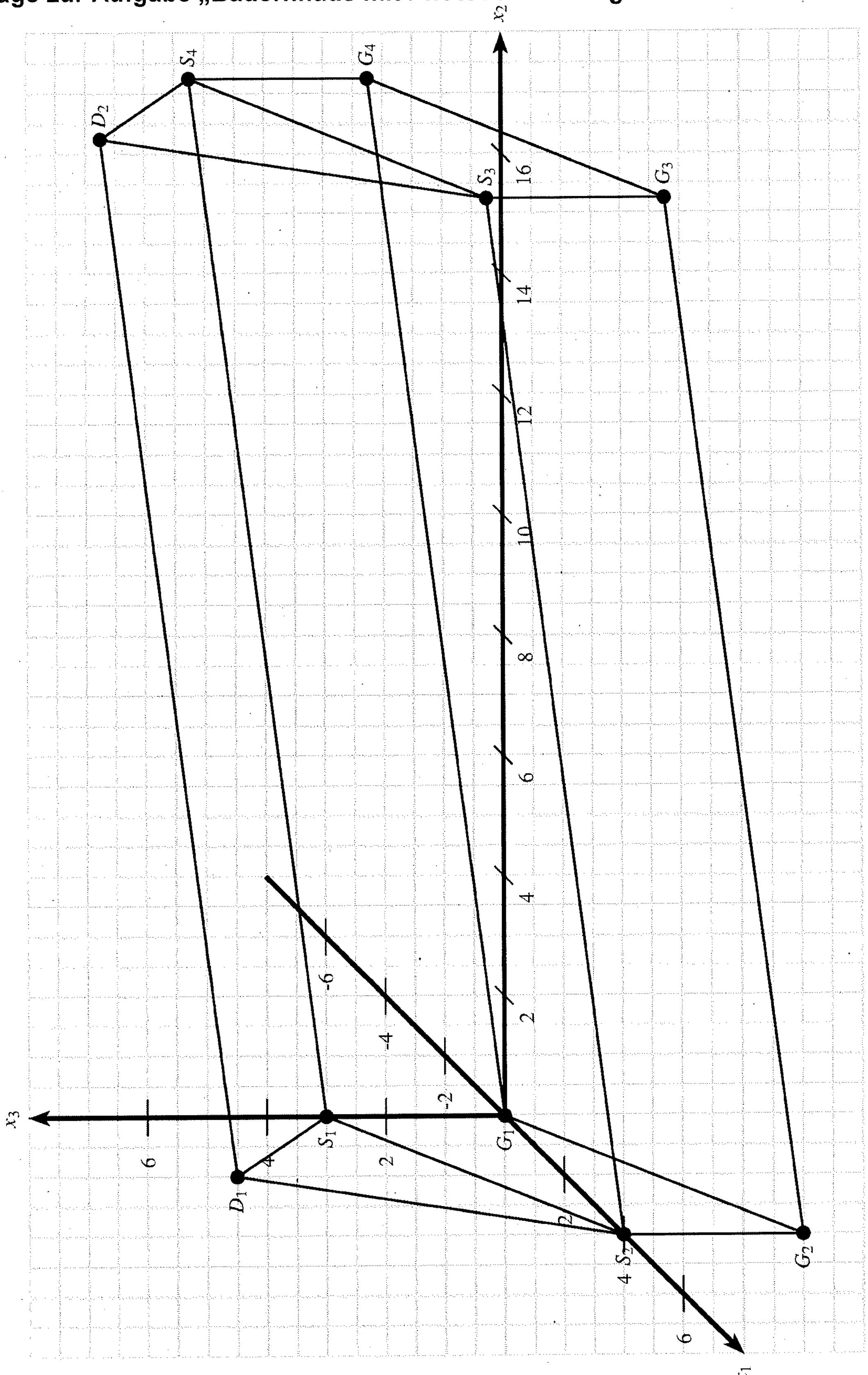
Schon durch kleinflächige Schatten auf der PV-Anlage wird der Ertrag beeinträchtigt. Auf dem Bauernhof steht ein 8 m hoher Turm mit der Turmspitze $T(15\,|\,16\,|\,8)$. An einem Wintertag haben die einfallenden Sonnenstrahlen in der Mittagszeit die Richtung $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -0{,}3 \end{pmatrix}$.

e)
- Zeigen Sie, dass die Turmspitze zur Mittagszeit einen Schatten auf die Dachfläche $D_1S_2S_3D_2$ wirft und bestimmen Sie die Koordinaten des Schattenpunktes SP_1.
  Runden Sie Ihre Angaben auf eine Nachkommastelle.
- Der Schatten, den der Turm zu der betrachteten Zeit auf das Dach wirft, ist dreieckig. Die weiteren Eckpunkte des Schattens haben (ebenfalls mit einer Genauigkeit von einer Nachkommastelle) die Koordinaten $SP_2(7{,}5\,|\,11{,}3\,|\,3{,}0)$ und $SP_3(6{,}0\,|\,16{,}3\,|\,3{,}0)$.
  Bestimmen Sie die Größe der beschatteten Dachfläche. (25P)

Für ein Fest wird ein kugelförmiger Gasballon so befestigt, dass er bewegungslos in der Luft schwebt. Die Ballonhülle ist durchsichtig, sodass Lichtstrahlen sie weitgehend ungehindert durchdringen können. Der Ballon hat den Mittelpunkt $M(20\,|\,30\,|\,40)$. Für Lichteffekte wird ein Laserstrahler im Punkt $L(20\,|\,30\,|\,20)$ installiert, der in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ strahlt.

f)
- Für den Radius gelte zunächst $R = 10$. Berechnen Sie die Koordinaten der beiden Punkte, in denen der Laserstrahl die Ballonhülle durchstößt.
- Betrachten Sie nun die Ballongröße als variabel und bestimmen Sie diejenige Radiuslänge, bei der der Laserstrahl den Ballon nicht mehr schneidet, sondern nur noch tangential berührt. (20P)

Anlage zur Aufgabe „Bauernhaus mit Photovoltaikanlage"



Lineare Algebra/Analytische Geometrie 2

II.2 Pinguine

Pinguine leben in Kolonien in den kalten Regionen der Südhalbkugel. In einer dieser Kolonien mit etwa 50 000 Tieren finden Forscher 150 tote Tiere, die offensichtlich an einer bisher unbekannten Krankheit gestorben sind. Erkrankte Pinguine kann man daran erkennen, dass sie kurz nach der Infektion ein auffälliges Verhalten zeigen. An dem Tag, an dem 150 tote Tiere gefunden wurden, haben die Forscher 800 kranke Tiere gesichtet.

Zur Beschreibung der Ausbreitung der Krankheit mit einem Modell teilen die Forscher die gesamte Population von 50 000 Pinguinen in drei Gruppen ein: *<u>G</u>esunde*, *<u>K</u>ranke* und *<u>T</u>ote*.

Im Vektor $\vec{v}_n = \begin{pmatrix} G_n \\ K_n \\ T_n \end{pmatrix}$ wird die Verteilung der Gesamtpopulation auf diese drei Gruppen am Tag n (nach Ausbruch der Krankheit) notiert. Die einzelnen Komponenten G_n, K_n und T_n geben jeweils die Anzahl der Pinguine in der betreffenden Gruppe an.

Im Rahmen des Modells gilt der Zusammenhang $\vec{v}_{n+1} = M \cdot \vec{v}_n$, wobei M die folgende Matrix ist:

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}99 & 0{,}15 & 0 \\ 0{,}01 & 0{,}55 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\vec{v}_0$ beschreibt die Population von 50 000 gesunden Pinguinen.

a)
- Erstellen Sie den zu der Übergangsmatrix M gehörenden Übergangsgraphen.
- Interpretieren Sie Matrixeinträge $m_{11} = 0{,}99$ und $m_{32} = 0{,}3$ vor dem Hintergrund des Sachkontextes.
- Begründen Sie im Sachkontext, warum die Summe der Spalteneinträge der Matrix M jeweils 1 beträgt. (15P)

b)
- Berechnen Sie mithilfe des Modells die Verteilung der Gesamtpopulation von 50 000 Pinguinen für die ersten beiden Tage nach Ausbruch der Krankheit.
- Beurteilen Sie, ob das von den Forschern gewählte Modell die Beobachtungen der im Text beschriebenen Pinguinfunde angemessen beschreibt. (15P)

Aufgrund der schlechten Wetterbedingungen war an einem Mittwoch die Zählung der Tiere nicht möglich. Am darauf folgenden Tag werden insgesamt 1052 kranke und 1574 tote Pinguine gezählt.

c) Bestimmen Sie mithilfe des Modells die Anzahl der gesunden, kranken und toten Tiere für den Mittwoch, an dem die Zählung nicht möglich war. (10P)

d) • Begründen Sie, dass im Rahmen dieses Modells langfristig alle Pinguine sterben werden.

• Beurteilen Sie, inwiefern es sich bei der Abnahme der Anzahl der lebenden Pinguine um eine exponentielle Abnahme handelt.

• Geben Sie die Grenzmatrix M^n für $n \to \infty$ an. Begründen Sie Ihre Angabe. (15P)

e) • Bestätigen Sie rechnerisch, dass $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50\,000 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von M ist.

• Interpretieren Sie die Bedeutung des Eigenvektors $\vec{a}$ im Sachzusammenhang.

• Zeigen Sie, dass zum Eigenwert 1 ausschließlich Eigenvektoren gehören, die Vielfache von $\vec{a}$ sind.

• Begründen Sie, dass ein Eigenvektor, dessen zugehöriger Eigenwert ungleich 1 ist, im Sachzusammenhang nicht sinnvoll ist. (20P)

Einige der genesenen Pinguine werden genauer untersucht. Es stellt sich heraus, dass diese gegen die Krankheit immun sind, also nicht wieder erkranken.
In einem erweiterten Modell geht man daher davon aus, dass <u>alle</u> Pinguine nach einer überstandenen Infektion gegen die Krankheit immun sind. Die Gruppe der *immunen* Pinguine wird in das Modell aufgenommen, sodass nun der Vektor

$$\vec{w}_n = \begin{pmatrix} G_n \\ K_n \\ T_n \\ I_n \end{pmatrix}$$

die Verteilung der Gesamtpopulation auf die vier Gruppen am Tag n beschreibt. In der Gruppe der *Gesunden* befinden sich also nur diejenigen gesunden Tiere, die zwar gesund, aber nicht immun sind.

f) • Geben Sie für das erweiterte Modell eine Übergangsmatrix L an und begründen Sie Ihre Angaben.

• Bestimmen Sie den Anteil der Tiere an der Gesamtpopulation, der nach diesem Modell die Epidemie überlebt. (15P)

Für die Matrix L gilt: $L^{180} \approx \begin{pmatrix} 0,164 & 0 & 0 & 0 \\ 0,004 & 0 & 0 & 0 \\ 0,555 & 0,667 & 1 & 0 \\ 0,277 & 0,333 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

g) Bestätigen Sie, dass man mithilfe der Matrix $P = \begin{pmatrix} 0,027 & 0 & 0 & 0 \\ 0,001 & 0 & 0 & 0 \\ 0,649 & 0,667 & 1 & 0 \\ 0,324 & 0,333 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ den Bestand der Pinguinpopulation nach etwa einem Jahr näherungsweise berechnen kann. (10P)

Stochastik 1

III.1 Ventilschäden

Im Jahr 1955 verfügte eine Kunstflugstaffel in Amarillo, Texas, über fünf Nachbauten der berühmten Fokker Dr1-III. Dieses Flugzeug hat einen 7-Zylinder-Motor, und da jeder Zylinder ein Auslassventil hat, sind bei einer Maschine 7 Auslassventile eingebaut.

Die Ersatzventile liefert eine örtliche Firma in Kisten mit je 50 Ventilen; die Erfahrung zeigt, dass 95% der gelieferten Ventile nach dem Einbau funktionsfähig sind. (Die Anzahl der funktionsfähigen Ventile sei binomialverteilt.)

Wenn ein Ventil defekt ist, lässt sich der Motor zwar anwerfen, aber er läuft dann mit geringerer Leistung. Bei zwei defekten Ventilen läuft der Motor gar nicht und lässt sich nicht einmal anwerfen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass in einer Kiste
   - ...alle Ventile funktionsfähig sind.
   - ... genau drei Ventile defekt sind.
   - ...weniger als 45 Ventile funktionsfähig arbeiten. (15P)

Der Mechaniker tauscht routinemäßig bei allen fünf Maschinen alle Auslassventile aus.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich genau ein Motor danach nicht anwerfen lässt, die anderen aber mit voller Leistung laufen. (15P)

Auslassventile sind hoch belastet. Ihre mittlere Lebensdauer beträgt erfahrungsgemäß 80 Stunden. Die Lebensdauer ist normalverteilt mit einer Standardabweichung von 18 Stunden.
Deswegen werden alle Ventile in regelmäßigen Abständen ersetzt, und zwar jeweils nach 40 Flugstunden. Gehen Sie im Weiteren davon aus, dass die neu eingebauten Ventile funktionsfähig sind.

c) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Pilot während eines Fluges noch vor Ablauf des zulässigen Wartungsintervalls von 40 Stunden erlebt, dass sein Motor weniger leistet, aber noch läuft. (15P)

Die Piloten sind mit ihren Maschinen jeweils eine Stunde in der Luft, bevor sie wieder landen (und gegebenenfalls die Hilfe des Mechanikers erhalten). Berechtigterweise möchte kein Pilot erleben, dass bei seiner Maschine während seiner Flugstunde unterwegs der Motor mit geringerer Leistung läuft. Man einigt sich darauf, dass die Piloten bereit sind, ein solches Risiko einzugehen, wenn es in keiner Betriebsstunde 1% überschreitet.

d) • Begründen Sie, dass die gefährlichste Flugstunde die letzte Stunde vor der Wartung ist.

• Bestimmen Sie die Ausfallswahrscheinlichkeit für ein Ventil während dieser Stunde. (15P)

Die Mechaniker werden neuerdings auch von einer zweiten Firma mit Ventilen beliefert; die Ventile dieser Firma sind erfahrungsgemäß zu 97% funktionsfähig. Die Firma liefert die Ventile in Kisten zu 70 Stück. Die Inhalte von je einer Kiste der ersten und der zweiten Firma werden von den Mechanikern zusammengetan; aus dieser „Mischkiste" wird das nächste benötigte Ventil zufällig herausgenommen und beim Einbau verwendet. Nach dem Einbau wird es als defekt erkannt.

e) • Untersuchen Sie mithilfe einer Vierfeldertafel für die Merkmalspaare *funktionsfähiges Ventil - defektes Ventil* und *Ventil von Firma 1 - Ventil von Firma 2*, ob die beiden Merkmalspaare stochastisch unabhängig sind.

• Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das defekte Ventil aus der Lieferung der Firma 2 kommt. (20P)

Einem Piloten passiert es in der 40. Flugstunde seiner Maschine, dass zwei Ventile ausfallen und deswegen der Motor nicht mehr läuft. Mit seiner ganzen Erfahrung gelingt es ihm, die Fokker unbeschadet zu landen.
Die Luft-Aufsichtsbehörde FAA fordert, dass es in einem Zeitraum von einem Jahr bei hier 125 Wartungsintervallen, die ja jeweils vierzig Flugstunden umfassen, höchstens einen solchen Unfall geben darf, anderenfalls entzieht sie die Starterlaubnis für die Staffel.

f) • Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit für diesen Motorausfall bei $p \approx 0{,}0075\,\%$ liegt.

• Ermitteln Sie mithilfe der Poisson-Verteilung die Wahrscheinlichkeit für den Entzug der Starterlaubnis bei 125 Wartungsintervallen. (20P)

Stochastik 2

III.2 Wassertaxis

Viele Urlaubsinseln im Indischen Ozean sind nur mit Wasserflugzeugen, den sogenannten „Wassertaxis" zu erreichen. Die Fluggesellschaft WT möchte derzeit die Service- und Arbeitsqualität verbessern.

Bei der Fluggesellschaft WT ist für jedes ihrer Flugzeuge ein Team von fünf Personen (A, B, C, D, E) fest verantwortlich. Wie die meisten Flugzeuge werden die Wassertaxis von zwei Piloten gesteuert. Die Passagiere und Flugzeuge werden am Boden von drei Personen betreut.

Von der Flugleitung werden die monatlichen Einsatzpläne zufällig festgelegt. Es wird für jeden Tag zufällig bestimmt, wer von den 5 Personen an welchem Tag als Pilot fliegt und wer als Bodenpersonal arbeitet. Dabei sind alle 5 Personen gleichberechtigt.

a) Geben Sie die möglichen Pilotenteams an. (5P)

Der Graph in der Anlage zeigt die Übergänge der Anzahl der bereits als Piloten eingesetzten Personen von einem Tag zum anderen. Dabei geben die Zahlen in den Kreisen an, wie viele Mitglieder des Teams bereits einen Flugeinsatz hatten. ③ bedeutet beispielsweise, dass drei der fünf Teammitglieder bereits geflogen sind.

b) Bestätigen Sie die im Graphen in der Anlage eingerahmten Übergangswahrscheinlichkeiten. (20P)

Es dauert mindestens drei Tage, bis jede der 5 Personen mindestens einmal als Pilot eingesetzt wurde.

c)
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass schon nach 3 Tagen alle Personen mindestens einmal als Pilot eingeteilt waren.
- Bestimmen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der Tage, bis alle Personen mindestens einmal als Pilot eingeteilt waren.

  Hinweis: Nehmen Sie zuerst an, dass bereits 4 Personen als Pilot eingeteilt waren und bestimmen Sie für diese Bedingung den Erwartungswert für die Anzahl der noch verbleibenden Tage, bis ***alle*** *Personen mindestens einmal als Pilot eingeteilt waren. Verwenden Sie das Ergebnis, indem Sie anschließend entsprechende Rechnungen wiederholen und statt 4 Personen 3 Personen und danach auch 2 und 0 Personen betrachten.* (30P)

Obwohl die Einteilung der Teammitglieder nach dem Zufallsprinzip erfolgt, gibt es immer wieder Diskussionen um die Arbeitsverteilung. Um die Situation zu beurteilen, lässt die Unternehmensleitung einige Punkte untersuchen. Durch die täglich wiederholte, zufällige Personaleinsatzplanung kann der Einsatz eines Teammitgliedes als Pilot durch die Flugleitung als Bernoulli-Experiment mit der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0{,}4$ beschrieben werden.

d)
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein bestimmtes Teammitglied innerhalb der nächsten 30 Tage genau 5-mal als Pilot eingesetzt wird.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein bestimmtes Teammitglied mehr als 25-mal innerhalb der nächsten 50 Tage als Pilot eingesetzt wird. (10P)

Ein älteres Teammitglied meint, dass er mit 28 Einsätzen in den letzten hundert Tagen viel zu selten als Pilot geflogen war. Er behauptet, dass bei der Verteilung der Flugeinsätze geschummelt wurde und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er zum Einsatz kam, geringer als $p = 0{,}4$ war.

e)
- Untersuchen Sie seine Behauptung mittels eines Hypothesentests zum Signifikanzniveau von 5 % ausgehend von der Nullhypothese $H_0 : p \geq 0{,}4$.
- Beurteilen Sie, welche Schlüsse er ziehen könnte, wenn er 35-mal innerhalb von 100 Tagen eingesetzt worden wäre. (20P)

Zur Qualitätssicherung hat die Geschäftsführung der WT eine Umfrage unter 2300 Fluggästen durchführen lassen:

92 % der Fluggäste bleiben der Fluglinie treu, egal ob sie zufrieden sind oder nicht.
67 % der Fluggäste sind zufrieden und bleiben WT treu.
2 % der Fluggäste sind unzufrieden und werden die Fluggesellschaft wechseln.

f) Ermitteln Sie die Anzahl aller zufriedenen Passagiere und bestimmen Sie die Anzahl der Passagiere, die die Fluggesellschaft wechseln und nicht zufrieden sind. (15P)

Anlage zur Aufgabe „Wassertaxis“