Name: ____________________

Abiturprüfung 2013

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Die Buche ist ein in weiten Teilen Europas heimischer Laubbaum.
Ein Biologe modelliert das Höhenwachstum von Buchen durch Funktionen f_a mit der Gleichung

$$f_a(t) = a \cdot \left(1 - e^{-0{,}02 \cdot t}\right)^2,\ t \geq 0 \text{, und dem Parameter } a > 0\,.$$[1]

Dabei wird t als Maßzahl zur Einheit 1 Jahr, $f_a(t)$ als Maßzahl zur Einheit 1 Meter aufgefasst.
Der Zeitpunkt des Keimens des Buchensamens wird durch $t = 0$ festgelegt.

a) (1) *Zeigen Sie rechnerisch, dass gemäß der Modellierung durch eine Funktion f_a die Höhe einer Buche ständig zunimmt.*

(2) Bei einer 10 Jahre alten Buche wird eine Höhe von 1,15 m gemessen.

Berechnen Sie den Parameterwert von a derjenigen Funktion f_a, die das Höhenwachstum dieser Buche beschreibt.

(3) *Erklären Sie die Bedeutung des Parameters a für das durch die Funktion f_a beschriebene Höhenwachstum einer Buche.*

[Zur Kontrolle: $f_a'(t) = 0{,}04a \cdot e^{-0{,}02t} \cdot \left(1 - e^{-0{,}02t}\right)$]

(14 Punkte)

---

[1] Die Funktion f_a ist für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert, wird aber nur für $t \geq 0$ zur Modellierung verwendet.

Name: ____________________

Im Folgenden wird eine Buche betrachtet, deren Höhenwachstum durch die Funktion f mit der Gleichung $f(t) = f_{35}(t) = 35 \cdot \left(1 - e^{-0{,}02 \cdot t}\right)^2$, $t \geq 0$, modelliert wird.
Der Graph von f ist in der *Abbildung 1* dargestellt.

b) (1) *Begründen Sie, dass gemäß der Modellierung die Buche nicht höher als 35 m werden kann.*

(2) *Zeigen Sie rechnerisch, dass die Buche zum Zeitpunkt* $t_1 = 50 \cdot \ln 2$ *am stärksten wächst.*

[Hinweis: In *Abbildung 2* auf Seite 4 ist auch der Graph von f' dargestellt.
Zur Kontrolle: $f'(t) = 1{,}4 \cdot \left(e^{-0{,}02t} - e^{-0{,}04t}\right)$; $f''(t) = 0{,}028 \cdot \left(2 \cdot e^{-0{,}04t} - e^{-0{,}02t}\right)$]

(14 Punkte)

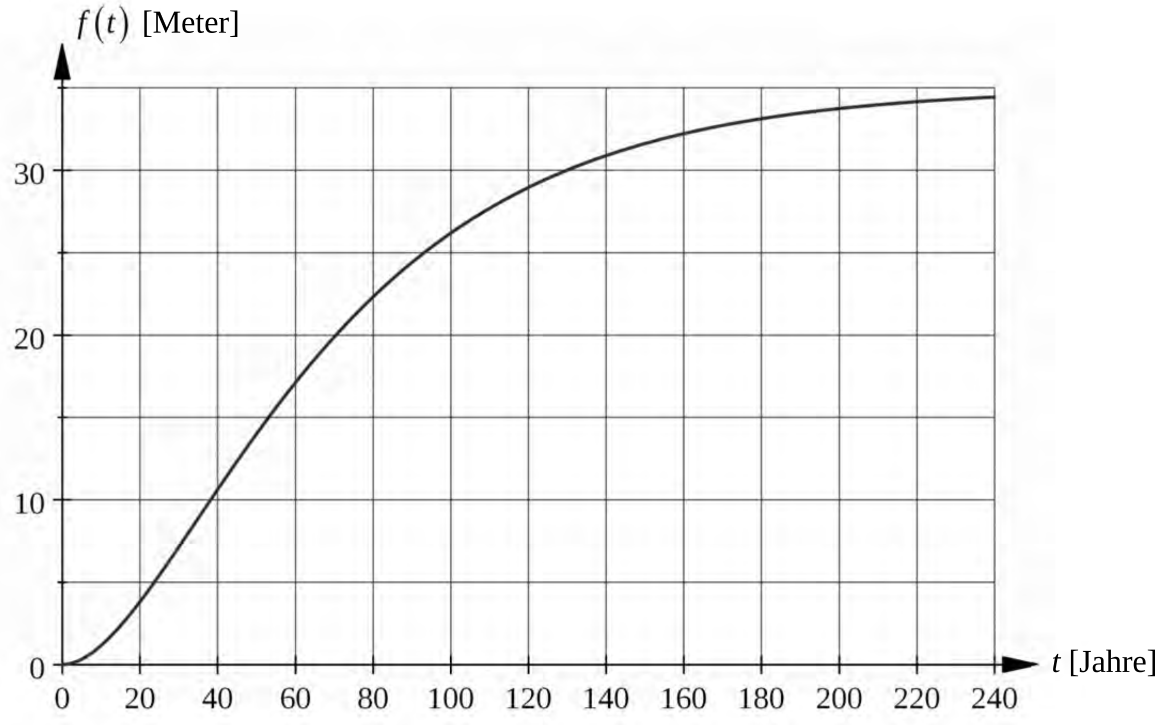


Abbildung 1

Name: ____________________

c) In *Abbildung 2* auf Seite 4 ist neben dem Graphen der Wachstumsgeschwindigkeit f' der oben genannten Buche auch der Graph der Wachstumsgeschwindigkeit g' einer zweiten Buche mit der Gleichung $g'(t) = 1{,}1 \cdot \left(e^{-0{,}02 \cdot t} - e^{-0{,}04 \cdot t}\right)$, $t \geq 0$, dargestellt. Die zweite Buche hat an einem anderen Standort zum selben Zeitpunkt wie die erste Buche gekeimt.

(1) *Begründen Sie anhand der Abbildung 2, dass die erste Buche zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ eine größere Höhe hat als die zweite Buche.*

(2) *Bestimmen Sie durch Integration eine Gleichung einer Stammfunktion h von g'.*

[Mögliches Ergebnis: $h(t) = 27{,}5 \cdot \left(e^{-0{,}04 \cdot t} - 2 \cdot e^{-0{,}02 \cdot t}\right)$]

(3) Jemand behauptet, dass die beiden Buchen im Alter von 50 Jahren gemäß den Modellierungen ihres Höhenwachstums einen Höhenunterschied von mindestens 3,50 m aufweisen müssten.

Prüfen Sie, ob die Behauptung wahr ist.

(12 Punkte)

d) Wissenschaftliche Untersuchungen haben ergeben:
Bäume erreichen die Hälfte ihrer Endhöhe in der ersten Hälfte ihrer Lebenszeit, und zwar nachdem ihre Wachstumsgeschwindigkeit ihr Maximum hatte.

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die Buche, deren Höhenwachstum durch die Funktion *f* modelliert wird, ein Lebensalter von 350 Jahren erreicht.

(1) *Begründen Sie, dass es zur Vereinfachung möglich ist, von einer Endhöhe dieser Buche von 35 m auszugehen.*

(2) *Zeigen Sie, dass unter dieser Voraussetzung die halbe Endhöhe dieser Buche zum Zeitpunkt $t_2 = -50 \cdot \ln\left(1 - \sqrt{0{,}5}\right)$ erreicht wird.*

(3) *Prüfen Sie, ob die Modellierung des Höhenwachstums dieser Buche mit den Ergebnissen der wissenschaftlichen Untersuchungen verträglich ist.*

(10 Punkte)

Name: ____________________

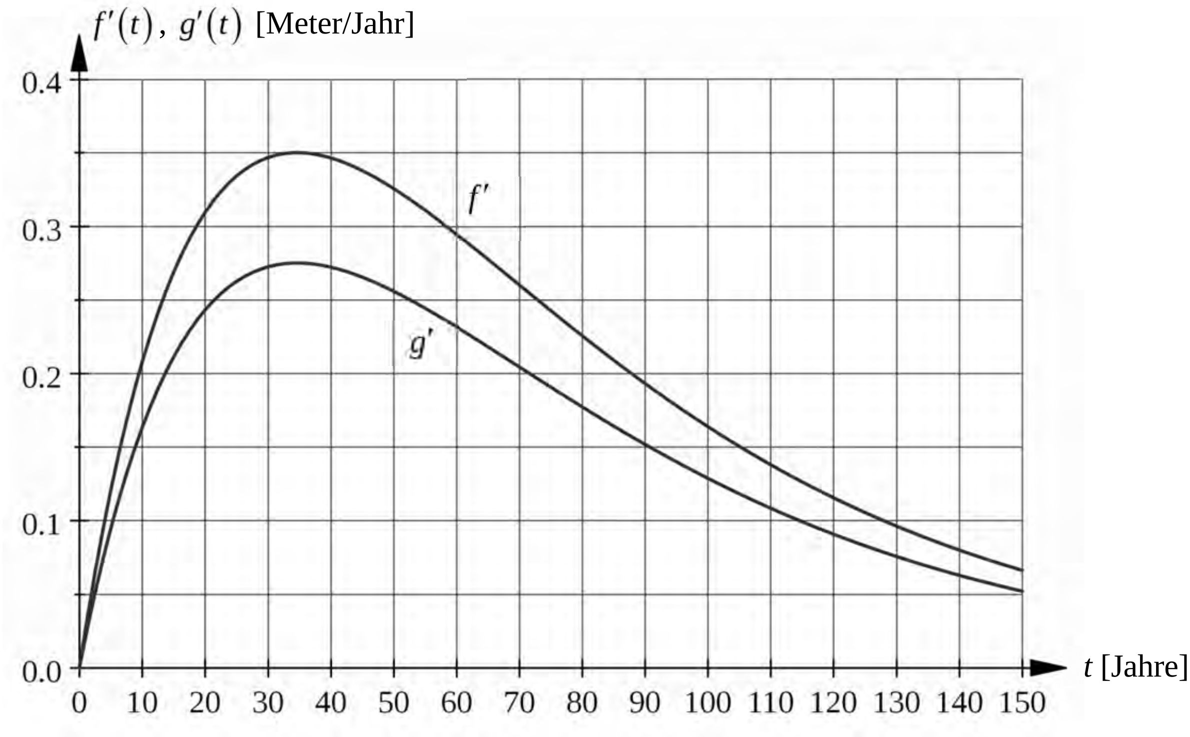


Abbildung 2

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2013

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2013

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen einschließlich Funktionenscharen und Logarithmusfunktionen sowie notwendiger Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Untersuchungen von Wirkungen (Änderungsrate)
   - Integrationsregeln (partielle Integration, Substitution)
   - Flächenberechnung durch Integration
2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Es ist zu zeigen, dass f_a für $t \geq 0$ streng monoton steigt.

$$\begin{aligned} f_a'(t) &= \left(a \cdot \left(1-e^{-0{,}02 \cdot t}\right)^2\right)' \\ &= a \cdot 2 \cdot \left(1-e^{-0{,}02t}\right) \cdot (-0{,}02) \cdot \left(-e^{-0{,}02t}\right) \\ &= 0{,}04a \cdot e^{-0{,}02t} \cdot \left(1-e^{-0{,}02t}\right) \end{aligned}$$

Für $a > 0$ und $t > 0$ gilt:

$e^{-0{,}02t} > 0$ und $1-e^{-0{,}02t} > 0$ und somit $f_a'(t) > 0$.

Da f_a an der Stelle $t = 0$ differenzierbar [insbesondere stetig] ist, steigt f_a streng monoton für $t \geq 0$.

Die Höhe der durch f_a modellierten Buche nimmt daher ständig zu.

[Es kann auch anhand des Monotonieverhaltens von $t \mapsto e^{-0{,}02 \cdot t}$ und $t \mapsto 1-e^{-0{,}02 \cdot t}$ argumentiert werden.]

(2) Es gilt: $f_a(10) = 1{,}15 \Leftrightarrow a \cdot \left(1-e^{-0{,}2}\right)^2 = 1{,}15 \Leftrightarrow a = \dfrac{1{,}15}{\left(1-e^{-0{,}2}\right)^2}$ $[\approx 34{,}999]$.

Der gesuchte Wert ist $a \approx 35$.

(3) Es gilt $f_a(t) = a \cdot f_1(t)$ und $f_a'(t) = a \cdot f_1'(t)$.

Daher hat eine Buche, deren Höhenwachstum durch die Funktion f_a beschrieben wird, zu jedem Zeitpunkt *t* die *a*-fache Höhe und die *a*-fache Wachstumsgeschwindigkeit des durch die Funktion f_1 gegebenen („Einheits“-)Höhenwachstums. Die Höhe der Buche nähert sich der Endhöhe *a* Meter, da für $t \geq 0$ gilt: $0 \leq f_a(t) \leq a$ und $a = \lim\limits_{t \to \infty} \left(f_a(t)\right)$.

Modelllösung b)

(1) Für $t > 0$ gilt $0 < e^{-0{,}02 \cdot t} < 1$ und daher $f(t) < 35 \cdot (1-0)^2 = 35$.

[Auch der Verweis auf die Lösung von a) (1) mit $a = 35$ ist möglich.]

(2) Gesucht ist das globale Maximum von f'.

$$\begin{aligned} f'(t) &= \left(35 \cdot \left(1 - e^{-0{,}02 \cdot t}\right)^2\right)' \\ &= 35 \cdot 2 \cdot \left(1 - e^{-0{,}02 \cdot t}\right) \cdot 0{,}02 \cdot e^{-0{,}02 \cdot t} \\ &= 1{,}4 \cdot e^{-0{,}02 \cdot t} \cdot \left(1 - e^{-0{,}02 \cdot t}\right) \\ &= 1{,}4 \cdot \left(e^{-0{,}02 \cdot t} - e^{-0{,}04 \cdot t}\right), \end{aligned}$$

$$f''(t) = 1{,}4 \cdot \left((-0{,}02) \cdot e^{-0{,}02\,t} + 0{,}04 \cdot e^{-0{,}04\,t}\right) = 0{,}028 \cdot \left(2 \cdot e^{-0{,}04\,t} - e^{-0{,}02\,t}\right).$$

[$f'(t)$ kann auch mit Bezug auf die Lösung von a) (2) als $f'_{35}(t)$ bestimmt werden.]

$f''(t_1) = 0$

$\Leftrightarrow 0{,}028 \cdot e^{-0{,}02\,t_1} \cdot \left(2 \cdot e^{-0{,}02\,t_1} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot e^{-0{,}02\,t_1} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow t_1 = 50 \cdot \ln 2 \; [\approx 34{,}7]$

Da f'' an der Stelle $t_1 = 50 \cdot \ln 2$ das Vorzeichen von + nach – wechselt, ist $f'(t_1)$ lokales Maximum von f'.

Als einziges lokales Extremum ist $f'(t_1)$ auch globales Maximum von f'.

Die Buche wächst zum Zeitpunkt $t_1 = 50 \cdot \ln 2$ bzw. im Alter von knapp 35 Jahren am stärksten.

Modelllösung c)

(1) Die Fläche unter dem Graphen von f' bzw. g' im Intervall $[0; t]$ stellt den Höhenzuwachs des betreffenden Baumes vom Keimen bis zum Zeitpunkt *t* dar. Da die Wachstumsgeschwindigkeit der ersten Buche [bis auf Gleichheit für $t = 0$] zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ des in der *Abbildung 2* dargestellten Zeitintervalls größer als die Wachstumsgeschwindigkeit der zweiten Buche (siehe (1)) ist und die Anfangshöhe in beiden Fällen 0 m beträgt, ist die Höhe der ersten Buche zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ größer als die Höhe der zweiten Buche.

[Alternative Lösungswege sind denkbar.]

(2) Unter Verwendung von $\left(\frac{1}{a}\cdot e^{a\cdot t}\right)' = e^{a\cdot t}$, $a \neq 0$, ergibt sich:

$$\begin{aligned} h(t) &= \int g'(t)dt \\ &= \int 1{,}1\cdot\left(e^{-0{,}02\cdot t} - e^{-0{,}04\cdot t}\right)dt \\ &= 1{,}1\cdot\left(-50\cdot e^{-0{,}02t} + 25\cdot e^{-0{,}04t}\right) + C \\ &= 27{,}5\cdot\left(e^{-0{,}04t} - 2\cdot e^{-0{,}02t}\right) + C. \end{aligned}$$

Für $C = 0$ erhält man das Kontrollergebnis.

(3) Gemäß den Modellierungen ihres Höhenwachstums beträgt der Höhenunterschied der beiden 50 Jahre alten Buchen:

$$\begin{aligned} d &= f(50) - \int_0^{50} g'(t)\,dt \\ &= f(50) - \left[h(t)\right]_0^{50} \\ &= f(50) - \left[h(50) - h(0)\right] \\ &= 2{,}996... \\ &\approx 3. \end{aligned}$$

Da der Höhenunterschied nur knapp 3 m beträgt, ist die Behauptung falsch.

Modelllösung d)

(1) Die Buche, deren Höhenwachstum durch die Funktion f beschrieben wird, hat im Alter von 350 Jahren wegen $f(350) \approx 34{,}94$ ihre „theoretische Endhöhe“ von $\lim\limits_{t\to\infty}\left(f(t)\right) = 35$ Metern (vgl. a) (1) und b) (1)) praktisch erreicht.

(2) Ausgehend von der Endhöhe 35 m gilt:

$$\begin{aligned} f(t_2) = \frac{35}{2} &\Leftrightarrow 35\cdot\left(1 - e^{-0{,}02\cdot t_2}\right)^2 = \frac{35}{2} \\ &\Leftrightarrow \left(1 - e^{-0{,}02\cdot t_2}\right)^2 = \frac{1}{2},\ \text{da } \left(1 - e^{-0{,}02\cdot t_2}\right) \geq 0 \text{ für } t_2 \geq 0, \\ &\Leftrightarrow 1 - e^{-0{,}02\cdot t_2} = \sqrt{0{,}5} \\ &\Leftrightarrow -0{,}02\cdot t_2 = \ln\left(1 - \sqrt{0{,}5}\right) \\ &\Leftrightarrow t_2 = -50\cdot\ln\left(1 - \sqrt{0{,}5}\right) \end{aligned}$$

(3) Der Zeitpunkt $t_2 = -50 \cdot \ln\left(1-\sqrt{0{,}5}\right) \approx 61$ [Jahre] liegt innerhalb der ersten Hälfte der mit 350 Jahren angenommenen Lebensdauer der betrachteten Buche.
Der Zeitpunkt stärksten Wachstums liegt gemäß Teilaufgabe b) (2) bei $t_1 = 50 \cdot \ln 2 \approx 35$ [Jahren] und damit vor dem Zeitpunkt t_2, zu dem die halbe Endhöhe erreicht wird.
Insgesamt ist das durch die Funktion *f* beschriebene Höhenwachstum der Buche mit den Ergebnissen der Untersuchungen verträglich.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**maximal erreichbare Punktzahl**
	Der Prüfling	
1	(1) zeigt rechnerisch, dass gemäß der Modellierung durch die Funktion f_a die Höhe der Buche ständig zunimmt.	6
2	(2) berechnet den Parameterwert von *a* derjenigen Funktion f_a, die das Höhenwachstum dieser Buche beschreibt.	3
3	(3) erklärt die Bedeutung des Parameters *a* für das durch die Funktion f_a beschriebene Höhenwachstum einer Buche.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) begründet, dass gemäß der Modellierung die Buche nicht höher als 35 m werden kann.	3
2	(2) berechnet die ersten beiden Ableitungen von *f*.	4
3	(2) berechnet die Nullstelle von f''.	3
4	(2) zeigt rechnerisch, dass die Buche zum angegebenen Zeitpunkt t_1 am stärksten wächst.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) begründet anhand der *Abbildung 2*, dass die erste Buche zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ eine größere Höhe hat als die zweite Buche.	4
2	(2) bestimmt eine Gleichung einer Stammfunktion *h* von g'.	4
3	(3) prüft, ob die Behauptung wahr ist.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) begründet, dass es zur Vereinfachung möglich ist, von einer Endhöhe der Buche von 35 m auszugehen.	2
2	(2) zeigt, dass unter dieser Voraussetzung die halbe Endhöhe der Buche zum Zeitpunkt $t_2 = -50 \cdot \ln\left(1-\sqrt{0{,}5}\right)$ erreicht wird.	4
3	(3) prüft, ob die Modellierung des Höhenwachstums der Buche mit den Ergebnissen der Untersuchungen verträglich ist.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt rechnerisch, dass …	6			
2	(2) berechnet den Parameterwert…	3			
3	(3) erklärt die Bedeutung …	5			
sachlich richtige Alternativen: (14) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**14**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass gemäß …	3			
2	(2) berechnet die ersten …	4			
3	(2) berechnet die Nullstelle …	3			
4	(2) zeigt rechnerisch, dass …	4			
sachlich richtige Alternativen: (14) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**14**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet anhand der …	4			
2	(2) bestimmt eine Gleichung …	4			
3	(3) prüft, ob die …	4			
sachlich richtige Alternativen: (12) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**12**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass es …	2			
2	(2) zeigt, dass unter …	4			
3	(3) prüft, ob die …	4			
sachlich richtige Alternativen: (10) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe d)	**10**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2013

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Eine Firma baut Sprungschanzen für BMX-Fahrer in verschiedenen Formen, deren seitliches Profil jeweils durch den Graphen einer Funktion f_a mit der Gleichung

$$f_a(x) = -\frac{1}{4 \cdot a^2} x^3 + \frac{3}{4} x\,, \quad -8 \le x \le 0\,,[1]$$

beschrieben wird mit $3{,}2 \le a \le 4$ (x, a und $f_a(x)$ in Metern).

Die Sprungschanzen werden ausgehend vom Startpunkt $S_a\left(-8 \mid f_a(-8)\right)$ von links nach rechts durchfahren und so eingebaut, dass der Absprungpunkt $A\left(0 \mid 0\right)$ auf dem Niveau des Erdbodens liegt, das in der Seitenansicht durch die x-Achse festgelegt ist.

Der Funktionsgraph der Beispielfunktion $f_{3,6}$ ist in der *Abbildung 1* dargestellt.

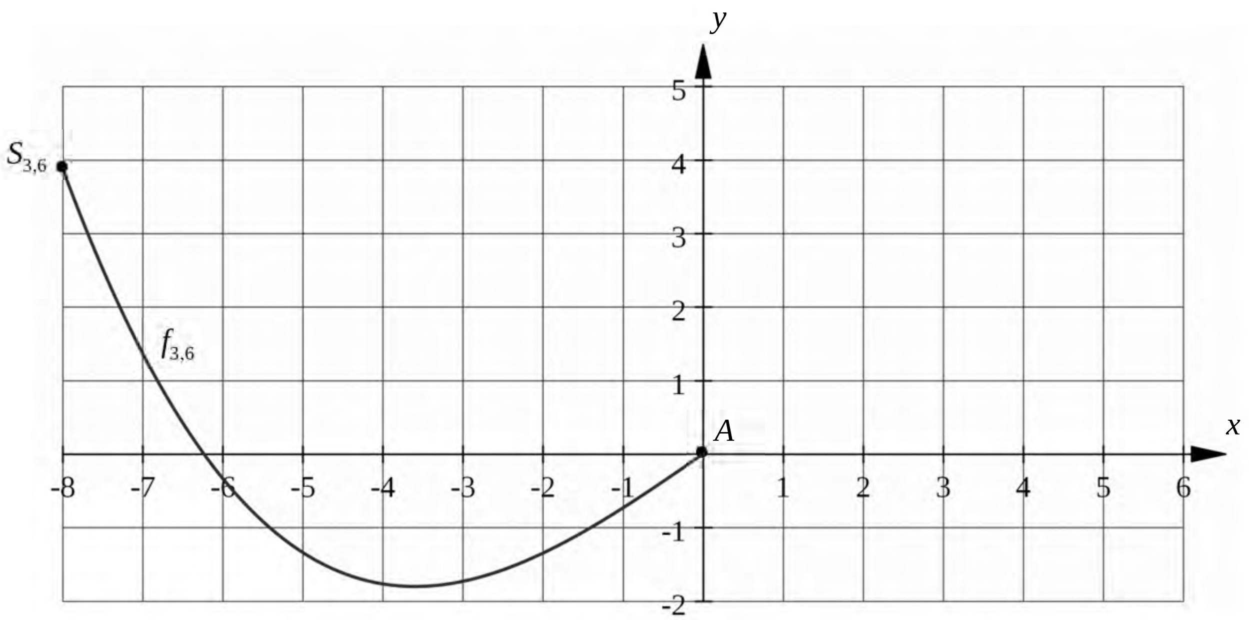


Abbildung 1

[1] Die Funktionen f_a sind für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, werden aber nur für $-8 \le x \le 0$ zur Modellierung verwendet.

Name: ____________________

a) (1) *Weisen Sie nach, dass die durch die Funktion f_a beschriebene Profillinie der Sprungschanze im Bereich $-\sqrt{3} \cdot a < x < 0$ unterhalb des Niveaus des Erdbodens verläuft.*

(2) *Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die Koordinaten des tiefsten Punktes T_a des Sprungschanzen-Profils.*

[Zur Kontrolle: $T_a\left(-a \middle| -\frac{1}{2}a\right)$]

(3) *Geben Sie eine Gleichung der Funktion k an, auf deren Graph alle Tiefpunkte T_a der Funktionsgraphen von f_a liegen.*

(18 Punkte)

b) Bei der Firma wird eine Sprungschanze bestellt, die im Punkt $S_a\left(-8 \mid f_a(-8)\right)$ die Steigung -3 haben soll.

(1) *Berechnen Sie den Wert von a, für den die Sprungschanze im Punkt S_a die Steigung -3 hat, und die Höhe über dem Erdboden, in der sich bei dieser Sprungschanze der Startpunkt S_a befindet.*

[Zur Kontrolle: $a = \frac{8\sqrt{5}}{5}$]

(2) Laut Angabe der Firma hat die bestellte Sprungschanze zwischen dem Startpunkt S_a und dem Absprungpunkt A die durchschnittliche Steigung $-\frac{1}{2}$.

Prüfen Sie diese Angabe und beurteilen Sie ihre Aussagekraft.

(3) Die bestellte Sprungschanze ist 2 Meter breit. In dem Bereich, in dem ihr Profil unterhalb des Niveaus des Erdbodens verläuft, muss Erde ausgehoben werden.

Berechnen Sie, wie groß das Erdvolumen ist, das bis zur Profillinie dieser Sprungschanze ausgehoben werden muss.

(17 Punkte)

Name: ____________________

c) (1) *Zeigen Sie, dass alle Sprungschanzen, deren Profil durch eine der Funktionen f_a gegeben ist, im Absprungpunkt A dieselbe Steigung haben.*

(2) Ein BMX-Fahrer macht nach dem Abheben von der Sprungschanze im Punkt *A* einen 4 Meter weiten Sprung. Seine zwischen den Punkten *A* und $B(4\,|\,0)$ parabelförmig verlaufende Flugbahn soll durch den Graphen einer quadratischen Funktion *q* beschrieben werden, der im Punkt *A* ohne Knick an **die Profillinie der Sprungschanze** anschließt (siehe *Abbildung 2, gestrichelte Linie*).[2]

Leiten Sie eine Gleichung dieser quadratischen Funktion q her.

[Zur Kontrolle: $q(x) = -\frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{4}x$, $0 \le x \le 4$]

(3) Rechts vom Punkt *A* soll ein Aufsprunghügel angelegt werden, dessen seitliches Profil durch den Graphen der Funktion *h* mit der Gleichung $h(x) = \frac{3}{100}x^3 - \frac{3}{10}x^2 + \frac{3}{4}x$, $0 \le x \le 5$, beschrieben wird (siehe *Abbildung 2*).

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C, in dem der BMX-Fahrer aus (2) den größten vertikalen Abstand vom geplanten Aufsprunghügel hätte.

(15 Punkte)

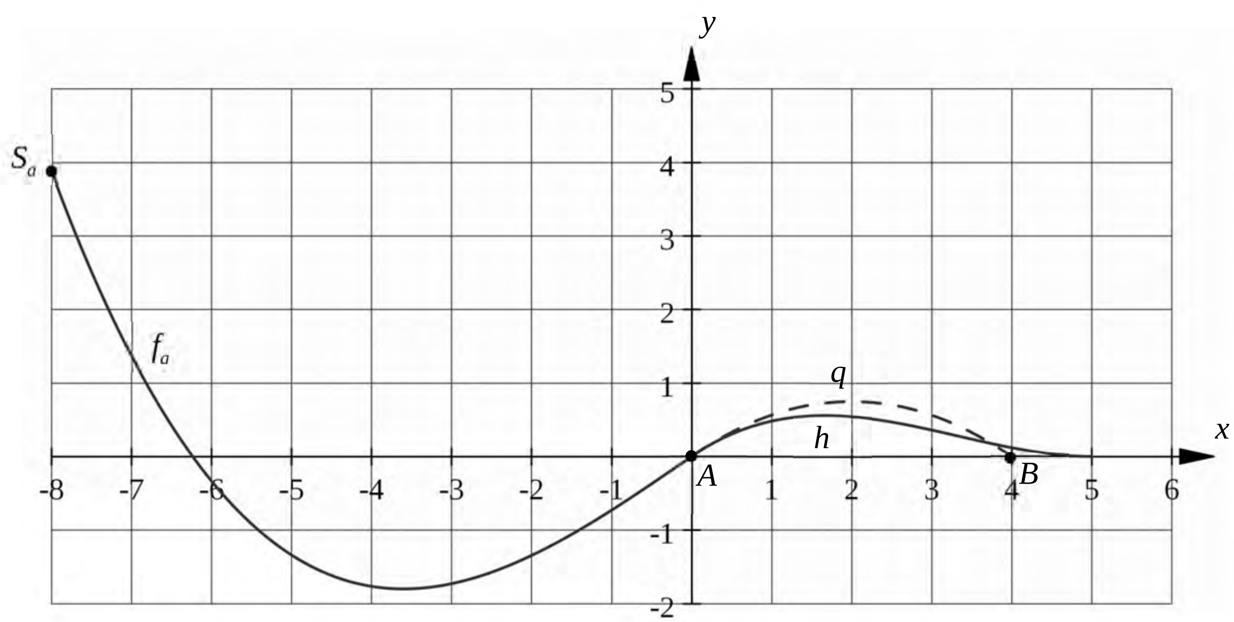


Abbildung 2

[2] In dieser vereinfachten Modellierung wird die räumliche Ausdehnung von Fahrer und BMX-Rad vernachlässigt.

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2013

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2013

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen einschließlich Funktionenscharen und Logarithmusfunktionen sowie notwendiger Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Für $-8 \le x \le 0$ und $3{,}2 \le a \le 4$ gilt:

$$f_a(x) < 0$$
$$\Leftrightarrow x \cdot \left(-\frac{1}{4a^2}x^2 + \frac{3}{4}\right) < 0$$
$$\Leftrightarrow x < 0 \wedge -\frac{1}{4a^2}x^2 + \frac{3}{4} > 0 \Leftrightarrow x < 0 \wedge 0 < x^2 < 3a^2 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \cdot a < x < 0.$$

Somit ist die Aussage aus der Aufgabenstellung nachgewiesen.

(2) Es gilt: $f_a'(x) = -\frac{3}{4a^2}x^2 + \frac{3}{4}$, $f_a''(x) = -\frac{3}{2a^2}x$, $-8 \le x \le 0$, $3{,}2 \le a \le 4$.

$f_a'(x_T) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4a^2}x_T^2 + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow x_T = -a$. [$-\sqrt{3} \cdot a < x_T < 0$ ist erfüllt.]

Da zusätzlich aus $-8 \le x < 0$ folgt $f_a''(x) > 0$, ist x_T lokale und zugleich globale Minimalstelle von f_a .

$$f_a(x_T) = -\frac{1}{4a^2} \cdot (-a)^3 + \frac{3}{4} \cdot (-a) = \frac{1}{4}a - \frac{3}{4}a = -\frac{1}{2}a .$$

Der tiefste Punkt des Sprungschanzen-Profils ist $T_a\left(-a \middle| -\frac{1}{2}a\right)$.

(3) $x_T = -a \wedge y_T = -\frac{1}{2}a \Rightarrow y_T = \frac{1}{2}x_T$.

Die gesuchte Funktion hat die Gleichung $k(x) = \frac{1}{2}x$ [für $-4 \le x \le 3{,}2$].

Modelllösung b)

(1) Sei $3{,}2 \le a \le 4$. Es gilt $f_a'(x) = -\frac{3}{4a^2}x^2 + \frac{3}{4}$ (vgl. a)).

$f_a'(-8) = -3 \Leftrightarrow -\frac{3}{4a^2}(-8)^2 + \frac{3}{4} = -3 \Leftrightarrow a = \frac{8\sqrt{5}}{5} \approx 3{,}58$.

Der Parameterwert, für den die Sprungschanze im Punkt S_a die Steigung -3 hat, ist

$a = \frac{8\sqrt{5}}{5}$.

$f_{\frac{8\sqrt{5}}{5}}(-8) = -\frac{1}{4 \cdot \frac{64}{5}}(-8)^3 + \frac{3}{4} \cdot (-8) = 4$.

Der Startpunkt der Sprungschanze liegt 4 Meter über dem Erdboden.

(2) Die durchschnittliche Steigung des Funktionsgraphen von f_a zwischen dem Punkt S_a und dem Punkt A ist die Steigung der Intervallsekante.

Für $a = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ ergibt sich: $\frac{y_A - y_{S_a}}{x_A - x_{S_a}} = \frac{0-4}{0-(-8)} = -\frac{1}{2}$.

Die Angabe der Firma ist korrekt.
Das negative Vorzeichen des angegebenen Wertes sagt lediglich aus, dass der Punkt A tiefer liegt als der Punkt S_a.

Über sonstige Eigenschaften des Verlaufs der Sprungschanze wie minimale oder maximale Steigung bzw. das Krümmungsverhalten enthält diese Angabe der Firma keine Information.
[Auch andere Eigenschaften können genannt werden.]

(3) Der Flächeninhalt des zwischen dem Graphen von f_a und der x-Achse eingeschlossenen Flächenstücks beträgt

$$\left|\int_{-a\sqrt{3}}^{0}\left(-\frac{1}{4a^2}x^3 + \frac{3}{4}x\right)dx\right| = \left|\left[-\frac{1}{16a^2}x^4 + \frac{3}{8}x^2\right]_{-a\sqrt{3}}^{0}\right| = \left|\frac{9}{16}a^2 - \frac{9}{8}a^2\right| = \frac{9}{16}a^2\ [\mathrm{m}^2].$$

Da die Sprungschanze 2 Meter breit ist, ergibt sich für $a = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ ein Erdvolumen von

$\frac{9}{8}a^2 = \frac{72}{5} = 14{,}4\ [\mathrm{m}^3]$.

Modelllösung c)

(1) $f_a'(0)=\frac{3}{4}$ unabhängig von a.

(2) Sei $q(x)=b\cdot x^2+c\cdot x+d$ und $q'(x)=2b\cdot x+c$. Folgende Bedingungen sind zu erfüllen:

$q(0)=f_a(0)=0$, $q'(0)=f_a'(0)=\frac{3}{4}$ sowie $q(4)=0$. Daraus ergibt sich $d=0$, $c=\frac{3}{4}$

und $b=-\frac{3}{16}$, schließlich $q(x)=-\frac{3}{16}x^2+\frac{3}{4}x$.

(3) Gesucht ist das [absolute] Maximum der Funktion d, mit der Gleichung

$d(x)=q(x)-h(x)=-\frac{3}{100}x^3+\frac{9}{80}x^2,\ 0\le x\le 4$.

Die Gleichung $d'(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{9}{100}x^2+\frac{9}{40}x=0$ hat die Lösungen $x_1=0$ und $x_2=\frac{5}{2}$.

Wegen $d(0)=d(x_1)=0$, $d(x_2)=\frac{15}{64}\approx 0{,}23$ und $d(4)=-0{,}12$ ist $d(x_2)$

[lokales und absolutes] Maximum der Funktion d.

Der gesuchte Punkt, in dem der BMX-Fahrer den größten vertikalen Abstand vom

geplanten Aufsprunghügel hätte, ist $C\left(\frac{5}{2}\middle|\frac{45}{64}\right)\approx C(2{,}5|0{,}7031)$.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**maximal erreichbare Punktzahl**
	Der Prüfling	
1	(1) weist nach, dass die durch die Funktion f_a beschriebene Profillinie der Sprungschanze im Bereich $-\sqrt{3}a < x < 0$ unterhalb des Niveaus des Erdbodens verläuft.	5
2	(2) bestimmt in Abhängigkeit von *a* die globale Minimalstelle der Funktion f_a.	7
3	(2) berechnet die *y*-Koordinate des Punktes T_a.	2
4	(3) gibt eine Gleichung der Funktion *k* an.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**maximal erreichbare Punktzahl**
	Der Prüfling	
1	(1) berechnet den Wert von *a*, für den die Sprungschanze im Punkt S_a die Steigung -3 hat.	3
2	(1) berechnet die Höhe, in der sich bei dieser Sprungschanze der Startpunkt S_a befindet.	2
3	(2) prüft die Angabe der Firma.	3
4	(2) beurteilt ihre Aussagekraft.	3
5	(3) berechnet das Erdvolumen.	6
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**maximal erreichbare Punktzahl**
	Der Prüfling	
1	(1) zeigt, dass alle Sprungschanzen im Punkt *A* dieselbe Steigung haben.	2
2	(2) leitet eine Gleichung der quadratischen Funktion *q* her.	6
3	(3) berechnet die Koordinaten des Punktes *C*, in dem der BMX-Fahrer den größten vertikalen Abstand vom geplanten Aufsprunghügel hätte.	7
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) weist nach, dass …	5			
2	(2) bestimmt in Abhängigkeit …	7			
3	(2) berechnet die *y*-Koordinate …	2			
4	(3) gibt eine Gleichung …	4			
sachlich richtige Alternativen: (18) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**18**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet den Wert …	3			
2	(1) berechnet die Höhe …	2			
3	(2) prüft die Angabe …	3			
4	(2) beurteilt ihre Aussagekraft.	3			
5	(3) berechnet das Erdvolumen.	6			
sachlich richtige Alternativen: (17) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**17**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass alle …	2			
2	(2) leitet eine Gleichung …	6			
3	(3) berechnet die Koordinaten …	7			
sachlich richtige Alternativen: (15) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**15**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2013

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_a mit der Gleichung

$$f_a(x) = \left(a^2x + a\right) \cdot e^{-ax}, \; x \in \mathbb{R},$$

wobei a eine positive reelle Zahl ist.

Der Graph der Funktion f_1 wird in der *Abbildung* auf Seite 2 dargestellt.

a) (1) *Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen der Funktion f_a mit den Koordinatenachsen.*

(2) *Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte der Funktion f_a.*

[Zur Kontrolle: $f_a'(x) = -a^3xe^{-ax}$; $f_a''(x) = a^3e^{-ax}(ax-1)$]

(3) *Begründen Sie, dass die Funktion f_a ein globales Maximum besitzt.*

(17 Punkte)

b) In a) (2) ergibt sich der Wendepunkt $W_a\left(\frac{1}{a}\middle|\frac{2a}{e}\right)$ für die Funktion f_a.

Weisen Sie nach, dass die Wendetangente g_a im Punkt W_a mit den positiven Koordinatenachsen eine Fläche einschließt, deren Inhalt unabhängig vom Parameter a ist.

[Zur Kontrolle: g_a besitzt die Gleichung $g_a(x) = -\frac{a^2}{e}x + \frac{3a}{e}$, $x \in \mathbb{R}$.]

(7 Punkte)

Name: ____________________

c) (1) *Bestimmen Sie mit Hilfe von Integrationsverfahren eine Stammfunktion F_a der Funktion f_a.*

[Zur Kontrolle: Die Funktion F_a mit der Gleichung $F_a(x) = -(ax+2)\cdot e^{-ax}$, $x \in \mathbb{R}$, ist eine mögliche Stammfunktion.]

(2) Der Punkt W_a ist wie in b) definiert, und der Punkt $H_a(0\,|\,a)$ ist ein Hochpunkt der Funktion f_a. Der Punkt O sei der Ursprung des Koordinatensystems.

Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die im I. Quadranten von dem Graphen der Funktion f_a und den Ursprungsgeraden OH_a und OW_a eingeschlossen wird.

(12 Punkte)

d) (1) Man betrachtet die Funktion f_1 der Schar, d. h., es gilt $f_1(x) = (x+1)\cdot e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Weisen Sie nach: Für einen Punkt $P(u\,|\,f_1(u))$ des Graphen von f_1 ist die Ursprungsgerade OP genau dann orthogonal zur Tangente in P an den Graphen von f_1, wenn $e^{2u} - u - 1 = 0$ gilt.

(2) Gegeben ist die Funktion h mit der Gleichung $h(x) = e^{2x} - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

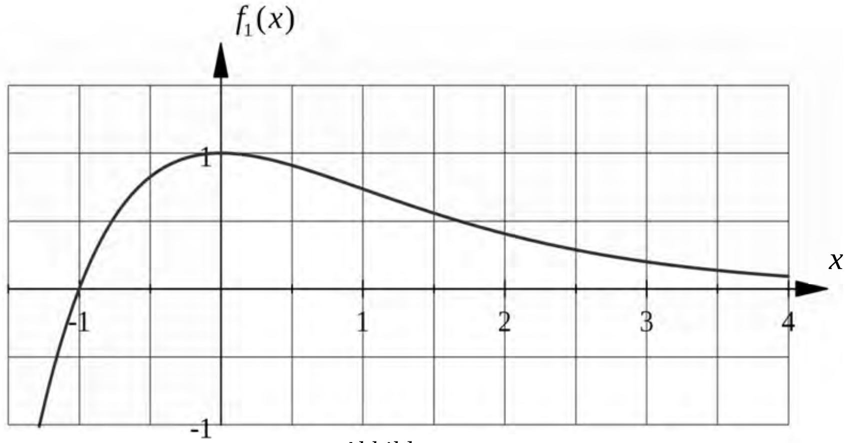
Zeigen Sie, dass die Funktion h für $x < -\ln(\sqrt{2})$ streng monoton fallend und für $x > -\ln(\sqrt{2})$ streng monoton steigend ist.

(3) *Begründen Sie, dass die Funktion h im Intervall $]-\infty, -\ln(\sqrt{2})]$ einen Vorzeichenwechsel besitzt.*

(4) *Beweisen Sie: Es gibt genau zwei Punkte auf dem Graphen von f_1, welche die Orthogonalitätsbedingung aus d) (1) erfüllen.*

[Hinweis: Ohne Begründung darf benutzt werden, dass jede streng monotone Funktion höchstens eine Nullstelle besitzt.]

(14 Punkte)



Abbildung

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2013

Mathematik, Leistungskurs

---

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2013

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen einschließlich Funktionenscharen und Logarithmusfunktionen sowie notwendiger Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Integrationsregeln (partielle Integration, Substitution)
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

---

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Schnittpunkt mit der *y*-Achse: Wegen $f_a(0)=a$ ist $S_y(0\,|\,a)$ der Schnittpunkt des Graphen von f_a mit der *y*-Achse.

Schnittpunkte mit der *x*-Achse: $f_a(x)=0$ ist äquivalent zu $a^2x+a=0$, d. h. $x=-\frac{1}{a}$.

Somit ist $S_x\left(-\frac{1}{a}\,|\,0\right)$ der einzige Schnittpunkt des Graphen von f_a mit der *x*-Achse.

(2) Man erhält folgende Ableitungen:

$f_a'(x)=-a^3xe^{-ax}$, $f_a''(x)=a^3e^{-ax}(ax-1)$, $f_a'''(x)=a^4e^{-ax}(2-ax)$.

Extrempunkte: $f_a'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$. Wegen $f_a''(0)=-a^3<0$ ist $f_a(0)=a$ lokales Maximum der Funktion f_a. Insgesamt gesehen ist der (lokale) Hochpunkt $H_a(0\,|\,a)$ der einzige Extrempunkt der Funktion f_a.

Wendepunkte: $f_a''(x)=0 \Leftrightarrow a^3e^{-ax}(ax-1)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{a}$. Wegen $f'''\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{a^4}{e}\neq 0$ ist $x=\frac{1}{a}$ eine Wendestelle der Funktion f_a. Da $f_a\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{2a}{e}$ ist, ergibt sich der zugehörige Wendepunkt $W_a\left(\frac{1}{a}\,|\,\frac{2a}{e}\right)$.

(3) Da nach a) (2) $x=0$ die einzige Nullstelle von f_a' ist und $f_a(0)=a$ ein lokales Maximum der Funktion f_a ist, ergibt sich in diesem Fall, dass *a* auch globales Maximum der Funktion f_a ist.

Modelllösung b)

Die Gleichung der Wendetangente g_a im Punkt W_a lautet $g_a(x)=f_a'\left(\frac{1}{a}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{a}\right)+\frac{2a}{e}$, $x\in\mathbb{R}$.

Wegen $f_a'\left(\frac{1}{a}\right)=-\frac{a^2}{e}$ erhält man $g_a(x)=-\frac{a^2}{e}x+\frac{3a}{e}$, $x\in\mathbb{R}$.

Offensichtlich schneidet g_a die Koordinatenachsen in den Punkten $P_a\left(\frac{3}{a}\,|\,0\right)$ und $Q_a\left(0\,|\,\frac{3a}{e}\right)$.

Ist *O* der Ursprung des Koordinatensystems, so wird der Flächeninhalt $A(a)$ des Dreiecks OP_aQ_a gesucht. Man erhält $A(a)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{a}\cdot\frac{3a}{e}=\frac{9}{2e}$. Hieraus folgt die Behauptung.

Modelllösung c)

(1) Mit Hilfe partieller Integration erhält man

$$\int\left(a^2x+a\right)\cdot e^{-ax}\,dx=\left(a^2x+a\right)\cdot\left(-\tfrac{1}{a}\right)\cdot e^{-ax}-\int a^2\cdot\left(-\tfrac{1}{a}\right)\cdot e^{-ax}\,dx=$$

$$\left(-ax-1\right)\cdot e^{-ax}+\int a\cdot e^{-ax}\,dx=\left(-ax-1\right)\cdot e^{-ax}-e^{-ax}+c=-\left(ax+2\right)\cdot e^{-ax}+c\,.$$

(2) Der gesuchte Flächeninhalt sei $F(a)$. Dann gilt

$$F(a)=\int_0^{\frac{1}{a}} f_a(x)\,dx-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{a}\cdot\tfrac{2a}{e}=\Big[-\left(ax+2\right)\cdot e^{-ax}\Big]_0^{\frac{1}{a}}-\tfrac{1}{e}=2-\tfrac{4}{e}\,.$$

Modelllösung d)

(1) Es sei $u\neq 0$. Die Steigung der Ursprungsgeraden *OP* ist $\dfrac{f_1(u)}{u}$ und die Steigung der Tangente in *P* an den Graphen von f_1 ist $f_1'(u)$. Beide Geraden sind genau dann orthogonal, wenn $\dfrac{f_1(u)}{u}\cdot f_1'(u)=-1$ ist. Diese Gleichung ist äquivalent zu

$\dfrac{(u+1)e^{-u}}{u}\cdot\left(-u\cdot e^{-u}\right)=-1$ und somit zu $(u+1)e^{-2u}=1$, was $e^{2u}-u-1=0$ heißt.

Für $u=0$ ist wegen a) (2) der Punkt *P* identisch mit dem Hochpunkt $H_1(0\,|\,1)$ des Graphen von f_1. Somit ist in diesem Fall die Ursprungsgerade *OP* orthogonal zu der Tangente in *P* an den Graphen von f_1. Gleichzeitig erfüllt 0 die Gleichung $e^{2u}-u-1=0$.
Insgesamt gesehen ergibt sich die Aussage aus der Aufgabenstellung.

(2) Es gilt $h'(x)=2\cdot e^{2x}-1$. Man erhält

$h'(x)=0 \Leftrightarrow 2\cdot e^{2x}=1 \Leftrightarrow 2x=-\ln 2 \Leftrightarrow x=-\ln\left(\sqrt{2}\right)$. Da die *e*-Funktion streng monoton steigend ist, folgt die Behauptung mit Hilfe des Monotoniesatzes.

(3) Es gilt (zum Beispiel) $h(-1)=e^{-2}>0$ und $h\left(-\ln\left(\sqrt{2}\right)\right)\approx -0{,}15$. Damit folgt die Behauptung.

(4) Da jede streng monotone Funktion höchstens eine Nullstelle besitzt, hat wegen d (2) die Gleichung $e^{2u} - u - 1 = 0$ höchstens zwei Lösungen. Nach d) (1) gibt es dann höchstens zwei Punkte auf dem Graphen von f_1, welche die Orthogonalitätsbedingung aus d) (3) erfüllen.

Sicherlich ist 0 eine Lösung der Gleichung $e^{2u} - u - 1 = 0$. Diese Gleichung besitzt wegen d) (3) [und der Differenzierbarkeit der Funktion *h*] eine weitere Lösung. Wegen d) (1) existieren somit mindestens zwei Punkte auf dem Graphen von f_1, welche die Orthogonalitätsbedingung aus d) (1) erfüllen.

Insgesamt gesehen ergibt sich die Behauptung.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) bestimmt die Koordinaten der Schnittpunkte der Funktion f_a mit den Koordinatenachsen.	3
2	(2) ermittelt die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte der Funktion f_a.	11
3	(3) begründet, dass die Funktion f_a ein globales Maximum besitzt.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	weist die Gültigkeit der Aussage aus der Aufgabenstellung nach.	7
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) bestimmt mit Hilfe von Integrationsverfahren eine Stammfunktion F_a der Funktion f_a.	6
2	(2) ermittelt den Inhalt der in der Aufgabenstellung beschriebenen Fläche.	6
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) weist den in der Aufgabenstellung genannten Sachverhalt nach.	5
2	(2) zeigt die Gültigkeit der Aussage aus der Aufgabenstellung.	3
3	(3) begründet die Aussage aus der Aufgabenstellung.	2
4	(4) beweist die Behauptung aus der Aufgabenstellung.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die Koordinaten …	3			
2	(2) ermittelt die Koordinaten …	11			
3	(3) begründet, dass die …	3			
sachlich richtige Alternativen: (17) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**17**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	weist die Gültigkeit …	7			
sachlich richtige Alternativen: (7) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**7**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt mit Hilfe …	6			
2	(2) ermittelt den Inhalt …	6			
sachlich richtige Alternativen: (12) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**12**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) weist den in …	5			
2	(2) zeigt die Gültigkeit …	3			
3	(3) begründet die Aussage …	2			
4	(4) beweist die Behauptung …	4			
sachlich richtige Alternativen: (14) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe d)	**14**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2013

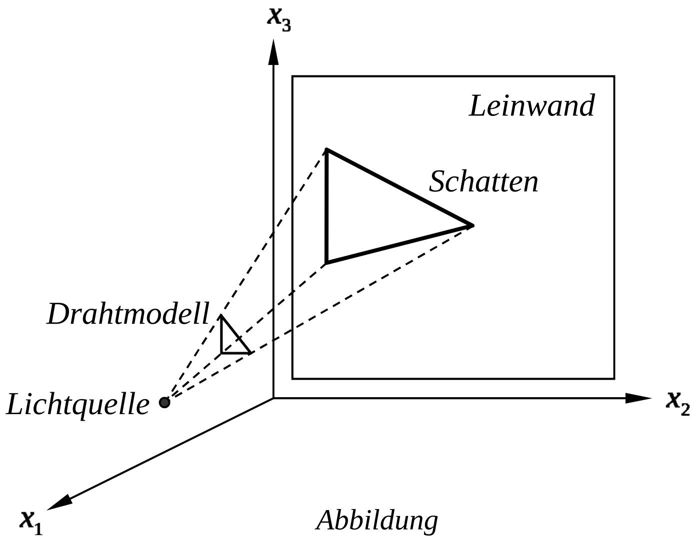
Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

An einer Schule wird eine Mathematikausstellung unter dem Motto „Mathematik zum Anfassen und Mitmachen" ausgerichtet.

Eines der ausgestellten Experimente besteht aus einer annähernd punktförmigen Lichtquelle, einer Leinwand, auf die verschiedene unregelmäßige Dreiecke gezeichnet sind, und einem Drahtmodell eines gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks. Dieses Drahtmodell gilt es so zwischen Lichtquelle und Leinwand zu halten, dass sein Schatten exakt mit einem der Dreiecke auf der Leinwand zur Deckung gebracht wird.

Die *Abbildung* zeigt eine Prinzipdarstellung des Experiments.



Abbildung

In dieser Aufgabe ist die Leinwand Teil der x_2x_3-Ebene, die Position der Lichtquelle ist $L(40|10|10)$, die Längeneinheit 1 dm.

Name: ____________________

Das Drahtmodell wird zunächst so zwischen Lichtquelle und Leinwand gehalten, dass seine Ecken in den Punkten $A(30|10|10)$, $B(32|11|12)$ und $C(31|12|8)$ liegen.

a) (1) *Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks ABC.*

(2) *Bestimmen Sie die Position des rechten Winkels im rechtwinkligen Dreieck ABC und berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.*

(10 Punkte)

b) (1) *Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte A', B' und C' des Schattens, den das Drahtmodell auf die Leinwand wirft.*

(2) *Zeigen Sie, dass bei der Projektion des Dreiecks ABC auf das Schattendreieck $A'B'C'$ die Größen aller Innenwinkel verändert werden.*

[Zur Kontrolle: $A'(0|10|10)$, $B'(0|15|20)$, $C'\left(0\left|\frac{170}{9}\right|\frac{10}{9}\right)$] (19 Punkte)

Name: ____________________

c) Auf der Leinwand ist das Dreieck $R'S'T'$ mit den Eckpunkten $R'\left(0 \left| \frac{22}{3} \right| \frac{22}{3}\right)$, S' und T' aufgezeichnet. Das Drahtmodell wird so zwischen Lichtquelle und Leinwand gehalten, dass sein Schatten mit dem Dreieck $R'S'T'$ auf der Leinwand zur Deckung kommt.
Die Positionen $S(26\,|\,11\,|\,7)$ und $T(23\,|\,8\,|\,7)$ der beiden 45°-Ecken des Drahtmodells werden als bekannt vorausgesetzt, während die Position *R* der 90°-Ecke, deren Schatten auf der Leinwand die Position R' hat, bestimmt werden soll.

(1) *Geben Sie eine Gleichung der Geraden LR' an, auf der der Lichtstrahl verläuft, der von der Position L der Lichtquelle ausgeht und im Punkt R' auf die Leinwand trifft.*

(2) *Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E, in der alle Punkte liegen, die von den Punkten S und T gleichen Abstand haben.*

[Zur Kontrolle: $E: x_1 + x_2 = 34$]

(3) *Berechnen Sie nun die Koordinaten der Position R der 90°-Ecke des Drahtmodells.*

(4) Die Position *R* könnte nicht mit Hilfe der Ebene *E* aus (2) bestimmt werden, wenn die Position der Lichtquelle *L* in dieser Ebene läge.

Beschreiben Sie einen Lösungsweg zur Bestimmung der Position R der 90°-Ecke des Drahtmodells, der die Ebene E aus (2) ***nicht*** *verwendet.*

(21 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2013

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie ohne Alternative

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2013

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
   - Lineare Abhängigkeit von Vektoren, Parameterformen von Geraden- und Ebenengleichungen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität, Winkel und Länge von Vektoren

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Die Seitenlängen des Dreiecks ABC betragen

$$|\overrightarrow{AB}| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = 3\,[\text{dm}],\ |\overrightarrow{AC}| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = 3\,[\text{dm}] \text{ und } |\overrightarrow{BC}| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\| = 3\cdot\sqrt{2}\,[\text{dm}].$$

(2) Da die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ gleich lang sind und die Seite $\overline{BC}$ um den Faktor $\sqrt{2}$ länger ist als diese, ist das Dreieck ABC gleichschenklig rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei A. Der Flächeninhalt beträgt $\frac{1}{2}\cdot 3\text{ dm}\cdot 3\text{ dm} = 4{,}5\text{ dm}^2$.

[Alternativ kann die Position des rechten Winkels mit Hilfe des Skalarprodukts nachgewiesen werden.]

Modelllösung b)

(1) Die gesuchten Eckpunkte A', B' und C' des Drahtmodellschattens auf der Leinwand sind die Schnittpunkte der Geraden LA, LB bzw. LC mit der x_2x_3-Ebene ($x_1 = 0$).

$LA: \vec{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + a\cdot\begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ schneidet für $a = 4$ die x_2x_3-Ebene im Punkt $A'(0\,|\,10\,|\,10)$.

$LB: \vec{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + b\cdot\begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ schneidet für $b = 5$ die x_2x_3-Ebene im Punkt $B'(0\,|\,15\,|\,20)$.

$LC: \vec{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + c\cdot\begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ schneidet für $c = \frac{40}{9}$ die x_2x_3-Ebene im Punkt $C'\left(0\,\middle|\,\frac{170}{9}\,\middle|\,\frac{10}{9}\right)$.

(2) Es gilt:

$$\cos(\alpha') = \frac{\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'C'}}{|A'B'| \cdot |A'C'|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 80/9 \\ -80/9 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 80/9 \\ -80/9 \end{pmatrix}\right|} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \approx -0{,}3162 \Rightarrow \alpha' \approx 108{,}4°\,,$$

$$\cos(\beta') = \frac{\overrightarrow{B'A'} \cdot \overrightarrow{B'C'}}{|B'A'| \cdot |B'C'|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 35/9 \\ -170/9 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 35/9 \\ -170/9 \end{pmatrix}\right|} \approx 0{,}7859 \Rightarrow \beta' \approx 38{,}2°$$

und $\gamma' = 180° - \alpha' - \beta' \approx 33{,}4°$.

Da die Winkel des Drahtmodells 90° bei A und jeweils 45° bei B und C betragen, ist die Behauptung gezeigt.

[Auch andere Lösungswege sind möglich.]

Modelllösung c)

(1) Es gilt: $\vec{x}_L - \vec{x}_{R'} = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 22/3 \\ 22/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 8/3 \\ 8/3 \end{pmatrix} = \frac{8}{3} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Eine Gleichung der gesuchten Geraden ist $LR': \vec{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$.

(2) Die gesuchte Ebene E ist orthogonal zur Strecke $\overline{ST}$ und schneidet diese in deren Mittelpunkt $M\left(\frac{26+23}{2} \middle| \frac{11+8}{2} \middle| \frac{7+7}{2}\right) = M\left(\frac{49}{2} \middle| \frac{19}{2} \middle| 7\right)$.

Ein Normalenvektor der Ebene E ist $\vec{n} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{x}_S - \vec{x}_T) = \frac{1}{3} \cdot \left(\begin{pmatrix} 26 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 23 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

eine Normalengleichung der Ebene $E: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 49/2 \\ 19/2 \\ 7 \end{pmatrix} = 34$.

(3) Die Position *R* der 90°-Ecke des Drahtmodells ist der Schnittpunkt der Geraden LR' mit der Ebene *E* aus (2).

Es gilt: $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}40\\10\\10\end{pmatrix}+t_R\cdot\begin{pmatrix}15\\1\\1\end{pmatrix}\right)=34 \Leftrightarrow (40+15t_R)+(10+t_R)=34 \Leftrightarrow t_R=-1$ und

$$\vec{x}_R=\begin{pmatrix}40\\10\\10\end{pmatrix}+t_R\cdot\begin{pmatrix}15\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40\\10\\10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}15\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\\9\\9\end{pmatrix}.$$

Die gesuchte Position ist somit $R(25|9|9)$.

[Weitere Überprüfungen von Abständen oder Winkeln erübrigen sich.]

(4) Die Position *R* der 90°-Ecke des Drahtmodells, deren Schatten die Position R' hat, liegt auf der Strecke $\overline{LR'}$, wenn für den zugehörigen Ortsvektor $\vec{x}_R$ gilt

$\vec{x}_R=\vec{x}_L+t_R\cdot(\vec{x}_{R'}-\vec{x}_L)$ mit $0\le t_R\le 1$.

R ist eine geeignete Position der 90°-Ecke des Drahtmodells, wenn $\vec{x}_R$ die Bedingungen $|\vec{x}_S-\vec{x}_R|=3$ und $|\vec{x}_T-\vec{x}_R|=3$ bzw. $(\vec{x}_S-\vec{x}_R)^2=9$ und $(\vec{x}_T-\vec{x}_R)^2=9$ erfüllt.

Diese beiden quadratischen Gleichungen für den Parameter t_R haben wegen der in der Aufgabenstellung vorausgesetzten Existenz der Position *R* [wenigstens] eine gemeinsame Lösung, und zwar im Intervall $[0;1]$, mit deren Hilfe die Koordinaten von *R* berechnet werden können.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) berechnet die Seitenlängen des Dreiecks *ABC*.	4
2	(2) bestimmt die Position des rechten Winkels im rechtwinkligen Dreieck *ABC*.	3
3	(2) berechnet den Flächeninhalt des Dreiecks *ABC*.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) ermittelt einen Ansatz zur Bestimmung der gesuchten Eckpunkte des Schattens.	3
2	(1) gibt Gleichungen der Geraden *LA*, *LB* und *LC* an.	3
3	(1) berechnet die Koordinaten der gesuchten Eckpunkte des Schattens.	4
4	(2) berechnet die Innenwinkel des Schattendreiecks $A'B'C'$.	6
5	(2) gibt die Größen der Innenwinkel des Dreiecks *ABC* an und vergleicht sie mit den Innenwinkeln des Schattendreiecks.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) gibt eine Gleichung der Geraden LR' an.	3
2	(2) bestimmt eine Gleichung der Ebene *E*, in der alle Punkte liegen, die von *S* und *T* gleichen Abstand haben.	8
3	(3) berechnet die Koordinaten der Position *R* der 90°-Ecke des Drahtmodells.	5
4	(4) beschreibt einen Lösungsweg zur Bestimmung der Positionen *R*, der die Ebene *E* nicht verwendet.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:______________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die Seitenlängen …	4			
2	(2) bestimmt die Position …	3			
3	(2) berechnet den Flächeninhalt …	3			
sachlich richtige Alternativen: (10) ………………………………………………………………………. ……………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**10**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt einen Ansatz …	3			
2	(1) gibt Gleichungen der …	3			
3	(1) berechnet die Koordinaten …	4			
4	(2) berechnet die Innenwinkel …	6			
5	(2) gibt die Größen …	3			
sachlich richtige Alternativen: (19) ………………………………………………………………………. ……………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**19**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt eine Gleichung …	3			
2	(2) bestimmt eine Gleichung …	8			
3	(3) berechnet die Koordinaten …	5			
4	(4) beschreibt einen Lösungsweg …	5			
sachlich richtige Alternativen: (21) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe d)	**21**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**150**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2013

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

In der Ebene $\mathbb{R}^2$ ist die Abbildung α mit der Gleichung

$$\alpha(\vec{x}) = M \cdot \vec{x} + \vec{c} \quad \text{mit } M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix},\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

durch die folgenden Eigenschaften gegeben:

- Der Punkt $P(0\,|\,4)$ wird durch α auf den Punkt $P'(6\,|\,1)$ abgebildet.
- Genau die Punkte der Geraden $g:\ x_1 - x_2 = -1$ werden durch α auf sich selbst abgebildet.

a) *Bestimmen Sie rechnerisch die Matrix M und den Verschiebungsvektor $\vec{c}$ der Abbildung α mit Hilfe geeigneter Punkte und ihrer Bildpunkte.*

[Zur Kontrolle: $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$] (10 Punkte)

b) (1) *Zeigen Sie, dass $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$ die Eigenwerte der Matrix M sind.*

(2) *Bestimmen Sie zu diesen Eigenwerten je einen Eigenvektor.*

(3) *Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse aus (1) und (2) im Hinblick auf Existenz und Lage von Fixgeraden, d. h. von Geraden, die durch α auf sich selbst abgebildet werden.*

(14 Punkte)

Name: ____________________

c) (1) *Zeigen Sie, dass jede Gerade, die durch einen Punkt, der nicht auf der Geraden g liegt, und seinen Bildpunkt verläuft, parallel zur Geraden PP' ist.*

(2) Der Bildpunkt Q' des Punktes $Q(3\,|\,0)$ soll nun geometrisch konstruiert werden.

Stellen Sie diese geometrische Konstruktion graphisch dar und erklären Sie Ihr Vorgehen.

(14 Punkte)

d) Die Abbildung α gehört zu einer Menge von Abbildungen α_k, die die Abbildungsgleichung $\alpha_k(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2k & 2 \\ k & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $k \neq 0$ besitzen.

(1) *Zeigen Sie, dass alle Abbildungen α_k den Punkt $P(0\,|\,4)$ auf denselben Bildpunkt P' abbilden.*

(2) *Zeigen Sie, dass alle Abbildungen α_k genau einen gemeinsamen Fixpunkt besitzen.*

(3) Eine Abbildung α_k heißt „Schrägspiegelung“, wenn die zugehörige Matrix *M* die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ besitzt.

Bestimmen Sie den Wert von k, für den die Abbildung α_k eine Schrägspiegelung ist.

(12 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2013

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie mit Alternative 1 (Abbildungsmatrizen)

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2013

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
   - Lineare Abhängigkeit von Vektoren, Parameterformen von Geraden- und Ebenengleichungen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität, Winkel und Länge von Vektoren
   - Normalenformen von Ebenengleichungen, Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen
   - Abstandsprobleme (Abstand Punkt – Ebene)

   Alternative 1:
   - Abbildungsmatrizen, Matrizenmultiplikation als Abbildungsverkettung, inverse Matrizen und Abbildungen, Eigenwerte und Eigenvektoren

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Neben dem gegebenen Punkt $P(0|4)$ und seinem Bildpunkt $P'(6|1)$ kann man zwei Punkte auf der Fixpunktgeraden wählen, die ja mit ihren Bildpunkten übereinstimmen:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4b_1 + c_1 = 6 \\ 4b_2 + c_2 = 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} b_1 + c_1 = 0 \\ b_2 + c_2 = 1 \end{vmatrix}$$

Hieraus ergibt sich $b_2 = 0$, $c_2 = 1$, $b_1 = 2$, $c_1 = -2$.

Mit $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 + 2b_1 + c_1 = 1 \\ a_2 + 2b_2 + c_2 = 2 \end{vmatrix}$ ergibt sich $a_1 = -1$ und $a_2 = 1$.

Damit ist das Kontrollergebnis bestätigt.

Modelllösung b)

(1) Die charakteristische Gleichung von *M* lautet $(-1-\lambda)\cdot(-\lambda) = 2$.

Sie hat die Lösungen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$.

(2) Aus $\begin{pmatrix} -1-1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1$.

Aus $\begin{pmatrix} -1+2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt: $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor zu $\lambda_2 = -2$.

[Jedes vom Nullvektor verschiedene Vielfache eines dieser Eigenvektoren ist ebenfalls Eigenvektor.]

(3) Der Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ ist Richtungsvektor der Fixpunktgeraden *g*.

Jede Fixgerade, die von der Fixpunktgeraden *g* verschieden ist, hat als Richtungsvektor einen zum Eigenwert $\lambda_2 = -2$ gehörigen Eigenvektor, z. B. $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Daher sind alle von *g* verschiedenen Fixgeraden parallel und schneiden die Gerade *g* in genau einem Fixpunkt.
Wählt man umgekehrt eine Gerade durch einen beliebigen Punkt der Geraden *g* mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, so erhält man eine von *g* verschiedene Fixgerade.

Modelllösung c)

(1) Sei $R(x_1 \mid x_2)$ ein beliebiger Punkt, der nicht auf der Geraden *g* liegt und dessen Bildpunkt R' gemäß den angegebenen Eigenschaften der Abbildung α von *R* verschieden ist.

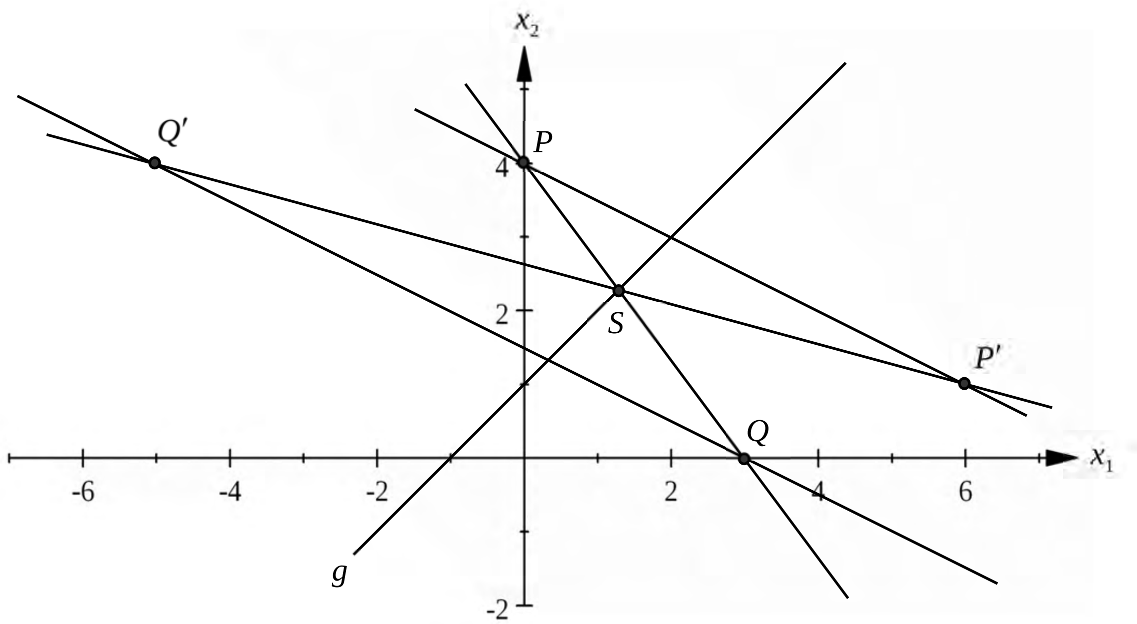
Man erhält

$$\overrightarrow{RR'} = \vec{x}_{R'} - \vec{x}_R = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1 - x_2 + 1)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad [x_1 - x_2 + 1 \neq 0].$$

Daraus folgt: Die Gerade RR' verläuft parallel zur Geraden PP'.

(2)



Da jede Gerade durch einen Punkt, der nicht auf der Geraden *g* liegt, und dessen Bildpunkt parallel zur Geraden PP' ist, muss der Punkt Q' auf der Parallelen *p* zur Geraden PP' durch den Punkt *Q* liegen.

Die Gerade *PQ* schneidet die Fixpunktgerade *a* in einem Punkt $S = S'$. Dieser Punkt muss auch auf der Bildgeraden $P'Q'$ liegen. Man erhält somit den Punkt Q' als Schnittpunkt der Geraden $P'S'$ mit der oben genannten Parallelen *p*.

Modelllösung d)

(1) Wegen $\begin{pmatrix} 1-2k & 2 \\ k & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ wird $P(0\,|\,4)$ von allen Abbildungen α_k auf $P'(6\,|\,1)$ abgebildet.

(2) $\begin{pmatrix} 1-2k & 2 \\ k & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} (1-2k)x_1 + 2x_2 - 2 = x_1 \\ kx_1 + 1 = x_2 \end{matrix} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} x_2 = kx_1 + 1 \\ 0 = 0 \end{matrix} \right|$.

$x_2 = kx_1 + 1$ ist eine Gleichung der Fixpunktgeraden g_k der Abbildung α_k.

Ist $F(u\,|\,v)$ ein gemeinsamer Fixpunkt aller Abbildungen α_k, so gilt notwendigerweise für $k_1 \neq k_2$: $v = k_1 u + 1$ und $v = k_2 u + 1$. Daraus folgt $u = 0$ und $v = 1$.

Sicherlich ist $F(0\,|\,1)$ ein Fixpunkt aller Abbildungen α_k.

(3) Die charakteristische Gleichung lautet hier $(1-2k-\lambda)\cdot(-\lambda) = 2k$.

Sie hat die Lösungen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2k$.

Für $k = \frac{1}{2}$ ist die Abbildung α_k eine Schrägspiegelung.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	gibt geeignete Punkte an.	4
2	bestimmt rechnerisch die Matrix M und den Verschiebungsvektor $\vec{c}$.	6
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) zeigt, dass $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$ die Eigenwerte der Matrix *M* sind.	3
2	(2) bestimmt zu diesen Eigenwerten je einen Eigenvektor.	4
3	(3) interpretiert die Ergebnisse aus (1) und (2) im Hinblick auf Existenz und Lage von Fixgeraden.	7
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) zeigt, dass jede Gerade, die durch einen Punkt, der nicht auf der Geraden *g* liegt, und seinen Bildpunkt verläuft, parallel zur Geraden PP' ist.	4
2	(2) stellt die Konstruktion des Bildpunktes Q' graphisch dar.	6
3	(2) erklärt sein Vorgehen.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) zeigt, dass alle Abbildungen α_k den Punkt $P(0 \mid 4)$ auf denselben Bildpunkt P' abbilden.	3
2	(2) zeigt, dass alle Abbildungen α_k genau einen gemeinsamen Fixpunkt besitzen.	6
3	(3) bestimmt den Wert von *k*, für den die Abbildung α_k eine Schrägspiegelung ist.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	gibt geeignete Punkte …	4			
2	bestimmt rechnerisch die …	6			
sachlich richtige Alternativen: (10) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**10**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass $\lambda_1 = 1$ …	3			
2	(2) bestimmt zu diesen …	4			
3	(3) interpretiert die Ergebnisse …	7			
sachlich richtige Alternativen: (14) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**14**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass jede…	4			
2	(2) stellt die Konstruktion …	6			
3	(2) erklärt sein Vorgehen.	4			
sachlich richtige Alternativen: (14) …………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**14**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass alle …	3			
2	(2) zeigt, dass alle …	6			
3	(3) bestimmt den Wert …	3			
sachlich richtige Alternativen: (12) …………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe d)	**12**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**150**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ____________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: ______________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: __________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2013

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Von einem Forstbetrieb werden auf verschiedenen Waldflächen Tannen gezogen.[1] Entsprechend ihrer Höhe werden die Tannen in drei Größenklassen eingeteilt: Tannen, die weniger als einen Meter groß sind, gehören zur Größenklasse K (klein); Tannen, die mindestens einen Meter, aber weniger als zwei Meter groß sind, gehören zur Größenklasse M (mittel); Tannen, die mindestens zwei Meter groß sind, gehören zur Größenklasse G (groß).

Jeweils zu Beginn eines festen Zeitraums (Wachstumsperiode), auf den sich im Folgenden die Übergänge zwischen den drei Größenklassen beziehen, wird eine Bestandsaufnahme durchgeführt. Die Übergangsquoten berücksichtigen, dass abgestorbene, kranke oder beschädigte Bäume im Laufe jeder Wachstumsperiode aus dem Bestand entfernt werden.

a) Auf einer der Waldflächen erreichen von den Tannen der Größenklasse K innerhalb einer Wachstumsperiode 50 % die Größenklasse M und 10 % die Größenklasse G, während 30 % in der Größenklasse K verbleiben. Von den Tannen der Größenklasse M erreichen innerhalb einer Wachstumsperiode 55 % die Größenklasse G, während 40 % in der Größenklasse M verbleiben. Von den Tannen der Größenklasse G sind am Ende einer Wachstumsperiode noch 98 % in der Größenklasse G.

   Stellen Sie dieses Wachstumsverhalten durch ein Übergangsdiagramm dar und bestimmen Sie eine Übergangsmatrix, die dieses Wachstumsverhalten beschreibt.

   (10 Punkte)

[1] Dort wachsen nur Bäume, die von dem Forstbetrieb angepflanzt wurden.

Name: ____________________

Auf einer anderen Waldfläche wird eine andere Art von Tannen gezogen. Eine Zählung ergab die folgende Übergangsmatrix $\boldsymbol{A}$ für das Übergangsverhalten zwischen den oben genannten Größenklassen innerhalb einer Wachstumsperiode:

$$\begin{array}{cc} & \textit{von:}\quad \begin{array}{ccc} \text{K} & \text{M} & \text{G} \end{array} \\ \textit{nach:} & \\ \begin{array}{c} \text{K} \\ \text{M} \\ \text{G} \end{array} & \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}55 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}95 \end{pmatrix} \end{array}$$

In Teilaufgabe b) wird angenommen, dass diese Übergangsquoten auch für die vorangegangenen und folgenden Wachstumsperioden gelten.

b) Die Bestandsaufnahme zu Beginn einer bestimmten Wachstumsperiode ergibt 450 Tannen der Größenklasse K, 4230 Tannen der Größenklasse M und 5320 Tannen der Größenklasse G.

(1) *Bestimmen Sie die Anzahl der Tannen in den einzelnen Größenklassen am Ende dieser Wachstumsperiode.*

(2) *Bestimmen Sie die Anzahl der Tannen in den einzelnen Größenklassen eine Wachstumsperiode vor dem Zeitpunkt der Bestandsaufnahme.*

(3) *Zeigen Sie, dass der Gesamtbestand an Tannen am Ende einer beliebigen Wachstumsperiode 95 % des Bestandes zu Beginn dieser Wachstumsperiode beträgt.*

(4) *Berechnen Sie, nach wie vielen Wachstumsperioden erstmals weniger als 60 % des ursprünglichen Gesamtbestandes an Tannen vorhanden sind.*

(18 Punkte)

Nun wird davon ausgegangen, dass jeweils am Ende einer Wachstumsperiode, innerhalb derer sich der Bestand zunächst gemäß der Übergangsmatrix $\boldsymbol{A}$ entwickelt hat, in jeder der drei Größenklassen zusätzliches Nutzholz geschlagen wird.
Insgesamt werden am Ende einer Wachstumsperiode 20 % des dann vorhandenen Bestandes der Größenklasse K, 30 % des dann vorhandenen Bestandes der Größenklasse M und 45 % des dann vorhandenen Bestandes der Größenklasse G abgeholzt.
Anschließend werden in der Größenklasse K so viele Tannen neu gesetzt, wie zuvor insgesamt in allen drei Größenklassen gefällt wurden.

Name: ____________________

c) (1) *Bestimmen Sie ausgehend von einem beliebigen Bestandsvektor* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ *zu Beginn einer Wachstumsperiode, wie viele Tannen in den einzelnen Größenklassen am Ende der Wachstumsperiode* **nach** *dem Fällen und* **vor** *dem Wiederaufforsten* **vorhanden** *sind.*

[Kontrollergebnis: $\begin{pmatrix} 0,2x_1 \\ 0,49x_1 + 0,385x_2 \\ 0,22x_2 + 0,5225x_3 \end{pmatrix}$]

(2) Gesucht ist eine Übergangsmatrix ***C***, die den Übergang zwischen den Größenklassen K, M und G innerhalb einer Wachstumsperiode unter Berücksichtigung der abschließenden Fäll- und Wiederaufforstungsarbeiten beschreibt.

Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0,46 & 0,345 & 0,4275 \\ 0,49 & 0,385 & 0 \\ 0 & 0,22 & 0,5225 \end{pmatrix}$ *gilt.*

(3) *Begründen Sie, dass nach der Wiederaufforstung am Ende einer Wachstumsperiode der Gesamtbestand an Tannen 95 % des Bestandes zu Beginn dieser Wachstumsperiode beträgt.*

(4) Am Ende jeder Wachstumsperiode sollen nun nach der Wiederaufforstung noch **zusätzlich** Bäume der Größenklasse K gepflanzt werden, jeweils ein fester Anteil a des gesamten Anfangsbestandes.

Bestimmen Sie diesen Anteil a so, dass der Gesamtbestand an Tannen im Laufe von ***zwei*** *Wachstumsperioden um 10 % zunimmt.*

(22 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2013

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie mit Alternative 2 (Übergangsmatrizen)

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2013

1. Inhaltliche Schwerpunkte
- Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

Alternative 2
- Übergangsmatrizen, Matrizenmultiplikation als Verkettung von Übergängen, Fixvektoren

2. Medien/Materialien
- entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

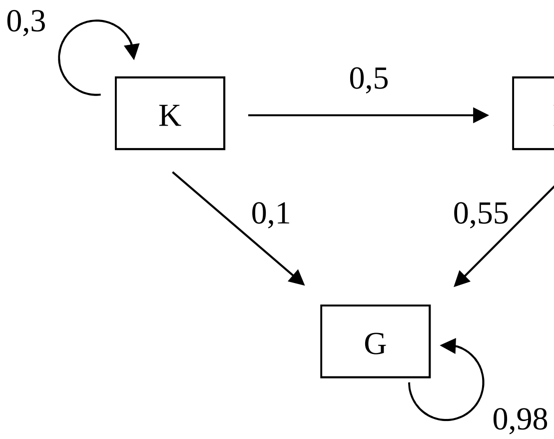
- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)



$$\begin{array}{c c c}
 & \textit{von:} & \begin{array}{ccc} \mathrm{K} & \mathrm{M} & \mathrm{G} \end{array} \\
\textit{nach:} & & \\
\begin{array}{c} \mathrm{K} \\ \mathrm{M} \\ \mathrm{G} \end{array} & \boldsymbol{W} = & \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}55 & 0{,}98 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Modelllösung b)

(1) $\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}55 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 450 \\ 4230 \\ 5320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 112{,}5 \\ 2641{,}5 \\ 6746 \end{pmatrix}$

Nach einer Wachstumsperiode können etwa 113 Tannen der Größenklasse K, 2642 Tannen der Größenklasse M und 6746 Tannen der Größenklasse G erwartet werden. [Auch andere sinnvolle Rundungen werden akzeptiert.]

(2) Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ der Bestandsvektor eine Wachstumsperiode vor der Bestandsaufnahme.

Zu lösen ist die Gleichung $\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}55 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ 4230 \\ 5320 \end{pmatrix}$.

Es ergibt sich: $x_1 = 1800$, $x_2 = 5400$, $x_3 \approx 3326$.

Eine Wachstumsperiode vor der Bestandsaufnahme gehörten 1800 Tannen zur Größenklasse K, 5400 Tannen zur Größenklasse M und rund 3326 Tannen zur Größenklasse G.

(3) Ausgehend vom Bestandsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ einer beliebigen Wachstumsperiode ergibt sich aus $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25x_1 \\ 0,7x_1 + 0,55x_2 \\ 0,4x_2 + 0,95x_3 \end{pmatrix}$ am Ende dieser Wachstumsperiode ein Gesamtbestand von $(0,25 + 0,7) \cdot x_1 + (0,55 + 0,4) \cdot x_2 + 0,95 \cdot x_3 = 0,95 \cdot (x_1 + x_2 + x_3)$.

Somit beträgt der Gesamtbestand nach einer beliebigen Wachstumsperiode 95 % des ursprünglichen Bestandes.

[Auch die Spaltensummen der Matrix ***A*** können betrachtet werden.]

(4) Es gilt: $0,95^n < 0,6 \Leftrightarrow n \cdot \ln(0,95) < \ln(0,6) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,6)}{\ln(0,95)} \approx 9,96$.

Nach 10 Wachstumsperioden sind erstmals weniger als 60 % der ursprünglichen Gesamtzahl an Bäumen vorhanden.

Modelllösung c)

(1) Nach einer Wachstumsperiode ist der Bestand durch folgenden Bestandsvektor gegeben:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0,55 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25x_1 \\ 0,7x_1 + 0,55x_2 \\ 0,4x_2 + 0,95x_3 \end{pmatrix}.$$

Nach dem Fällen der Bäume und vor der Aufforstung ergibt sich für den verbleibenden Bestand der Bestandsvektor:

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0,55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0,55 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2x_1 \\ 0,49x_1 + 0,385x_2 \\ 0,22x_2 + 0,5225x_3 \end{pmatrix}.$$

(2) Wegen

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0,45 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,25x_1 \\ 0,7x_1 + 0,55x_2 \\ 0,4x_2 + 0,95x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,05x_1 \\ 0,21x_1 + 0,165x_2 \\ 0,18x_2 + 0,4275x_3 \end{pmatrix}$$

[bzw. $\begin{pmatrix} 0,25x_1 \\ 0,7x_1 + 0,55x_2 \\ 0,4x_2 + 0,95x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2x_1 \\ 0,49x_1 + 0,385x_2 \\ 0,22x_2 + 0,5225x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,05x_1 \\ 0,21x_1 + 0,165x_2 \\ 0,18x_2 + 0,4275x_3 \end{pmatrix}$]

werden $0,26x_1 + 0,345x_2 + 0,4275x_3$ Tannen gefällt, die in der Größenklasse K neu gesetzt werden müssen.

Nach der Aufforstung ergibt sich schließlich als Bestandsvektor

$$\begin{pmatrix} 0,2x_1 + 0,26x_1 + 0,345x_2 + 0,4275x_3 \\ 0,49x_1 + 0,385x_2 \\ 0,22x_2 + 0,5225x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,46 & 0,345 & 0,4275 \\ 0,49 & 0,385 & 0 \\ 0 & 0,22 & 0,5225 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

und als Übergangsmatrix somit $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0,46 & 0,345 & 0,4275 \\ 0,49 & 0,385 & 0 \\ 0 & 0,22 & 0,5225 \end{pmatrix}$.

(3) Wenn in der Größenklasse K so viele Tannen neu gesetzt werden, wie zuvor in allen drei Größenklassen gefällt wurden, beträgt der Gesamtbestand am Ende einer Wachstumsperiode wieder 95 % des Anfangsbestandes, weil sich an der Gesamtsituation gegenüber Aufgabenteil b) (3) nichts geändert hat.

(4) Bezeichnet $x\,[\neq 0]$ den Anfangsbestand, so gilt [wegen $a > 0$]:

$(0,95 + a)^2 \cdot x = 1,1x \Leftrightarrow a = \sqrt{1,1} - 0,95 \approx 0,0988$.

Der gesuchte Anteil *a* des Anfangsbestandes beträgt ca. 0,0988.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**maximal erreichbare Punktzahl**
	Der Prüfling	
1	stellt das Wachstumsverhalten durch ein Übergangsdiagramm dar.	5
2	bestimmt eine Übergangsmatrix.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**maximal erreichbare Punktzahl**
	Der Prüfling	
1	(1) bestimmt die Anzahl der Tannen in den einzelnen Größenklassen nach einer Wachstumsperiode.	4
2	(2) bestimmt die Anzahl der Tannen in den einzelnen Größenklassen eine Wachstumsperiode vor dem Zeitpunkt der Bestandsaufnahme.	6
3	(3) zeigt, dass der Gesamtbestand an Tannen nach einer beliebigen Wachstumsperiode 95 % des ursprünglichen Bestandes beträgt.	4
4	(4) berechnet, nach wie vielen Wachstumsperioden erstmals weniger als 60 % des ursprünglichen Gesamtbestandes vorhanden sind.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**maximal erreichbare Punktzahl**
	Der Prüfling	
1	(1) bestimmt, wie viele Tannen in den einzelnen Größenklassen am Ende der Wachstumsperiode nach dem Fällen und vor dem Aufforsten vorhanden sind.	7
2	(2) bestimmt, wie viele Tannen neu gepflanzt werden.	3
3	(2) zeigt, dass die Matrix $\boldsymbol{C}$ die angegebene Form hat.	4
4	(3) begründet, dass der Gesamtbestand am Ende einer Wachstumsperiode 95 % des Anfangsbestandes beträgt.	3
5	(4) bestimmt den gesuchten Anteil.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:______________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	stellt das Wachstumsverhalten …	5			
2	bestimmt eine Übergangsmatrix.	5			
sachlich richtige Alternativen: (10) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**10**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die Anzahl …	4			
2	(2) bestimmt die Anzahl …	6			
3	(3) zeigt, dass der …	4			
4	(4) berechnet, nach wie …	4			
sachlich richtige Alternativen: (18) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**18**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt, wie viele …	7			
2	(2) bestimmt, wie viele …	3			
3	(2) zeigt, dass die …	4			
4	(3) begründet, dass der …	3			
5	(4) bestimmt den gesuchten …	5			
sachlich richtige Alternativen: (22) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**22**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**150**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ____________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: ______________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2013

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Laut ADFC (Allgemeiner Deutscher Fahrrad Club) nutzen zwei Drittel aller Deutschen ihr Fahrrad privat oder auf dem Weg zur Arbeit mindestens einmal im Monat.
In der gesamten Aufgabe sollen alle genannten Anteile als Wahrscheinlichkeiten verwendet werden.

a) In einer repräsentativen Umfrage werden 100 zufällig ausgewählte Deutsche befragt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

E_1: *Unter den Befragten nutzen genau 70 mindestens einmal im Monat ihr Fahrrad.*

E_2: *Unter den Befragten nutzen mindestens 70 mindestens einmal im Monat ihr Fahrrad.*

E_3: *Unter den Befragten nutzen mindestens 60 und höchstens 70 mindestens einmal im Monat ihr Fahrrad.*

(6 Punkte)

b) Bei Kontrollen der Polizei werden Fahrräder, die Mängel aufweisen, beanstandet. Bei diesen Prüfungen hat durchschnittlich ein Sechstel der Fahrräder Mängel.

Bestimmen Sie die Anzahl n der Fahrräder, die von der Polizei kontrolliert werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens ein Fahrrad mit Mängeln entdeckt wird.

(6 Punkte)

Name: ____________________

c) Die Nutzung des Fahrrads als **regelmäßiges Verkehrsmittel auf dem Weg zur Arbeit** hängt unter anderem von der Ortsgröße ab.

Ortsgröße	Anteil der Personen in der Bevölkerung, die in einem Ort der angegebenen Ortsgröße leben[1]	**davon** regelmäßige Nutzung des Fahrrads[2]
unter 20 000 Einwohner	40,4 %	37 %
20 000 bis 100 000 Einwohner	29,0 %	42 %
über 100 000 Einwohner	30,6 %	43 %

(1) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine aus der Bevölkerung zufällig ausgewählte Person aus einer Stadt mit mehr als 100 000 Einwohnern kommt und ihr Fahrrad regelmäßig als Verkehrsmittel nutzt.*

(2) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine aus der Bevölkerung zufällig ausgewählte Person, die angibt, ihr Fahrrad nicht regelmäßig als Verkehrsmittel zu nutzen, aus einer Großstadt mit mehr als 100 000 Einwohnern kommt.*

(9 Punkte)

d) An dem Jedermann-Radrennen „Rund um den Stausee" nehmen 200 Hobbyradfahrer teil. Im Ziel erhält jeder, der dort innerhalb einer vorgegebenen Zeit eintrifft, einen Einkaufsgutschein im Wert von 20 €.
Die Antrittsgebühr von x Euro, die jeder Teilnehmer bezahlen musste, berechnete der Veranstalter so, dass die dadurch erzielten Einnahmen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % die Kosten für die Gutscheine übersteigen. Dabei legte er als Wahrscheinlichkeit für das Ankommen eines Fahrers im Zeitlimit den Anteil $p = 0{,}25$ zugrunde, weil im letzten Jahr 25 % der Fahrer innerhalb der vorgegebenen Zeit das Ziel erreichten.

Bestimmen Sie (mit einer geeigneten Approximation), wie groß x mindestens gewesen sein muss.

(9 Punkte)

[1] Quelle: Laufende Raumbeobachtung des Bundesamtes für Bauwesen und Raumordnung (2011)
[2] Fahrradmonitor des ADFC

Name: ____________________

e) Die Einsatzleitung der Polizei vermutet, dass wegen der häufigen Kontrollen mittlerweile höchstens 10 % der Fahrräder Mängel aufweisen. Sie möchte diese Vermutung überprüfen und, falls sie richtig ist, die Kontrollen nur noch jährlich statt monatlich durchführen. An einem Morgen werden 200 Fahrräder kontrolliert.
Die Polizei hat folgende Entscheidungsregel auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ festgelegt: Finden sich in der Stichprobe weniger als 13 Fahrräder mit Mängeln, so wird die Zahl der Kontrollen reduziert, andernfalls nicht.

(1) *Bestimmen Sie die Hypothesen, die zu dieser Entscheidungsregel führten. Beschreiben Sie den Fehler erster Art im Sachzusammenhang und begründen Sie damit die Wahl der Hypothesen aus der Sicht der Polizei.*

Durch einen Irrtum wurde die Kontrolle unabhängig voneinander zweimal durchgeführt. Die beteiligten Polizisten beschließen daraufhin, die Entscheidungsregel ebenfalls zu „verdoppeln“: Finden sich in der Stichprobe von nun 400 Fahrrädern weniger als 26 Fahrräder mit Mängeln, so wird die Zahl der Kontrollen reduziert, andernfalls nicht.

(2) Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art betrug im Test aus (1) gerundet 0,032. *Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art bei dem neuen Test deutlich kleiner ist.*

(3) *Zeigen Sie, dass gilt:* $\sigma_{400} = \sqrt{2} \cdot \sigma_{200}$,
wobei σ_{200} *und* σ_{400} *die Standardabweichungen binomialverteilter Zufallsgrößen mit* $n = 200$ *bzw.* $n = 400$ *und unbekanntem p bezeichnen.*

Erläutern Sie, welche Auswirkung dies auf die Berechnung des Annahmebereichs der Hypothese bei Verdoppelung des Stichprobenumfangs von 200 auf 400 hat, wenn weiterhin das Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$ *gelten soll.*

(20 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Name: ______________________

Tabelle 1: σ-Regeln für Binomialverteilungen

Eine mit den Parametern n und p binomialverteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.
Wenn die LAPLACE-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist, gelten die σ-Regeln:

$P(\mu - 1{,}64\sigma \le X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}90$	$P(\mu - 1{,}64\sigma \le X) \approx 0{,}95$
	$P(X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}95$
$P(\mu - 1{,}96\sigma \le X \le \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}95$	$P(\mu - 1{,}96\sigma \le X) \approx 0{,}975$
	$P(X \le \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}975$
$P(\mu - 2{,}58\sigma \le X \le \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}99$	$P(\mu - 2{,}58\sigma \le X) \approx 0{,}995$
	$P(X \le \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}995$

$P(\mu - 1\sigma \le X \le \mu + 1\sigma) \approx 0{,}683$	$P(\mu - 1\sigma \le X) \approx 0{,}841$
	$P(X \le \mu + 1\sigma) \approx 0{,}841$
$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) \approx 0{,}955$	$P(\mu - 2\sigma \le X) \approx 0{,}977$
	$P(X \le \mu + 2\sigma) \approx 0{,}977$
$P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$	$P(\mu - 3\sigma \le X) \approx 0{,}999$
	$P(X \le \mu + 3\sigma) \approx 0{,}999$

Name: ______________________

Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 10 und *n* = 20

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	*k*	*p* = 0,02	0,05	0,08	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,5		*n*
10	0	0,8171	0,5987	0,4344	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010	9	10
	1	0,9838	0,9139	0,8121	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107	8	
	2	0,9991	0,9885	0,9599	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547	7	
	3		0,9990	0,9942	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719	6	
	4		0,9999	0,9994	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770	5	
	5				0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230	4	
	6					0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,8281	3	
	7						0,9999	0,9996	0,9984	0,9453	2	
	8								0,9999	0,9893	1	
	9									0,9990	0	
20	0	0,6676	0,3585	0,1887	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	19	20
	1	0,9401	0,7358	0,5169	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000	18	
	2	0,9929	0,9245	0,7879	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002	17	
	3	0,9994	0,9841	0,9294	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013	16	
	4		0,9974	0,9817	0,9568	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059	15	
	5		0,9997	0,9962	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207	14	
	6			0,9994	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577	13	
	7			0,9999	0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316	12	
	8				0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517	11	
	9					0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,4119	10	
	10						0,9994	0,9961	0,9829	0,5881	9	
	11						0,9999	0,9991	0,9949	0,7483	8	
	12							0,9998	0,9987	0,8684	7	
	13								0,9997	0,9423	6	
	14									0,9793	5	
	15									0,9941	4	
	16									0,9987	3	
	17									0,9998	2	
n		0,98	0,95	0,92	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,5	*k*	*n*
						p						

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000 (für *n* = 10 und für *n* = 20)

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 - \text{abgelesener Wert}$

Name: ____________________

Tabelle 3: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 50

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

		p											
n	*k*	0,02	0,05	0,1	0,125	0,15	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		*n*
	0	0,3642	0,0769	0,0052	0,0013	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	49	
	1	0,7358	0,2794	0,0338	0,0103	0,0029	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	48	
	2	0,9216	0,5405	0,1117	0,0418	0,0142	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	47	
	3	0,9822	0,7604	0,2503	0,1138	0,0460	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	46	
	4	0,9968	0,8964	0,4312	0,2346	0,1121	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	45	
	5	0,9995	0,9622	0,6161	0,3935	0,2194	0,0480	0,0070	0,0007	0,0000	0,0000	44	
	6	0,9999	0,9882	0,7702	0,5637	0,3613	0,1034	0,0194	0,0025	0,0000	0,0000	43	
	7		0,9968	0,8779	0,7165	0,5188	0,1904	0,0453	0,0073	0,0001	0,0000	42	
	8		0,9992	0,9421	0,8339	0,6681	0,3073	0,0916	0,0183	0,0002	0,0000	41	
	9		0,9998	0,9755	0,9121	0,7911	0,4437	0,1637	0,0402	0,0008	0,0000	40	
	10			0,9906	0,9579	0,8801	0,5836	0,2622	0,0789	0,0022	0,0000	39	
	11			0,9968	0,9817	0,9372	0,7107	0,3816	0,1390	0,0057	0,0000	38	
	12			0,9990	0,9928	0,9699	0,8139	0,5110	0,2229	0,0133	0,0002	37	
	13			0,9997	0,9974	0,9868	0,8894	0,6370	0,3279	0,0280	0,0005	36	
	14			0,9999	0,9991	0,9947	0,9393	0,7481	0,4468	0,0540	0,0013	35	
	15				0,9997	0,9981	0,9692	0,8369	0,5692	0,0955	0,0033	34	
	16				0,9999	0,9993	0,9856	0,9017	0,6839	0,1561	0,0077	33	
	17					0,9998	0,9937	0,9449	0,7822	0,2369	0,0164	32	
50	18					0,9999	0,9975	0,9713	0,8594	0,3356	0,0325	31	50
	19						0,9991	0,9861	0,9152	0,4465	0,0595	30	
	20						0,9997	0,9937	0,9522	0,5610	0,1013	29	
	21						0,9999	0,9974	0,9749	0,6701	0,1611	28	
	22							0,9990	0,9877	0,7660	0,2399	27	
	23							0,9996	0,9944	0,8438	0,3359	26	
	24							0,9999	0,9976	0,9022	0,4439	25	
	25								0,9991	0,9427	0,5561	24	
	26								0,9997	0,9686	0,6641	23	
	27								0,9999	0,9840	0,7601	22	
	28									0,9924	0,8389	21	
	29									0,9966	0,8987	20	
	30									0,9986	0,9405	19	
	31									0,9995	0,9675	18	
	32									0,9998	0,9836	17	
	33									0,9999	0,9923	16	
	34										0,9967	15	
	35		Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000								0,9987	14	
	36										0,9995	13	
	37										0,9998	12	
n		0,98	0,95	0,9	0,875	0,85	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	*k*	*n*
		p											

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ______________________

Tabelle 4: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 100

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

								p								
n	k	0,02	0,03	0,05	0,1	0,15	1/6	0,2	0,25	0,27	0,3	1/3	0,4	0,5		n
	0	0,1326	0,0476	0,0059	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	99	
	1	0,4033	0,1946	0,0371	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	98	
	2	0,6767	0,4198	0,1183	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	97	
	3	0,8590	0,6472	0,2578	0,0078	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	96	
	4	0,9492	0,8179	0,4360	0,0237	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	95	
	5	0,9845	0,9192	0,6160	0,0576	0,0016	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	94	
	6	0,9959	0,9688	0,7660	0,1172	0,0047	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	93	
	7	0,9991	0,9894	0,8720	0,2061	0,0122	0,0038	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	92	
	8	0,9998	0,9968	0,9369	0,3209	0,0275	0,0095	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	91	
	9		0,9991	0,9718	0,4513	0,0551	0,0213	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	90	
	10		0,9998	0,9885	0,5832	0,0994	0,0427	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	89	
	11			0,9957	0,7030	0,1635	0,0777	0,0126	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	88	
	12			0,9985	0,8018	0,2473	0,1297	0,0253	0,0010	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	87	
	13			0,9995	0,8761	0,3474	0,2000	0,0469	0,0025	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	86	
	14			0,9999	0,9274	0,4572	0,2874	0,0804	0,0054	0,0014	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	85	
	15				0,9601	0,5683	0,3877	0,1285	0,0111	0,0033	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	84	
	16				0,9794	0,6725	0,4942	0,1923	0,0211	0,0068	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000	83	
	17				0,9900	0,7633	0,5994	0,2712	0,0376	0,0133	0,0022	0,0002	0,0000	0,0000	82	
	18				0,9954	0,8372	0,6965	0,3621	0,0630	0,0243	0,0045	0,0005	0,0000	0,0000	81	
	19				0,9980	0,8935	0,7803	0,4602	0,0995	0,0420	0,0089	0,0011	0,0000	0,0000	80	
	20				0,9992	0,9337	0,8481	0,5595	0,1488	0,0684	0,0165	0,0024	0,0000	0,0000	79	
	21				0,9997	0,9607	0,8998	0,6540	0,2114	0,1057	0,0288	0,0048	0,0000	0,0000	78	
	22				0,9999	0,9779	0,9369	0,7389	0,2864	0,1552	0,0479	0,0091	0,0001	0,0000	77	
	23					0,9881	0,9621	0,8109	0,3711	0,2172	0,0755	0,0164	0,0003	0,0000	76	
	24					0,9939	0,9783	0,8686	0,4617	0,2909	0,1136	0,0281	0,0006	0,0000	75	
	25					0,9970	0,9881	0,9125	0,5535	0,3737	0,1631	0,0458	0,0012	0,0000	74	
	26					0,9986	0,9938	0,9442	0,6417	0,4620	0,2244	0,0715	0,0024	0,0000	73	
	27					0,9994	0,9969	0,9658	0,7224	0,5516	0,2964	0,1066	0,0046	0,0000	72	
	28					0,9997	0,9985	0,9800	0,7925	0,6379	0,3768	0,1524	0,0084	0,0000	71	
	29					0,9999	0,9993	0,9888	0,8505	0,7172	0,4623	0,2093	0,0148	0,0000	70	
	30						0,9997	0,9939	0,8962	0,7866	0,5491	0,2766	0,0248	0,0000	69	
	31						0,9999	0,9969	0,9307	0,8446	0,6331	0,3525	0,0398	0,0001	68	
	32							0,9984	0,9554	0,8909	0,7107	0,4344	0,0615	0,0002	67	
	33							0,9993	0,9724	0,9261	0,7793	0,5188	0,0913	0,0004	66	
100	34							0,9997	0,9836	0,9518	0,8371	0,6019	0,1303	0,0009	65	100
	35							0,9999	0,9906	0,9697	0,8839	0,6803	0,1795	0,0018	64	
	36							0,9999	0,9948	0,9817	0,9201	0,7511	0,2386	0,0033	63	
	37								0,9973	0,9893	0,9470	0,8123	0,3068	0,0060	62	
	38								0,9986	0,9940	0,9660	0,8630	0,3822	0,0105	61	
	39								0,9993	0,9968	0,9790	0,9034	0,4621	0,0176	60	
	40								0,9997	0,9983	0,9875	0,9341	0,5433	0,0284	59	
	41								0,9999	0,9992	0,9928	0,9566	0,6225	0,0443	58	
	42								0,9999	0,9996	0,9960	0,9724	0,6967	0,0666	57	
	43									0,9998	0,9979	0,9831	0,7635	0,0967	56	
	44									0,9999	0,9989	0,9900	0,8211	0,1356	55	
	45										0,9995	0,9943	0,8689	0,1841	54	
	46										0,9997	0,9969	0,9070	0,2421	53	
	47										0,9999	0,9983	0,9362	0,3086	52	
	48										0,9999	0,9991	0,9577	0,3822	51	
	49											0,9996	0,9729	0,4602	50	
	50											0,9998	0,9832	0,5398	49	
	51											0,9999	0,9900	0,6178	48	
	52												0,9942	0,6914	47	
	53												0,9968	0,7579	46	
	54												0,9983	0,8159	45	
	55												0,9991	0,8644	44	
	56												0,9996	0,9033	43	
	57												0,9998	0,9334	42	
	58												0,9999	0,9557	41	
	59													0,9716	40	
	60													0,9824	39	
	61													0,9895	38	
	62													0,9940	37	
	63													0,9967	36	
	64													0,9982	35	
	65													0,9991	34	
	66													0,9996	33	
	67													0,9998	32	
	68													0,9999	31	
n		0,98	0,97	0,95	0,9	0,85	5/6	0,8	0,75	0,73	0,7	2/3	0,6	0,5	k	n
								p								

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: _____________________

Tabelle 5: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 200

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	*k*	*p* = 0,02	0,04	0,05	0,1	0,15	1/6	0,2	0,25	*k*	*n*
	0	0,0176	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	199	
	1	0,0894	0,0027	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	198	
	2	0,2351	0,0125	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	197	
	3	0,4315	0,0395	0,0090	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	196	
	4	0,6288	0,0950	0,0264	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	195	
	5	0,7867	0,1856	0,0623	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	194	
	6	0,8914	0,3084	0,1237	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	193	
	7	0,9507	0,4501	0,2133	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	192	
	8	0,9798	0,5926	0,3270	0,0014	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	191	
	9	0,9925	0,7192	0,4547	0,0035	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	190	
	10	0,9975	0,8200	0,5831	0,0081	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	189	
	11	0,9992	0,8925	0,6998	0,0168	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	188	
	12	0,9998	0,9401	0,7965	0,0320	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	187	
	13	0,9999	0,9688	0,8701	0,0566	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	186	
	14		0,9848	0,9219	0,0929	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	185	
	15		0,9930	0,9556	0,1431	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000	184	
	16		0,9970	0,9762	0,2075	0,0021	0,0003	0,0000	0,0000	183	
	17		0,9988	0,9879	0,2849	0,0043	0,0006	0,0000	0,0000	182	
	18		0,9995	0,9942	0,3724	0,0082	0,0013	0,0000	0,0000	181	
	19		0,9998	0,9973	0,4655	0,0149	0,0027	0,0000	0,0000	180	
	20		0,9999	0,9988	0,5592	0,0255	0,0052	0,0001	0,0000	179	
	21			0,9995	0,6484	0,0415	0,0094	0,0002	0,0000	178	
	22			0,9998	0,7290	0,0645	0,0163	0,0005	0,0000	177	
	23			0,9999	0,7983	0,0959	0,0269	0,0010	0,0000	176	
	24				0,8551	0,1368	0,0426	0,0020	0,0000	175	
	25				0,8995	0,1876	0,0648	0,0036	0,0000	174	
	26				0,9328	0,2480	0,0945	0,0064	0,0000	173	
	27				0,9566	0,3166	0,1329	0,0110	0,0000	172	
	28				0,9729	0,3914	0,1803	0,0179	0,0001	171	
	29				0,9837	0,4697	0,2366	0,0283	0,0002	170	
	30				0,9905	0,5485	0,3007	0,0430	0,0004	169	
	31				0,9946	0,6247	0,3711	0,0632	0,0008	168	
	32				0,9971	0,6958	0,4454	0,0899	0,0014	167	
	33				0,9985	0,7596	0,5210	0,1239	0,0026	166	
	34				0,9992	0,8150	0,5953	0,1656	0,0044	165	
	35				0,9996	0,8613	0,6658	0,2151	0,0073	164	
	36				0,9998	0,8987	0,7305	0,2717	0,0117	163	
	37				0,9999	0,9280	0,7877	0,3345	0,0182	162	
200	38					0,9502	0,8369	0,4019	0,0276	161	200
	39					0,9665	0,8777	0,4718	0,0405	160	
	40					0,9780	0,9106	0,5422	0,0578	159	
	41					0,9860	0,9362	0,6108	0,0804	158	
	42					0,9913	0,9556	0,6758	0,1089	157	
	43					0,9947	0,9699	0,7355	0,1438	156	
	44					0,9969	0,9801	0,7887	0,1852	155	
	45					0,9982	0,9872	0,8349	0,2332	154	
	46					0,9990	0,9919	0,8738	0,2870	153	
	47					0,9995	0,9950	0,9056	0,3458	152	
	48					0,9997	0,9970	0,9310	0,4083	151	
	49					0,9998	0,9983	0,9506	0,4729	150	
	50					0,9999	0,9990	0,9655	0,5379	149	
	51						0,9995	0,9764	0,6017	148	
	52						0,9997	0,9843	0,6626	147	
	53						0,9998	0,9897	0,7192	146	
	54						0,9999	0,9934	0,7707	145	
	55							0,9959	0,8162	144	
	56							0,9975	0,8555	143	
	57							0,9985	0,8885	142	
	58							0,9991	0,9157	141	
	59							0,9995	0,9375	140	
	60							0,9997	0,9546	139	
	61							0,9998	0,9677	138	
	62							0,9999	0,9774	137	
	63								0,9846	136	
	64								0,9897	135	
	65								0,9932	134	
	66								0,9956	133	
	67								0,9972	132	
	68								0,9983	131	
	69								0,9990	130	
	70								0,9994	129	
	71								0,9996	128	
	72								0,9998	127	
	73								0,9999	126	
	74								0,9999	125	
n		0,98	0,96	0,95	0,9	0,85	5/6	0,8	0,75 = *p*	*k*	*n*

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: _____________________

Tabelle 6: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 400

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

		p					
n	*k*	0,01	0,02	0,05	0,1		*n*
	0	0,0180	0,0003	0,0000	0,0000	399	
	1	0,0905	0,0028	0,0000	0,0000	398	
	2	0,2366	0,0131	0,0000	0,0000	397	
	3	0,4325	0,0410	0,0000	0,0000	396	
	4	0,6288	0,0973	0,0000	0,0000	395	
	5	0,7859	0,1885	0,0001	0,0000	394	
	6	0,8904	0,3109	0,0002	0,0000	393	
	7	0,9498	0,4515	0,0006	0,0000	392	
	8	0,9792	0,5926	0,0017	0,0000	391	
	9	0,9922	0,7179	0,0042	0,0000	390	
	10	0,9973	0,8179	0,0094	0,0000	389	
	11	0,9992	0,8903	0,0190	0,0000	388	
	12	0,9998	0,9381	0,0355	0,0000	387	
	13	0,9999	0,9673	0,0614	0,0000	386	
	14		0,9838	0,0990	0,0000	385	
	15		0,9924	0,1499	0,0000	384	
	16		0,9966	0,2145	0,0000	383	
	17		0,9986	0,2912	0,0000	382	
	18		0,9994	0,3771	0,0000	381	
	19		0,9998	0,4680	0,0001	380	
	20		0,9999	0,5591	0,0002	379	
	21			0,6459	0,0004	378	
	22			0,7246	0,0009	377	
	23			0,7927	0,0017	376	
	24			0,8490	0,0031	375	
	25			0,8935	0,0054	374	
	26			0,9274	0,0092	373	
	27			0,9520	0,0149	372	
	28			0,9693	0,0235	371	
	29			0,9810	0,0357	370	
	30			0,9886	0,0524	369	
	31			0,9933	0,0746	368	
400	32			0,9962	0,1030	367	400
	33			0,9979	0,1382	366	
	34			0,9989	0,1805	365	
	35			0,9994	0,2296	364	
	36			0,9997	0,2849	363	
	37			0,9999	0,3453	362	
	38			0,9999	0,4095	361	
	39				0,4756	360	
	40				0,5420	359	
	41				0,6067	358	
	42				0,6682	357	
	43				0,7251	356	
	44				0,7763	355	
	45				0,8214	354	
	46				0,8600	353	
	47				0,8924	352	
	48				0,9188	351	
	49				0,9399	350	
	50				0,9564	349	
	51				0,9689	348	
	52				0,9783	347	
	53				0,9851	346	
	54				0,9900	345	
	55				0,9934	344	
	56				0,9957	343	
	57				0,9973	342	
	58				0,9983	341	
	59				0,9989	340	
	60				0,9994	339	
	61		Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dezimalen) 1,0000		0,9996	338	
	62				0,9998	337	
	63				0,9999	336	
	64				0,9999	335	
n		0,99	0,98	0,95	0,9	*k*	*n*
		p					

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$ gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 7: Normalverteilung

$\phi(z) = 0,...$

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$\phi(2,32) = 0,9898$

$\phi(-0,9) = 1 - \phi(0,9) = 0,1841$

$\phi(z) = 0,994 \Rightarrow z = 2,51$

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2013

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Stochastik mit Alternative 1 (ein- und zweiseitiger Hypothesentest)

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2013

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
   - Binomialverteilung und Normalverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung

   Alternative 1:
   - Ein- und zweiseitiger Hypothesentest

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der regelmäßigen Fahrradnutzer unter den 100 befragten Personen. X sei binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = \frac{2}{3}$.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt:

$$P(E_1) = P\left(X = 70\right) = \binom{100}{70} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{70} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{30} \approx 0{,}0673\,.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt:

$$P(E_2) = P\left(X \geq 70\right) = 1 - P\left(X \leq 69\right) \overset{Tabelle}{\approx} 1 - \left(1 - 0{,}2766\right) = 0{,}2766\,.$$

Mit den obigen Festlegungen gilt:

$$\begin{aligned} P(E_3) &= P\left(60 \leq X \leq 70\right) \\ &= P\left(X \leq 70\right) - P\left(X \leq 59\right) \\ &\overset{Tabelle}{\approx} \left(1 - 0{,}2093\right) - \left(1 - 0{,}9341\right) \\ &= 0{,}7248. \end{aligned}$$

[Der auf 4 Nachkommastellen genaue Wert ist 0,7249.]

Modelllösung b)

X: Anzahl der Fahrräder mit Mängeln; X ist $B_{n,\frac{1}{6}}$-verteilt.

$$P(X \geq 1) \geq 0{,}9 \Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0{,}9 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0{,}9 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}1 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0{,}1}{\ln \frac{5}{6}}$$

Aus $\frac{\ln 0{,}1}{\ln \frac{5}{6}} \approx 12{,}63$ erhält man: Es müssen mindestens 13 Fahrräder von der Polizei kontrolliert werden. [Die Ungleichung $\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}1$ kann auch durch Probieren gelöst werden, da der Wert der linken Seite der Ungleichung für wachsende n monoton fällt.]

Modelllösung c)

(1) $P(\text{"Großstadt und regelm. Nutzung"}) = 0{,}306 \cdot 0{,}43 \approx 0{,}13$

(2) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt (mit der Setzung nr: nicht regelmäßige Nutzung):

$$\begin{aligned} P_{nr}(\text{"mehr als 100000"}) &= \frac{P(\text{"}nr\text{ und mehr als 100000"})}{P(nr)} \\ &= \frac{0{,}306 \cdot 0{,}57}{0{,}404 \cdot 0{,}63 + 0{,}290 \cdot 0{,}58 + 0{,}306 \cdot 0{,}57} \\ &\approx 0{,}2921. \end{aligned}$$

Modelllösung d)

Es bezeichne die Zufallsgröße X die Anzahl der im Zeitlimit ankommenden Fahrer. Dann nimmt der Veranstalter X als binomialverteilt an mit p = 0,25 und n = 200. Da wegen $\sigma = \sqrt{200 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75} > 3$ die Laplace-Bedingung erfüllt ist, kann die gesuchte Antrittsgebühr näherungsweise mit folgendem Ansatz bestimmt werden:

$$\left(200 \cdot 0{,}25 + 1{,}64 \cdot \sqrt{200 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}\right) \cdot 20 < 200 \cdot x$$

$$\Rightarrow x > \left(200 \cdot 0{,}25 + 1{,}64 \cdot \sqrt{200 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}\right) \cdot 20 : 200 = 6{,}00429\,.$$

Also muss der Antrittsbetrag mindestens 6 € (eigentlich sogar: 6,01 €) gewesen sein.

Modelllösung e)

(1) Sei p die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrrad Mängel hat.

Getestet wird $H_0 : p \geq 0{,}1$ gegen $H_1 : p < 0{,}1$ (linksseitiger Hypothesentest).

Fehler 1. Art: In Wahrheit sind mindestens 10 % der Fahrräder defekt. Es werden aber in der Stichprobe höchstens 12 Fahrräder mit Mängeln gefunden, was zu einer irrtümlichen Reduktion der Zahl der Kontrollen führt.

Zu dieser Wahl passt die Intention, den Fehler zu vermeiden, dass die Anzahl der Kontrollen verringert wird, obwohl der Anteil der Fahrräder mit Mängeln in Wirklichkeit nicht gesunken ist (Fehler 1. Art). Daraus ergibt sich die Wahl der H_0-Hypothese $H_0 : p \geq 0{,}1$.

(2) Die Zufallsgröße X_{400} : „Anzahl der mängelbehafteten Fahrräder in der Stichprobe“ kann (bei Gültigkeit der Hypothese H_0) als binomialverteilt angenommen werden mit $n = 400$ und $p = 0{,}1$. Dann bestimmt man als Fehler 1. Art mit Hilfe des TR oder der Tabelle: $P_{p=0,1}(X_{400} \le 25) \approx 0{,}0054$. Dieser Wert ist lediglich ca. ein Sechstel der ursprünglichen Fehlerwahrscheinlichkeit und damit erheblich kleiner.

(3) Es gilt: $\sigma_{200} = \sqrt{200 \cdot p \cdot (1-p)}$, also:

$\sigma_{400} = \sqrt{400 \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{200 \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{2} \cdot \sigma_{200}$.

Die Grenze k_{200} des Ablehnungsbereichs für $n = 200$ bestimmt man näherungsweise mit der Formel $k_{200} \approx \mu_{200} - 1{,}64 \cdot \sigma_{200}$. Die Grenze k_{400} des Ablehnungsbereichs für $n = 400$ wird analog bestimmt durch $k_{400} \approx \mu_{400} - 1{,}64 \cdot \sigma_{400} = 2 \cdot \mu_{200} - 1{,}64 \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma_{200}$.

Dies ist aber nicht gleich $2 \cdot k_{200} \approx 2 \cdot \mu_{200} - 1{,}64 \cdot 2 \cdot \sigma_{200}$. D. h., die von den Polizisten durch Verdoppelung ermittelte Grenze ist zu niedrig.

Formal weniger detaillierte Erklärungen, die aber den wesentlichen Punkt beinhalten, dass statt der Verdoppelung des Radius um den Erwartungswert eine Multiplikation des Radius mit dem Faktor $\sqrt{2}$ durchgeführt werden muss, können ebenfalls mit voller Punktzahl bewertet werden.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	berechnet die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_1.	2
2	berechnet die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_2.	2
3	berechnet die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_3.	2
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	ermittelt einen Ansatz.	2
2	bestimmt die Anzahl der Fahrräder, die mindestens kontrolliert werden müssen.	4
	Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3
2	(2) bestimmt die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit.	6
	Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	bestimmt einen Ansatz für das gesuchte x.	6
2	berechnet die gesuchte Antrittsgebühr.	3
	Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	

Teilaufgabe e)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) bestimmt geeignete Hypothesen.	4
2	(1) beschreibt den Fehler 1. Art im Sachzusammenhang.	2
3	(1) begründet die Wahl der Hypothesen aus Sicht der Polizei.	3
4	(2) zeigt, dass der Fehler 1. Art für $n = 400$ erheblich kleiner ist als für $n = 200$.	4
5	(3) zeigt, dass $\sigma_{400} = \sqrt{2} \cdot \sigma_{200}$ gilt.	2
6	(3) erläutert die Auswirkung.	5
	Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	berechnet die Wahrscheinlichkeit …	2			
2	berechnet die Wahrscheinlichkeit …	2			
3	berechnet die Wahrscheinlichkeit …	2			
sachlich richtige Alternativen: (6) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**6**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt einen Ansatz …	2			
2	bestimmt die Anzahl …	4			
sachlich richtige Alternativen: (6) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**6**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die gesuchte …	3			
2	(2) bestimmt die gesuchte …	6			
sachlich richtige Alternativen: (9) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**9**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt einen Ansatz …	6			
2	berechnet die gesuchte …	3			
sachlich richtige Alternativen: (9) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**9**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt geeignete Hypothesen.	4			
2	(1) beschreibt den Fehler …	2			
3	(1) begründet die Wahl …	3			
4	(2) zeigt, dass der …	4			
5	(3) zeigt, dass $\sigma_{400} = \sqrt{2} \cdot \sigma_{200}$ …	2			
6	(3) erläutert die Auswirkung.	5			
sachlich richtige Alternativen: (20) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**20**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**150**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0

Name: ______________________

Abiturprüfung 2013

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Bundeslandwirtschaftsministerin Ilse Aigner hat im April 2009 den Anbau von Gen-Mais in Deutschland verboten, da ihrer Ansicht nach Risiken für die Umwelt nicht ausgeschlossen werden konnten. Im Januar 2010 fand eine repräsentative Umfrage unter der deutschen Bevölkerung mit folgender Fragestellung statt: „Sollte der Anbau von Gen-Mais in Deutschland weiterhin verboten bleiben?“

Die Tabelle gibt die Ergebnisse der Umfrage nach Altersgruppen aufgeschlüsselt wieder:

Altersgruppe / Antwort	14 bis 29 Jahre	30 bis 39 Jahre	40 bis 49 Jahre	50 bis 59 Jahre	60 Jahre und älter
„Ja“	166	112	153	129	232
„Nein“	33	24	30	19	45
keine Angabe	12	14	8	4	24
Anzahl der Befragten	211	150	191	152	301

a) (1) Eine Person wird zufällig aus den 1005 Teilnehmern der Umfrage ausgewählt.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie keine Angabe gemacht hat.

(2) Aus den Teilnehmern der Umfrage werden 3 Personen zufällig ausgewählt.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jede dieser 3 Personen mindestens 50 Jahre alt ist und mit „Ja“ geantwortet hat.

(3) Unter den Befragten der Altersgruppe 14 bis 29 befanden sich 57 Schüler. Von diesen antworteten $\frac{2}{3}$ mit „Ja“.

Bestimmen Sie den Anteil der Nicht-Schüler unter den 14- bis 29-Jährigen, die mit „Ja“ geantwortet haben.

(11 Punkte)

Name: ____________________

b) Die Befragten der Altersgruppe 14 bis 29 Jahre setzen sich aus Schülern und Nicht-Schülern zusammen.
Genau $\frac{2}{3}$ der Schüler haben mit „Ja“ geantwortet, während der Anteil der Nicht-Schüler, die mit „Ja“ geantwortet haben, $r \approx 83{,}1\,\%$ beträgt.
Die Anzahl *x* der Schüler in der Altersgruppe 14 bis 29 Jahre kann nun mit Hilfe der Gleichung

$$\frac{2}{3} \cdot x + r \cdot (211 - x) = 166$$

bestimmt werden.

(1) *Begründen Sie die Gültigkeit dieser Gleichung.*

(2) *Ermitteln Sie die gesuchte Anzahl x der* Schüler.

(6 Punkte)

c) Die Umfrage wurde auch nach Herkunft der Teilnehmer (West- oder Ostdeutschland) ausgewertet:

Antwort \ Herkunft	West	Ost
„Ja“	643	149
„Nein“	112	39
keine Angabe	52	10

(1) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Teilnehmer der Umfrage, der mit „Ja“ geantwortet hat, aus Westdeutschland stammt.*

(2) Aus den Teilnehmern der Umfrage werden zwei Personen zufällig ausgewählt. Beide haben mit „Ja“ geantwortet.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die zweite Person aus demselben Teil Deutschlands stammt wie die erste (Ost bzw. West).

(8 Punkte)

Name: ____________________

Im folgenden Aufgabenteil sollen die in der obigen Umfrage ermittelten relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten für die Bevölkerung in Deutschland angenommen werden.

d) Eine weitere Umfrage unter *n* zufällig ausgewählten Personen wird mit derselben Fragestellung durchgeführt.

(1) Angenommen, bei dieser Umfrage werden nur Personen aus der Altersgruppe 50 bis 59 befragt.

Begründen Sie, dass die Zufallsgröße X: „Anzahl der Befragten, die mit ‚Nein' geantwortet haben" als binomialverteilt angenommen werden kann, und zeigen Sie, dass die zugehörige Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{8}$ *beträgt.*

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(2) *unter 40 zufällig in der Altersgruppe 50 bis 59 ausgewählten Personen die Anzahl derer, die mit „Nein" antworten, genau dem Erwartungswert dieser Altersgruppe entspricht,*

(3) *von 10 zufällig ausgewählten Personen alle eine Angabe („Ja" oder „Nein") machen, wenn diesmal bei der Umfrage nur Personen im Alter von 14 bis 49 befragt werden.*

(10 Punkte)

Name: ____________________

e) (1) Um z. B. den unbekannten Anteil p_{M} der Befürworter unter allen Männern zu schätzen, kann man eine Umfrage unter zufällig ausgewählten Männern durchführen, die Anzahl X der Befürworter in der Umfrage ermitteln und daraus ein 90%-Konfidenzintervall K_{M} für p_{M} ermitteln.

Erklären Sie die Bedeutung dieses Intervalls im Sachzusammenhang.

In der tatsächlich durchgeführten Umfrage sprachen sich von den 487 befragten Männern 366 für ein Verbot des Anbaus von Gen-Mais aus, von den befragten 518 Frauen sogar 426. Für den unbekannten Anteil p_{M} der Befürworter unter allen Männern wurde als 90%-Konfidenzintervall daraus näherungsweise das Intervall $K_{\mathrm{M}} = [0,7181; 0,7822]$ ermittelt.

(2) *Bestimmen Sie aufgrund der Umfrage ein 90%-Konfidenzintervall K_F für den unbekannten Anteil p_F der Befürworter unter den Frauen.*

Gehen Sie dabei ohne Beweis davon aus, dass die Zufallsgröße Y: „Anzahl der Frauen, die mit ‚Ja‘ geantwortet haben“ binomialverteilt ist und die Laplace-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist.

(3) Die Konfidenzintervalle K_{F} und K_{M} überschneiden sich nicht.

Interpretieren Sie dies im Sachzusammenhang.

(15 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Name: ____________________

Tabelle 1: σ-Regeln für Binomialverteilungen

Eine mit den Parametern n und p binomialverteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.
Wenn die LAPLACE-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist, gelten die σ-Regeln:

$P(\mu - 1{,}64\sigma \le X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}90$	$P(\mu - 1{,}64\sigma \le X) \approx 0{,}95$
	$P(X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}95$
$P(\mu - 1{,}96\sigma \le X \le \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}95$	$P(\mu - 1{,}96\sigma \le X) \approx 0{,}975$
	$P(X \le \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}975$
$P(\mu - 2{,}58\sigma \le X \le \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}99$	$P(\mu - 2{,}58\sigma \le X) \approx 0{,}995$
	$P(X \le \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}995$

$P(\mu - 1\sigma \le X \le \mu + 1\sigma) \approx 0{,}683$	$P(\mu - 1\sigma \le X) \approx 0{,}841$
	$P(X \le \mu + 1\sigma) \approx 0{,}841$
$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) \approx 0{,}955$	$P(\mu - 2\sigma \le X) \approx 0{,}977$
	$P(X \le \mu + 2\sigma) \approx 0{,}977$
$P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$	$P(\mu - 3\sigma \le X) \approx 0{,}999$
	$P(X \le \mu + 3\sigma) \approx 0{,}999$

Name: ______________________

Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 10 und *n* = 20

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	*k*	0,02	0,05	0,08	0,1	0,15 (*p*)	0,2	0,25	0,3	0,5	*k*	*n*
10	0	0,8171	0,5987	0,4344	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010	9	10
	1	0,9838	0,9139	0,8121	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107	8	
	2	0,9991	0,9885	0,9599	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547	7	
	3		0,9990	0,9942	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719	6	
	4		0,9999	0,9994	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770	5	
	5				0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230	4	
	6					0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,8281	3	
	7						0,9999	0,9996	0,9984	0,9453	2	
	8								0,9999	0,9893	1	
	9					Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000				0,9990	0	
20	0	0,6676	0,3585	0,1887	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	19	20
	1	0,9401	0,7358	0,5169	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000	18	
	2	0,9929	0,9245	0,7879	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002	17	
	3	0,9994	0,9841	0,9294	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013	16	
	4		0,9974	0,9817	0,9568	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059	15	
	5		0,9997	0,9962	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207	14	
	6			0,9994	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577	13	
	7			0,9999	0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316	12	
	8				0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517	11	
	9					0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,4119	10	
	10						0,9994	0,9961	0,9829	0,5881	9	
	11						0,9999	0,9991	0,9949	0,7483	8	
	12							0,9998	0,9987	0,8684	7	
	13								0,9997	0,9423	6	
	14									0,9793	5	
	15					Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000				0,9941	4	
	16									0,9987	3	
	17									0,9998	2	
n		0,98	0,95	0,92	0,9	0,85 (*p*)	0,8	0,75	0,7	0,5	*k*	*n*

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 3: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 50

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

						p							
n	*k*	0,02	0,05	0,1	0,125	0,15	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		*n*
	0	0,3642	0,0769	0,0052	0,0013	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	49	
	1	0,7358	0,2794	0,0338	0,0103	0,0029	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	48	
	2	0,9216	0,5405	0,1117	0,0418	0,0142	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	47	
	3	0,9822	0,7604	0,2503	0,1138	0,0460	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	46	
	4	0,9968	0,8964	0,4312	0,2346	0,1121	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	45	
	5	0,9995	0,9622	0,6161	0,3935	0,2194	0,0480	0,0070	0,0007	0,0000	0,0000	44	
	6	0,9999	0,9882	0,7702	0,5637	0,3613	0,1034	0,0194	0,0025	0,0000	0,0000	43	
	7		0,9968	0,8779	0,7165	0,5188	0,1904	0,0453	0,0073	0,0001	0,0000	42	
	8		0,9992	0,9421	0,8339	0,6681	0,3073	0,0916	0,0183	0,0002	0,0000	41	
	9		0,9998	0,9755	0,9121	0,7911	0,4437	0,1637	0,0402	0,0008	0,0000	40	
	10			0,9906	0,9579	0,8801	0,5836	0,2622	0,0789	0,0022	0,0000	39	
	11			0,9968	0,9817	0,9372	0,7107	0,3816	0,1390	0,0057	0,0000	38	
	12			0,9990	0,9928	0,9699	0,8139	0,5110	0,2229	0,0133	0,0002	37	
	13			0,9997	0,9974	0,9868	0,8894	0,6370	0,3279	0,0280	0,0005	36	
	14			0,9999	0,9991	0,9947	0,9393	0,7481	0,4468	0,0540	0,0013	35	
	15				0,9997	0,9981	0,9692	0,8369	0,5692	0,0955	0,0033	34	
	16				0,9999	0,9993	0,9856	0,9017	0,6839	0,1561	0,0077	33	
	17					0,9998	0,9937	0,9449	0,7822	0,2369	0,0164	32	
50	18					0,9999	0,9975	0,9713	0,8594	0,3356	0,0325	31	50
	19						0,9991	0,9861	0,9152	0,4465	0,0595	30	
	20						0,9997	0,9937	0,9522	0,5610	0,1013	29	
	21						0,9999	0,9974	0,9749	0,6701	0,1611	28	
	22							0,9990	0,9877	0,7660	0,2399	27	
	23							0,9996	0,9944	0,8438	0,3359	26	
	24							0,9999	0,9976	0,9022	0,4439	25	
	25								0,9991	0,9427	0,5561	24	
	26								0,9997	0,9686	0,6641	23	
	27								0,9999	0,9840	0,7601	22	
	28									0,9924	0,8389	21	
	29									0,9966	0,8987	20	
	30									0,9986	0,9405	19	
	31									0,9995	0,9675	18	
	32									0,9998	0,9836	17	
	33									0,9999	0,9923	16	
	34										0,9967	15	
	35		Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000								0,9987	14	
	36										0,9995	13	
	37										0,9998	12	
n		0,98	0,95	0,9	0,875	0,85	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	*k*	*n*
						p							

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ______________________

Tabelle 4: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 100

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

								p								
n	k	0,02	0,03	0,05	0,1	0,15	1/6	0,2	0,25	0,27	0,3	1/3	0,4	0,5		n
	0	0,1326	0,0476	0,0059	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	99	
	1	0,4033	0,1946	0,0371	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	98	
	2	0,6767	0,4198	0,1183	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	97	
	3	0,8590	0,6472	0,2578	0,0078	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	96	
	4	0,9492	0,8179	0,4360	0,0237	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	95	
	5	0,9845	0,9192	0,6160	0,0576	0,0016	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	94	
	6	0,9959	0,9688	0,7660	0,1172	0,0047	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	93	
	7	0,9991	0,9894	0,8720	0,2061	0,0122	0,0038	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	92	
	8	0,9998	0,9968	0,9369	0,3209	0,0275	0,0095	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	91	
	9		0,9991	0,9718	0,4513	0,0551	0,0213	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	90	
	10		0,9998	0,9885	0,5832	0,0994	0,0427	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	89	
	11			0,9957	0,7030	0,1635	0,0777	0,0126	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	88	
	12			0,9985	0,8018	0,2473	0,1297	0,0253	0,0010	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	87	
	13			0,9995	0,8761	0,3474	0,2000	0,0469	0,0025	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	86	
	14			0,9999	0,9274	0,4572	0,2874	0,0804	0,0054	0,0014	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	85	
	15				0,9601	0,5683	0,3877	0,1285	0,0111	0,0033	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	84	
	16				0,9794	0,6725	0,4942	0,1923	0,0211	0,0068	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000	83	
	17				0,9900	0,7633	0,5994	0,2712	0,0376	0,0133	0,0022	0,0002	0,0000	0,0000	82	
	18				0,9954	0,8372	0,6965	0,3621	0,0630	0,0243	0,0045	0,0005	0,0000	0,0000	81	
	19				0,9980	0,8935	0,7803	0,4602	0,0995	0,0420	0,0089	0,0011	0,0000	0,0000	80	
	20				0,9992	0,9337	0,8481	0,5595	0,1488	0,0684	0,0165	0,0024	0,0000	0,0000	79	
	21				0,9997	0,9607	0,8998	0,6540	0,2114	0,1057	0,0288	0,0048	0,0000	0,0000	78	
	22				0,9999	0,9779	0,9369	0,7389	0,2864	0,1552	0,0479	0,0091	0,0001	0,0000	77	
	23					0,9881	0,9621	0,8109	0,3711	0,2172	0,0755	0,0164	0,0003	0,0000	76	
	24					0,9939	0,9783	0,8686	0,4617	0,2909	0,1136	0,0281	0,0006	0,0000	75	
	25					0,9970	0,9881	0,9125	0,5535	0,3737	0,1631	0,0458	0,0012	0,0000	74	
	26					0,9986	0,9938	0,9442	0,6417	0,4620	0,2244	0,0715	0,0024	0,0000	73	
	27					0,9994	0,9969	0,9658	0,7224	0,5516	0,2964	0,1066	0,0046	0,0000	72	
	28					0,9997	0,9985	0,9800	0,7925	0,6379	0,3768	0,1524	0,0084	0,0000	71	
	29					0,9999	0,9993	0,9888	0,8505	0,7172	0,4623	0,2093	0,0148	0,0000	70	
	30						0,9997	0,9939	0,8962	0,7866	0,5491	0,2766	0,0248	0,0000	69	
	31						0,9999	0,9969	0,9307	0,8446	0,6331	0,3525	0,0398	0,0001	68	
	32							0,9984	0,9554	0,8909	0,7107	0,4344	0,0615	0,0002	67	
	33							0,9993	0,9724	0,9261	0,7793	0,5188	0,0913	0,0004	66	
100	34							0,9997	0,9836	0,9518	0,8371	0,6019	0,1303	0,0009	65	100
	35							0,9999	0,9906	0,9697	0,8839	0,6803	0,1795	0,0018	64	
	36							0,9999	0,9948	0,9817	0,9201	0,7511	0,2386	0,0033	63	
	37								0,9973	0,9893	0,9470	0,8123	0,3068	0,0060	62	
	38								0,9986	0,9940	0,9660	0,8630	0,3822	0,0105	61	
	39								0,9993	0,9968	0,9790	0,9034	0,4621	0,0176	60	
	40								0,9997	0,9983	0,9875	0,9341	0,5433	0,0284	59	
	41								0,9999	0,9992	0,9928	0,9566	0,6225	0,0443	58	
	42								0,9999	0,9996	0,9960	0,9724	0,6967	0,0666	57	
	43									0,9998	0,9979	0,9831	0,7635	0,0967	56	
	44									0,9999	0,9989	0,9900	0,8211	0,1356	55	
	45										0,9995	0,9943	0,8689	0,1841	54	
	46										0,9997	0,9969	0,9070	0,2421	53	
	47										0,9999	0,9983	0,9362	0,3086	52	
	48										0,9999	0,9991	0,9577	0,3822	51	
	49											0,9996	0,9729	0,4602	50	
	50											0,9998	0,9832	0,5398	49	
	51											0,9999	0,9900	0,6178	48	
	52												0,9942	0,6914	47	
	53												0,9968	0,7579	46	
	54												0,9983	0,8159	45	
	55												0,9991	0,8644	44	
	56												0,9996	0,9033	43	
	57												0,9998	0,9334	42	
	58												0,9999	0,9557	41	
	59													0,9716	40	
	60													0,9824	39	
	61													0,9895	38	
	62													0,9940	37	
	63													0,9967	36	
	64													0,9982	35	
	65													0,9991	34	
	66													0,9996	33	
	67													0,9998	32	
	68													0,9999	31	
n		0,98	0,97	0,95	0,9	0,85	5/6	0,8	0,75	0,73	0,7	2/3	0,6	0,5	k	n
								p								

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ______________________

Tabelle 5: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 200

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	*k*	*p* = 0,02	0,04	0,05	0,1	0,15	1/6	0,2	0,25		*n*
	0	0,0176	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	199	
	1	0,0894	0,0027	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	198	
	2	0,2351	0,0125	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	197	
	3	0,4315	0,0395	0,0090	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	196	
	4	0,6288	0,0950	0,0264	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	195	
	5	0,7867	0,1856	0,0623	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	194	
	6	0,8914	0,3084	0,1237	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	193	
	7	0,9507	0,4501	0,2133	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	192	
	8	0,9798	0,5926	0,3270	0,0014	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	191	
	9	0,9925	0,7192	0,4547	0,0035	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	190	
	10	0,9975	0,8200	0,5831	0,0081	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	189	
	11	0,9992	0,8925	0,6998	0,0168	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	188	
	12	0,9998	0,9401	0,7965	0,0320	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	187	
	13	0,9999	0,9688	0,8701	0,0566	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	186	
	14		0,9848	0,9219	0,0929	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	185	
	15		0,9930	0,9556	0,1431	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000	184	
	16		0,9970	0,9762	0,2075	0,0021	0,0003	0,0000	0,0000	183	
	17		0,9988	0,9879	0,2849	0,0043	0,0006	0,0000	0,0000	182	
	18		0,9995	0,9942	0,3724	0,0082	0,0013	0,0000	0,0000	181	
	19		0,9998	0,9973	0,4655	0,0149	0,0027	0,0000	0,0000	180	
	20		0,9999	0,9988	0,5592	0,0255	0,0052	0,0001	0,0000	179	
	21			0,9995	0,6484	0,0415	0,0094	0,0002	0,0000	178	
	22			0,9998	0,7290	0,0645	0,0163	0,0005	0,0000	177	
	23			0,9999	0,7983	0,0959	0,0269	0,0010	0,0000	176	
	24				0,8551	0,1368	0,0426	0,0020	0,0000	175	
	25				0,8995	0,1876	0,0648	0,0036	0,0000	174	
	26				0,9328	0,2480	0,0945	0,0064	0,0000	173	
	27				0,9566	0,3166	0,1329	0,0110	0,0000	172	
	28				0,9729	0,3914	0,1803	0,0179	0,0001	171	
	29				0,9837	0,4697	0,2366	0,0283	0,0002	170	
	30				0,9905	0,5485	0,3007	0,0430	0,0004	169	
	31				0,9946	0,6247	0,3711	0,0632	0,0008	168	
	32				0,9971	0,6958	0,4454	0,0899	0,0014	167	
	33				0,9985	0,7596	0,5210	0,1239	0,0026	166	
	34				0,9992	0,8150	0,5953	0,1656	0,0044	165	
	35				0,9996	0,8613	0,6658	0,2151	0,0073	164	
	36				0,9998	0,8987	0,7305	0,2717	0,0117	163	
	37				0,9999	0,9280	0,7877	0,3345	0,0182	162	
200	38					0,9502	0,8369	0,4019	0,0276	161	200
	39					0,9665	0,8777	0,4718	0,0405	160	
	40					0,9780	0,9106	0,5422	0,0578	159	
	41					0,9860	0,9362	0,6108	0,0804	158	
	42					0,9913	0,9556	0,6758	0,1089	157	
	43					0,9947	0,9699	0,7355	0,1438	156	
	44					0,9969	0,9801	0,7887	0,1852	155	
	45					0,9982	0,9872	0,8349	0,2332	154	
	46					0,9990	0,9919	0,8738	0,2870	153	
	47					0,9995	0,9950	0,9056	0,3458	152	
	48					0,9997	0,9970	0,9310	0,4083	151	
	49					0,9998	0,9983	0,9506	0,4729	150	
	50					0,9999	0,9990	0,9655	0,5379	149	
	51						0,9995	0,9764	0,6017	148	
	52						0,9997	0,9843	0,6626	147	
	53						0,9998	0,9897	0,7192	146	
	54						0,9999	0,9934	0,7707	145	
	55							0,9959	0,8162	144	
	56							0,9975	0,8555	143	
	57							0,9985	0,8885	142	
	58							0,9991	0,9157	141	
	59							0,9995	0,9375	140	
	60							0,9997	0,9546	139	
	61							0,9998	0,9677	138	
	62							0,9999	0,9774	137	
	63								0,9846	136	
	64								0,9897	135	
	65								0,9932	134	
	66								0,9956	133	
	67								0,9972	132	
	68								0,9983	131	
	69								0,9990	130	
	70								0,9994	129	
	71								0,9996	128	
	72								0,9998	127	
	73								0,9999	126	
	74								0,9999	125	
n		0,98	0,96	0,95	0,9	0,85	5/6	0,8	0,75 = *p*	*k*	*n*

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ______________________

Tabelle 6: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 400

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	*k*	*p* = 0,01	0,02	0,05	0,1		*n*
	0	0,0180	0,0003	0,0000	0,0000	399	
	1	0,0905	0,0028	0,0000	0,0000	398	
	2	0,2366	0,0131	0,0000	0,0000	397	
	3	0,4325	0,0410	0,0000	0,0000	396	
	4	0,6288	0,0973	0,0000	0,0000	395	
	5	0,7859	0,1885	0,0001	0,0000	394	
	6	0,8904	0,3109	0,0002	0,0000	393	
	7	0,9498	0,4515	0,0006	0,0000	392	
	8	0,9792	0,5926	0,0017	0,0000	391	
	9	0,9922	0,7179	0,0042	0,0000	390	
	10	0,9973	0,8179	0,0094	0,0000	389	
	11	0,9992	0,8903	0,0190	0,0000	388	
	12	0,9998	0,9381	0,0355	0,0000	387	
	13	0,9999	0,9673	0,0614	0,0000	386	
	14		0,9838	0,0990	0,0000	385	
	15		0,9924	0,1499	0,0000	384	
	16		0,9966	0,2145	0,0000	383	
	17		0,9986	0,2912	0,0000	382	
	18		0,9994	0,3771	0,0000	381	
	19		0,9998	0,4680	0,0001	380	
	20		0,9999	0,5591	0,0002	379	
	21			0,6459	0,0004	378	
	22			0,7246	0,0009	377	
	23			0,7927	0,0017	376	
	24			0,8490	0,0031	375	
	25			0,8935	0,0054	374	
	26			0,9274	0,0092	373	
	27			0,9520	0,0149	372	
	28			0,9693	0,0235	371	
	29			0,9810	0,0357	370	
	30			0,9886	0,0524	369	
	31			0,9933	0,0746	368	
400	32			0,9962	0,1030	367	400
	33			0,9979	0,1382	366	
	34			0,9989	0,1805	365	
	35			0,9994	0,2296	364	
	36			0,9997	0,2849	363	
	37			0,9999	0,3453	362	
	38			0,9999	0,4095	361	
	39				0,4756	360	
	40				0,5420	359	
	41				0,6067	358	
	42				0,6682	357	
	43				0,7251	356	
	44				0,7763	355	
	45				0,8214	354	
	46				0,8600	353	
	47				0,8924	352	
	48				0,9188	351	
	49				0,9399	350	
	50				0,9564	349	
	51				0,9689	348	
	52				0,9783	347	
	53				0,9851	346	
	54				0,9900	345	
	55				0,9934	344	
	56				0,9957	343	
	57				0,9973	342	
	58				0,9983	341	
	59				0,9989	340	
	60				0,9994	339	
	61				0,9996	338	
	62				0,9998	337	
	63				0,9999	336	
	64				0,9999	335	
n		*p* = 0,99	0,98	0,95	0,9	*k*	*n*

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dezimalen) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$ gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ______________________

Tabelle 7: Normalverteilung

$\phi(z) = 0,...$

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$\phi(2,32) = 0,9898$

$\phi(-0,9) = 1 - \phi(0,9) = 0,1841$

$\phi(z) = 0,994 \Rightarrow z = 2,51$

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2013

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Stochastik mit Alternative 2 (Schätzen von Parametern für binomialverteilte Zufallsgrößen)

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2013

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
   - Binomialverteilung und Normalverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung

   Alternative 2:
   - Schätzen von Parametern für binomialverteilte Zufallsgrößen

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) An der Umfrage haben $211+150+191+152+301=1005$ Personen teilgenommen. Davon haben $12+14+8+4+24=62$ Personen keine Angaben gemacht. Da jede Person mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewählt wird, beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(\text{"Keine Angabe"})=\frac{62}{1005}\approx 0{,}0617$.

(2) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt

$$P(\text{"3-mal älter als 50 und Ja"})=\frac{361}{1005}\cdot\frac{360}{1004}\cdot\frac{359}{1003}\approx 0{,}0461.$$

Hier ist eine näherungsweise Berechnung mit Hilfe der Binomialverteilung aufgrund des großen Stichprobenumfangs sowie der großen Anzahl der günstigen Ergebnisse in der Stichprobe möglich:

$$P(\text{"3-mal älter als 50 und Ja"})\approx\left(\frac{361}{1005}\right)^3\approx 0{,}0463.$$

(3) Die Anzahl der Nicht-Schüler beträgt $211-57=154$. Von diesen antworteten $166-38=128$ mit „Ja". Der gesuchte Anteil beträgt also $\frac{128}{154}\approx 0{,}8312$.

Modelllösung b)

(1) Die 166 „Ja"-Stimmen setzen sich aus den $\frac{2}{3}\cdot x$ „Ja"-Stimmen der x Schüler und den $r\cdot(211-x)$ „Ja"-Stimmen der Nicht-Schüler zusammen. Somit gilt die angegebene Gleichung.

(2) $\frac{2}{3}\cdot x+r\cdot(211-x)=166 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}-r\right)\cdot x=166-r\cdot 211 \Leftrightarrow x=\dfrac{166-r\cdot 211}{\frac{2}{3}-r}$.

Mit $r\approx 0{,}831$ ergibt sich $x\approx\dfrac{166-0{,}831\cdot 211}{\frac{2}{3}-0{,}831}\approx 57$.

Der Wert $x=57$ ist durch 3 teilbar im Einklang mit der Aufgabenstellung.

[Ein Vergleich mit den beiden benachbarten durch 3 teilbaren Werten 54 und 60, der $r = \frac{166 - \frac{2}{3} \cdot 54}{211 - 54} \approx 0,828$ bzw. $r = \frac{166 - \frac{2}{3} \cdot 60}{211 - 60} \approx 0,834$ ergibt, sowie eine ergänzende Monotoniebetrachtung der Funktion $x \mapsto r(x) = \frac{166 - \frac{2}{3} \cdot x}{211 - x}$ wird nicht erwartet.]

Modelllösung c)

(1) Mit „Ja“ haben $643 + 149 = 792$ Personen geantwortet. Von diesen kommen 643 aus dem Westen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also

$P_{\text{"Ja"}}(\text{"West"}) = \frac{643}{792} \approx 0,8119$.

(2) Die Wahrscheinlichkeit beträgt

$\frac{643}{792} \cdot \frac{642}{791} + \frac{149}{792} \cdot \frac{148}{791} \approx 0,69.$

Die (Näherungs-)Lösung

$\left(\frac{643}{792}\right)^2 + \left(\frac{149}{792}\right)^2 \approx 0,69$

wird ebenfalls akzeptiert.

Modelllösung d)

(1) Die Zufallsgröße X kann als binomialverteilt angenommen werden, da bei zufälliger Auswahl der Teilnehmer

- X die Anzahl von „Treffern“ („Nein“-Stimmen) zählt,
- eine konstante Wahrscheinlichkeit p für die Antwort „Nein“ angenommen werden kann, die dem Anteil in der Bevölkerung entspricht,
- die Antworten voneinander unabhängig sind.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt $p = \frac{19}{152} = \frac{1}{8}$.

(2) Bezeichnet X: „Anzahl der ‚Nein’-Antworten in der Umfrage in der Altersgruppe 50 bis 59“, so ist X binomialverteilt mit $n = 40$, $p = \frac{1}{8}$.

Die erwartete Anzahl ist $\mu = \frac{1}{8} \cdot 40 = 5$, die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also

$$P(X = 5) = \binom{40}{5} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^5 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{35} \approx 0{,}1875.$$

(3) Bezeichnet nun X: „Anzahl der ‚Ja‘- oder ‚Nein‘-Antworten in der Umfrage in der Altersgruppe kleiner 50“, so ist X binomialverteilt mit

$$n = 10\ ,\ p = \frac{166+112+153+33+24+30}{211+150+191} = \frac{518}{552} = \frac{259}{276}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle eine Angabe machen, beträgt

$$P(\text{"10-mal Ja oder Nein"}) = \left(\frac{259}{276}\right)^{10} \approx 0{,}5295.$$

Modelllösung e)

(1) K_M enthält alle Werte für den wahren Anteil der Befürworter unter den Männern, die auf dem 90%-Niveau mit den Daten vereinbar sind. [Formal: p_M liegt genau dann im Intervall K_M, falls ein Test auf dem 10%-Niveau die Hypothese „ p_M *ist der korrekte Anteil der Befürworter unter den Männern*“ nicht verwerfen würde.]

(2) Es bezeichne p_F den Anteil der Befürworter in der weiblichen Bevölkerung und Y die Anzahl der Frauen, die bei der Umfrage mit „Ja“ geantwortet haben. Dann kann Y nach Aufgabenstellung als binomialverteilt angenommen werden mit unbekanntem $p = p_F$ sowie $n = 518, \sigma_F = \sqrt{518 \cdot p_F \cdot (1-p_F)} > 3$.

Die Randpunkte des gesuchten Konfidenzintervalls bestimmt man dann näherungsweise so:

$$\left| p_F - \frac{426}{518} \right| = 1{,}64 \cdot \frac{\sigma_F}{518}.$$

Durch Quadrieren erhält man:

$$\left(p_F - \frac{426}{518} \right)^2 = 1{,}64^2 \cdot \frac{{\sigma_F}^2}{518^2} \Leftrightarrow \left(p_F - \frac{426}{518} \right)^2 = 1{,}64^2 \cdot \frac{p_F \cdot (1-p_F)}{518}.$$

Diese Gleichung löst man nach p_F auf:

$$ {p_F}^2 - \frac{852}{518} p_F + \left(\frac{426}{518} \right)^2 = \frac{1{,}64^2}{518} p_F (1-p_F)$$

$$\Leftrightarrow {p_F}^2 - \frac{852}{518} p_F + \left(\frac{426}{518} \right)^2 = \frac{1{,}64^2}{518} p_F - \frac{1{,}64^2}{518} {p_F}^2$$

$$\Leftrightarrow {p_F}^2 \cdot \left(1 + \frac{1{,}64^2}{518} \right) + \left(-\frac{852}{518} - \frac{1{,}64^2}{518} \right) p_F + \left(\frac{426}{518} \right)^2 = 0,$$

also (Taschenrechner) $p_F \approx 0{,}7932 \vee p_F \approx 0{,}8482$.

Als näherungsweises Konfidenzintervall für den unbekannten Anteil p_F erhält man $K_F = [0{,}7932; 0{,}8482]$.

[Hinreichend genaue Rundungen bei Zwischenergebnissen sollen nicht zu Punktabzügen führen; ebenso sollte eine verkürzte Darstellung des Lösungsweges bei korrektem Ansatz und Ergebnis mit voller Punktzahl versehen werden.]

(3) K_F und K_M haben keine Werte gemeinsam, alle Werte aus K_M sind kleiner als die Werte aus K_F. Es ist daher plausibel anzunehmen, dass der Anteil der Befürworter unter den Frauen größer als der unter den Männern ist.
Alternativ: Die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Umfragen so ausfallen, wie in der Aufgabenstellung angegeben, wenn tatsächlich $p_M \geq p_F$ gilt, ist eher gering, weil entweder p_M oder p_F nicht in ihrem jeweiligen Konfidenzintervall liegen würden.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) bestimmt die Wahrscheinlichkeit für „Keine Angabe“.	3
2	(2) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	4
3	(3) bestimmt den gesuchten Anteil.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) begründet die Gültigkeit der Gleichung.	3
2	(2) ermittelt die gesuchte Anzahl x der Schüler.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3
2	(2) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) begründet, dass X als binomialverteilt angenommen werden kann, und zeigt, dass die Trefferwahrscheinlichkeit $p=\frac{1}{8}$ beträgt.	4
2	(2) berechnet den Erwartungswert und die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3
3	(3) berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) erklärt die Bedeutung des Intervalls im Sachzusammenhang.	3
2	(2) bestimmt einen Ansatz zur Bestimmung des Konfidenzintervalls.	4
3	(2) bestimmt das Konfidenzintervall.	5
4	(3) interpretiert die fehlende Überschneidung im Sachzusammenhang.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die Wahrscheinlichkeit …	3			
2	(2) bestimmt die gesuchte …	4			
3	(3) bestimmt den gesuchten …	4			
sachlich richtige Alternativen: (11) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**11**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet die Gültigkeit …	3			
2	(2) ermittelt die gesuchte …	3			
sachlich richtige Alternativen: (6) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**6**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die gesuchte …	3			
2	(2) bestimmt die gesuchte …	5			
sachlich richtige Alternativen: (8) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**8**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass *X* …	4			
2	(2) berechnet den Erwartungswert …	3			
3	(3) berechnet die gesuchte …	3			
sachlich richtige Alternativen: (10) ………………………………………………………………………. ……………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe d)	**10**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) erklärt die Bedeutung …	3			
2	(2) bestimmt einen Ansatz …	4			
3	(2) bestimmt das Konfidenzintervall.	5			
4	(3) interpretiert die fehlende …	3			
sachlich richtige Alternativen: (15) ………………………………………………………………………. ……………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe e)	**15**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**150**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0