Name: ____________________

Abiturprüfung 2018

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

a) Gegeben sind die Geraden $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ und

$h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$.

(1) *Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von g und h an und zeigen Sie, dass g und h senkrecht zueinander verlaufen.*

(2) Die Ebene *E* enthält die Geraden *g* und *h*.
Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

(2 + 4 Punkte)

Name: ____________________

b) Gegeben ist die in $I\!R$ definierte Funktion f mit $f(x) = e^x + \frac{1}{2}x$.

(1) *Begründen Sie, dass der Graph von f und der Graph der in $I\!R$ definierten Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$ keinen gemeinsamen Punkt besitzen.*

(2) Für eine positive reelle Zahl c wird die in $I\!R$ definierte Funktion g_c mit $g_c(x) = \frac{1}{2}x - c$ betrachtet.

Die *Abbildung 1* zeigt die Graphen von f und g_c.

Die beiden Graphen schließen mit der y-Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = 1$ eine Fläche mit dem Inhalt 3 ein.

Berechnen Sie c.

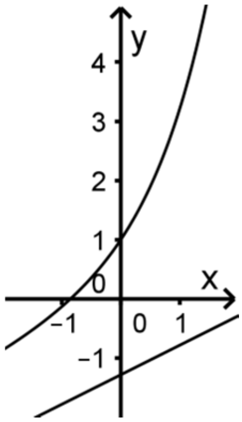


Abbildung 1

(2 + 4 Punkte)

c) Gegeben ist die quadratische Funktion f mit $f(x) = x^2 - 3$. Der Graph der Funktion f ist in der *Abbildung 2* dargestellt.

(1) *Bestimmen Sie alle Werte von $k \in I\!R$, für die $\int_0^k f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ gilt.*

(2) *Geben Sie jeweils an, für welche $k \geq 0$ die Beziehungen $\int_0^k f(x)\,\mathrm{d}x < 0$ bzw. $\int_0^k f(x)\,\mathrm{d}x > 0$ gelten.*

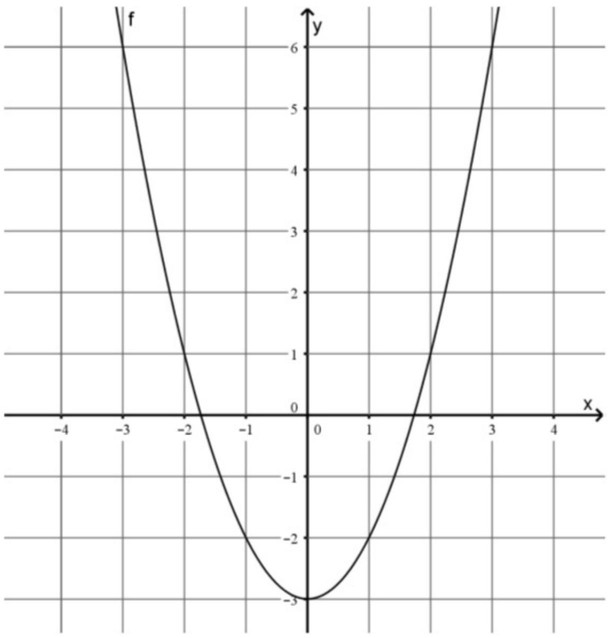


Abbildung 2

(4 + 2 Punkte)

Name: ______________________

d) (1) Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}8$. Eine der folgenden *Abbildungen 3* bis *5* stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dar.

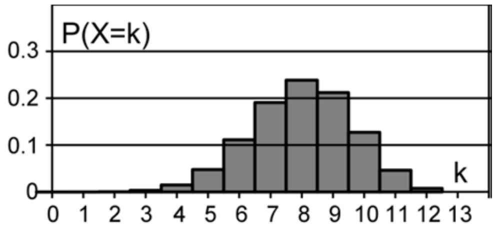


Abbildung 3

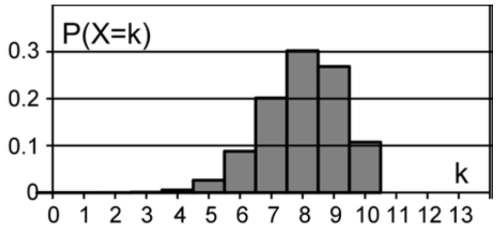


Abbildung 4

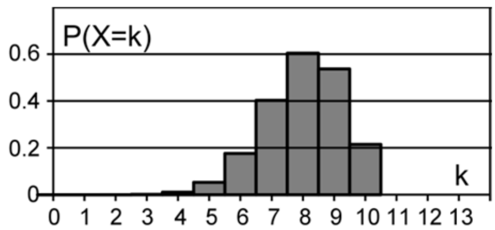


Abbildung 5

Geben Sie die beiden Abbildungen an, die die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X nicht darstellen. Begründen Sie Ihre Angabe.

(2) Betrachtet wird die binomialverteilte Zufallsgröße Y mit den Parametern n und p.
Es gilt:

- Der Erwartungswert von Y ist 8.
- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y ist symmetrisch.

Ermitteln Sie den Wert von n.

(4 + 2 Punkte)

Hinweis:

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2018

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

1. Aufgabenart

Hilfsmittelfrei zu bearbeitende Aufgabe

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2018

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Analysis
   - Fortführung der Differentialrechnung
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

   Analytische Geometrie und Lineare Algebra
   - Lineare Gleichungssysteme
   - Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
   - Lagebeziehungen
   - Skalarprodukt

   Stochastik
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung und Normalverteilung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Hinweis

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) $(3\,|\,-3\,|\,3)$ ist der Schnittpunkt von g und h.

Aus $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ folgt die Orthogonalität von g und h.

(2) Der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ steht senkrecht zu den Richtungsvektoren von g und h. Damit hat die Gleichung von E die Form $x_2 = c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Es gilt $(3\,|\,-3\,|\,3) \in E \Leftrightarrow c = -3$. Damit lautet eine Gleichung von E in Koordinatenform $x_2 = -3$.

Teilaufgabe b)

(1) $f(x) = g(x) \;\Leftrightarrow\; e^x + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x - 1 \;\Leftrightarrow\; e^x = -1$.

Diese Gleichung besitzt keine Lösung in $\mathbb{R}$ und somit besitzen die beiden Graphen keinen gemeinsamen Punkt.

(2) $\int_0^1 \left(f(x) - g_c(x)\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(e^x + c\right)\mathrm{d}x = \left[e^x + cx\right]_0^1 = e + c - 1$

$e + c - 1 = 3 \quad\Leftrightarrow\quad c = 4 - e$.

Teilaufgabe c)

(1) $F(x)=\frac{1}{3}x^3-3x$ ist eine Stammfunktion der Funktion *f*.

$$\int_0^k f(x)\mathrm{d}x = F(k)-F(0)=0\,.$$

$$\frac{1}{3}\cdot k^3-3\cdot k-0=0$$

$$\Leftrightarrow k\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot k^2-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow k=0\vee\frac{1}{3}\cdot k^2-3=0$$

$$\Leftrightarrow k=0\vee k^2=9$$

$$\Leftrightarrow k=-3\vee k=0\vee k=3\,.$$

(2) $\int_0^k f(x)\mathrm{d}x<0$ gilt für $0<k<3$ und $\int_0^k f(x)\mathrm{d}x>0$ gilt für $3<k$.

Teilaufgabe d)

(1) *Abbildung 3* stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X nicht dar, da laut Vorgabe $n = 10$ gilt und in der Abbildung $P(X>10)>0$.

Abbildung 5 stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X nicht dar, da die Summe der dort dargestellten Einzelwahrscheinlichkeiten größer als 1 ist.

(2) Da die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y symmetrisch ist, gilt $p=0{,}5$.

Mit einem Erwartungswert von 8 ergibt sich $n\cdot 0{,}5=8\Leftrightarrow n=16$.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:__________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt die Koordinaten des Schnittpunkts von *g* und *h* an.	1			
2	(1) zeigt, dass *g* und *h* senkrecht zueinander verlaufen.	1			
3	(2) bestimmt einen Normalenvektor von *E*.	2			
4	(2) bestimmt eine Gleichung von *E* in Koordinatenform.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**6**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass die beiden Graphen keinen gemeinsamen Punkt besitzen.	2			
2	(2) berechnet *c*.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**6**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) bestimmt alle Werte von $k \in \mathbb{R}$, für die $\int_0^k f(x)\mathrm{d}x = 0$ gilt.	4			
2	(2) gibt jeweils an, für welche $k \geq 0, k \in \mathbb{R}$ $\int_0^k f(x)\mathrm{d}x < 0$ bzw. $\int_0^k f(x)\mathrm{d}x > 0$ gilt.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) ……………………………………………………………… ………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**6**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) gibt begründet an, warum Abbildung 3 die Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht angibt.	2			
2	(1) gibt begründet an, warum Abbildung 5 die Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht angibt.	2			
3	(2) ermittelt den gesuchten Wert.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) ……………………………………………………………… ………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**6**			

	Summe insgesamt	**24**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2018

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

In einem Entwicklungslabor wird der Ladevorgang bei Akkus an verschiedenen Ladegeräten getestet. Der zeitliche Verlauf des Ladezustands für verschiedene Ladegeräte wird durch Funktionen Q_k mit $Q_k(t) = 1000\left(1 - e^{-k \cdot t}\right)$, $k \in \mathbb{R}, k > 0$, modelliert und ist für $k = 0{,}2$; $k = 0{,}4$; $k = 0{,}6$ und $k = 0{,}95$ in *Abbildung 1* dargestellt.

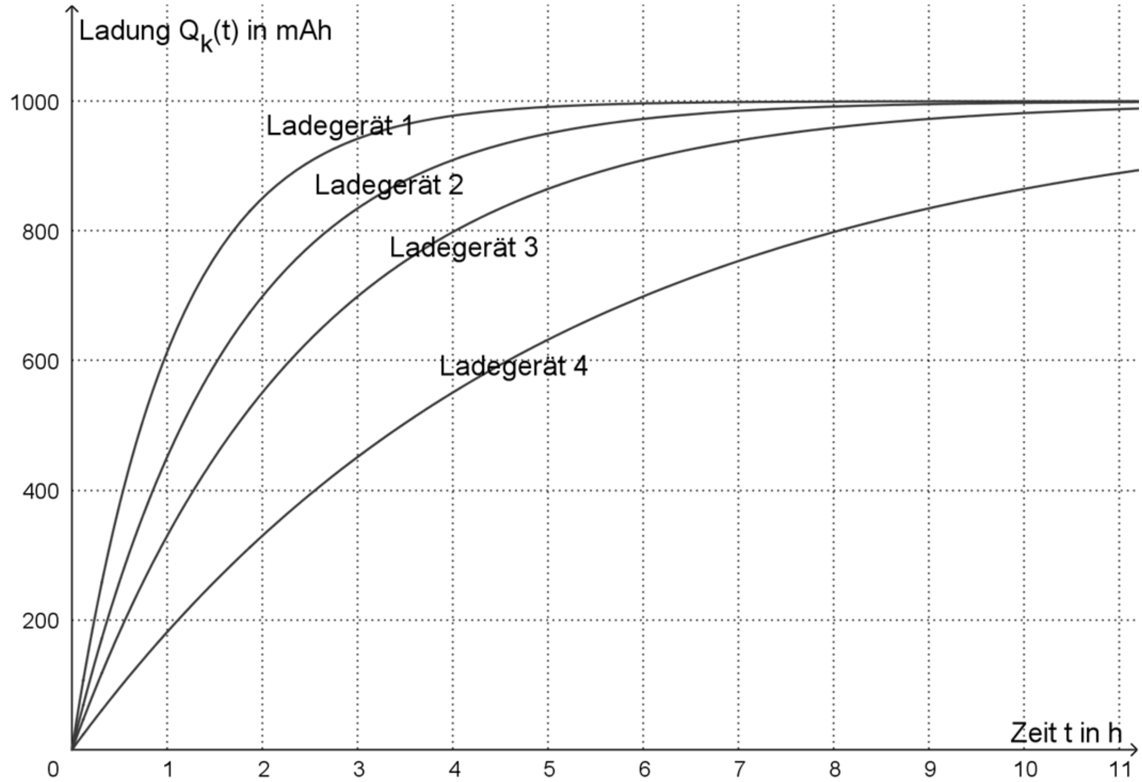


Abbildung 1

Dabei gibt t die seit Beginn des Ladevorgangs vergangene Zeit in Stunden und $Q_k(t)$ die Ladung des Akkus zum Zeitpunkt t (Einheit: mAh) an.

Name: ____________________

Der Ladevorgang beginnt im Folgenden stets zum Zeitpunkt $t = 0$ und es gilt $Q_k(0) = 0$, d. h., in der Modellierung wird vereinfachend davon ausgegangen, dass die Ladung des Akkus zu Beginn immer den Wert 0 hat.

a) (1) Der Verlauf der Graphen legt die Vermutung nahe, dass sich die Funktionen Q_k für große Werte von t unabhängig von k dem Wert 1000 annähern und ihn nicht überschreiten.
Entscheiden Sie begründet, ob diese Vermutung wahr ist.

Die maximale Ladung, die ein Akku unter idealen Bedingungen aufnehmen kann, wird Kapazität genannt. Im Folgenden haben die betrachteten Akkus jeweils eine Kapazität von 1000 mAh. Eine Balkenanzeige am Ladegerät signalisiert während des Ladevorgangs den aktuellen Ladezustand des Akkus mit folgenden Symbolen:

kein Balken: Die Ladung beträgt weniger als 33 % der Kapazität.

ein Balken: Die Ladung beträgt mindestens 33 % und weniger als 66 % der Kapazität.

zwei Balken: Die Ladung beträgt mindestens 66 % und weniger als 99 % der Kapazität.

drei Balken: Die Ladung beträgt mindestens 99 % der Kapazität.

(2) *Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k, wie lange es ab dem Start des Ladevorgangs dauert, bis die Balkenanzeige den ersten Balken anzeigt. Begründen Sie anschaulich, ggf. mit Abbildung 1, dass die Zeitdauer bis zum Erscheinen eines weiteren Balkens von Balken zu Balken beim selben Ladevorgang immer größer wird.*

(3) *Beschreiben Sie die Bedeutung größer werdender Werte für den Parameter k im Sachzusammenhang und geben Sie begründet an, welcher Graph in Abbildung 1 zum Parameter $k = 0{,}4$ gehört.*

(3 + 5 + 3 Punkte)

Name: ____________________

Die momentane Änderungsrate der Ladung Q_k wird Ladestrom I_k genannt (Einheit: mA). Der Ladestrom wird zur Kontrolle des Ladungsvorgangs benutzt. In diesem Falle lautet also die Funktionsgleichung für den Ladestrom: $I_k(t) = Q_k'(t) = 1000 \cdot k \cdot e^{-k \cdot t}$.

b) (1) Um den Akku zu schonen, soll der Ladestrom während des Ladevorgangs nicht zu groß werden.
Begründen Sie, dass der Ladestrom in einem beliebigen Zeitintervall jeweils am Intervallrand maximal ist, und geben Sie begründet an, an welchem der beiden Intervallränder das Maximum liegt.

(2) Für den vorliegenden Akku soll der Ladestrom während des Ladevorgangs den Wert 500 zu keinem Zeitpunkt überschreiten.
Bestimmen Sie, für welche Werte von k die Vorgabe eingehalten wird. Geben Sie an, welche der Ladegeräte aus a) die Vorgabe ***nicht*** *erfüllen.*

(3) Der Ladevorgang wird abgeschaltet, wenn der Ladestrom I_k den Wert $10k$ unterschreitet.
Bestimmen Sie die von k abhängige Dauer eines solchen Ladevorgangs. Zeigen Sie, dass die Abschaltbedingung bewirkt, dass der Ladevorgang unabhängig von k immer in dem Moment abgeschaltet wird, wenn die Anzeige zum letzten Balken wechselt.

(3 + 3 + 5 Punkte)

c) Ein defektes Ladegerät steuert den Ladestrom fälschlicherweise nach der Funktionsvorschrift $I_d(t) = (100t + 50)e^{-0,4t+0,1}$.
Nach 12 Stunden wird der Ladevorgang an diesem Ladegerät abgebrochen.

(1) *Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion I_d genau ein lokales Maximum besitzt.*

(2) *Begründen Sie, dass der Ladestrom I_d während des Ladevorgangs den Wert* 150 *nie überschreitet.*

(7 + 2 Punkte)

Name: ____________________

d) Ein Powerladegerät soll den Akku schnell aufladen. Dazu wird der Akku zunächst mit einem konstanten Ladestrom von 500 mA geladen, bis der Akku eine Ladung von 900 mAh erreicht hat. Ab diesem Zeitpunkt t_1 wird der Ladestrom gemäß der Funktion I mit

$I(t) = 500e^{-5\cdot(t-t_1)}$ verringert bis zum Zeitpunkt t_2, wenn der Wert $I(t_2) = 10$

erreicht wird und der Ladevorgang abgeschaltet wird. Ein solcher Ladevorgang ist in *Abbildung 2* dargestellt.

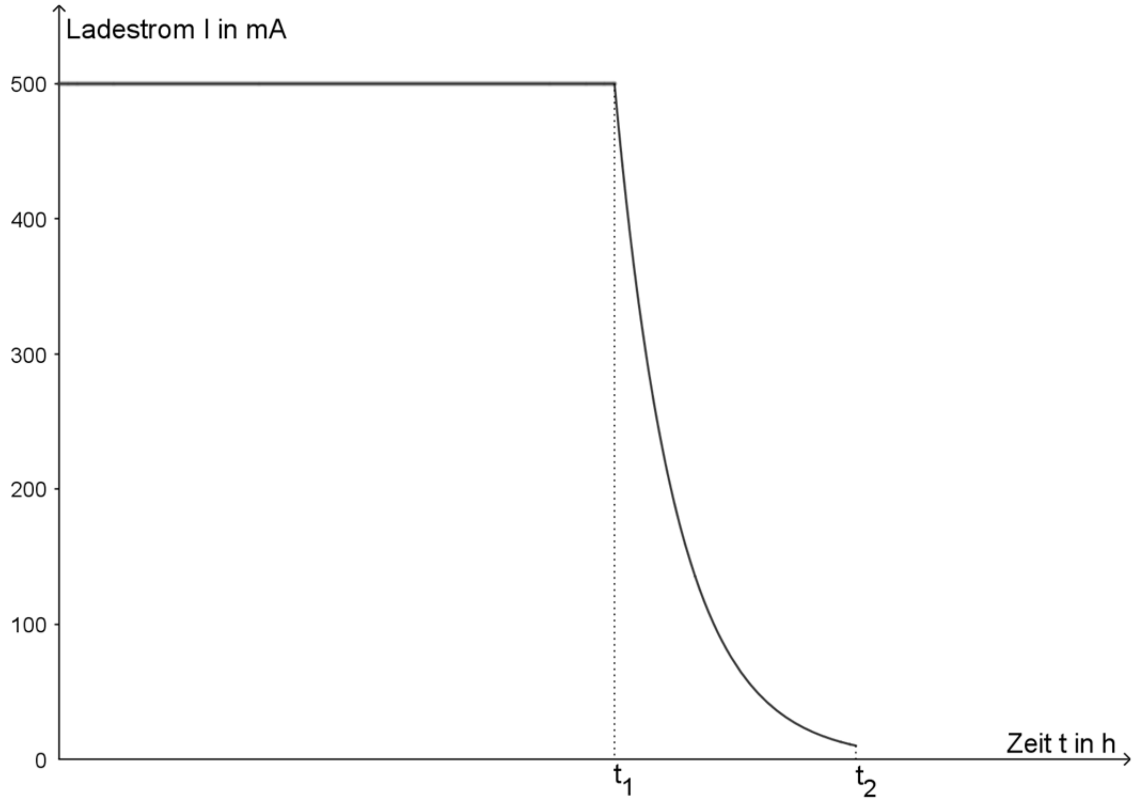


Abbildung 2

(1) *Bestimmen Sie die Dauer des gesamten Ladevorgangs.*
[Kontrollergebnis: ca. 2,58 [Stunden]]

(2) *Bestimmen Sie die Gesamtladung Q des Akkus am Ende des Ladevorgangs.*

(4 + 5 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2018

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2018

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
     – Behandlung von ganzrationalen Funktionen, natürlichen Exponential- und Logarithmusfunktionen und deren Verknüpfung bzw. Verkettung mit Untersuchung von Eigenschaften in Abhängigkeit von Parametern
     – notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Für alle *k*, *t* gilt: $e^{-kt} > 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-kt} < 1 \Leftrightarrow 1000(1 - e^{-kt}) < 1000$;

für große *t* gilt: $e^{-kt} \to 0$, somit $1000(1 - e^{-kt}) \to 1000$.

Die Vermutung ist also wahr.

(2) Der erste Balken erscheint, wenn $Q_k(t_1) = 330 \Leftrightarrow 1 - e^{-kt_1} = 0,33 \Leftrightarrow t_1 = -\frac{\ln(0,67)}{k}$.

Der Abbildung kann man entnehmen, dass mit wachsendem *t* die Steigung der Funktion immer kleiner wird. Somit wird der Zeitraum für den immer gleichen Zuwachs von 330 immer größer. Es dauert immer länger, bis der jeweils nächste Balken erscheint.

(3) Der Parameter *k* bildet die Geschwindigkeit des Ladevorgangs ab: je größer *k*, desto schneller wird der Akku geladen. Somit müssen die Parameter in umgekehrter Reihenfolge den Ladegeräten zugeordnet werden. Zum Parameter 0,4 gehört also das Ladegerät 3.

Teilaufgabe b)

(1) $I_k{}'(t) = -1000k^2 \cdot e^{-kt}$.

Da $k > 0$, ist $I_k{}' < 0$ für alle t. I_k ist somit streng monoton fallend.

Das Maximum wird also immer am linken Rand eines Intervalls angenommen.

(2) Wegen (1) ergibt sich als Bedingung:

$I_k(0) = 1000k \cdot e^{-k\cdot 0} \leq 500 \Leftrightarrow 1000k \leq 500 \Leftrightarrow k \leq 0{,}5$.

Die Ladegeräte 1 und 2 erfüllen die Bedingung also nicht.

(3) Die Abschaltbedingung führt zu der Gleichung

$1000k \cdot e^{-kt_3} = 10k \Leftrightarrow e^{-kt_3} = 0{,}01 \Leftrightarrow t_3 = -\frac{\ln(0{,}01)}{k}$.

$Q_k(t_3) = 1000\left(1 - e^{k\cdot\frac{(\ln 0{,}01)}{k}}\right) = 1000(1 - 0{,}01) = 990$.

Dies entspricht 99 % der Kapazität.

Die Anzeige wechselt gerade auf drei Balken.

Teilaufgabe c)

(1) Die Ableitung berechnet sich nach der Produkt- und Kettenregel zu

$I_d{}'(t) = 100 \cdot e^{-0{,}4t+0{,}1} - 0{,}4 \cdot (100t + 50) \cdot e^{-0{,}4t+0{,}1} = (-40t + 80) \cdot e^{-0{,}4t+0{,}1}$.

Sie hat genau eine Nullstelle: $I_d{}'(t_4) = 0 \Leftrightarrow (-40t_4 + 80) = 0 \Leftrightarrow t_4 = 2$.

Dort liegt wegen des linearen Faktors vor der Exponentialfunktion ein Vorzeichenwechsel bei $I_d{}'$ von + nach – vor.

Also hat die Funktion genau ein lokales Maximum.

(2) Da keine weiteren lokalen Extrema vorhanden sind, ist das lokale Maximum $I_d(2) \approx 124$ auch das globale Maximum.

Der Ladestrom von 150 mA wird also nie überschritten.

Teilaufgabe d)

(1) Da der Ladungsstrom I die momentane Änderungsrate der Ladung angibt, bestimmt sich die Ladung als Integral des Ladungsstroms.

Da die Ladung bis zum Zeitpunkt t_1 bei konstantem Ladestrom von 500 [mA] den Wert 900 [mAh] erreicht hat, ergibt sich $t_1 = \frac{900}{500} = 1,8$ [h].

t_2 ergibt sich durch die Abschaltbedingung: $I(t_2) = 10$, also $500e^{-5(t_2-1,8)} = 10$.

$\Rightarrow t_2 \approx 2,58$ [h]. Der Ladevorgang dauert also 2,58 Stunden [2h 35 min].

(2) Der Wert der Ladung bis zum Zeitpunkt t_1 = 1,8 beträgt 900 [mAh]. Die restliche Ladung berechnet sich aus $\int_{1,8}^{2,58} 500e^{-5(t-1,8)}\mathrm{d}t = -100e^{-5(t-1,8)}\Big|_{1,8}^{2,58} \approx 98,0$ [mAh].

Somit erreicht die Gesamtladung am Ende einen Wert von 998 [mAh].

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) entscheidet, dass die Vermutung wahr ist, und begründet, dass sich der Funktionswert dem Wert 1000 annähert und den Wert 1000 nicht überschreitet.	3			
2	(2) bestimmt die Zeit in Abhängigkeit von k.	3			
3	(2) begründet anschaulich, dass die Zeitdauer für das Erscheinen der weiteren Balken immer größer wird.	2			
4	(3) beschreibt die Bedeutung größer werdender Werte für den Parameter k im Sachzusammenhang und gibt begründet an, dass der Graph zu Ladegerät 3 zum Parameterwert 0,4 passt.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**11**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass der Ladestrom in einem beliebigen Zeitintervall am linken Intervallrand maximal ist.	3			
2	(2) bestimmt, dass für $k \leq 0{,}5$ die Vorgabe eingehalten wird, und gibt an, dass die Ladegeräte 1 und 2 die Vorgabe nicht erfüllen.	3			
3	(3) bestimmt die von k abhängige Dauer und zeigt, dass zum Zeitpunkt des Abschaltens in der Balkenanzeige unabhängig von k gerade der dritte Balken erscheint.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**11**			

---
[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) ermittelt einen Term für die Ableitung $I_d{'}$.	3			
2	(1) zeigt rechnerisch, dass die Funktion I_d genau ein lokales Maximum besitzt.	4			
3	(2) begründet, dass der Ladestrom den Wert 150 mA nie überschreitet.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**9**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) bestimmt die Dauer des gesamten Ladevorgangs.	4			
2	(2) bestimmt die Gesamtladung am Ende des Ladevorgangs.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**9**			

	Summe insgesamt	**40**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2018

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x) = -\frac{1}{10^6}x^4 + \frac{4}{9375}x^3 - \frac{13}{250}x^2 + \frac{8}{5}x + 140$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$.

a) (1) *Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f und bestimmen Sie die Art der Extrempunkte.*
[Zur Kontrolle: Die Extremstellen sind 20, 100 und 200.]

(2) *Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass die Funktion f genau zwei Wendestellen besitzt.*

(3) *Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes des Graphen von f mit der y-Achse an. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass f genau zwei Nullstellen hat.*

(7 + 3 + 4 Punkte)

b) Für $50 < x < 130$ gibt es ein Paar von *x*-Werten, die sich um 60 unterscheiden und für die die zugehörigen Funktionswerte übereinstimmen.
Bestimmen Sie dieses Paar von x-Werten und geben Sie den zugehörigen Funktionswert an.

(5 Punkte)

c) Der Graph von *f* schließt mit den Koordinatenachsen und der Geraden mit der Gleichung $x = 240$ ein Flächenstück ein.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden, die parallel zur y-Achse verläuft und dieses Flächenstück halbiert.

(5 Punkte)

Name: ______________________

d) Für $u \approx 217$ gilt die nachfolgende Aussage:

$$\frac{1}{2} \cdot u \cdot f(u) + \int_u^{240} f(x)\,dx = \frac{2}{3} \cdot \int_0^{240} f(x)\,dx.$$

Erläutern Sie diese Aussage unter Verwendung einer Skizze.

Hinweis: Nutzen Sie für die Skizze die nachfolgende *Abbildung*.

(5 Punkte)

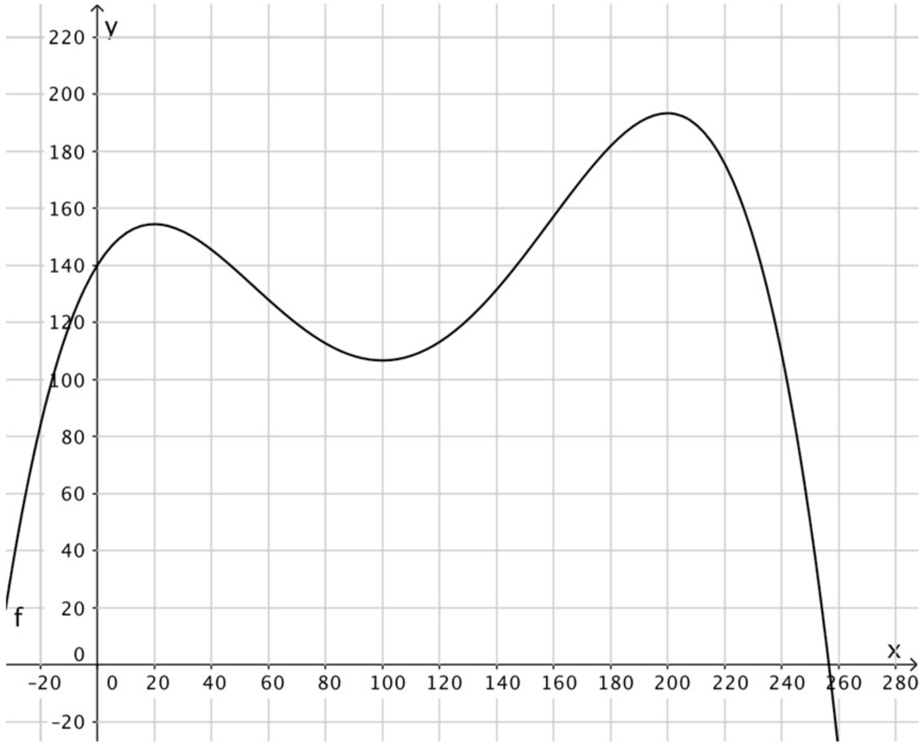


Abbildung: Graph von *f*

Name: ____________________

Diabetespatientinnen und -patienten haben die Möglichkeit, mit Hilfe sogenannter CGM-Geräte ihren Glukosewert, d. h. die Konzentration der Glukose im Blut, ständig zu messen.

Die gegebene Funktion *f* beschreibt für $0 \leq x \leq 240$ modellhaft die Entwicklung des Glukosewerts eines Patienten. Dabei ist *x* die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Minuten und *f(x)* der Glukosewert in Milligramm pro Deziliter $\left(\frac{\text{mg}}{\text{dl}}\right)$.

e) Hohe Glukosewerte über längere Zeit gelten als Risikofaktor.

Ermitteln Sie für den betrachteten Zeitraum, wie lange Glukosewerte über $170\ \frac{mg}{dl}$ *gemessen wurden.*

(5 Punkte)

f) *Bestimmen Sie für den betrachteten Zeitraum denjenigen Zeitpunkt, zu dem der Glukosewert am stärksten ansteigt.*

(6 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2018

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Innermathematische Argumentationsaufgabe / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2018

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
     - Behandlung von ganzrationalen Funktionen, natürlichen Exponential- und Logarithmusfunktionen und deren Verknüpfung bzw. Verkettung mit Untersuchung von Eigenschaften in Abhängigkeit von Parametern
     - notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) $f'(x) = -\frac{1}{250000} \cdot x^3 + \frac{4}{3125} \cdot x^2 - \frac{13}{125} \cdot x + \frac{8}{5}$.

$f''(x) = -\frac{3}{250000} x^2 + \frac{8}{3125} x - \frac{13}{125}$.

Notwendige Bedingung: $f'(x_E) = 0$:

$f'(x_E) = 0 \iff x_E = 20 \lor x_E = 100 \lor x_E = 200$.

Hinreichende Bedingung: $f'(x_E) = 0 \land f''(x_E) \neq 0$ (oder VZW-Kriterium).

$f''(20) = -\frac{36}{625} < 0, \quad f''(100) = \frac{4}{125} > 0, \quad f''(200) = -\frac{9}{125} < 0$.

Hochpunkte:

$H_1\left(20 \,\middle|\, \frac{11584}{75}\right)$ bzw. $H_1(20\,|\,154{,}5)$; $\quad H_2\left(200 \,\middle|\, \frac{580}{3}\right)$ bzw. $H_2(200\,|\,193{,}3)$

Tiefpunkt:

$T\left(100 \,\middle|\, \frac{320}{3}\right)$ bzw. $T(100\,|\,106{,}7)$

(2) Der Graph von f besitzt einen Tiefpunkt (Linkskurve) bei $x = 100$ und jeweils einen Hochpunkt (Rechtskurve) bei $x = 20$ und bei $x = 200$. Somit muss der Graph zwischen Hoch- und Tiefpunkt jeweils mindestens eine Wendestelle, also in der Summe mindestens zwei Wendestellen besitzen.
Da f eine ganzrationale Funktion 4. Grades ist, deren zweite Ableitung vom Grad 2 ist, kann der Graph insgesamt maximal zwei Wendestellen besitzen.
Somit besitzt f genau zwei Wendestellen.

(3) Schnittpunkt mit der y-Achse: $S(0\,|\,140)$.
Es gilt $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$. Damit verläuft der Graph für sehr große und sehr kleine Werte von x unterhalb der x-Achse. Zudem ist die y-Koordinate des zwischen den Hochpunkten gelegenen Tiefpunktes des Graphen von f positiv und somit verläuft der Graph zwischen den Extrempunkten oberhalb der x-Achse. Damit hat f genau zwei Nullstellen.

Teilaufgabe b)

Für $50 < x < 130$ liefert der Taschenrechner für $f(x) = f(x + 60)$ als Lösung $x \approx 69{,}2$.

Die gesuchten x-Werte sind $x_1 \approx 69{,}2$ und $x_2 \approx 129{,}2$ mit $f(x_1) = f(x_2) \approx 120{,}2$.

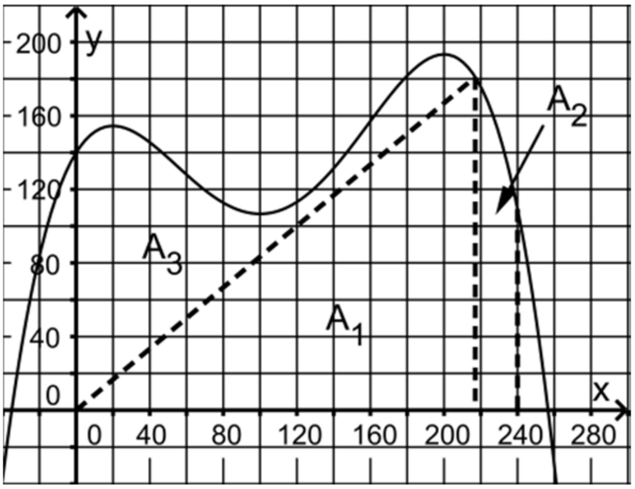
Teilaufgabe c)

Da der Graph von f im Intervall $[0\,;\,240]$ oberhalb der x-Achse verläuft, gilt der Ansatz:

$\int_0^k f(x)\,\mathrm{d}x = \int_k^{240} f(x)\,\mathrm{d}x$. Der Taschenrechner liefert im Intervall $[0\,;\,240]$: $k \approx 135{,}5$.

D. h., die Gerade wird näherungsweise durch die Gleichung $x = 135{,}5$ beschrieben.

Teilaufgabe d)



Die Flächen A_1 und A_2 ergeben zusammen $\frac{2}{3}$ der Gesamtfläche.

Die Gesamtfläche besteht aus $A_1 + A_2 + A_3$.

Teilaufgabe e)

Gesucht sind die x mit $0 \le x \le 240$, für die gilt $f(x) > 170$.

Unter Verwendung des Taschenrechners ergibt sich mit Hilfe des Graphen von f und der Geraden mit der Gleichung $y = 170$, dass Glukosewerte über $170\,\frac{\text{mg}}{\text{dl}}$ zwischen etwa 170 Minuten und 223 Minuten nach Beobachtungsbeginn und damit etwa 53 Minuten lang gemessen wurden.

Teilaufgabe f)

Gesucht ist der x-Wert im Intervall [0; 240], für den f' maximal wird.

Mögliche Zeitpunkte liegen an den lokalen Maximalstellen von f' und an den Rändern des betrachteten Zeitraums vor. Unter Verwendung des Taschenrechners ergibt sich das lokale Maximum von f' im Intervall bei $x \approx 158{,}7$ mit $f'(158{,}7) \approx 1{,}3$.

Randüberprüfung: $f'(0) = \frac{8}{5} = 1{,}6$; $f'(240) = -\frac{616}{125}$.

Der Glukosewert steigt zu Beobachtungsbeginn ($x = 0$) am stärksten an.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:___________________________________ Kursbezeichnung:__________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f und bestimmt die Art der Extrempunkte.	7			
2	(2) begründet, dass die Funktion f genau zwei Wendestellen besitzt.	3			
3	(3) gibt die Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse an.	1			
4	(3) begründet ohne weitere Rechnung, dass f genau zwei Nullstellen hat.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (14) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**14**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
	bestimmt das Paar von x-Werten und gibt den zugehörigen Funktionswert an.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**5**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK[3]**	**ZK**	**DK**
	bestimmt eine Gleichung der Geraden, die das Flächenstück halbiert.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**5**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
	erläutert die Aussage unter Verwendung einer Skizze.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**5**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
	ermittelt für den betrachteten Zeitraum, wie lange Glukosewerte über 170 mg/dl gemessen wurden.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**5**			

[3] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe f)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt das lokale Maximum des Graphen von $f\,'$.	3			
2	untersucht die Ränder des betrachteten Zeitraums und bestimmt denjenigen Zeitpunkt, zu dem der Glukosewert am stärksten ansteigt.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe f)	**6**			

	Summe insgesamt	**40**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2018

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Das Gebäude eines Museums kann modellhaft durch den abgebildeten Körper $ABCDEFG$ dargestellt werden.

Die obere Etage entspricht dabei der Pyramide $DEFG$, die untere Etage dem Körper $ABCDEF$, der Teil der Pyramide $DEFS$ ist. Die Ebene, in der das Dreieck ABC liegt, beschreibt die ebene horizontale Oberfläche des Untergrunds. Das Dreieck DEF liegt parallel zu dieser Ebene.

In einem kartesischen Koordinatensystem gilt für die Lage einiger der genannten Punkte:
$A(-5\,|\,5\,|\,0)$, $B(-5\,|\,25\,|\,0)$, $D(0\,|\,0\,|\,15)$, $E(0\,|\,30\,|\,15)$, $F(-25\,|\,5\,|\,15)$ und $G(-10\,|\,10\,|\,35)$.

Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Realität.

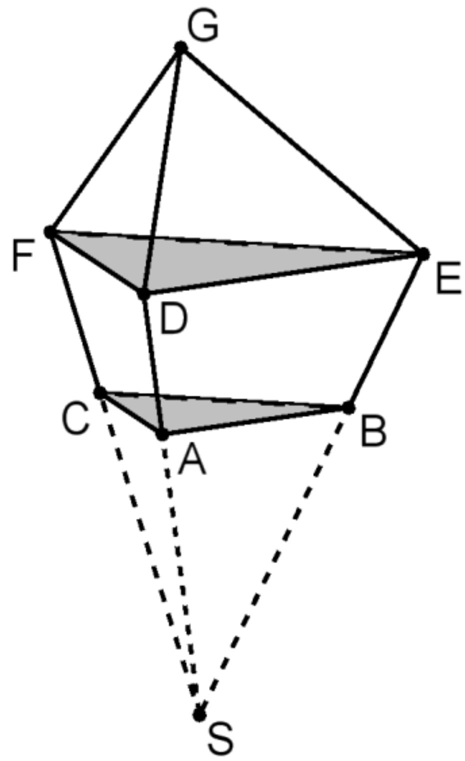


Abbildung 1

Name: ____________________

a) Die folgenden Rechnungen zeigen ein mögliches Vorgehen zur Ermittlung der Koordinaten von *S*:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -15 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r = s = 3,$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 15 \\ -30 \end{pmatrix}, \text{ d. h. } S(-15\,|\,15\,|\,-30).$$

Erläutern Sie das dargestellte Vorgehen.

(5 Punkte)

b) (1) *Weisen Sie nach, dass die Bodenfläche der oberen Etage nicht rechtwinklig ist.*

(2) *Bestimmen Sie für das Dreieck DEF die Größe des Innenwinkels* ε *bei E sowie die Länge der Höhe h zur Seite* $\overline{EF}$.
[Zur Kontrolle: $\varepsilon = 45°$; $h = 15\sqrt{2}$]

(3) *Begründen Sie, dass der Abstand des Punktes G zur Ebene durch DEF direkt aus den Koordinaten der entsprechenden Punkte ermittelt werden kann, und geben Sie diesen Abstand an.*

(4) Für die obere Etage wird eine Anlage zur Entfeuchtung der Luft installiert, die für 100 m³ Rauminhalt eine elektrische Leistung von 0,8 Kilowatt benötigt.
Weisen Sie nach, dass für den Betrieb der Anlage eine Leistung von 25 *Kilowatt ausreichend ist.*

(4 + 5 + 2 + 4 Punkte)

Name: ____________________

c) (1) *Weisen Sie nach, dass die Gerade AG und die Ebene, in der das Dreieck DEF liegt, sich im Punkt* $R(-\frac{50}{7}\,|\,\frac{50}{7}\,|\,15)$ *schneiden.*

(2) *Bestimmen Sie eine Koordinatenform der Ebene U, in der das Dreieck EFG liegt.*
[Zur Kontrolle: $U: \quad 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -75.$]

(3) An einer Metallstange, die durch die Strecke $\overline{RG}$ dargestellt wird, ist im Punkt Q ein Scheinwerfer befestigt, dessen Größe vernachlässigt werden soll. Der Scheinwerfer beleuchtet aus einer Entfernung von 5 m diejenige Wand, die im Modell durch das Dreieck *EFG* dargestellt wird.

Zeigen Sie, dass der Punkt Q mit den Koordinaten $Q\left(-\frac{95}{11}\,|\,\frac{95}{11}\,|\,\frac{280}{11}\right)$ *auf der Strecke* $\overline{RG}$ *liegt und einen Abstand von* 5 m *zur Ebene U hat.*

(4 + 3 + 8 Punkte)

Der seitliche Eingangsbereich des Museums wird durch das Viereck *ABED* modelliert.
Der Architekt plant für diesen Bereich eine dreieckige Überdachung. Eine mögliche Überdachung wird durch das Dreieck *DHE* modelliert. Diese Überdachung ist in der *Abbildung 2*, allerdings von einer anderen Seitenansicht als in der *Abbildung 1*, dargestellt.

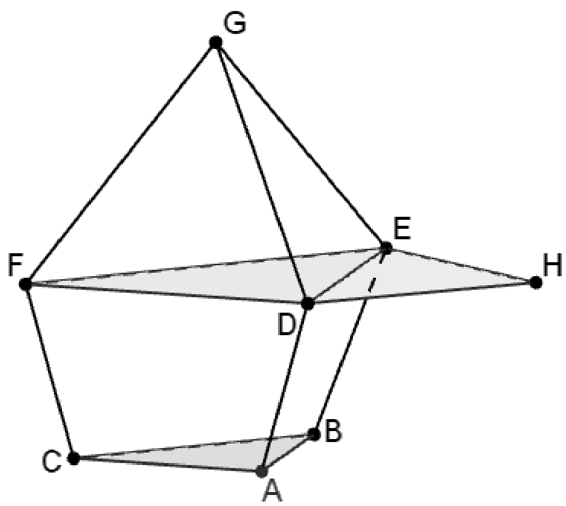


Abbildung 2

Name: ____________________

d) Die Planung sieht vor, dass das Dreieck *DEH* in der gleichen Ebene wie das Dreieck *DEF* liegt. Des Weiteren sollen die Koordinaten des Punktes *H* so gewählt werden, dass das Dreieck *DEH* ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $\overline{DE}$ ist.

Beurteilen Sie die Aussage, dass der Ortsvektor des Punktes H folgende Gleichung erfüllt:

$$\overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix}; \quad a \in \mathbb{R}.$$

(5 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2018

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Vektorielle Geometrie

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2018

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Analytische Geometrie und Lineare Algebra
   - Lineare Gleichungssysteme
   - Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
   - Lagebeziehungen und Abstände
   - Skalarprodukt

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

S wird bestimmt als Schnittpunkt der Geraden *AD* mit der Geraden *BE*.

Eine Gleichung der Geraden *AD* lautet: $AD: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$,

eine Gleichung der Geraden *BE* lautet: $BE: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ -15 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -15 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$.

In der ersten Zeile der angegebenen Lösung werden diese Geradengleichungen gleichgesetzt.

Durch dieses Verfahren erhält man die Lösung: $r = s = 3$.

In der zweiten Zeile der angegebenen Lösung wird in die Geradengleichung der Geraden *AD* der Wert für *r* eingesetzt. Dadurch erhält man die Koordinaten des Schnittpunktes *S*.

Teilaufgabe b)

(1) Das Skalarprodukt der Vektoren $\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} -25 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} -25 \\ -25 \\ 0 \end{pmatrix}$ wird gebildet. Da $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} \neq 0$; $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{EF} \neq 0$ und $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{EF} \neq 0$ ist, liegt kein rechter Winkel im Dreieck *DEF* vor.

(2) Der Innenwinkel ε bei *E* wird gebildet durch die Vektoren $\overrightarrow{EF}$ und $\overrightarrow{ED}$.

$$\cos(\varepsilon) = \frac{\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EF}}{|\overrightarrow{ED}| \cdot |\overrightarrow{EF}|} = \frac{750}{30 \cdot \sqrt{1250}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \Rightarrow \varepsilon = 45°.$$

Die Höhe *h* des Dreiecks *DEF* ist die Senkrechte von *D* auf die Gerade *EF*.

Damit ergibt sich:

$$\sin(45°) = \frac{h}{|\overrightarrow{ED}|}; \quad h = |\overrightarrow{ED}| \cdot \sin(45°) = \frac{30}{\sqrt{2}} = 15 \cdot \sqrt{2} \approx 21{,}21 \text{ [m]}.$$

(3) Da die Ebene durch *DEF* parallel zur x_1x_2 -Ebene liegt, kann der Abstand des Punktes *G* zur Ebene direkt aus den x_3-Koordinaten der entsprechenden Punkte ermittelt werden: Abstand = 35 [m] – 15 [m] = 20 [m].

(4) Die obere Etage ist eine Pyramide mit dem Dreieck *DEF* als Grundfläche.
Die Körperhöhe $h_{Pyramide}$ entspricht dem Abstand aus (3): $h_{Pyramide}$ = 20 [m].
Die Grundfläche der Pyramide ist die Fläche des Dreiecks *DEF*:

$$G = \frac{1}{2} \cdot h \cdot |\overrightarrow{EF}| = 0{,}5 \cdot 15\sqrt{2} \cdot \sqrt{1250} = 375\,[\mathrm{m}^2]\ .$$

Damit ergibt sich für das Volumen der Pyramide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot 375 \cdot 20 = 2500\,[\mathrm{m}^3] = 25 \cdot 100\,[\mathrm{m}^3].$$

Die Anlage mit einer Leistung von 25 kW reicht aus, da 25·0,8 kW = 20 kW.

Teilaufgabe c)

(1) Das Dreieck *DEF* liegt in einer zur x_1x_2 -Ebene parallelen Ebene. Der Punkt *R* hat wie auch die Punkte des Dreiecks *DEF* die x_3-Koordinate 15, somit gilt: $R(x_1\,|\,x_2\,|\,15)$ liegt in der Ebene.
Eine Parameterform der Strecke $\overline{AG}$ kann angegeben werden durch:

$$\overline{AG}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 35 \end{pmatrix}; 0 \le t \le 1.$$

Die Koordinaten von *R* erfüllen diese Gleichung für $t = \frac{3}{7}$.
R liegt somit auch auf der Strecke $\overline{AG}$.

(2) Eine mögliche Parametergleichung einer Ebene *U*, in der das Dreieck *EFG* liegt,
ist: $U: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} -25 \\ -25 \\ 0 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ 20 \end{pmatrix};\ m, n \in \mathbb{R}$. Ein möglicher Vektor, der auf beiden Richtungsvektoren der Ebene senkrecht steht, ist der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Eine Koordinatenform der Gleichung der Ebene *U* lautet $U:\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -75$.

(3) Eine Parameterform der Strecke $\overline{RG}$ ist: $\overline{RG}: \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{-50}{7} \\ \frac{50}{7} \\ 15 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \frac{-20}{7} \\ \frac{20}{7} \\ 20 \end{pmatrix}; \quad 0 \le r \le 1.$

Die Koordinaten des Punktes Q erfüllen diese Gleichung für $r = \frac{23}{44}$ mit $0 \le \frac{23}{44} \le 1$.

Damit liegt Q auf der Strecke $\overline{RG}$.

Die Gerade q mit $q: \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{-95}{11} \\ \frac{95}{11} \\ \frac{280}{11} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$, schneidet die Ebene U im Punkt $\tilde{Q}$

senkrecht.

Aus $2 \cdot \left(-\frac{95}{11} + 2t \right) - 2 \cdot \left(\frac{95}{11} - 2t \right) - \frac{280}{11} + t = -75$ folgt für den Schnittpunkt $t = -\frac{5}{3}$.

Der Punkt $\tilde{Q}$ hat somit die Koordinaten $\tilde{Q}\left(\frac{-395}{33} \,\middle|\, \frac{395}{33} \,\middle|\, \frac{895}{33} \right)$.

Deshalb ist der Abstand des Punktes Q von der Ebene U die Länge des Differenzvektors:

$$|\overrightarrow{Q\tilde{Q}}| = \left| \begin{pmatrix} \frac{-10}{3} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} \right| = 5.$$

Teilaufgabe d)

Die Planung geht davon aus, dass das Dreieck *DEH* in der zur x_1x_2-Ebene parallelen Ebene der oberen Etage liegt.

Im gleichschenkligen Dreieck *DEH* mit der Basis $\overline{DE}$ ist die Höhe h_{DE} zur Seite $\overline{DE}$ eine Symmetrieachse des Dreiecks.

Die Höhe h_{DE} enthält somit den Mittelpunkt *M* der Strecke $\overline{DE}$ und den Punkt *H*.

Der Mittelpunkt *M* der Strecke $\overline{DE}$ besitzt die Koordinaten $M(0|15|15)$.

Die Höhe $h_{DE} = \overline{MH}$ verläuft senkrecht zum Vektor $\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} = 30 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und parallel zur x_1x_2-Ebene. Somit verläuft h_{DE} parallel zum Vektor $\vec{v}$ mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Damit ergibt sich für den Ortsvektor von *H*: $\overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad a \in \mathbb{R}$.

Die Aussage über den Ortsvektor von *H* ist somit zutreffend.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	erläutert die erste Zeile des dargestellten Verfahrens.	3			
2	erläutert die zweite Zeile des dargestellten Verfahrens.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**5**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) weist nach, dass die Bodenfläche nicht rechtwinklig ist.	4			
2	(2) bestimmt im Dreieck DEF die Größe des Innenwinkels bei E.	2			
3	(2) bestimmt im Dreieck DEF die Höhe h zu $\overline{EF}$.	3			
4	(3) begründet, dass der Abstand direkt aus den Koordinaten ermittelt werden kann, und gibt den Abstand an.	2			
5	(4) weist nach, dass eine Leistung von 25 kW ausreichend ist.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (15) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**15**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) weist nach, dass der Punkt *R* der Schnittpunkt der Geraden *AG* und der Ebene, in der das Dreieck *DEF* liegt, ist.	4			
2	(2) bestimmt eine Koordinatenform der Ebene *U*, in der das Dreieck *EFG* liegt.	3			
3	(3) zeigt, dass der Punkt *Q* auf der Strecke liegt.	3			
4	(3) zeigt, dass der Punkt *Q* einen Abstand von 5 m zur Ebene *U* hat.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (15) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**15**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	beurteilt die Aussage über die Gleichung des Ortsvektors.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**5**			

	Summe insgesamt	**40**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

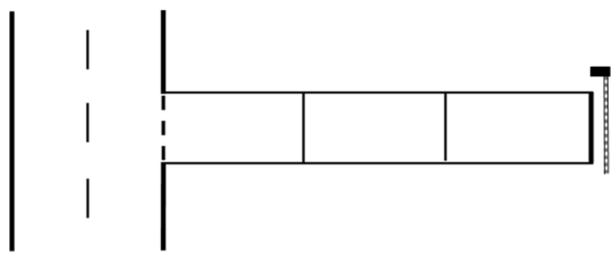
Abiturprüfung 2018

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Die Einfahrt zu einem Parkhaus bietet vor der Schranke Platz für maximal drei wartende Autos. Sind diese drei Plätze besetzt, so kann ein ankommendes Auto nicht von der Straße in die Einfahrt zum Parkhaus einbiegen, sondern muss weiterfahren (siehe *Abbildung*).



Abbildung

Die Entwicklung der Warteschlange vor der Schranke kann durch einen stochastischen Prozess beschrieben werden. Dieser stochastische Prozess besitzt die vier Zustände:
Z_0*: kein Auto steht in der Einfahrt* bis Z_3*: drei Autos stehen in der Einfahrt*.

Es wird angenommen, dass maximal ein Auto pro Minute in die Einfahrt zum Parkhaus einbiegt und auch maximal ein Auto pro Minute die Schranke passieren und in das Parkhaus fahren kann („Schranke öffnet").
Wenn in der Einfahrt mindestens ein Platz frei ist, beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Einbiegen eines Autos in die Einfahrt in jeder Minute stets $p_1 = 0{,}3$. Vereinfachend wird angenommen, dass sich unabhängig von der bisherigen Wartezeit die Schranke in jeder Minute mit der Wahrscheinlichkeit $p_2 = 0{,}6$ öffnet, sodass ein Auto ins Parkhaus fahren kann. Ein Auto, das in die Einfahrt biegt, kann nicht in derselben Minute weiter ins Parkhaus fahren.

Name: ____________________

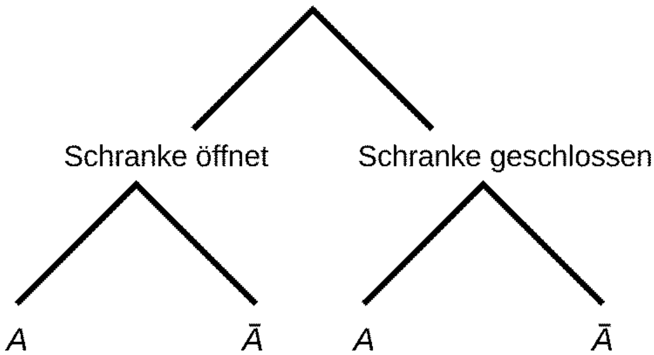
a) Angenommen der Prozess befindet sich im Zustand Z_3. Der Prozess verbleibt in diesem Zustand,

… wenn ein Auto ins Parkhaus fährt („Schranke öffnet“) und gleichzeitig ein neues Auto ankommt,

… wenn kein Auto aus der Warteschlange ins Parkhaus fahren kann („Schranke geschlossen“).

Der Prozess befindet sich im Zustand Z_3.

(1) *Geben Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm an.*



A: ein Auto biegt in die Einfahrt ein

$\overline{A}$: kein Auto biegt in die Einfahrt ein

(2) *Leiten Sie her: Die Wahrscheinlichkeit, dass der Prozess in der nächsten Minute im Zustand Z_3 bleibt, beträgt $p = 0{,}58$.*

Die Wahrscheinlichkeit für die Veränderung des Prozesses von einer Minute zur nächsten wird vollständig beschrieben durch die Übergangsmatrix *U*.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \text{von}\ Z_0 & Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{array} & \text{nach} \\ U = & \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}42 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}46 & 0{,}42 & 0 \\ 0 & 0{,}12 & 0{,}46 & 0{,}42 \\ 0 & 0 & 0{,}12 & 0{,}58 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} Z_0 \\ Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{array} \end{array}$$

(3) *Leiten Sie die in der zweiten Spalte der Matrix U angegebenen Wahrscheinlichkeiten her.*

(4 + 3 + 6 Punkte)

Name: ____________________

b) Zu einem bestimmten Zeitpunkt steht kein Auto in der Einfahrt.

(1) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit,*

(i) *dass nach 10 Minuten drei Autos in der Einfahrt stehen,*

(ii) *dass nach fünf Minuten weniger als zwei Autos in der Einfahrt stehen,*

(iii) *dass in den nächsten drei Minuten zu keinem Zeitpunkt ein Auto in der Einfahrt steht.*

(2) *Untersuchen Sie, ausgehend von der Startverteilung* $\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

die langfristige Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsverteilung und entscheiden Sie begründet, ob der Bereich für wartende Autos vergrößert werden soll.

(11 + 5 Punkte)

c) Ein stochastischer Prozess mit den Zuständen Z_0 bis Z_2 und der Übergangswahrscheinlichkeit k mit $0 \leq k \leq 0{,}5$ in benachbarte Zustände wird durch folgende Übergangsmatrix M_k dargestellt:

$$M_k = \begin{pmatrix} 1-k & k & 0 \\ k & 1-2k & k \\ 0 & k & 1-k \end{pmatrix}$$

(1) Eine Matrix ist doppeltstochastisch genau dann, wenn Zeilen- und Spaltensummen jeweils 1 betragen und alle Elemente der Matrix zwischen 0 und 1 liegen.
Damit handelt es sich bei M_k um eine doppeltstochastische Matrix.
Prüfen Sie für $k = 0{,}4$, ob $(M_{0,4})^2$ *ebenfalls eine doppeltstochastische Matrix ist.*

(2) *Zeigen Sie: Es existiert eine Wahrscheinlichkeitsverteilung* $\vec{x}$ *, so dass* $M_k \cdot \vec{x} = \vec{x}$ *gilt.*

Geben Sie diese Wahrscheinlichkeitsverteilung an.

(5 + 6 Punkte)

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2018

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Stochastik mit Schwerpunkt stochastische Matrizen

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2018

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Stochastik
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung und Normalverteilung
   - Stochastische Prozesse

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

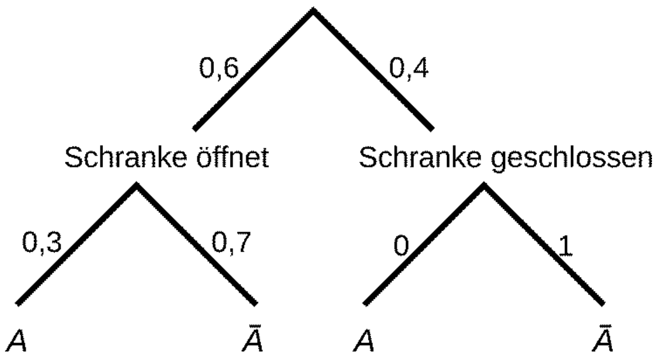
[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1)



(2) P (Beibehaltung von Z_3) = $0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}58$.

(3) Systematische Betrachtung der entsprechenden Matrixelemente:

- Der Übergang von Z_1 nach Z_0 erfolgt, wenn die Schranke öffnet und ein Auto ins Parkhaus fährt und gleichzeitig kein neues Auto in der Einfahrt eintrifft.
  Dieser Fall tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von $0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}42$ ein.
- Der Prozess verbleibt im Zustand Z_1 , wenn ein Auto in die Einfahrt einbiegt und gleichzeitig ein Auto ins Parkhaus fährt (Schranke öffnet) oder wenn kein Auto in die Einfahrt einbiegt, aber auch kein Auto ins Parkhaus fährt (Schranke geschlossen).
  Dieser Fall tritt mit der Wahrscheinlichkeit $0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}46$ auf.
- Der Übergang Z_1 nach Z_2 erfolgt, wenn ein neues Auto in der Einfahrt ankommt und gleichzeitig die Schranke geschlossen bleibt. Dieser Fall tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von $0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$ ein.
- Da nur Übergänge in benachbarte Zustände möglich sind, beträgt die Wahrscheinlichkeit für den Übergang von Z_1 nach Z_3 Null.

Teilaufgabe b)

(1) Da kein Auto in der Warteschlange steht, befindet sich der Prozess mit Sicherheit im Zustand Z_0. Folglich lautet die Startverteilung $\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(i) $\overrightarrow{x_{10}} = U^{10} \cdot \overrightarrow{x_0} \approx \begin{pmatrix} 0{,}5137 \\ 0{,}3622 \\ 0{,}0982 \\ 0{,}0259 \end{pmatrix}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass nach 10 Minuten drei Autos vor der Parkhauseinfahrt warten, beträgt zirka 0,026.

(ii) $\overrightarrow{x_5} = U^{5} \cdot \overrightarrow{x_0} \approx \begin{pmatrix} 0{,}5413 \\ 0{,}3639 \\ 0{,}0806 \\ 0{,}0141 \end{pmatrix}$.

Falls weniger als zwei Autos in der Einfahrt warten, befindet sich der Prozess im Zustand Z_0 oder Z_1. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt demnach 0,5413 + 0,3639 = 0,9052.

(iii) Ereignis E: Zu keinem Zeitpunkt wartet in den nächsten drei Minuten ein Auto in der Einfahrt. Dieses Ereignis tritt genau dann ein, wenn in den nächsten drei Minuten jeweils kein Auto in die Einfahrt biegt.
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt $P(E) = 0{,}7^3 = 0{,}343$.

(2) Zum Beispiel:

$$U^{60} \cdot \overrightarrow{x_0} \approx \begin{pmatrix} 0{,}5059 \\ 0{,}3614 \\ 0{,}1032 \\ 0{,}0295 \end{pmatrix} \approx U^{61} \cdot \overrightarrow{x_0} \approx \begin{pmatrix} 0{,}5059 \\ 0{,}3614 \\ 0{,}1032 \\ 0{,}0295 \end{pmatrix}.$$

Auf lange Sicht ergibt sich eine Verteilung folgender Form: Die Wahrscheinlichkeit, dass drei Autos in der Warteschlange stehen, beträgt nur zirka 3 %, während mit einer Wahrscheinlichkeit von zirka 51 % sogar kein Auto vor der Schranke steht. Es besteht demnach keine Notwendigkeit, den Bereich für wartende Autos zu vergrößern.
[Sinnvoll begründete abweichende Urteile sollten akzeptiert werden.]

Teilaufgabe c)

(1) $M_{0,4} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

Mit Hilfe des Taschenrechners ermittelt sich

$(M_{0,4})^2 = \begin{pmatrix} 0{,}52 & 0{,}32 & 0{,}16 \\ 0{,}32 & 0{,}36 & 0{,}32 \\ 0{,}16 & 0{,}32 & 0{,}52 \end{pmatrix}$.

Die Zeilensummen und die Spaltensummen von $(M_{0,4})^2$ betragen jeweils 1.

Alle Matrixelemente liegen zwischen 0 und 1. Daher ist $(M_{0,4})^2$ doppeltstochastisch.

(2) Gesucht ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, so dass $M_k \cdot \vec{x} = \vec{x}$.

Aufstellen eines linearen Gleichungssystems liefert

$-kx_1 + kx_2 = 0$

$kx_1 - 2kx_2 + kx_3 = 0$

$kx_2 - kx_3 = 0$

Es gilt außerdem $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, da $\vec{x}$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist.

Lösen des Gleichungssystems liefert $x_i = \frac{1}{3}$ für $i = 1, 2, 3$, also gilt

$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt die fehlenden Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm an.	4			
2	(2) leitet den Wert der Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}58$ her.	3			
3	(3) leitet die Wahrscheinlichkeiten in der zweiten Spalte der Übergangsmatrix U her.	6			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (13) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**13**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) (i) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3			
2	(1) (ii) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	4			
3	(1) (iii) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	4			
4	(2) untersucht die langfristige Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsverteilung.	3			
5	(2) entscheidet begründet, ob der Bereich für wartende Autos vergrößert werden soll.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (16) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**16**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) bestimmt $(M_{0,4})^2$.	3			
2	(1) begründet, dass $(M_{0,4})^2$ eine doppeltstochastische Matrix ist.	2			
3	(2) zeigt, dass eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\vec{x}$ existiert, so dass $M_k \cdot \vec{x} = \vec{x}$ gilt, und gibt $\vec{x}$ an.	6			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**11**			

	Summe insgesamt	**40**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil A	**24**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: erste Aufgabe	**40**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: zweite Aufgabe	**40**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: dritte Aufgabe	**40**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**144**			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

Berechnung der Endnote nach Anlage 4 der Abiturverfügung auf der Grundlage von § 34 APO-GOSt

Die Klausur wird abschließend mit der Note ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	144 – 137
sehr gut	14	136 – 130
sehr gut minus	13	129 – 123
gut plus	12	122 – 116
gut	11	115 – 108
gut minus	10	107 – 101
befriedigend plus	9	100 – 94
befriedigend	8	93 – 87
befriedigend minus	7	86 – 80
ausreichend plus	6	79 – 72
ausreichend	5	71 – 65
ausreichend minus	4	64 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 48
mangelhaft	2	47 – 39
mangelhaft minus	1	38 – 29
ungenügend	0	28 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2018

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

a) Ein Unternehmen stellt Kunststoffteile her. Erfahrungsgemäß sind 4 % der hergestellten Teile fehlerhaft. Die Anzahl fehlerhafter Teile unter zufällig ausgewählten kann als binomialverteilt angenommen werden.

(1) 800 Kunststoffteile werden zufällig ausgewählt.
Bestimmen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
A: „Genau 30 der Teile sind fehlerhaft."
B: „Mindestens 5 % der Teile sind fehlerhaft."

(2) *Ermitteln Sie, wie viele Kunststoffteile mindestens zufällig ausgewählt werden müssen, damit davon mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens 100 Teile keinen Fehler haben.*

Die Kunststoffteile werden aus Kunststoffgranulat hergestellt. Nach einem Wechsel des Granulats vermutet der Produktionsleiter, dass sich der Anteil der fehlerhaften Teile reduziert hat. Um einen Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, ob die Vermutung gerechtfertigt ist, soll die Nullhypothese „Der Anteil der fehlerhaften Teile beträgt mindestens 4 %" auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Teilen auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden.

(3) *Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.*

(4) Das neue Granulat ist teurer als das vorherige.
Geben Sie an, welche Überlegung zur Wahl der Nullhypothese geführt haben könnte, und begründen Sie Ihre Angabe.

(5) *Interpretieren Sie den Fehler 2. Art im Sachzusammenhang und bestimmen Sie seine Wahrscheinlichkeit, wenn in Wirklichkeit nur* 2 % *der Teile fehlerhaft sind.*

(5 + 5 + 6 + 4 + 5 Punkte)

Name: ____________________

b) Für ein Spiel wird ein Glücksrad verwendet, das drei farbige Sektoren hat. Der Tabelle können die Farben der Sektoren und die Größe der zugehörigen Mittelpunktswinkel entnommen werden.

Farbe	Blau	Rot	Grün
Mittelpunktswinkel	180°	120°	60°

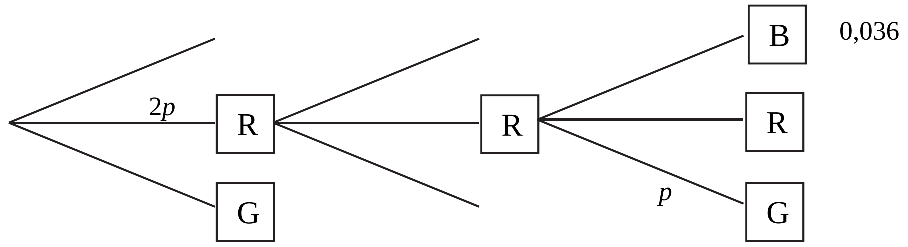
Für einen Einsatz von 5 Euro darf ein Spieler das Glücksrad dreimal drehen. Erzielt der Spieler dreimal die gleiche Farbe, werden ihm 10 Euro ausgezahlt. Erzielt er drei verschiedene Farben, wird ein anderer Betrag ausgezahlt. In allen anderen Fällen erfolgt keine Auszahlung.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dreimal die gleiche Farbe erzielt wird, ist $\frac{1}{6}$.

(1) *Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass drei verschiedene Farben erzielt werden, ebenfalls* $\frac{1}{6}$ *beträgt.*

(2) Bei dem Spiel ist zu erwarten, dass sich die Einsätze der Spieler und die Auszahlungen auf lange Sicht ausgleichen.
Bestimmen Sie den Betrag, der ausgezahlt wird, wenn drei verschiedene Farben erscheinen.

(3) Die Größen der Sektoren werden geändert. Dabei wird der blaue Sektor vergrößert. Die Abbildung zeigt einen Teil eines Baumdiagramms, das für das geänderte Glücksrad die drei Drehungen beschreibt. Ergänzend ist für einen Pfad die zugehörige Wahrscheinlichkeit angegeben.



Bestimmen Sie die Größe des zum blauen Sektor gehörenden Mittelpunktswinkels.

(4 + 5 + 6 Punkte)

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2018

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Stochastik

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2018

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Stochastik
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung und Normalverteilung
   - Testen von Hypothesen
2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Sei X: „Anzahl der fehlerhaften Teile“. X ist binomialverteilt.
Ereignis A: Die Wahrscheinlichkeit, dass genau 30 der Teile fehlerhaft sind, beträgt dann $P_{800;0,04}(X=30)\approx 0,069$.
5 % der Teile entsprechen einer Anzahl von 40 Teilen.
Ereignis B: Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 5 % der Teile fehlerhaft sind, beträgt dann $P_{800;0,04}(X\geq 40)\approx 0,091$.

(2) Sei $\overline{X}$: „Anzahl der Teile, die ohne Fehler sind“.
Es gilt $P_{107;0,96}(\overline{X}\geq 100)\approx 0,934$ und $P_{108;0,96}(\overline{X}\geq 100)\approx 0,970$. Es müssen also mindestens 108 Teile ausgewählt werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens 100 Teile ohne Fehler zu haben.

(3) Mit der Wahl von $H_0: p\geq 0,04$ als Nullhypothese kann die Vermutung entsprechend überprüft werden. Dabei kann die Zufallsgröße X: „Anzahl der fehlerhaften Teile“ mit $n=500$ als binomialverteilt angenommen werden. Man erhält
$P_{500;0,04}(X\leq 13)\approx 0,062>0,05$ und $P_{500;0,04}(X\leq 12)\approx 0,036<0,05$.
Als Entscheidungsregel ergibt sich in diesem Fall:
Verwirf die Nullhypothese, falls $X\leq 12$, falls also höchstens 12 Teile fehlerhaft sind.

(4) Es soll möglichst vermieden werden, das teurere neue Granulat dauerhaft einzusetzen, obwohl sich der Anteil der fehlerhaften Teile nicht reduziert hat. Das Risiko, aufgrund des Testergebnisses irrtümlich davon auszugehen, dass sich dieser Anteil reduziert hat, beträgt höchstens 5 %.

(5) Macht der Produktionsleiter den Fehler 2. Art, so verwirft er aufgrund der Stichprobe die Nullhypothese nicht und nimmt an, das neue Granulat sei nicht besser als das alte, obwohl dies der Fall ist. Sind in Wirklichkeit nur 2 % der Teile fehlerhaft, so liegt die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art bei $P_{500;0,02}(X\geq 13)\approx 0,207$.

Teilaufgabe b)

(1) Die Wahrscheinlichkeit für die Kombination (blau, rot, grün) beträgt $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}$. Dabei gibt es insgesamt 6 Möglichkeiten, die drei Farben zu kombinieren. Die Wahrscheinlichkeit, dass drei verschiedene Farben erzielt werden, beträgt somit $6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$.

(2) Bezeichnet man den gesuchten Betrag mit a, so gilt:

$$\frac{1}{6}\cdot 10\text{ €}+\frac{1}{6}\cdot a+\frac{4}{6}\cdot 0\text{ €}=5\text{ €}\Leftrightarrow a=20\text{ €}.$$

(3) Die neue Wahrscheinlichkeitsverteilung hat lt. Baumdiagramm und aufgrund der Unabhängigkeit der Drehungen die Form

Farbe	Blau	Rot	Grün
Wahrscheinlichkeit	$1-3p$	$2p$	p

Für den angegebenen Pfad gilt dann:

$$2p\cdot 2p\cdot(1-3p)=0{,}036\Leftrightarrow p=\frac{1-\sqrt{37}}{60}\approx -0{,}085 \text{ oder } p=\frac{1+\sqrt{37}}{60}\approx 0{,}118 \text{ oder } p=0{,}3.$$

Da wegen der Vergrößerung des Sektors $0{,}5\le 1-3p\le 1$ gelten muss, ist $p\approx 0{,}118$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit. Die neue Größe des zum blauen Sektor gehörenden Mittelpunktwinkels ist damit $(1-3p)\cdot 360°\approx 233°$.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A.	2			
2	(1) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B.	3			
3	(2) ermittelt die gesuchte Anzahl.	5			
4	(3) bestimmt die zugehörige Entscheidungsregel.	6			
5	(4) gibt eine entsprechende Überlegung an und begründet sie.	4			
6	(5) interpretiert den Fehler 2. Art im Sachzusammenhang.	3			
7	(5) bestimmt die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (25) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**25**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) zeigt den gegebenen Sachverhalt.	4			
2	(2) bestimmt den gesuchten Betrag.	5			
3	(3) bestimmt den gesuchten Wert.	6			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (15) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**15**			

	Summe insgesamt	**40**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil A	**24**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: erste Aufgabe	**40**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: zweite Aufgabe	**40**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: dritte Aufgabe	**40**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**144**			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

Berechnung der Endnote nach Anlage 4 der Abiturverfügung auf der Grundlage von § 34 APO-GOSt

Die Klausur wird abschließend mit der Note ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	144 – 137
sehr gut	14	136 – 130
sehr gut minus	13	129 – 123
gut plus	12	122 – 116
gut	11	115 – 108
gut minus	10	107 – 101
befriedigend plus	9	100 – 94
befriedigend	8	93 – 87
befriedigend minus	7	86 – 80
ausreichend plus	6	79 – 72
ausreichend	5	71 – 65
ausreichend minus	4	64 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 48
mangelhaft	2	47 – 39
mangelhaft minus	1	38 – 29
ungenügend	0	28 – 0