



Name: \_\_\_\_\_

## Abiturprüfung 2013

### Mathematik, Leistungskurs

---

#### Aufgabenstellung:

Die Buche ist ein in weiten Teilen Europas heimischer Laubbaum.

Ein Biologe modelliert das Höhenwachstum von Buchen durch Funktionen  $f_a$  mit der Gleichung

$$f_a(t) = a \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{50}t}\right)^2, \quad t \geq 0, \quad \text{und dem Parameter } a > 0.^1$$

Dabei wird  $t$  als Maßzahl zur Einheit 1 Jahr,  $f_a(t)$  als Maßzahl zur Einheit 1 Meter aufgefasst. Der Zeitpunkt des Keimens des Buchensamens wird durch  $t = 0$  festgelegt.

- a) (1) Erklären Sie die Bedeutung des Parameters  $a$  für das durch die Funktion  $f_a$  beschriebene Höhenwachstum einer Buche.
- (2) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Höhe dieser Buche ständig zunimmt.
- (3) Zeigen Sie rechnerisch, dass diese Buche zum Zeitpunkt  $t_1 = 50 \cdot \ln 2$  am stärksten wächst.
- (4) Bei einer 10 Jahre alten Buche wird eine Höhe von 1,15 m gemessen. Berechnen Sie den Parameterwert von  $a$  derjenigen Funktion  $f_a$ , die das Höhenwachstum dieser Buche beschreibt.
- (5) Zeichnen Sie den Graphen von  $f_{35}$ .

(26 Punkte)

---

<sup>1</sup> Die Funktion  $f_a$  ist für alle  $t \in \mathbb{R}$  definiert, wird aber nur für  $t \geq 0$  zur Modellierung verwendet.



Name: \_\_\_\_\_

b) In dieser Teilaufgabe wird eine Buche betrachtet, deren Höhenwachstum durch die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(t) = f_{35}(t) = 35 \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{50}t}\right)^2$ ,  $t \geq 0$ , modelliert wird. In der *Abbildung* (siehe unten) ist neben dem Graphen der Wachstumsgeschwindigkeit  $f'$  dieser Buche auch der Graph der Wachstumsgeschwindigkeit  $g'$  einer zweiten Buche mit der Gleichung

$$g'(t) = 1,1 \cdot \left( e^{-\frac{1}{50}t} - e^{-\frac{1}{25}t} \right), t \geq 0,$$

dargestellt. Die zweite Buche hat an einem anderen Standort zum selben Zeitpunkt wie die erste Buche gekeimt.

- (1) *Begründen Sie anhand der Abbildung, dass die erste Buche zu jedem Zeitpunkt  $t > 0$  eine größere Höhe hat als die zweite Buche.*
- (2) *Bestimmen Sie eine Gleichung derjenigen Stammfunktion  $g$  von  $g'$ , die das Höhenwachstum der zweiten Buche beschreibt.*
- (3) *Bestimmen Sie die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit der zweiten Buche in den ersten 50 Jahren nach dem Keimen des Samens.*
- (4) Jemand behauptet, dass die beiden Buchen 50 Jahre nach ihrer Anpflanzung gemäß den Modellierungen ihres Höhenwachstums einen Höhenunterschied von mindestens 3,50 m aufweisen müssten.

*Prüfen Sie, ob die Behauptung wahr ist.*

(14 Punkte)



Abbildung



Name: \_\_\_\_\_

c) Wissenschaftliche Untersuchungen haben ergeben:

Bäume erreichen die Hälfte ihrer Endhöhe in der ersten Hälfte ihrer Lebenszeit, und zwar nachdem ihre Wachstumsgeschwindigkeit ihr Maximum hatte.

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass eine Buche, deren Höhenwachstum hier allgemein durch die Funktion  $f_a$  modelliert werden soll, ein Lebensalter von 350 Jahren erreicht.

- (1) *Begründen Sie, dass es zur Vereinfachung möglich ist, von einer Endhöhe dieser Buche von  $a$  Metern auszugehen.*
- (2) *Zeigen Sie, dass unter dieser Voraussetzung die halbe Endhöhe dieser Buche zum Zeitpunkt  $t_2 = -50 \cdot \ln(1 - \sqrt{0,5})$  erreicht wird.*
- (3) *Prüfen Sie, ob die Modellierung des Höhenwachstums dieser Buche mit den Ergebnissen der wissenschaftlichen Untersuchungen verträglich ist.*

(10 Punkte)

**Zugelassene Hilfsmittel:**

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

## *Unterlagen für die Lehrkraft*

# **Abiturprüfung 2013**

## *Mathematik, Leistungskurs*

---

### **1. Aufgabenart**

Analysis

### **2. Aufgabenstellung<sup>1</sup>**

siehe Prüfungsaufgabe

### **3. Materialgrundlage**

- entfällt

### **4. Bezüge zu den Vorgaben 2013**

#### *1. Inhaltliche Schwerpunkte*

- Untersuchung von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen einschließlich Funktionenscharen und Logarithmusfunktionen sowie notwendiger Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) in Sachzusammenhängen
- Untersuchungen von Wirkungen (Änderungsrate)
- Integrationsregeln (partielle Integration, Substitution)
- Flächenberechnung durch Integration

#### *2. Medien/Materialien*

- entfällt

### **5. Zugelassene Hilfsmittel**

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

---

<sup>1</sup> Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

## 6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

### 6.1 Modellösungen

#### Modellösung a)

(1) Es gilt  $f_a(t) = a \cdot f_1(t)$  und  $f'_a(t) = a \cdot f'_1(t)$ ,  $a > 0$ .

Daher hat eine Buche, deren Höhenwachstum durch die Funktion  $f_a$  beschrieben wird, zu jedem Zeitpunkt  $t$  die  $a$ -fache Höhe und die  $a$ -fache Wachstumsgeschwindigkeit des durch die Funktion  $f_1$  gegebenen („Einheits“-)Höhenwachstums. Die Höhe der Buche nähert sich der Endhöhe  $a$  Meter, da für  $t \geq 0$  gilt:  $0 \leq f_a(t) \leq a$  und  $a = \lim_{t \rightarrow \infty} (f_a(t))$ .

(2) Es ist zu zeigen, dass  $f_a$  für  $t \geq 0$  streng monoton steigt.

Für  $a > 0$  ergibt sich (mit CAS):  $t > 0 \Leftrightarrow f'_a(t) > 0$ .

Da  $f_a$  an der Stelle  $t = 0$  differenzierbar [insbesondere stetig] ist, steigt  $f_a$  streng monoton für  $t \geq 0$ .

Die Höhe der durch  $f_a$  modellierten Buche nimmt daher ständig zu.

(3) Gesucht ist das globale Maximum von  $f'_a$ .

[Es gilt:  $f'_a(t) = 1,4 \cdot a \cdot e^{-\frac{1}{25}t} \left( e^{\frac{1}{50}t} - 1 \right)$ ,  $f''_a(t) = 0,028 \cdot a \cdot e^{-\frac{1}{25}t} \left( 2 - e^{\frac{1}{50}t} \right)$ .]

Für  $a > 0$  gilt:  $f''_a(t_1) = 0 \Leftrightarrow t_1 = 50 \cdot \ln 2 \approx 34,7$ .

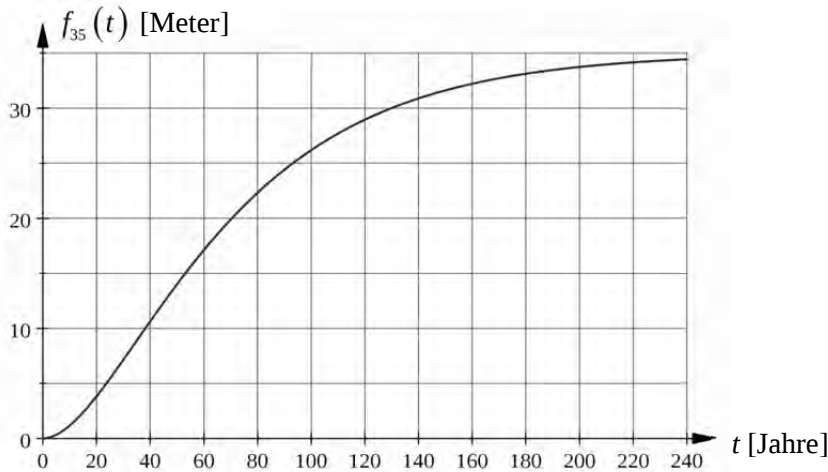
Da  $f''_a$  an der Stelle  $t_1 = 50 \cdot \ln 2$  für  $a > 0$  das Vorzeichen von  $+$  nach  $-$  wechselt, ist  $f'_a(t_1)$  lokales Maximum von  $f'_a$ .

Als einziges lokales Extremum ist  $f'_a(t_1)$  auch globales Maximum von  $f'_a$ .

Die Buche wächst zum Zeitpunkt  $t_1 = 50 \cdot \ln 2$  bzw. im Alter von knapp 35 Jahren am stärksten.

(4) Die Gleichung  $f_a(10) = 1,15$  hat die Lösung  $a \approx 34,9985 \approx 35$ .

(5)

**Modelllösung b)**

- (1) Die Fläche unter dem Graphen von  $f'$  bzw.  $g'$  im Intervall  $[0; t]$  stellt den Höhenzuwachs des betreffenden Baumes vom Keimen bis zum Zeitpunkt  $t$  dar. Da die Wachstumsgeschwindigkeit der ersten Buche [bis auf Gleichheit für  $t = 0$ ] zu jedem Zeitpunkt  $t > 0$  des in der *Abbildung* dargestellten Zeitintervalls größer als die Wachstumsgeschwindigkeit der zweiten Buche (siehe (1)) ist und die Anfangshöhe in beiden Fällen 0 m beträgt, ist die Höhe der ersten Buche zu jedem Zeitpunkt  $t > 0$  größer als die Höhe der zweiten Buche.

[Alternative Lösungswege sind denkbar.]

$$(2) \quad g(t) = \int_0^t g'(u) du = 27,5 \cdot \left( e^{-\frac{1}{25}t} - 2 \cdot e^{-\frac{1}{50}t} \right) + 27,5.$$

$$(3) \quad \frac{g(50)}{50} \approx 0,22.$$

Die zweite Buche wächst in den ersten 50 Jahren mit einer durchschnittlichen Wachstumsgeschwindigkeit von ca. 0,22 m/Jahr.

- (4) Gemäß den Modellierungen ihres Höhenwachstums beträgt der Höhenunterschied der beiden 50 Jahre alten Buchen:

$$d = f(50) - \int_0^{50} g'(t) dt \approx 2,997.$$

Da der Höhenunterschied nur knapp 3 m beträgt, ist die Behauptung falsch.

**Modelllösung c)**

(1) Die Buche, deren Höhenwachstum durch die Funktion  $f_a$  beschrieben wird, hat im

Alter von 350 Jahren wegen  $f_a(350) \approx 0,998 \cdot a$  ihre „theoretische Endhöhe“ von

$\lim_{t \rightarrow \infty} (f_a(t)) = a$  Metern praktisch erreicht.

(2) Ausgehend von der Endhöhe  $a$  Meter gilt:

$$\begin{aligned} f_a(t_2) = \frac{a}{2} &\Leftrightarrow a \cdot (1 - e^{-0,02 \cdot t_2})^2 = \frac{a}{2} \\ &\Leftrightarrow (1 - e^{-0,02 \cdot t_2})^2 = \frac{1}{2}, \text{ da } (1 - e^{-0,02 \cdot t_2}) \geq 0 \text{ für } t_2 \geq 0, \\ &\Leftrightarrow 1 - e^{-0,02 \cdot t_2} = \sqrt{0,5} \\ &\Leftrightarrow -0,02 \cdot t_2 = \ln(1 - \sqrt{0,5}) \\ &\Leftrightarrow t_2 = -50 \cdot \ln(1 - \sqrt{0,5}) \end{aligned}$$

(3) Der Zeitpunkt  $t_2 = -50 \cdot \ln(1 - \sqrt{0,5}) \approx 61$  [Jahre] liegt innerhalb der ersten Hälfte der

mit 350 Jahren angenommenen Lebensdauer der betrachteten Buche.

Der Zeitpunkt stärksten Wachstums liegt gemäß Teilaufgabe a) (3) bei

$t_1 = 50 \cdot \ln 2 \approx 35$  Jahren und damit vor dem Zeitpunkt  $t_2$ , zu dem die halbe Endhöhe erreicht wird.

Insgesamt ist das durch die Funktion  $f$  beschriebene Höhenwachstum der Buche mit den Ergebnissen der Untersuchungen verträglich.

## 6.2 Teilleistungen – Kriterien

## Teilaufgabe a)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	(1) erklärt die Bedeutung des Parameters $a$ für das durch die Funktion $f_a$ beschriebene Höhenwachstum einer Buche.	5
2	(2) zeigt rechnerisch, dass die Höhe der Buche ständig zunimmt.	5
3	(3) zeigt rechnerisch, dass die Buche zum angegebenen Zeitpunkt $t_1$ am stärksten wächst.	8
4	(4) berechnet den Parameterwert von $a$ derjenigen Funktion $f_a$ , die das Höhenwachstum dieser Buche beschreibt.	3
5	(5) zeichnet den Graphen von $f_{35}$ .	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

## Teilaufgabe b)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	(1) begründet anhand der <i>Abbildung</i> , dass die erste Buche zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ eine größere Höhe hat als die zweite Buche.	4
2	(2) bestimmt eine Gleichung derjenigen Stammfunktion $g$ von $g'$ , die das Höhenwachstum der zweiten Buche beschreibt.	3
3	(3) bestimmt die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit der zweiten Buche in den ersten 50 Jahren nach dem Keimen des Samens.	3
4	(4) prüft, ob die Behauptung wahr ist.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		



**Teilaufgabe c)**

	<b>Anforderungen</b>	maximal erreichbare Punktzahl
	<b>Der Prüfling</b>	
1	(1) begründet, dass es zur Vereinfachung möglich ist, von einer Endhöhe der Buche von $a$ Metern auszugehen.	2
2	(2) zeigt, dass unter dieser Voraussetzung die halbe Endhöhe der Buche zum Zeitpunkt $t_2 = -50 \cdot \ln(1 - \sqrt{0,5})$ erreicht wird.	4
3	(3) prüft, ob die Modellierung des Höhenwachstums der Buche mit den Ergebnissen der Untersuchungen verträglich ist.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

**7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit**

Name des Prüflings: \_\_\_\_\_ Kursbezeichnung: \_\_\_\_\_

Schule: \_\_\_\_\_

**Teilaufgabe a)**

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK <sup>2</sup>	ZK	DK
	<b>Der Prüfling</b>				
1	(1) erklärt die Bedeutung ...	5			
2	(2) zeigt rechnerisch, dass ...	5			
3	(3) zeigt rechnerisch, dass ...	8			
4	(4) berechnet den Parameterwert ...	3			
5	(5) zeichnet den Graphen ...	5			
sachlich richtige Alternativen: (26)					
.....					
.....					
	<b>Summe Teilaufgabe a)</b>	<b>26</b>			

**Teilaufgabe b)**

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	<b>Der Prüfling</b>				
1	(1) begründet anhand der ...	4			
2	(2) bestimmt eine Gleichung ...	3			
3	(3) bestimmt die durchschnittliche ...	3			
4	(4) prüft, ob die ...	4			
sachlich richtige Alternativen: (14)					
.....					
.....					
	<b>Summe Teilaufgabe b)</b>	<b>14</b>			

<sup>2</sup> EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

**Teilaufgabe c)**

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	<b>Der Prüfling</b>				
1	(1) begründet, dass es ...	2			
2	(2) zeigt, dass unter ...	4			
3	(3) prüft, ob die ...	4			
sachlich richtige Alternativen: (10) ..... .....					
	<b>Summe Teilaufgabe c)</b>	<b>10</b>			

	<b>Summe insgesamt</b>	<b>50</b>			
--	------------------------	-----------	--	--	--

**Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.**



Name: \_\_\_\_\_

## Abiturprüfung 2013

### Mathematik, Leistungskurs

---

#### Aufgabenstellung:

Eine Firma baut Sprungschanzen für BMX-Fahrer in verschiedenen Formen, deren seitliches Profil jeweils durch den Graphen einer Funktion  $f_a$  mit der Gleichung

$$f_a(x) = -\frac{1}{4 \cdot a^2} x^3 + \frac{3}{4} x, \quad -8 \leq x \leq 0,^1$$

beschrieben wird mit  $3,2 \leq a \leq 4$  ( $x$ ,  $a$  und  $f_a(x)$  in Metern).

Die Sprungschanzen werden ausgehend vom Startpunkt  $S_a(-8 | f_a(-8))$  von links nach rechts durchfahren und so eingebaut, dass der Absprungpunkt  $A(0 | 0)$  auf dem Niveau des Erdbodens liegt, das in der Seitenansicht durch die  $x$ -Achse festgelegt ist.

Der Funktionsgraph der Beispielfunktion  $f_{3,6}$  ist in der *Abbildung 1* dargestellt.

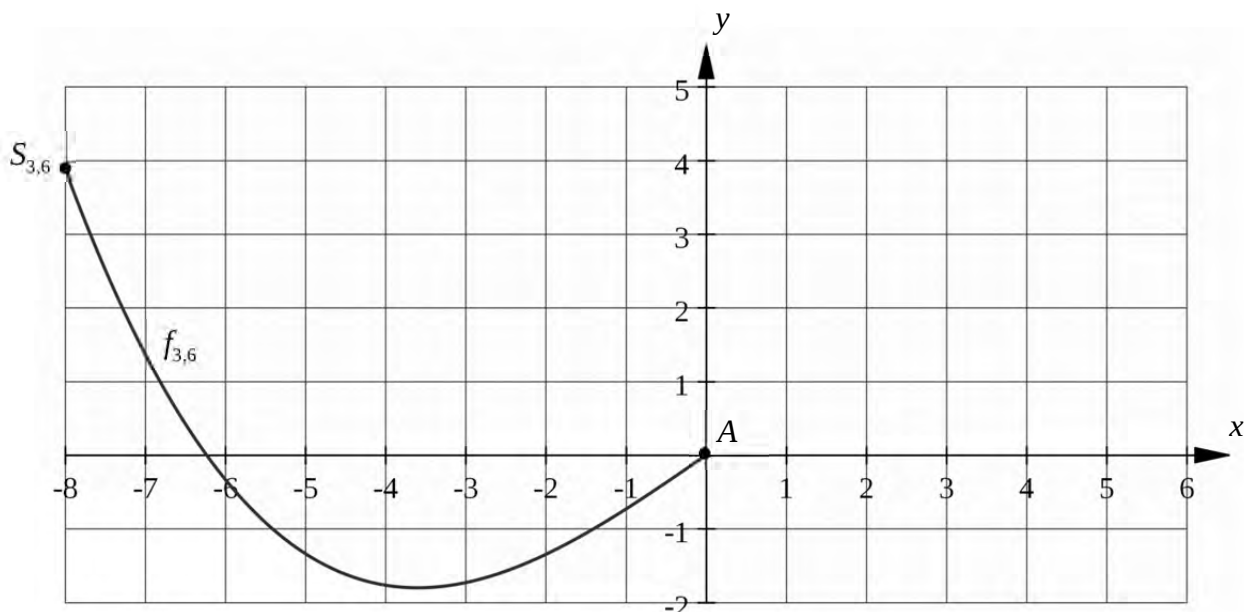


Abbildung 1

<sup>1</sup> Die Funktionen  $f_a$  sind für alle  $x \in \mathbb{R}$  definiert, werden aber nur für  $-8 \leq x \leq 0$  zur Modellierung verwendet.



Name: \_\_\_\_\_

a) (1) Berechnen Sie in Abhängigkeit vom Parameter  $a$  das Intervall, in dem die durch die Funktion  $f_a$  beschriebene Profillinie der Sprungschanze unterhalb des Niveaus des Erdbodens verläuft.

(2) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von  $a$  die Koordinaten des tiefsten Punktes  $T_a$  des Sprungschancen-Profiles.

[Zur Kontrolle:  $T_a \left( -a \mid -\frac{1}{2}a \right)$ ]

(3) Geben Sie eine Gleichung der Funktion  $k$  an, auf deren Graph alle Tiefpunkte  $T_a$  der Funktionsgraphen von  $f_a$  liegen.

(4) Skizzieren Sie den Graphen von  $f_a$  in der Abbildung 1 und beschreiben Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Graphen verschiedener Funktionen der Funktionenschar.

(19 Punkte)

b) Bei der Firma wird eine Sprungschanze bestellt, die im Punkt  $S_a(-8 \mid f_a(-8))$  die Steigung  $-3$  haben soll.

(1) Berechnen Sie den Wert von  $a$ , für den die Sprungschanze im Punkt  $S_a$  die Steigung  $-3$  hat, und die Höhe über dem Erdboden, in der sich bei dieser Sprungschanze der Startpunkt  $S_a$  befindet.

[Zur Kontrolle:  $a = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ ]

(2) Laut Angabe der Firma hat die bestellte Sprungschanze zwischen dem Startpunkt  $S_a$  und dem Absprungpunkt A die durchschnittliche Steigung  $-\frac{1}{2}$ .

Prüfen Sie diese Angabe und beurteilen Sie ihre Aussagekraft.

(3) Die bestellte Sprungschanze ist 2 Meter breit. In dem Bereich, in dem ihr Profil unterhalb des Niveaus des Erdbodens verläuft, muss Erde ausgehoben werden. Berechnen Sie, wie groß das Erdvolumen ist, das bis zur Profillinie dieser Sprungschanze ausgehoben werden muss.

(14 Punkte)



Name: \_\_\_\_\_

- c) (1) Zeigen Sie, dass alle Sprungschancen, deren Profil durch eine der Funktionen  $f_a$  gegeben ist, im Absprungpunkt A dieselbe Steigung haben.

Ein BMX-Fahrer macht nach dem Abheben von der Sprungschance im Punkt A einen 4 Meter weiten Sprung. Seine zwischen den Punkten A und B(4|0) parabelförmig verlaufende Flugbahn wird durch den Graphen einer quadratischen Funktion  $q$  mit der Gleichung  $q(x) = -\frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{4}x$  beschrieben, der im Punkt A ohne Knick an **die Profillinie der Sprungschance** anschließt (siehe Abbildung 2, gestrichelte Linie).<sup>2</sup>

- (2) Den genannten Eigenschaften des Graphen von  $q$  entsprechen Bedingungen, aus denen sich die Funktionsgleichung von  $q$  herleiten lässt.

Geben Sie diese Bedingungen an.

Rechts vom Punkt A soll ein Aufsprunghügel angelegt werden, dessen seitliches Profil durch den Graphen der Funktion  $h$  mit der Gleichung  $h(x) = \frac{3}{100}x^3 - \frac{3}{10}x^2 + \frac{3}{4}x$ ,

$0 \leq x \leq 5$ , beschrieben wird (siehe Abbildung 2).

- (3) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes C, in dem der oben genannte BMX-Fahrer den größten vertikalen Abstand vom geplanten Aufsprunghügel hätte.
- (4) Ermitteln Sie den mittleren vertikalen Abstand dieses BMX-Fahrers vom geplanten Aufsprunghügel zwischen dem Absprungpunkt A und dem Landepunkt D.

(17 Punkte)

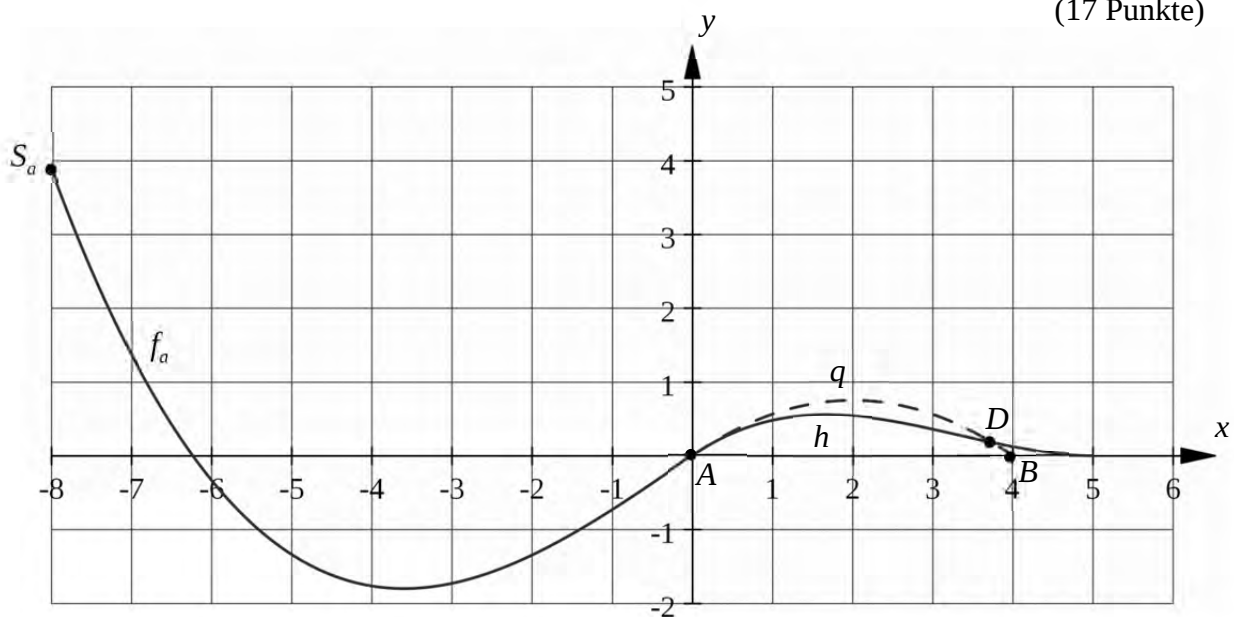


Abbildung 2

<sup>2</sup> In dieser vereinfachten Modellierung wird die räumliche Ausdehnung von Fahrer und BMX-Rad vernachlässigt.



Name: \_\_\_\_\_

### **Zugelassene Hilfsmittel**

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

## *Unterlagen für die Lehrkraft*

# **Abiturprüfung 2013**

## *Mathematik, Leistungskurs*

---

### **1. Aufgabenart**

Analysis

### **2. Aufgabenstellung<sup>1</sup>**

siehe Prüfungsaufgabe

### **3. Materialgrundlage**

- entfällt

### **4. Bezüge zu den Vorgaben 2013**

#### *1. Inhaltliche Schwerpunkte*

- Untersuchung von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen einschließlich Funktionenscharen und Logarithmusfunktionen sowie notwendiger Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel) in Sachzusammenhängen
- Flächenberechnung durch Integration

#### *2. Medien/Materialien*

- entfällt

### **5. Zugelassene Hilfsmittel**

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

---

<sup>1</sup> Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.



## 6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

### 6.1 Modellösungen

#### Modellösung a)

(1) Für  $-8 \leq x \leq 0$  und  $3,2 \leq a \leq 4$  gilt:  $f_a(x) < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \cdot a < x < 0$ .

(2) Es gilt:  $-8 \leq x \leq 0$ ,  $3,2 \leq a \leq 4$ .

Die Gleichung  $f'_a(x_T) = 0$  hat die einzige Nullstelle  $x_T = -a$ . [ $-\sqrt{3} \cdot a < x_T < 0$  ist erfüllt.]

Da zusätzlich aus  $-8 \leq x < 0$  folgt  $f''_a(x) > 0$ , ist  $x_T$  lokale und zugleich globale

Minimalstelle von  $f_a$  mit  $f_a(x_T) = -\frac{1}{2}a$ .

Der tiefste Punkt des Sprungschancen-Profiles ist  $T_a \left( -a \mid -\frac{1}{2}a \right)$ .

(3)  $x_T = -a \wedge y_T = -\frac{1}{2}a \Rightarrow y_T = \frac{1}{2}x_T$ .

Die gesuchte Funktion hat die Gleichung  $k(x) = \frac{1}{2}x$  [für  $-4 \leq x \leq 3,2$ ].

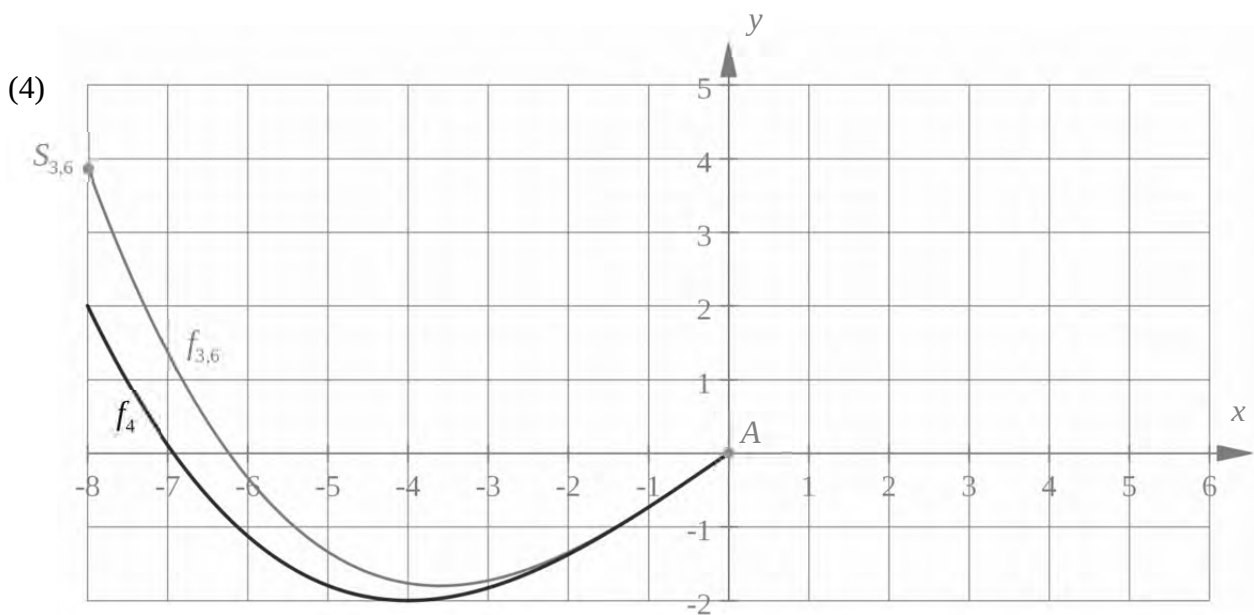


Abbildung 1

Gemeinsamkeiten der Graphen verschiedener Scharfunktionen:

Die Funktionsgraphen aller Scharfunktionen sind im Intervall  $] -8; 0[$  linksgekrümmt

und haben den Punkt  $A$  [und in diesem Punkt die Steigung  $\frac{3}{4}$ ] gemeinsam.

Unterschiede:

Für  $b > a$  [ $3,2 \leq a < b \leq 4$ ] verläuft der Graph von  $f_b$  im Intervall  $] -8; 0[$  unterhalb des Graphen von  $f_a$ .

Auch andere Eigenschaften können genannt werden.

**Modelllösung b)**

(1) Sei  $3,2 \leq a \leq 4$ .

$$f'_a(-8) = -3 \Leftrightarrow a = \frac{8\sqrt{5}}{5} [\approx 3,58].$$

Der Parameterwert, für den die Sprungschanze im Punkt  $S_a$  die Steigung  $-3$  hat, ist

$$a = \frac{8\sqrt{5}}{5}.$$

$f_{\frac{8\sqrt{5}}{5}}(-8) = 4$  : Der Startpunkt der Sprungschanze liegt 4 Meter über dem Erdboden.

(2) Die durchschnittliche Steigung des Funktionsgraphen von  $f_a$  zwischen dem Punkt  $S_a$  und dem Punkt  $A$  ist die Steigung der Intervallsekante.

$$\text{Für } a = \frac{8\sqrt{5}}{5} \text{ ergibt sich: } \frac{y_A - y_{S_a}}{x_A - x_{S_a}} = \frac{0 - 4}{0 - (-8)} = -\frac{1}{2}.$$

Die Angabe der Firma ist korrekt.

Das negative Vorzeichen des angegebenen Wertes sagt lediglich aus, dass der Punkt  $A$  tiefer liegt als der Punkt  $S_a$ .

Über sonstige Eigenschaften des Verlaufs der Sprungschanze wie minimale oder maximale Steigung bzw. das Krümmungsverhalten enthält diese Angabe der Firma keine Information.

[Auch andere Eigenschaften können genannt werden.]

(3) Der Flächeninhalt des zwischen dem Graphen von  $f_a$  und der  $x$ -Achse eingeschlossenen

$$\text{Flächenstücks beträgt } \left| \int_{-a\sqrt{3}}^0 f_a(x) dx \right| = \frac{9}{16} a^2 [\text{m}^2].$$

Da die Sprungschanze 2 Meter breit ist, ergibt sich für  $a = \frac{8\sqrt{5}}{5}$  ein Erdvolumen von

$$\frac{9}{8} a^2 = \frac{72}{5} = 14,4 [\text{m}^3].$$

**Modelllösung c)**

(1)  $f'_a(0) = \frac{3}{4}$  unabhängig von  $a$ .

(2) Sei  $q(x) = b \cdot x^2 + c \cdot x + d$  und  $q'(x) = 2b \cdot x + c$ . Folgende Bedingungen sind zu erfüllen:

$$q(0) = f_a(0) = 0, \quad q'(0) = f'_a(0) = \frac{3}{4} \quad \text{sowie} \quad q(4) = 0.$$

Daraus ergibt sich  $q(x) = -\frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{4}x$ .

(3) Gesucht ist das [absolute] Maximum der Funktion  $d$ , mit der Gleichung

$$d(x) = q(x) - h(x) = -\frac{3}{100}x^3 + \frac{9}{80}x^2, \quad 0 \leq x \leq 4.$$

Die Gleichung  $d'(x) = 0$  hat die Lösungen  $x_1 = 0$  und  $x_2 = \frac{5}{2}$ .

Wegen  $d(0) = d(x_1) = 0$ ,  $d(x_2) = \frac{15}{64} \approx 0,23$  und  $d(4) = -0,12$  ist  $d(x_2)$  [lokales

und absolutes] Maximum der Funktion  $d$ .

Der gesuchte Punkt, in dem der BMX-Fahrer den größten vertikalen Abstand vom

geplanten Aufsprunghügel hätte, ist  $C\left(\frac{5}{2} \mid \frac{45}{64}\right) \approx C(2,5 \mid 0,7031)$ .

(4) Der BMX-Fahrer landet an der Stelle  $x_D$ , für die gilt  $0 < x_D \leq 4$  und  $q(x_D) = h(x_D)$ .

Daraus folgt:  $x_D = \frac{15}{4} = 3,75$ .

Unter Verwendung der Abstandsfunktion  $d$  aus (3) ergibt sich für den mittleren

vertikalen Abstand:  $\frac{1}{x_D - x_A} \int_{x_A}^{x_D} d(x) dx = \frac{4}{15} \int_0^{\frac{15}{4}} d(x) dx = \frac{135}{1024} \approx 0,13$  [Meter].

## 6.2 Teilleistungen – Kriterien

### Teilaufgabe a)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	(1) berechnet in Abhängigkeit vom Parameter $a$ das Intervall, in dem die durch die Funktion $f_a$ beschriebene Profillinie der Sprungschanze unterhalb des Niveaus des Erdbodens verläuft.	3
2	(2) bestimmt in Abhängigkeit von $a$ die Koordinaten des tiefsten Punktes $T_a$ des Sprungschancen-Profiles.	6
3	(3) gibt eine Gleichung der Funktion $k$ an.	3
4	(4) skizziert den Graphen der Funktion $f_a$ .	4
5	(4) beschreibt Gemeinsamkeiten und Unterschiede verschiedener Funktionen der Funktionenschar.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

### Teilaufgabe b)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	(1) berechnet den Wert von $a$ , für den die Sprungschanze im Punkt $S_a$ die Steigung $-3$ hat.	2
2	(1) berechnet die Höhe, in der sich bei dieser Sprungschanze der Startpunkt $S_a$ befindet.	2
3	(2) prüft die Angabe der Firma.	3
4	(2) beurteilt ihre Aussagekraft.	3
5	(3) berechnet das Erdvolumen.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

### Teilaufgabe c)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	(1) zeigt, dass alle Sprungschancen im Punkt $A$ dieselbe Steigung haben.	2
2	(2) gibt die Bedingungen an.	3
3	(3) berechnet die Koordinaten des Punktes $C$ , in dem der BMX-Fahrer den größten vertikalen Abstand vom geplanten Aufsprunghügel hätte.	6
4	(4) ermittelt den mittleren vertikalen Abstand des BMX-Fahrers vom geplanten Aufsprunghügel zwischen dem Absprungpunkt $A$ und dem Landepunkt $D$ .	6
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

**7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit**

Name des Prüflings: \_\_\_\_\_ Kursbezeichnung: \_\_\_\_\_

Schule: \_\_\_\_\_

**Teilaufgabe a)**

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK <sup>2</sup>	ZK	DK
	<b>Der Prüfling</b>				
1	(1) berechnet in Abhängigkeit ...	3			
2	(2) bestimmt in Abhängigkeit ...	6			
3	(3) gibt eine Gleichung ...	3			
4	(4) skizziert den Graphen ...	4			
5	(4) beschreibt Gemeinsamkeiten und ...	3			
sachlich richtige Alternativen: (19)					
.....					
.....					
	<b>Summe Teilaufgabe a)</b>	<b>19</b>			

**Teilaufgabe b)**

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	<b>Der Prüfling</b>				
1	(1) berechnet den Wert ...	2			
2	(1) berechnet die Höhe ...	2			
3	(2) prüft die Angabe ...	3			
4	(2) beurteilt ihre Aussagekraft.	3			
5	(3) berechnet das Erdvolumen.	4			
sachlich richtige Alternativen: (14)					
.....					
.....					
	<b>Summe Teilaufgabe b)</b>	<b>14</b>			

<sup>2</sup> EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

**Teilaufgabe c)**

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	<b>Der Prüfling</b>				
1	(1) zeigt, dass alle ...	2			
2	(2) gibt die Bedingungen ...	3			
3	(3) berechnet die Koordinaten ...	6			
4	(4) ermittelt den mittleren ...	6			
sachlich richtige Alternativen: (17) ..... .....					
	<b>Summe Teilaufgabe c)</b>	<b>17</b>			

	<b>Summe insgesamt</b>	<b>50</b>			
--	------------------------	-----------	--	--	--

**Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.**



Name: \_\_\_\_\_

## Abiturprüfung 2013

### Mathematik, Leistungskurs

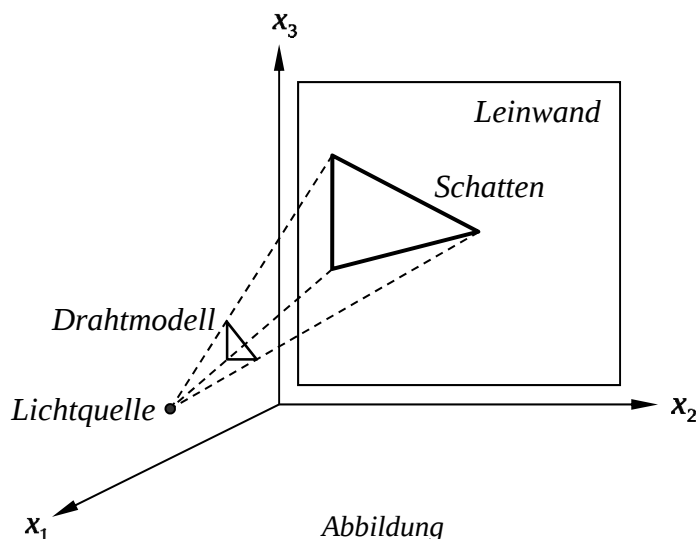
---

#### Aufgabenstellung:

An einer Schule wird eine Mathematikausstellung unter dem Motto „Mathematik zum Anfassen und Mitmachen“ ausgerichtet.

Eines der ausgestellten Experimente besteht aus einer annähernd punktförmigen Lichtquelle, einer Leinwand, auf die verschiedene unregelmäßige Dreiecke gezeichnet sind, und einem Drahtmodell eines gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks. Dieses Drahtmodell gilt es so zwischen Lichtquelle und Leinwand zu halten, dass sein Schatten exakt mit einem der Dreiecke auf der Leinwand zur Deckung gebracht wird.

Die *Abbildung* zeigt eine Prinzipdarstellung des Experiments.



In dieser Aufgabe ist die Leinwand Teil der  $x_2x_3$ -Ebene, die Position der Lichtquelle ist  $L(40|10|10)$ , die Längeneinheit 1 dm.



Name: \_\_\_\_\_

Das Drahtmodell wird zunächst so zwischen Lichtquelle und Leinwand gehalten, dass seine Ecken in den Punkten  $A(30|10|10)$ ,  $B(32|11|12)$  und  $C(31|12|8)$  liegen.

- a) (1) *Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks ABC.*  
(2) *Bestimmen Sie die Position des rechten Winkels im rechtwinkligen Dreieck ABC und berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.*
- (10 Punkte)

- b) (1) *Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte  $A'$ ,  $B'$  und  $C'$  des Schattens, den das Drahtmodell auf die Leinwand wirft.*  
(2) *Zeigen Sie, dass bei der Projektion des Dreiecks ABC auf das Schattendreieck  $A'B'C'$  die Größen aller Innenwinkel verändert werden.*

[Zur Kontrolle:  $A'(0|10|10)$ ,  $B'(0|15|20)$ ,  $C'\left(0\left|\frac{170}{9}\right|\frac{10}{9}\right)$ ] (19 Punkte)





Name: \_\_\_\_\_

c) Auf der Leinwand ist das Dreieck  $R'S'T'$  mit den Eckpunkten  $R' \left( 0 \left| \frac{22}{3} \right| \frac{22}{3} \right)$ ,  $S'$  und  $T'$

aufgezeichnet. Das Drahtmodell wird so zwischen Lichtquelle und Leinwand gehalten, dass sein Schatten mit dem Dreieck  $R'S'T'$  auf der Leinwand zur Deckung kommt.

Die Positionen  $S(26|11|7)$  und  $T(23|8|7)$  der beiden  $45^\circ$ -Ecken des Drahtmodells werden als bekannt vorausgesetzt, während die Position  $R$  der  $90^\circ$ -Ecke, deren Schatten auf der Leinwand die Position  $R'$  hat, bestimmt werden soll.

(1) *Geben Sie eine Gleichung der Geraden  $LR'$  an, auf der der Lichtstrahl verläuft, der von der Position  $L$  der Lichtquelle ausgeht und im Punkt  $R'$  auf die Leinwand trifft.*

(2) *Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene  $E$ , in der alle Punkte liegen, die von den Punkten  $S$  und  $T$  gleichen Abstand haben.*

[Zur Kontrolle:  $E : x_1 + x_2 = 34$ ]

(3) *Berechnen Sie nun die Koordinaten der Position  $R$  der  $90^\circ$ -Ecke des Drahtmodells.*

(4) *Die Position  $R$  könnte nicht mit Hilfe der Ebene  $E$  aus (2) bestimmt werden, wenn die Position der Lichtquelle  $L$  in dieser Ebene läge.*

*Beschreiben Sie einen Lösungsweg zur Bestimmung der Position  $R$  der  $90^\circ$ -Ecke des Drahtmodells, der die Ebene  $E$  aus (2) **nicht** verwendet.*

(21 Punkte)

### Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

## Unterlagen für die Lehrkraft

# Abiturprüfung 2013

## Mathematik, Leistungskurs

---

### 1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie ohne Alternative

### 2. Aufgabenstellung<sup>1</sup>

siehe Prüfungsaufgabe

### 3. Materialgrundlage

- entfällt

### 4. Bezüge zu den Vorgaben 2013

#### 1. Inhaltliche Schwerpunkte

- Lineare Gleichungssysteme für  $n > 2$ , Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
- Lineare Abhängigkeit von Vektoren, Parameterformen von Geraden- und Ebenengleichungen
- Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität, Winkel und Länge von Vektoren

#### 2. Medien/Materialien

- entfällt

### 5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

---

<sup>1</sup> Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

## 6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

### 6.1 Modellösungen

#### Modellösung a)

(1) Die Seitenlängen des Dreiecks  $ABC$  betragen

$$|\overline{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = 3 \text{ [dm]}, \quad |\overline{AC}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = 3 \text{ [dm]} \quad \text{und} \quad |\overline{BC}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = 3 \cdot \sqrt{2} \text{ [dm]}.$$

(2) Da die Seiten  $\overline{AB}$  und  $\overline{AC}$  gleich lang sind und die Seite  $\overline{BC}$  um den Faktor  $\sqrt{2}$  länger ist als diese, ist das Dreieck  $ABC$  gleichschenkelig rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei  $A$ . Der Flächeninhalt beträgt  $\frac{1}{2} \cdot 3 \text{ dm} \cdot 3 \text{ dm} = 4,5 \text{ dm}^2$ .

[Alternativ kann die Position des rechten Winkels mit Hilfe des Skalarprodukts nachgewiesen werden.]

#### Modellösung b)

(1) Die gesuchten Eckpunkte  $A'$ ,  $B'$  und  $C'$  des Drahtmodellshattens auf der Leinwand sind die Schnittpunkte der Geraden  $LA$ ,  $LB$  bzw.  $LC$  mit der  $x_2x_3$ -Ebene ( $x_1 = 0$ ).

$$LA: \vec{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ schneidet für } a = 4 \text{ die } x_2x_3\text{-Ebene im Punkt } A'(0 | 10 | 10).$$

$$LB: \vec{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ schneidet für } b = 5 \text{ die } x_2x_3\text{-Ebene im Punkt } B'(0 | 15 | 20).$$

$$LC: \vec{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ schneidet für } c = \frac{40}{9} \text{ die } x_2x_3\text{-Ebene im Punkt } C' \left( 0 \left| \frac{170}{9} \right| \frac{10}{9} \right).$$

(2) Es gilt:

$$\cos(\alpha') = \frac{\overline{A'B'} \cdot \overline{A'C'}}{|\overline{A'B'}| \cdot |\overline{A'C'}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 80/9 \\ -80/9 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 80/9 \\ -80/9 \end{pmatrix} \right|} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \approx -0,3162 \Rightarrow \alpha' \approx 108,4^\circ,$$

$$\cos(\beta') = \frac{\overline{B'A'} \cdot \overline{B'C'}}{|\overline{B'A'}| \cdot |\overline{B'C'}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 35/9 \\ -170/9 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 35/9 \\ -170/9 \end{pmatrix} \right|} \approx 0,7859 \Rightarrow \beta' \approx 38,2^\circ$$

und  $\gamma' = 180^\circ - \alpha' - \beta' \approx 33,4^\circ$ .

Da die Winkel des Drahtmodells  $90^\circ$  bei A und jeweils  $45^\circ$  bei B und C betragen, ist die Behauptung gezeigt.

[Auch andere Lösungswege sind möglich.]

### Modelllösung c)

$$(1) \text{ Es gilt: } \vec{x}_L - \vec{x}_{R'} = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 22/3 \\ 22/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 8/3 \\ 8/3 \end{pmatrix} = \frac{8}{3} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eine Gleichung der gesuchten Geraden ist  $LR': \vec{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ .

(2) Die gesuchte Ebene  $E$  ist orthogonal zur Strecke  $\overline{ST}$  und schneidet diese in deren

$$\text{Mittelpunkt } M \left( \frac{26+23}{2} \mid \frac{11+8}{2} \mid \frac{7+7}{2} \right) = M \left( \frac{49}{2} \mid \frac{19}{2} \mid 7 \right).$$

Ein Normalenvektor der Ebene  $E$  ist  $\vec{n} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{x}_S - \vec{x}_T) = \frac{1}{3} \cdot \left( \begin{pmatrix} 26 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 23 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

eine Normalengleichung der Ebene  $E: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 49/2 \\ 19/2 \\ 7 \end{pmatrix} = 34$ .

- (3) Die Position  $R$  der  $90^\circ$ -Ecke des Drahtmodells ist der Schnittpunkt der Geraden  $LR'$  mit der Ebene  $E$  aus (2).

$$\text{Es gilt: } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + t_R \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 34 \Leftrightarrow (40 + 15t_R) + (10 + t_R) = 34 \Leftrightarrow t_R = -1 \text{ und}$$

$$\vec{x}_R = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} + t_R \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte Position ist somit  $R(25|9|9)$ .

[Weitere Überprüfungen von Abständen oder Winkeln erübrigen sich.]

- (4) Die Position  $R$  der  $90^\circ$ -Ecke des Drahtmodells, deren Schatten die Position  $R'$  hat, liegt auf der Strecke  $\overline{LR'}$ , wenn für den zugehörigen Ortsvektor  $\vec{x}_R$  gilt

$$\vec{x}_R = \vec{x}_L + t_R \cdot (\vec{x}_{R'} - \vec{x}_L) \text{ mit } 0 \leq t_R \leq 1.$$

$R$  ist eine geeignete Position der  $90^\circ$ -Ecke des Drahtmodells, wenn  $\vec{x}_R$  die Bedingungen  $|\vec{x}_S - \vec{x}_R| = 3$  und  $|\vec{x}_T - \vec{x}_R| = 3$  bzw.  $(\vec{x}_S - \vec{x}_R)^2 = 9$  und  $(\vec{x}_T - \vec{x}_R)^2 = 9$  erfüllt.

Diese beiden quadratischen Gleichungen für den Parameter  $t_R$  haben wegen der in der Aufgabenstellung vorausgesetzten Existenz der Position  $R$  [wenigstens] eine gemeinsame Lösung, und zwar im Intervall  $[0; 1]$ , mit deren Hilfe die Koordinaten von  $R$  berechnet werden können.

**6.2 Teilleistungen – Kriterien****Teilaufgabe a)**

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	(1) berechnet die Seitenlängen des Dreiecks $ABC$ .	4
2	(2) bestimmt die Position des rechten Winkels im rechtwinkligen Dreieck $ABC$ .	3
3	(2) berechnet den Flächeninhalt des Dreiecks $ABC$ .	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

**Teilaufgabe b)**

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	(1) ermittelt einen Ansatz zur Bestimmung der gesuchten Eckpunkte des Schattens.	3
2	(1) gibt Gleichungen der Geraden $LA$ , $LB$ und $LC$ an.	3
3	(1) berechnet die Koordinaten der gesuchten Eckpunkte des Schattens.	4
4	(2) berechnet die Innenwinkel des Schattendreiecks $A'B'C'$ .	6
5	(2) gibt die Größen der Innenwinkel des Dreiecks $ABC$ an und vergleicht sie mit den Innenwinkeln des Schattendreiecks.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

**Teilaufgabe c)**

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	(1) gibt eine Gleichung der Geraden $LR'$ an.	3
2	(2) bestimmt eine Gleichung der Ebene $E$ , in der alle Punkte liegen, die von $S$ und $T$ gleichen Abstand haben.	8
3	(3) berechnet die Koordinaten der Position $R$ der $90^\circ$ -Ecke des Drahtmodells.	5
4	(4) beschreibt einen Lösungsweg zur Bestimmung der Positionen $R$ , der die Ebene $E$ nicht verwendet.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

**7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit**

Name des Prüflings: \_\_\_\_\_ Kursbezeichnung: \_\_\_\_\_

Schule: \_\_\_\_\_

**Teilaufgabe a)**

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK <sup>2</sup>	ZK	DK
1	(1) berechnet die Seitenlängen ...	4			
2	(2) bestimmt die Position ...	3			
3	(2) berechnet den Flächeninhalt ...	3			
sachlich richtige Alternativen: (10) ..... .....					
<b>Summe Teilaufgabe a)</b>		<b>10</b>			

**Teilaufgabe b)**

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) ermittelt einen Ansatz ...	3			
2	(1) gibt Gleichungen der ...	3			
3	(1) berechnet die Koordinaten ...	4			
4	(2) berechnet die Innenwinkel ...	6			
5	(2) gibt die Größen ...	3			
sachlich richtige Alternativen: (19) ..... .....					
<b>Summe Teilaufgabe b)</b>		<b>19</b>			

<sup>2</sup> EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

**Teilaufgabe c)**

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	<b>Der Prüfling</b>				
1	(1) gibt eine Gleichung ...	3			
2	(2) bestimmt eine Gleichung ...	8			
3	(3) berechnet die Koordinaten ...	5			
4	(4) beschreibt einen Lösungsweg ...	5			
sachlich richtige Alternativen: (21) ..... .....					
	<b>Summe Teilaufgabe d)</b>	<b>21</b>			

	<b>Summe insgesamt</b>	<b>50</b>			
--	------------------------	-----------	--	--	--

**Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)**

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
<b>Übertrag der Punktzahl aus der ersten bearbeiteten Aufgabe</b>	<b>50</b>			
<b>Übertrag der Punktzahl aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe</b>	<b>50</b>			
<b>Übertrag der Punktzahl aus der dritten bearbeiteten Aufgabe</b>	<b>50</b>			
<b>Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung</b>	<b>150</b>			
<b>aus der Punktzahl resultierende Note</b>				
<b>Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOST</b>				
<b>Paraphe</b>				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktzahlen aus EK und ZK: \_\_\_\_\_

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: \_\_\_\_\_

Die Klausur wird abschließend mit der Note: \_\_\_\_\_ (\_\_\_\_ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum



**Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)**

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

<b>Note</b>	<b>Punkte</b>	<b>Erreichte Punktzahl</b>
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0



Name: \_\_\_\_\_

## Abiturprüfung 2013

### *Mathematik, Leistungskurs*

---

#### **Aufgabenstellung:**

Von einem Forstbetrieb werden auf verschiedenen Waldflächen Tannen gezogen.<sup>1</sup> Entsprechend ihrer Höhe werden die Tannen in drei Größenklassen eingeteilt: Tannen, die weniger als einen Meter groß sind, gehören zur Größenklasse K (klein); Tannen, die mindestens einen Meter, aber weniger als zwei Meter groß sind, gehören zur Größenklasse M (mittel); Tannen, die mindestens zwei Meter groß sind, gehören zur Größenklasse G (groß).

Jeweils zu Beginn eines festen Zeitraums (Wachstumsperiode), auf den sich im Folgenden die Übergänge zwischen den drei Größenklassen beziehen, wird eine Bestandsaufnahme durchgeführt. Die Übergangsquoten berücksichtigen, dass abgestorbene, kranke oder beschädigte Bäume im Laufe jeder Wachstumsperiode aus dem Bestand entfernt werden.

- a) Auf einer der Waldflächen erreichen von den Tannen der Größenklasse K innerhalb einer Wachstumsperiode 50 % die Größenklasse M und 10 % die Größenklasse G, während 30 % in der Größenklasse K verbleiben. Von den Tannen der Größenklasse M erreichen innerhalb einer Wachstumsperiode 55 % die Größenklasse G, während 40 % in der Größenklasse M verbleiben. Von den Tannen der Größenklasse G sind am Ende einer Wachstumsperiode noch 98 % in der Größenklasse G.

*Stellen Sie dieses Wachstumsverhalten durch ein Übergangsdigramm dar und bestimmen Sie eine Übergangsmatrix, die dieses Wachstumsverhalten beschreibt.*

(10 Punkte)

---

<sup>1</sup> Dort wachsen nur Bäume, die von dem Forstbetrieb angepflanzt wurden.



Name: \_\_\_\_\_

Auf einer anderen Waldfläche wird eine andere Art von Tannen gezogen. Eine Zählung ergab die folgende Übergangsmatrix  $A$  für das Übergangsverhalten zwischen den oben genannten Größenklassen innerhalb einer Wachstumsperiode:

$$\begin{array}{l} \text{nach:} \\ \text{K} \\ \text{M} \\ \text{G} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{von:} \\ \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{K} & \text{M} & \text{G} \\ \left( \begin{array}{ccc} 0,25 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0,55 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,95 \end{array} \right) \end{array}$$

In Teilaufgabe b) wird angenommen, dass diese Übergangsquoten auch für die vorangegangenen und folgenden Wachstumsperioden gelten.

b) Die Bestandsaufnahme zu Beginn einer bestimmten Wachstumsperiode ergibt 450 Tannen der Größenklasse K, 4230 Tannen der Größenklasse M und 5320 Tannen der Größenklasse G.

- (1) *Bestimmen Sie die Anzahl der Tannen in den einzelnen Größenklassen nach zwei Wachstumsperioden.*
- (2) *Bestimmen Sie die Anzahl der Tannen in den einzelnen Größenklassen zwei Wachstumsperioden vor dem Zeitpunkt der Bestandsaufnahme.*
- (3) *Zeigen Sie, dass der Gesamtbestand an Tannen am Ende einer beliebigen Wachstumsperiode 95 % des Bestandes zu Beginn dieser Wachstumsperiode beträgt, und berechnen Sie, nach wie vielen Wachstumsperioden erstmals weniger als 60 % des ursprünglichen Gesamtbestandes an Tannen vorhanden sind.*
- (4) *Ermitteln Sie ausgehend vom oben genannten Anfangsbestand (K: 450, M: 4230, G: 5320), nach wie vielen Wachstumsperioden erstmals mehr als 96 % der vorhandenen Tannen zur Größenklasse G gehören.*

*Begründen Sie, dass die Anzahl der Tannen der Größenklasse G für diesen Anfangsbestand nach drei Wachstumsperioden am größten ist.*

(21 Punkte)



Name: \_\_\_\_\_

Nun wird davon ausgegangen, dass jeweils am Ende einer Wachstumsperiode, innerhalb derer sich der Bestand zunächst gemäß der Übergangsmatrix  $A$  entwickelt hat, in jeder der drei Größenklassen zusätzliches Nutzholz geschlagen wird.

Insgesamt werden am Ende einer Wachstumsperiode 20 % des dann vorhandenen Bestandes der Größenklasse K, 30 % des dann vorhandenen Bestandes der Größenklasse M und 45 % des dann vorhandenen Bestandes der Größenklasse G abgeholzt.

Anschließend werden in der Größenklasse K so viele Tannen neu gesetzt, wie zuvor insgesamt in allen drei Größenklassen gefällt wurden.

- c) (1) Bestimmen Sie ausgehend von einem beliebigen Bestandsvektor  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  zu Beginn einer Wachstumsperiode, wie viele Tannen in den einzelnen Größenklassen am Ende der Wachstumsperiode **nach** dem Fällen und **vor** dem Wiederaufforsten **vorhanden** sind.

$$[\text{Kontrollergebnis: } \begin{pmatrix} 0,2x_1 \\ 0,49x_1 + 0,385x_2 \\ 0,22x_2 + 0,5225x_3 \end{pmatrix}]$$

- (2) Gesucht ist eine Übergangsmatrix  $C$ , die den Übergang zwischen den Größenklassen K, M und G innerhalb einer Wachstumsperiode unter Berücksichtigung der abschließenden Fäll- und Wiederaufforstungsarbeiten beschreibt.

$$\text{Zeigen Sie, dass } C = \begin{pmatrix} 0,46 & 0,345 & 0,4275 \\ 0,49 & 0,385 & 0 \\ 0 & 0,22 & 0,5225 \end{pmatrix} \text{ gilt.}$$

- (3) Begründen Sie, dass nach der Wiederaufforstung am Ende einer Wachstumsperiode der Gesamtbestand an Tannen 95 % des Bestandes zu Beginn dieser Wachstumsperiode beträgt.
- (4) Am Ende jeder Wachstumsperiode sollen nun nach der Wiederaufforstung noch **zusätzlich** Bäume der Größenklasse K gepflanzt werden, jeweils ein fester Anteil  $a$  des gesamten Anfangsbestandes.

Bestimmen Sie diesen Anteil  $a$  so, dass der Gesamtbestand an Tannen im Laufe von **zwei** Wachstumsperioden um 10 % zunimmt.

(19 Punkte)



Name: \_\_\_\_\_

**Zugelassene Hilfsmittel:**

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

## Unterlagen für die Lehrkraft

# Abiturprüfung 2013

## Mathematik, Leistungskurs

---

### 1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie mit Alternative 2 (Übergangsmatrizen)

### 2. Aufgabenstellung<sup>1</sup>

siehe Prüfungsaufgabe

### 3. Materialgrundlage

- entfällt

### 4. Bezüge zu den Vorgaben 2013

#### 1. Inhaltliche Schwerpunkte

- Lineare Gleichungssysteme für  $n > 2$ , Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

Alternative 2:

- Übergangsmatrizen, Matrizenmultiplikation als Verkettung von Übergängen, Fixvektoren

#### 2. Medien/Materialien

- entfällt

### 5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

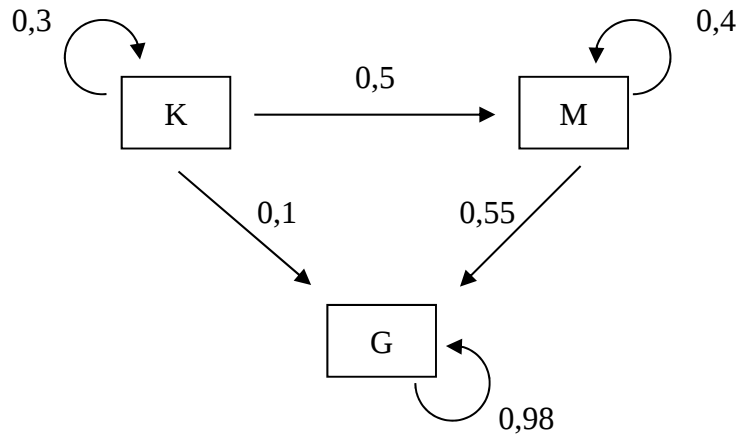
---

<sup>1</sup> Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

## 6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

### 6.1 Modellösungen

#### Modellösung a)



$$\begin{array}{l}
 \text{nach:} \\
 \text{K} \\
 \text{M} \\
 \text{G}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{von:} \\
 \text{K} \\
 \text{M} \\
 \text{G}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{K} \\
 \text{M} \\
 \text{G}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 W = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,4 & 0 \\ 0,1 & 0,55 & 0,98 \end{pmatrix}$$

#### Modellösung b)

$$(1) \quad A^2 \cdot \begin{pmatrix} 450 \\ 4230 \\ 5320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0,55 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,95 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 450 \\ 4230 \\ 5320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28,125 \\ 1531,575 \\ 7465,3 \end{pmatrix}.$$

Nach zwei Wachstumsperioden sind etwa 28 Tannen der Größenklasse K, 1532 Tannen der Größenklasse M und 7465 Tannen der Größenklasse G vorhanden.

$$(2) \quad \text{Die Gleichung } A^2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ 4230 \\ 5320 \end{pmatrix} \text{ ist zu lösen.}$$

$$\text{Der gesuchte Bestandsvektor ist daher } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-2} \cdot \begin{pmatrix} 450 \\ 4230 \\ 5320 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 7200 \\ 655 \\ 3226 \end{pmatrix}; \text{ also waren zwei}$$

Wachstumsperioden zuvor etwa 7200 Tannen der Größenklasse K, 655 Tannen der Größenklasse M und 3226 Tannen der Größenklasse G vorhanden.

(3) Ausgehend vom Bestandsvektor  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  einer beliebigen Wachstumsperiode ergibt

$$\text{sich aus } A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25x_1 \\ 0,7x_1 + 0,55x_2 \\ 0,4x_2 + 0,95x_3 \end{pmatrix} \text{ am Ende dieser Wachstumsperiode ein Gesamt-}$$

bestand von  $(0,25 + 0,7) \cdot x_1 + (0,55 + 0,4) \cdot x_2 + 0,95 \cdot x_3 = 0,95 \cdot (x_1 + x_2 + x_3)$ .

Somit beträgt der Gesamtbestand nach einer beliebigen Wachstumsperiode 95 % des ursprünglichen Bestandes.

[Auch die Spaltensummen der Matrix  $A$  können betrachtet werden.]

Sei  $n$  eine natürliche Zahl. Dann gilt:  $0,95^n < 0,6 \Leftrightarrow n \geq 10$ .

Nach 10 Wachstumsperioden sind erstmals weniger als 60 % des ursprünglichen Gesamtbestandes an Tannen vorhanden.

(4) Aus  $A^4 \cdot \begin{pmatrix} 450 \\ 4230 \\ 5320 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 \\ 479 \\ 7664 \end{pmatrix}$  und  $A^5 \cdot \begin{pmatrix} 450 \\ 4230 \\ 5320 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 265 \\ 7473 \end{pmatrix}$  ergibt sich als Anteil des

Bestandes der Größenklasse G am Gesamtbestand näherungsweise:

$$\frac{7664}{2 + 479 + 7664} \approx 0,941 \text{ bzw. } \frac{7473}{265 + 7473} = \frac{7473}{7738} \approx 0,966.$$

Daher gehören nach 5 Wachstumsperioden erstmals mehr als 96 % der vorhandenen Tannen zur Größenklasse G.

Der Bestand in der Größenklasse G entwickelt sich wie folgt:

Anzahl $n$ der Wachstumsperioden	0	1	2	3	4	5
Bestand in der Größenklasse G	5320	6746	7465	7705	7664	7473

Nach drei Wachstumsperioden tritt ein Maximum von 7705 Tannen auf.

Wegen  $(450 + 4230 + 5320) \cdot 0,95^6 \approx 7351 < 7473$  unterschreitet der Gesamtbestand am Ende der 6. Wachstumsperiode [erstmal] den vorigen Bestand in der Größenklasse G. Daher ist 7705 die größte auftretende Anzahl von Tannen in der Größenklasse G.



**Modelllösung c)**

(1) Nach einer Wachstumsperiode ist der Bestand durch folgenden Bestandsvektor gegeben:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0,55 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25x_1 \\ 0,7x_1 + 0,55x_2 \\ 0,4x_2 + 0,95x_3 \end{pmatrix}.$$

Nach dem Fällen der Bäume und vor der Aufforstung ergibt sich für den verbleibenden Bestand der Bestandsvektor:

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0,55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,25x_1 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0,55 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2x_1 \\ 0,49x_1 + 0,385x_2 \\ 0,22x_2 + 0,5225x_3 \end{pmatrix}.$$

(2) Wegen

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0,45 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,25x_1 \\ 0,7x_1 + 0,55x_2 \\ 0,4x_2 + 0,95x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,05x_1 \\ 0,21x_1 + 0,165x_2 \\ 0,18x_2 + 0,4275x_3 \end{pmatrix}$$

$$\left[ \text{bzw.} \begin{pmatrix} 0,25x_1 \\ 0,7x_1 + 0,55x_2 \\ 0,4x_2 + 0,95x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,2x_1 \\ 0,49x_1 + 0,385x_2 \\ 0,22x_2 + 0,5225x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,05x_1 \\ 0,21x_1 + 0,165x_2 \\ 0,18x_2 + 0,4275x_3 \end{pmatrix} \right]$$

werden  $0,26x_1 + 0,345x_2 + 0,4275x_3$  Tannen gefällt, die in der Größenklasse K neu gesetzt werden müssen.

Nach der Aufforstung ergibt sich schließlich als Bestandsvektor

$$\begin{pmatrix} 0,2x_1 + 0,26x_1 + 0,345x_2 + 0,4275x_3 \\ 0,49x_1 + 0,385x_2 \\ 0,22x_2 + 0,5225x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,46 & 0,345 & 0,4275 \\ 0,49 & 0,385 & 0 \\ 0 & 0,22 & 0,5225 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{und als Übergangsmatrix somit } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0,46 & 0,345 & 0,4275 \\ 0,49 & 0,385 & 0 \\ 0 & 0,22 & 0,5225 \end{pmatrix}.$$

(3) Wenn in der Größenklasse K so viele Tannen neu gesetzt werden, wie zuvor in allen drei Größenklassen gefällt wurden, beträgt der Gesamtbestand am Ende einer Wachstumsperiode wieder 95 % des Anfangsbestandes, weil sich an der Gesamtsituation gegenüber Aufgabenteil b) (3) nichts geändert hat.

(4) Bezeichnet  $x$  [ $\neq 0$ ] den Anfangsbestand, so gilt [wegen  $a > 0$ ]:

$$(0,95 + a)^2 \cdot x = 1,1x \Leftrightarrow a = \sqrt{1,1} - 0,95 \approx 0,0988 .$$

Der gesuchte Anteil  $a$  des Anfangsbestandes beträgt ca. 0,0988.

**6.2 Teilleistungen – Kriterien****Teilaufgabe a)**

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	stellt das Wachstumsverhalten durch ein Übergangsdiagramm dar.	5
2	bestimmt eine Übergangsmatrix.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

**Teilaufgabe b)**

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	(1) bestimmt die Anzahl der Tannen in den einzelnen Größenklassen nach zwei Wachstumsperioden.	3
2	(2) bestimmt die Anzahl der Tannen in den einzelnen Größenklassen zwei Wachstumsperioden vor dem Zeitpunkt der Bestandsaufnahme.	3
3	(3) zeigt, dass der Gesamtbestand an Tannen nach einer beliebigen Wachstumsperiode 95 % des ursprünglichen Bestandes beträgt.	3
4	(3) berechnet, nach wie vielen Wachstumsperioden erstmals weniger als 60 % des ursprünglichen Gesamtbestandes vorhanden sind.	3
5	(4) ermittelt, nach wie vielen Wachstumsperioden erstmals mehr als 96 % der vorhandenen Tannen zur Größenklasse G gehören.	4
6	(4) begründet, dass die Anzahl der Tannen der Größenklasse G nach drei Wachstumsperioden am größten ist.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

**Teilaufgabe c)**

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	(1) bestimmt, wie viele Tannen in den einzelnen Größenklassen am Ende der Wachstumsperiode nach dem Fällen und vor dem Aufforsten vorhanden sind.	5
2	(2) bestimmt, wie viele Tannen neu gepflanzt werden.	3
3	(2) zeigt, dass die Matrix $C$ die angegebene Form hat.	4
4	(3) begründet, dass der Gesamtbestand am Ende einer Wachstumsperiode 95 % des Anfangsbestandes beträgt.	3
5	(4) bestimmt den gesuchten Anteil.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

**7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit**

Name des Prüflings: \_\_\_\_\_ Kursbezeichnung: \_\_\_\_\_

Schule: \_\_\_\_\_

**Teilaufgabe a)**

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK <sup>2</sup>	ZK	DK
1	stellt das Wachstumsverhalten ...	5			
2	bestimmt eine Übergangsmatrix.	5			
sachlich richtige Alternativen: (10) ..... .....					
<b>Summe Teilaufgabe a)</b>		<b>10</b>			

**Teilaufgabe b)**

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) bestimmt die Anzahl ...	3			
2	(2) bestimmt die Anzahl ...	3			
3	(3) zeigt, dass der ...	3			
4	(3) berechnet, nach wie ...	3			
5	(4) ermittelt, nach wie ...	4			
6	(4) begründet, dass die ...	5			
sachlich richtige Alternativen: (21) ..... .....					
<b>Summe Teilaufgabe b)</b>		<b>21</b>			

<sup>2</sup> EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

**Teilaufgabe c)**

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	<b>Der Prüfling</b>				
1	(1) bestimmt, wie viele ...	5			
2	(2) bestimmt, wie viele ...	3			
3	(2) zeigt, dass die ...	4			
4	(3) begründet, dass der ...	3			
5	(4) bestimmt den gesuchten ...	4			
sachlich richtige Alternativen: (19) ..... .....					
	<b>Summe Teilaufgabe c)</b>	<b>19</b>			

	<b>Summe insgesamt</b>	<b>50</b>			
--	------------------------	-----------	--	--	--

**Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)**

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
<b>Übertrag der Punktzahl aus der ersten bearbeiteten Aufgabe</b>	<b>50</b>			
<b>Übertrag der Punktzahl aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe</b>	<b>50</b>			
<b>Übertrag der Punktzahl aus der dritten bearbeiteten Aufgabe</b>	<b>50</b>			
<b>Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung</b>	<b>150</b>			
<b>aus der Punktzahl resultierende Note</b>				
<b>Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOST</b>				
<b>Paraphe</b>				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktzahlen aus EK und ZK: \_\_\_\_\_

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: \_\_\_\_\_

Die Klausur wird abschließend mit der Note: \_\_\_\_\_ (\_\_\_\_ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

**Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)**

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

<b>Note</b>	<b>Punkte</b>	<b>Erreichte Punktzahl</b>
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0



Name: \_\_\_\_\_

## Abiturprüfung 2013

### *Mathematik, Leistungskurs*

---

#### **Aufgabenstellung:**

Laut ADFC (Allgemeiner Deutscher Fahrrad Club) nutzen zwei Drittel aller Deutschen ihr Fahrrad privat oder auf dem Weg zur Arbeit mindestens einmal im Monat.

In der gesamten Aufgabe sollen alle genannten Anteile als Wahrscheinlichkeiten verwendet werden.

- a) In einer repräsentativen Umfrage werden 100 zufällig ausgewählte Deutsche befragt.

*Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:*

$E_1$ : *Unter den Befragten nutzen genau 70 mindestens einmal im Monat ihr Fahrrad.*

$E_2$ : *Unter den Befragten nutzen mindestens 70 mindestens einmal im Monat ihr Fahrrad.*

$E_3$ : *Unter den Befragten nutzen mindestens 60 und höchstens 70 mindestens einmal im Monat ihr Fahrrad.*

(6 Punkte)

- b) Bei Kontrollen der Polizei werden Fahrräder, die Mängel aufweisen, beanstandet. Bei diesen Prüfungen hat durchschnittlich ein Sechstel der Fahrräder Mängel.

*Bestimmen Sie die Anzahl  $n$  der Fahrräder, die von der Polizei kontrolliert werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens ein Fahrrad mit Mängeln entdeckt wird.*

(6 Punkte)



Name: \_\_\_\_\_

- c) Die Nutzung des Fahrrads als **regelmäßiges Verkehrsmittel auf dem Weg zur Arbeit** hängt unter anderem von der Ortsgröße ab.

Ortsgröße	Anteil der Personen in der Bevölkerung, die in einem Ort der angegebenen Ortsgröße leben <sup>1</sup>	davon regelmäßige Nutzung des Fahrrads <sup>2</sup>
unter 20 000 Einwohner	40,4 %	37 %
20 000 bis 100 000 Einwohner	29,0 %	42 %
über 100 000 Einwohner	30,6 %	43 %

- (1) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine aus der Bevölkerung zufällig ausgewählte Person aus einer Stadt mit mehr als 100 000 Einwohnern kommt und ihr Fahrrad regelmäßig als Verkehrsmittel nutzt.*
- (2) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine aus der Bevölkerung zufällig ausgewählte Person, die angibt, ihr Fahrrad nicht regelmäßig als Verkehrsmittel zu nutzen, aus einer Großstadt mit mehr als 100 000 Einwohnern kommt.*

(9 Punkte)

- d) An dem Jedermann-Radrennen „Rund um den Stausee“ nehmen 200 Hobbyradfahrer teil. Die Teilnahmegebühr beträgt 6 €. Im Ziel erhält jeder, der dort innerhalb einer vorgegebenen Zeit eintrifft, einen Einkaufsgutschein über 20 €.

Die Teilnahmegebühr kalkuliert der Veranstalter so, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % die dadurch erzielten Einnahmen die Kosten für die Gutscheine übersteigen. Dabei legte er als Wahrscheinlichkeit für das Ankommen eines Fahrers im Zeitlimit den Anteil  $p$  derjenigen Fahrer zugrunde, die im letzten Jahr innerhalb der vorgegebenen Zeit das Ziel erreichten.

*Bestimmen Sie mit einer geeigneten Approximation, wie groß  $p$  höchstens gewesen sein kann.*

Gehen Sie dabei ohne weitere Begründung davon aus, dass der gesuchte Wert von  $p$  größer als 5 % und kleiner als 95 % ist.

(9 Punkte)

<sup>1</sup> Quelle: Laufende Raumbewertung des Bundesamtes für Bauwesen und Raumordnung (2011)

<sup>2</sup> Fahrradmonitor des ADFC





Name: \_\_\_\_\_

e) Die Einsatzleitung der Polizei vermutet, dass wegen der häufigen Kontrollen mittlerweile höchstens 10 % der Fahrräder Mängel aufweisen. Sie möchte diese Vermutung überprüfen und, falls sie richtig ist, die Kontrollen nur noch jährlich statt monatlich durchführen. An einem Morgen werden 200 Fahrräder kontrolliert.

Die Polizei hat folgende Entscheidungsregel auf einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 0,05$  festgelegt: Finden sich in der Stichprobe weniger als 13 Fahrräder mit Mängeln, so wird die Zahl der Kontrollen reduziert, andernfalls nicht.

- (1) *Bestimmen Sie die Hypothesen, die zu dieser Entscheidungsregel führten. Beschreiben Sie den Fehler erster Art im Sachzusammenhang und begründen Sie damit die Wahl der Hypothesen aus der Sicht der Polizei.*

Durch einen Irrtum wurde die Kontrolle unabhängig voneinander zweimal durchgeführt. Die beteiligten Polizisten beschließen daraufhin, die Entscheidungsregel ebenfalls zu „verdoppeln“: Finden sich in der Stichprobe von nun 400 Fahrrädern weniger als 26 Fahrräder mit Mängeln, so wird die Zahl der Kontrollen reduziert, andernfalls nicht.

- (2) *Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art betrug im Test aus (1) gerundet 0,032. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art bei dem neuen Test deutlich kleiner ist.*

- (3) *Zeigen Sie, dass gilt:  $\sigma_{400} = \sqrt{2} \cdot \sigma_{200}$ , wobei  $\sigma_{200}$  und  $\sigma_{400}$  die Standardabweichungen binomialverteilter Zufallsgrößen mit  $n = 200$  bzw.  $n = 400$  und unbekanntem  $p$  bezeichnen.*

*Erläutern Sie, welche Auswirkung dies auf die Berechnung des Annahmebereichs der Hypothese bei Verdoppelung des Stichprobenumfangs von 200 auf 400 hat, wenn weiterhin das Signifikanzniveau  $\alpha = 0,05$  gelten soll.*

(20 Punkte)

### Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung



Name: \_\_\_\_\_

### Tabelle 1: $\sigma$ -Regeln für Binomialverteilungen

Eine mit den Parametern  $n$  und  $p$  binomialverteilte Zufallsgröße  $X$  hat den Erwartungswert  $\mu = n \cdot p$  und die Standardabweichung  $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ .

Wenn die LAPLACE-Bedingung  $\sigma > 3$  erfüllt ist, gelten die  $\sigma$ -Regeln:

$P(\mu - 1,64\sigma \leq X \leq \mu + 1,64\sigma) \approx 0,90$	$P(\mu - 1,64\sigma \leq X) \approx 0,95$
	$P(X \leq \mu + 1,64\sigma) \approx 0,95$
$P(\mu - 1,96\sigma \leq X \leq \mu + 1,96\sigma) \approx 0,95$	$P(\mu - 1,96\sigma \leq X) \approx 0,975$
	$P(X \leq \mu + 1,96\sigma) \approx 0,975$
$P(\mu - 2,58\sigma \leq X \leq \mu + 2,58\sigma) \approx 0,99$	$P(\mu - 2,58\sigma \leq X) \approx 0,995$
	$P(X \leq \mu + 2,58\sigma) \approx 0,995$

$P(\mu - 1\sigma \leq X \leq \mu + 1\sigma) \approx 0,683$	$P(\mu - 1\sigma \leq X) \approx 0,841$
	$P(X \leq \mu + 1\sigma) \approx 0,841$
$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,955$	$P(\mu - 2\sigma \leq X) \approx 0,977$
	$P(X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,977$
$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$	$P(\mu - 3\sigma \leq X) \approx 0,999$
	$P(X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,999$



Name: \_\_\_\_\_

**Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für  $n = 10$  und  $n = 20$**

$$F(n; p; k) = B(n; p; 0) + \dots + B(n; p; k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \dots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

		$p$										
$n$	$k$	0,02	0,05	0,08	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,5		$n$
10	0	0,8171	0,5987	0,4344	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010	9	10
	1	0,9838	0,9139	0,8121	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107	8	
	2	0,9991	0,9885	0,9599	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547	7	
	3		0,9990	0,9942	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719	6	
	4		0,9999	0,9994	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770	5	
	5				0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230	4	
	6					0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,8281	3	
	7						0,9999	0,9996	0,9984	0,9453	2	
	8								0,9999	0,9893	1	
	9									0,9990	0	
20	0	0,6676	0,3585	0,1887	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	19	20
	1	0,9401	0,7358	0,5169	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000	18	
	2	0,9929	0,9245	0,7879	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002	17	
	3	0,9994	0,9841	0,9294	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013	16	
	4		0,9974	0,9817	0,9568	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059	15	
	5		0,9997	0,9962	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207	14	
	6			0,9994	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577	13	
	7			0,9999	0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316	12	
	8				0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517	11	
	9					0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,4119	10	
	10						0,9994	0,9961	0,9829	0,5881	9	
	11						0,9999	0,9991	0,9949	0,7483	8	
	12							0,9998	0,9987	0,8684	7	
	13								0,9997	0,9423	6	
	14									0,9793	5	
	15									0,9941	4	
	16									0,9987	3	
	17									0,9998	2	
$n$		0,98	0,95	0,92	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,5	$k$	$n$

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h.  $p \geq 0,5$ , gilt:  $F(n; p; k) = 1 -$  abgelesener Wert



Name: \_\_\_\_\_

**Tabelle 3: Kumulierte Binomialverteilung für  $n = 50$**

$$F(n; p; k) = B(n; p; 0) + \dots + B(n; p; k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \dots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	k	p										n	n
		0,02	0,05	0,1	0,125	0,15	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		
50	0	0,3642	0,0769	0,0052	0,0013	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	49	50
	1	0,7358	0,2794	0,0338	0,0103	0,0029	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	48	
	2	0,9216	0,5405	0,1117	0,0418	0,0142	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	47	
	3	0,9822	0,7604	0,2503	0,1138	0,0460	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	46	
	4	0,9968	0,8964	0,4312	0,2346	0,1121	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	45	
	5	0,9995	0,9622	0,6161	0,3935	0,2194	0,0480	0,0070	0,0007	0,0000	0,0000	44	
	6	0,9999	0,9882	0,7702	0,5637	0,3613	0,1034	0,0194	0,0025	0,0000	0,0000	43	
	7		0,9968	0,8779	0,7165	0,5188	0,1904	0,0453	0,0073	0,0001	0,0000	42	
	8		0,9992	0,9421	0,8339	0,6681	0,3073	0,0916	0,0183	0,0002	0,0000	41	
	9		0,9998	0,9755	0,9121	0,7911	0,4437	0,1637	0,0402	0,0008	0,0000	40	
	10			0,9906	0,9579	0,8801	0,5836	0,2622	0,0789	0,0022	0,0000	39	
	11			0,9968	0,9817	0,9372	0,7107	0,3816	0,1390	0,0057	0,0000	38	
	12			0,9990	0,9928	0,9699	0,8139	0,5110	0,2229	0,0133	0,0002	37	
	13			0,9997	0,9974	0,9868	0,8894	0,6370	0,3279	0,0280	0,0005	36	
	14			0,9999	0,9991	0,9947	0,9393	0,7481	0,4468	0,0540	0,0013	35	
	15				0,9997	0,9981	0,9692	0,8369	0,5692	0,0955	0,0033	34	
	16				0,9999	0,9993	0,9856	0,9017	0,6839	0,1561	0,0077	33	
	17					0,9998	0,9937	0,9449	0,7822	0,2369	0,0164	32	
	18					0,9999	0,9975	0,9713	0,8594	0,3356	0,0325	31	
	19						0,9991	0,9861	0,9152	0,4465	0,0595	30	
	20						0,9997	0,9937	0,9522	0,5610	0,1013	29	
	21						0,9999	0,9974	0,9749	0,6701	0,1611	28	
	22							0,9990	0,9877	0,7660	0,2399	27	
	23							0,9996	0,9944	0,8438	0,3359	26	
	24							0,9999	0,9976	0,9022	0,4439	25	
	25								0,9991	0,9427	0,5561	24	
	26								0,9997	0,9686	0,6641	23	
	27								0,9999	0,9840	0,7601	22	
	28									0,9924	0,8389	21	
	29									0,9966	0,8987	20	
	30									0,9986	0,9405	19	
	31									0,9995	0,9675	18	
	32									0,9998	0,9836	17	
	33									0,9999	0,9923	16	
	34										0,9967	15	
	35										0,9987	14	
	36										0,9995	13	
37										0,9998	12		
n		0,98	0,95	0,9	0,875	0,85	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	k	n

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h.  $p \geq 0,5$ , gilt:  $F(n; p; k) = 1 -$  abgelesener Wert



Name: \_\_\_\_\_

**Tabelle 4: Kumulierte Binomialverteilung für  $n = 100$**

$$F(n; p; k) = B(n; p; 0) + \dots + B(n; p; k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \dots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	k	p												n			
		0,02	0,03	0,05	0,1	0,15	1/6	0,2	0,25	0,27	0,3	1/3	0,4		0,5		
100	0	0,1326	0,0476	0,0059	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	99	
	1	0,4033	0,1946	0,0371	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	98	
	2	0,6767	0,4198	0,1183	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	97	
	3	0,8590	0,6472	0,2578	0,0078	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	96	
	4	0,9492	0,8179	0,4360	0,0237	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	95	
	5	0,9845	0,9192	0,6160	0,0576	0,0016	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	94	
	6	0,9959	0,9688	0,7660	0,1172	0,0047	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	93	
	7	0,9991	0,9894	0,8720	0,2061	0,0122	0,0038	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	92	
	8	0,9998	0,9968	0,9369	0,3209	0,0275	0,0095	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	91	
	9		0,9991	0,9718	0,4513	0,0551	0,0213	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	90	
	10		0,9998	0,9885	0,5832	0,0994	0,0427	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	89	
	11			0,9957	0,7030	0,1635	0,0777	0,0126	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	88	
	12			0,9985	0,8018	0,2473	0,1297	0,0253	0,0010	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	87	
	13			0,9995	0,8761	0,3474	0,2000	0,0469	0,0025	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	86	
	14			0,9999	0,9274	0,4572	0,2874	0,0804	0,0054	0,0014	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	85	
	15				0,9601	0,5683	0,3877	0,1285	0,0111	0,0033	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	84	
	16				0,9794	0,6725	0,4942	0,1923	0,0211	0,0068	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	83	
	17				0,9900	0,7633	0,5994	0,2712	0,0376	0,0133	0,0022	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	82	
	18				0,9954	0,8372	0,6965	0,3621	0,0630	0,0243	0,0045	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	81	
	19				0,9980	0,8935	0,7803	0,4602	0,0995	0,0420	0,0089	0,0011	0,0000	0,0000	0,0000	80	
	20				0,9992	0,9337	0,8481	0,5595	0,1488	0,0684	0,0165	0,0024	0,0000	0,0000	0,0000	79	
	21				0,9997	0,9607	0,8998	0,6540	0,2114	0,1057	0,0288	0,0048	0,0000	0,0000	0,0000	78	
	22				0,9999	0,9779	0,9369	0,7389	0,2864	0,1552	0,0479	0,0091	0,0001	0,0000	0,0000	77	
	23					0,9881	0,9621	0,8109	0,3711	0,2172	0,0755	0,0164	0,0003	0,0000	0,0000	76	
	24					0,9939	0,9783	0,8686	0,4617	0,2909	0,1136	0,0281	0,0006	0,0000	0,0000	75	
	25					0,9970	0,9881	0,9125	0,5535	0,3737	0,1631	0,0458	0,0012	0,0000	0,0000	74	
	26					0,9986	0,9938	0,9442	0,6417	0,4620	0,2244	0,0715	0,0024	0,0000	0,0000	73	
	27					0,9994	0,9969	0,9658	0,7224	0,5516	0,2964	0,1066	0,0046	0,0000	0,0000	72	
	28					0,9997	0,9985	0,9800	0,7925	0,6379	0,3768	0,1524	0,0084	0,0000	0,0000	71	
	29					0,9999	0,9993	0,9888	0,8505	0,7172	0,4623	0,2093	0,0148	0,0000	0,0000	70	
	30						0,9997	0,9939	0,8962	0,7866	0,5491	0,2766	0,0248	0,0000	0,0000	69	
	31						0,9999	0,9969	0,9307	0,8446	0,6331	0,3525	0,0398	0,0001	0,0000	68	
	32							0,9984	0,9554	0,8909	0,7107	0,4344	0,0615	0,0002	0,0000	67	
	33							0,9993	0,9724	0,9261	0,7793	0,5188	0,0913	0,0004	0,0000	66	
	34							0,9997	0,9836	0,9518	0,8371	0,6019	0,1303	0,0009	0,0000	65	
	35							0,9999	0,9906	0,9697	0,8839	0,6803	0,1795	0,0018	0,0000	64	
	36							0,9999	0,9948	0,9817	0,9201	0,7511	0,2386	0,0033	0,0000	63	
	37								0,9973	0,9893	0,9470	0,8123	0,3068	0,0060	0,0000	62	
	38								0,9986	0,9940	0,9660	0,8630	0,3822	0,0105	0,0000	61	
	39								0,9993	0,9968	0,9790	0,9034	0,4621	0,0176	0,0000	60	
	40								0,9997	0,9983	0,9875	0,9341	0,5433	0,0284	0,0000	59	
	41								0,9999	0,9992	0,9928	0,9566	0,6225	0,0443	0,0000	58	
	42								0,9999	0,9996	0,9960	0,9724	0,6967	0,0666	0,0000	57	
	43									0,9998	0,9979	0,9831	0,7635	0,0967	0,0000	56	
	44									0,9999	0,9989	0,9900	0,8211	0,1356	0,0000	55	
	45										0,9995	0,9943	0,8689	0,1841	0,0000	54	
	46										0,9997	0,9969	0,9070	0,2421	0,0000	53	
	47										0,9999	0,9983	0,9362	0,3086	0,0000	52	
	48										0,9999	0,9991	0,9577	0,3822	0,0000	51	
	49											0,9996	0,9729	0,4602	0,0000	50	
	50											0,9998	0,9832	0,5398	0,0000	49	
	51											0,9999	0,9900	0,6178	0,0000	48	
	52												0,9942	0,6914	0,0000	47	
	53												0,9968	0,7579	0,0000	46	
	54												0,9983	0,8159	0,0000	45	
	55												0,9991	0,8644	0,0000	44	
	56												0,9996	0,9033	0,0000	43	
	57												0,9998	0,9334	0,0000	42	
	58												0,9999	0,9557	0,0000	41	
	59													0,9716	0,0000	40	
	60													0,9824	0,0000	39	
	61													0,9895	0,0000	38	
	62													0,9940	0,0000	37	
	63													0,9967	0,0000	36	
	64													0,9982	0,0000	35	
	65													0,9991	0,0000	34	
	66													0,9996	0,0000	33	
	67													0,9998	0,0000	32	
	68													0,9999	0,0000	31	
	n	k	0,98	0,97	0,95	0,9	0,85	5/6	0,8	0,75	0,73	0,7	2/3	0,6	0,5	k	n

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h.  $p \geq 0,5$ , gilt:  $F(n; p; k) = 1 -$  abgelesener Wert



Name: \_\_\_\_\_

**Tabelle 5: Kumulierte Binomialverteilung für  $n = 200$**

$$F(n; p; k) = B(n; p; 0) + \dots + B(n; p; k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \dots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	k	p								n
		0,02	0,04	0,05	0,1	0,15	1/6	0,2	0,25	
200	0	0,0176	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	199
	1	0,0894	0,0027	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	198
	2	0,2351	0,0125	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	197
	3	0,4315	0,0395	0,0090	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	196
	4	0,6288	0,0950	0,0264	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	195
	5	0,7867	0,1856	0,0623	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	194
	6	0,8914	0,3084	0,1237	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	193
	7	0,9507	0,4501	0,2133	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	192
	8	0,9798	0,5926	0,3270	0,0014	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	191
	9	0,9925	0,7192	0,4547	0,0035	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	190
	10	0,9975	0,8200	0,5831	0,0081	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	189
	11	0,9992	0,8925	0,6998	0,0168	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	188
	12	0,9998	0,9401	0,7965	0,0320	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	187
	13	0,9999	0,9688	0,8701	0,0566	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	186
	14		0,9848	0,9219	0,0929	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	185
	15		0,9930	0,9556	0,1431	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000	184
	16		0,9970	0,9762	0,2075	0,0021	0,0003	0,0000	0,0000	183
	17		0,9988	0,9879	0,2849	0,0043	0,0006	0,0000	0,0000	182
	18		0,9995	0,9942	0,3724	0,0082	0,0013	0,0000	0,0000	181
	19		0,9998	0,9973	0,4655	0,0149	0,0027	0,0000	0,0000	180
	20		0,9999	0,9988	0,5592	0,0255	0,0052	0,0001	0,0000	179
	21			0,9995	0,6484	0,0415	0,0094	0,0002	0,0000	178
	22			0,9998	0,7290	0,0645	0,0163	0,0005	0,0000	177
	23			0,9999	0,7983	0,0959	0,0269	0,0010	0,0000	176
	24				0,8551	0,1368	0,0426	0,0020	0,0000	175
	25				0,8995	0,1876	0,0648	0,0036	0,0000	174
	26				0,9328	0,2480	0,0945	0,0064	0,0000	173
	27				0,9566	0,3166	0,1329	0,0110	0,0000	172
	28				0,9729	0,3914	0,1803	0,0179	0,0001	171
	29				0,9837	0,4697	0,2366	0,0283	0,0002	170
	30				0,9905	0,5485	0,3007	0,0430	0,0004	169
	31				0,9946	0,6247	0,3711	0,0632	0,0008	168
	32				0,9971	0,6958	0,4454	0,0899	0,0014	167
	33				0,9985	0,7596	0,5210	0,1239	0,0026	166
	34				0,9992	0,8150	0,5953	0,1656	0,0044	165
	35				0,9996	0,8613	0,6658	0,2151	0,0073	164
	36				0,9998	0,8987	0,7305	0,2717	0,0117	163
	37				0,9999	0,9280	0,7877	0,3345	0,0182	162
	38					0,9502	0,8369	0,4019	0,0276	161
	39					0,9665	0,8777	0,4718	0,0405	160
	40					0,9780	0,9106	0,5422	0,0578	159
	41					0,9860	0,9362	0,6108	0,0804	158
	42					0,9913	0,9556	0,6758	0,1089	157
	43					0,9947	0,9699	0,7355	0,1438	156
	44					0,9969	0,9801	0,7887	0,1852	155
	45					0,9982	0,9872	0,8349	0,2332	154
	46					0,9990	0,9919	0,8738	0,2870	153
	47					0,9995	0,9950	0,9056	0,3458	152
	48					0,9997	0,9970	0,9310	0,4083	151
	49					0,9998	0,9983	0,9506	0,4729	150
	50					0,9999	0,9990	0,9655	0,5379	149
	51						0,9995	0,9764	0,6017	148
	52						0,9997	0,9843	0,6626	147
	53						0,9998	0,9897	0,7192	146
	54						0,9999	0,9934	0,7707	145
	55							0,9959	0,8162	144
	56							0,9975	0,8555	143
	57							0,9985	0,8885	142
	58							0,9991	0,9157	141
	59							0,9995	0,9375	140
	60							0,9997	0,9546	139
	61							0,9998	0,9677	138
	62							0,9999	0,9774	137
	63								0,9846	136
	64								0,9897	135
	65								0,9932	134
	66								0,9956	133
	67								0,9972	132
	68								0,9983	131
	69								0,9990	130
	70								0,9994	129
	71								0,9996	128
	72								0,9998	127
	73								0,9999	126
74								0,9999	125	
		0,98	0,96	0,95	0,9	0,85	5/6	0,8	0,75	k

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h.  $p \geq 0,5$ , gilt:  $F(n; p; k) = 1 -$  abgelesener Wert



Name: \_\_\_\_\_

**Tabelle 6: Kumulierte Binomialverteilung für  $n = 400$**

$$F(n; p; k) = B(n; p; 0) + \dots + B(n; p; k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \dots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	k	p				n	n
		0,01	0,02	0,05	0,1		
400	0	0,0180	0,0003	0,0000	0,0000	399	400
	1	0,0905	0,0028	0,0000	0,0000	398	
	2	0,2366	0,0131	0,0000	0,0000	397	
	3	0,4325	0,0410	0,0000	0,0000	396	
	4	0,6288	0,0973	0,0000	0,0000	395	
	5	0,7859	0,1885	0,0001	0,0000	394	
	6	0,8904	0,3109	0,0002	0,0000	393	
	7	0,9498	0,4515	0,0006	0,0000	392	
	8	0,9792	0,5926	0,0017	0,0000	391	
	9	0,9922	0,7179	0,0042	0,0000	390	
	10	0,9973	0,8179	0,0094	0,0000	389	
	11	0,9992	0,8903	0,0190	0,0000	388	
	12	0,9998	0,9381	0,0355	0,0000	387	
	13	0,9999	0,9673	0,0614	0,0000	386	
	14		0,9838	0,0990	0,0000	385	
	15		0,9924	0,1499	0,0000	384	
	16		0,9966	0,2145	0,0000	383	
	17		0,9986	0,2912	0,0000	382	
	18		0,9994	0,3771	0,0000	381	
	19		0,9998	0,4680	0,0001	380	
	20		0,9999	0,5591	0,0002	379	
	21			0,6459	0,0004	378	
	22			0,7246	0,0009	377	
	23			0,7927	0,0017	376	
	24			0,8490	0,0031	375	
	25			0,8935	0,0054	374	
	26			0,9274	0,0092	373	
	27			0,9520	0,0149	372	
	28			0,9693	0,0235	371	
	29			0,9810	0,0357	370	
	30			0,9886	0,0524	369	
	31			0,9933	0,0746	368	
	32			0,9962	0,1030	367	
	33			0,9979	0,1382	366	
	34			0,9989	0,1805	365	
	35			0,9994	0,2296	364	
	36			0,9997	0,2849	363	
	37			0,9999	0,3453	362	
	38			0,9999	0,4095	361	
	39				0,4756	360	
	40				0,5420	359	
	41				0,6067	358	
	42				0,6682	357	
	43				0,7251	356	
	44				0,7763	355	
	45				0,8214	354	
	46				0,8600	353	
	47				0,8924	352	
	48				0,9188	351	
	49				0,9399	350	
	50				0,9564	349	
	51				0,9689	348	
	52				0,9783	347	
	53				0,9851	346	
	54				0,9900	345	
	55				0,9934	344	
	56				0,9957	343	
	57				0,9973	342	
	58				0,9983	341	
	59				0,9989	340	
	60				0,9994	339	
	61				0,9996	338	
	62				0,9998	337	
	63				0,9999	336	
64				0,9999	335		
		0,99	0,98	0,95	0,9		

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h.  $p \geq 0,5$  gilt:  $F(n; p; k) = 1 -$  abgelesener Wert



Name: \_\_\_\_\_

**Tabelle 7: Normalverteilung**

$$\phi(z) = 0, \dots$$

$$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$$\phi(2,32) = 0,9898$$

$$\phi(z) = 0,994 \Rightarrow z = 2,51$$

$$\phi(-0,9) = 1 - \phi(0,9) = 0,1841$$



## *Unterlagen für die Lehrkraft*

# **Abiturprüfung 2013**

## *Mathematik, Leistungskurs*

---

### **1. Aufgabenart**

Stochastik mit Alternative 1 (ein- und zweiseitiger Hypothesentest)

### **2. Aufgabenstellung<sup>1</sup>**

siehe Prüfungsaufgabe

### **3. Materialgrundlage**

- entfällt

### **4. Bezüge zu den Vorgaben 2013**

#### *1. Inhaltliche Schwerpunkte*

- Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
- Binomialverteilung und Normalverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung

Alternative 1:

- Ein- und zweiseitiger Hypothesentest

#### *2. Medien/Materialien*

- entfällt

### **5. Zugelassene Hilfsmittel**

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

---

<sup>1</sup> Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

**6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen****6.1 Modellösungen****Modellösung a)**

Die Zufallsgröße  $X$  beschreibe die Anzahl der regelmäßigen Fahrradnutzer unter den

100 befragten Personen.  $X$  sei binomialverteilt mit  $n = 100$  und  $p = \frac{2}{3}$ .

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt:

$$P(E_1) = P(X = 70) = \binom{100}{70} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{70} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{30} \approx 0,0673.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt:

$$P(E_2) = P(X \geq 70) = 1 - P(X \leq 69) \stackrel{\text{Tabelle}}{\approx} 1 - (1 - 0,2766) = 0,2766.$$

Mit den obigen Festlegungen gilt:

$$\begin{aligned} P(E_3) &= P(60 \leq X \leq 70) \\ &= P(X \leq 70) - P(X \leq 59) \\ &\stackrel{\text{Tabelle}}{\approx} (1 - 0,2093) - (1 - 0,9341) \\ &= 0,7248. \end{aligned}$$

[Der auf 4 Nachkommastellen genaue Wert ist 0,7249.]

**Modellösung b)**

$X$ : Anzahl der Fahrräder mit Mängeln;  $X$  ist  $B_{n, \frac{1}{6}}$ -verteilt.

$$P(X \geq 1) \geq 0,9 \Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0,9 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0,9 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,1 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,1}{\ln \frac{5}{6}}.$$

Aus  $\frac{\ln 0,1}{\ln \frac{5}{6}} \approx 12,63$  erhält man: Es müssen mindestens 13 Fahrräder von der Polizei kontrolliert werden.

[Die Ungleichung  $\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,1$  kann auch durch Probieren gelöst werden, da der Wert der linken Seite der Ungleichung für wachsende  $n$  monoton fällt.]

**Modelllösung c)**

$$(1) P(\text{"Großstadt und regelm. Nutzung"}) = 0,306 \cdot 0,43 \approx 0,13$$

(2) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt (mit der Setzung nr: nicht regelmäßige Nutzung):

$$\begin{aligned} P_{nr}(\text{"mehr als 100000"}) &= \frac{P(\text{"nr und mehr als 100000"})}{P(nr)} \\ &= \frac{0,306 \cdot 0,57}{0,404 \cdot 0,63 + 0,290 \cdot 0,58 + 0,306 \cdot 0,57} \\ &\approx 0,2921. \end{aligned}$$

**Modelllösung d)**

Es bezeichne die Zufallsgröße  $X$  die Anzahl der im Zeitlimit ankommenden Fahrer. Dann nimmt der Veranstalter  $X$  als binomialverteilt an mit unbekannter Ankunfts-wahrscheinlichkeit  $p$  und  $n = 200$ .

Numerische Lösung mit CAS:

Die Einnahmen bei 200 Fahrern betragen 1200 €. Damit die Einnahmen oberhalb der durch die Gutscheine verursachten Kosten liegen, müssen also weniger als  $1200 : 20 = 60$  Fahrer rechtzeitig im Ziel eintreffen. Das gesuchte  $p$  erhält man dann durch Lösen der Ungleichung  $P(X \leq 59) \geq 0,95$ . Durch numerisches Lösen der entsprechenden Gleichung erhält man als maximalen Wert für  $p$ :  $p \approx 0,2467$ .

Näherungsweise Lösung:

Da  $p > 5\%$  und  $p < 95\%$  ist, gilt wegen der Symmetrie von  $\sigma(p) = \sqrt{200 \cdot p \cdot (1-p)}$ ,

$p \in [0;1]$ , um  $p = 0,5$  sowie der Monotonie auf dem Intervall  $[0;0,5]$ :

$$\sigma(p) = \sqrt{200 \cdot p \cdot (1-p)} \geq \sqrt{200 \cdot 0,05 \cdot 0,95} > 3, \text{ d. h., die Laplace-Bedingung ist erfüllt.}$$

Also erhält man das gesuchte maximale  $p$  aus dem folgenden Ansatz:

$$(200p + 1,64 \cdot \sqrt{200 \cdot p \cdot (1-p)}) \cdot 20 < 200 \cdot 6.$$

Mit CAS erhält man:  $p < 0,2498$ .

Je kleiner  $p$  ist, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Teilnahmegebühren ausreichen. Daher beträgt das gesuchte maximale  $p$  ungefähr 25 %.

**Modelllösung e)**

(1) Sei  $p$  die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrrad Mängel hat.

Getestet wird  $H_0 : p \geq 0,1$  gegen  $H_1 : p < 0,1$  (linksseitiger Hypothesentest).

Fehler 1. Art: In Wahrheit sind mindestens 10 % der Fahrräder defekt. Es werden aber in der Stichprobe höchstens 12 Fahrräder mit Mängeln gefunden, was zu einer irrtümlichen Reduktion der Zahl der Kontrollen führt.

Zu dieser Wahl passt die Intention, den Fehler zu vermeiden, dass die Anzahl der Kontrollen verringert wird, obwohl der Anteil der Fahrräder mit Mängeln in Wirklichkeit nicht gesunken ist (Fehler 1. Art). Daraus ergibt sich die Wahl der  $H_0$ -Hypothese

$$H_0 : p \geq 0,1 .$$

(2) Die Zufallsgröße  $X_{400}$  : „Anzahl der mangelbehafteten Fahrräder in der Stichprobe“ kann (bei Gültigkeit der Hypothese  $H_0$ ) als binomialverteilt angenommen werden mit  $n = 400$  und  $p = 0,1$ . Dann bestimmt man als Fehler 1. Art mit Hilfe des TR oder der Tabelle:  $P_{p=0,1}(X_{400} \leq 25) \approx 0,0054$ . Dieser Wert ist lediglich ca. ein Sechstel der ursprünglichen Fehlerwahrscheinlichkeit und damit erheblich kleiner.

(3) Es gilt:  $\sigma_{200} = \sqrt{200 \cdot p \cdot (1-p)}$ , also:

$$\sigma_{400} = \sqrt{400 \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{200 \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{2} \cdot \sigma_{200} .$$

Die Grenze  $k_{200}$  des Ablehnungsbereichs für  $n = 200$  bestimmt man näherungsweise mit der Formel  $k_{200} \approx \mu_{200} - 1,64 \cdot \sigma_{200}$ . Die Grenze  $k_{400}$  des Ablehnungsbereichs für  $n = 400$  wird analog bestimmt durch  $k_{400} \approx \mu_{400} - 1,64 \cdot \sigma_{400} = 2 \cdot \mu_{200} - 1,64 \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma_{200}$ . Dies ist aber nicht gleich  $2 \cdot k_{200} \approx 2 \cdot \mu_{200} - 1,64 \cdot 2 \cdot \sigma_{200}$ . D. h., die von den Polizisten durch Verdoppelung ermittelte Grenze ist zu niedrig.

Formal weniger detaillierte Erklärungen, die aber den wesentlichen Punkt beinhalten, dass statt der Verdoppelung des Radius um den Erwartungswert eine Multiplikation des Radius mit dem Faktor  $\sqrt{2}$  durchgeführt werden muss, können ebenfalls mit voller Punktzahl bewertet werden.

**6.2 Teilleistungen – Kriterien****Teilaufgabe a)**

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	berechnet die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $E_1$ .	2
2	berechnet die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $E_2$ .	2
3	berechnet die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $E_3$ .	2
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

**Teilaufgabe b)**

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	ermittelt einen Ansatz.	2
2	bestimmt die Anzahl der Fahrräder, die mindestens kontrolliert werden müssen.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

**Teilaufgabe c)**

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	(1) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3
2	(2) bestimmt die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit.	6
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

**Teilaufgabe d)**

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	bestimmt einen Ansatz für das gesuchte $p$ .	6
2	berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

**Teilaufgabe e)**

	<b>Anforderungen</b>	maximal erreichbare Punktzahl
	<b>Der Prüfling</b>	
1	(1) bestimmt geeignete Hypothesen.	4
2	(1) beschreibt den Fehler 1. Art im Sachzusammenhang.	2
3	(1) begründet die Wahl der Hypothesen aus Sicht der Polizei.	3
4	(2) zeigt, dass der Fehler 1. Art für $n = 400$ erheblich kleiner ist als für $n = 200$ .	4
5	(3) zeigt, dass $\sigma_{400} = \sqrt{2} \cdot \sigma_{200}$ gilt.	2
6	(3) erläutert die Auswirkung.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

**7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit**

Name des Prüflings: \_\_\_\_\_ Kursbezeichnung: \_\_\_\_\_

Schule: \_\_\_\_\_

**Teilaufgabe a)**

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK <sup>2</sup>	ZK	DK
1	berechnet die Wahrscheinlichkeit ...	2			
2	berechnet die Wahrscheinlichkeit ...	2			
3	berechnet die Wahrscheinlichkeit ...	2			
sachlich richtige Alternativen: (6) ..... .....					
<b>Summe Teilaufgabe a)</b>		<b>6</b>			

**Teilaufgabe b)**

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	ermittelt einen Ansatz.	2			
2	bestimmt die Anzahl ...	4			
sachlich richtige Alternativen: (6) ..... .....					
<b>Summe Teilaufgabe b)</b>		<b>6</b>			

**Teilaufgabe c)**

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) bestimmt die gesuchte ...	3			
2	(2) bestimmt die gesuchte ...	6			
sachlich richtige Alternativen: (9) ..... .....					
<b>Summe Teilaufgabe c)</b>		<b>9</b>			

<sup>2</sup> EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

**Teilaufgabe d)**

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	<b>Der Prüfling</b>				
1	bestimmt einen Ansatz ...	6			
2	berechnet die gesuchte ...	3			
sachlich richtige Alternativen: (9) ..... .....					
	<b>Summe Teilaufgabe d)</b>	<b>9</b>			

**Teilaufgabe e)**

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	<b>Der Prüfling</b>				
1	(1) bestimmt geeignete Hypothesen.	4			
2	(1) beschreibt den Fehler ...	2			
3	(1) begründet die Wahl ...	3			
4	(2) zeigt, dass der ...	4			
5	(3) zeigt, dass $\sigma_{400} = \sqrt{2} \cdot \sigma_{200}$ ...	2			
6	(3) erläutert die Auswirkung.	5			
sachlich richtige Alternativen: (20) ..... .....					
	<b>Summe Teilaufgabe e)</b>	<b>20</b>			

	<b>Summe insgesamt</b>	<b>50</b>			
--	------------------------	-----------	--	--	--



**Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)**

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktzahl aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	50			
Übertrag der Punktzahl aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	50			
Übertrag der Punktzahl aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	50			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	150			
aus der Punktzahl resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOST				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktzahlen aus EK und ZK: \_\_\_\_\_

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: \_\_\_\_\_

Die Klausur wird abschließend mit der Note: \_\_\_\_\_ (\_\_\_\_ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

**Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)**

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

<b>Note</b>	<b>Punkte</b>	<b>Erreichte Punktzahl</b>
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0



Name: \_\_\_\_\_

## Abiturprüfung 2013

### Mathematik, Leistungskurs

---

#### Aufgabenstellung:

Bundeslandwirtschaftsministerin Ilse Aigner hat im April 2009 den Anbau von Gen-Mais in Deutschland verboten, da ihrer Ansicht nach Risiken für die Umwelt nicht ausgeschlossen werden konnten. Im Januar 2010 fand eine repräsentative Umfrage unter der deutschen Bevölkerung mit folgender Fragestellung statt: „Sollte der Anbau von Gen-Mais in Deutschland weiterhin verboten bleiben?“

Die Tabelle gibt die Ergebnisse der Umfrage nach Altersgruppen aufgeschlüsselt wieder:

Altersgruppe Antwort	14 bis 29 Jahre	30 bis 39 Jahre	40 bis 49 Jahre	50 bis 59 Jahre	60 Jahre und älter
„Ja“	166	112	153	129	232
„Nein“	33	24	30	19	45
keine Angabe	12	14	8	4	24
Anzahl der Befragten	211	150	191	152	301

- a) (1) Eine Person wird zufällig aus den 1005 Teilnehmern der Umfrage ausgewählt.  
*Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie keine Angabe gemacht hat.*
- (2) Aus den Teilnehmern der Umfrage werden 3 Personen zufällig ausgewählt.  
*Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass jede dieser 3 Personen mindestens 50 Jahre alt ist und mit „Ja“ geantwortet hat.*
- (3) Unter den Befragten der Altersgruppe 14 bis 29 befanden sich 57 Schüler. Von diesen antworteten  $\frac{2}{3}$  mit „Ja“.  
*Bestimmen Sie den Anteil der Nicht-Schüler unter den 14- bis 29-Jährigen, die mit „Ja“ geantwortet haben.*

(11 Punkte)



Name: \_\_\_\_\_

b) Die Befragten der Altersgruppe 14 bis 29 Jahre setzen sich aus Schülern und Nicht-Schülern zusammen.

Genau  $\frac{2}{3}$  der Schüler haben mit „Ja“ geantwortet, während der Anteil der Nicht-Schüler, die mit „Ja“ geantwortet haben,  $r \approx 83,1\%$  beträgt.

Die Anzahl  $x$  der Schüler in der Altersgruppe 14 bis 29 Jahre kann nun mit Hilfe der Gleichung

$$\frac{2}{3} \cdot x + r \cdot (211 - x) = 166$$

bestimmt werden.

- (1) *Begründen Sie die Gültigkeit dieser Gleichung.*
- (2) *Ermitteln Sie die gesuchte Anzahl  $x$  der Schüler.*

(6 Punkte)

c) Die Umfrage wurde auch nach Herkunft der Teilnehmer (West- oder Ostdeutschland) ausgewertet:

Herkunft \ Antwort	West	Ost
„Ja“	643	149
„Nein“	112	39
keine Angabe	52	10

- (1) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Teilnehmer der Umfrage, der mit „Ja“ geantwortet hat, aus Westdeutschland stammt.*
- (2) *Aus den Teilnehmern der Umfrage werden zwei Personen zufällig ausgewählt. Beide haben mit „Ja“ geantwortet.*

*Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die zweite Person aus demselben Teil Deutschlands stammt wie die erste (Ost bzw. West).*

(8 Punkte)



Name: \_\_\_\_\_

Im folgenden Aufgabenteil sollen die in der obigen Umfrage ermittelten relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten für die Bevölkerung in Deutschland angenommen werden.

d) Eine weitere Umfrage unter  $n$  zufällig ausgewählten Personen wird mit derselben Fragestellung durchgeführt.

- (1) Angenommen, bei dieser Umfrage werden nur Personen aus der Altersgruppe 50 bis 59 befragt.

*Begründen Sie, dass die Zufallsgröße  $X$ : „Anzahl der Befragten, die mit ‚Nein‘ geantwortet haben“ als binomialverteilt angenommen werden kann, und zeigen Sie, dass die zugehörige Trefferwahrscheinlichkeit  $p = \frac{1}{8}$  beträgt.*

*Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass*

- (2) *unter 40 zufällig in der Altersgruppe 50 bis 59 ausgewählten Personen die Anzahl derer, die mit „Nein“ antworten, genau dem Erwartungswert dieser Altersgruppe entspricht,*
- (3) *von 10 zufällig ausgewählten Personen alle eine Angabe („Ja“ oder „Nein“) machen, wenn diesmal bei der Umfrage nur Personen im Alter von 14 bis 49 befragt werden.*

(10 Punkte)



Name: \_\_\_\_\_

- e) (1) Um z. B. den unbekanntem Anteil  $p_M$  der Befürworter unter allen Männern zu schätzen, kann man eine Umfrage unter zufällig ausgewählten Männern durchführen, die Anzahl  $X$  der Befürworter in der Umfrage ermitteln und daraus ein 90%-Konfidenzintervall  $K_M$  für  $p_M$  ermitteln.

*Erklären Sie die Bedeutung dieses Intervalls im Sachzusammenhang.*

In der tatsächlich durchgeführten Umfrage sprachen sich von den 487 befragten Männern 366 für ein Verbot des Anbaus von Gen-Mais aus, von den befragten 518 Frauen sogar 426. Für den unbekanntem Anteil  $p_M$  der Befürworter unter allen Männern wurde als 90%-Konfidenzintervall daraus näherungsweise das Intervall  $K_M = [0,7181; 0,7822]$  ermittelt.

- (2) *Bestimmen Sie aufgrund der Umfrage ein 90%-Konfidenzintervall  $K_F$  für den unbekanntem Anteil  $p_F$  der Befürworter unter den Frauen.*

Gehen Sie dabei ohne Beweis davon aus, dass die Zufallsgröße  $Y$ : „Anzahl der Frauen, die mit ‚Ja‘ geantwortet haben“ binomialverteilt ist und die Laplace-Bedingung  $\sigma > 3$  erfüllt ist.

- (3) Die Konfidenzintervalle  $K_F$  und  $K_M$  überschneiden sich nicht.

*Interpretieren Sie dies im Sachzusammenhang.*

(15 Punkte)

**Zugelassene Hilfsmittel:**

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung



Name: \_\_\_\_\_

### Tabelle 1: $\sigma$ -Regeln für Binomialverteilungen

Eine mit den Parametern  $n$  und  $p$  binomialverteilte Zufallsgröße  $X$  hat den Erwartungswert  $\mu = n \cdot p$  und die Standardabweichung  $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$ .

Wenn die LAPLACE-Bedingung  $\sigma > 3$  erfüllt ist, gelten die  $\sigma$ -Regeln:

$P(\mu - 1,64\sigma \leq X \leq \mu + 1,64\sigma) \approx 0,90$	$P(\mu - 1,64\sigma \leq X) \approx 0,95$
	$P(X \leq \mu + 1,64\sigma) \approx 0,95$
$P(\mu - 1,96\sigma \leq X \leq \mu + 1,96\sigma) \approx 0,95$	$P(\mu - 1,96\sigma \leq X) \approx 0,975$
	$P(X \leq \mu + 1,96\sigma) \approx 0,975$
$P(\mu - 2,58\sigma \leq X \leq \mu + 2,58\sigma) \approx 0,99$	$P(\mu - 2,58\sigma \leq X) \approx 0,995$
	$P(X \leq \mu + 2,58\sigma) \approx 0,995$

$P(\mu - 1\sigma \leq X \leq \mu + 1\sigma) \approx 0,683$	$P(\mu - 1\sigma \leq X) \approx 0,841$
	$P(X \leq \mu + 1\sigma) \approx 0,841$
$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,955$	$P(\mu - 2\sigma \leq X) \approx 0,977$
	$P(X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,977$
$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$	$P(\mu - 3\sigma \leq X) \approx 0,999$
	$P(X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,999$



Name: \_\_\_\_\_

**Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für  $n = 10$  und  $n = 20$**

$$F(n; p; k) = B(n; p; 0) + \dots + B(n; p; k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \dots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

		$p$										
$n$	$k$	0,02	0,05	0,08	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,5		$n$
10	0	0,8171	0,5987	0,4344	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010	9	10
	1	0,9838	0,9139	0,8121	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107	8	
	2	0,9991	0,9885	0,9599	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547	7	
	3		0,9990	0,9942	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719	6	
	4		0,9999	0,9994	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770	5	
	5				0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230	4	
	6					0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,8281	3	
	7						0,9999	0,9996	0,9984	0,9453	2	
	8								0,9999	0,9893	1	
	9									0,9990	0	
20	0	0,6676	0,3585	0,1887	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	19	20
	1	0,9401	0,7358	0,5169	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000	18	
	2	0,9929	0,9245	0,7879	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002	17	
	3	0,9994	0,9841	0,9294	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013	16	
	4		0,9974	0,9817	0,9568	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059	15	
	5		0,9997	0,9962	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207	14	
	6			0,9994	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577	13	
	7			0,9999	0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316	12	
	8				0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517	11	
	9					0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,4119	10	
	10						0,9994	0,9961	0,9829	0,5881	9	
	11						0,9999	0,9991	0,9949	0,7483	8	
	12							0,9998	0,9987	0,8684	7	
	13								0,9997	0,9423	6	
	14									0,9793	5	
	15									0,9941	4	
	16									0,9987	3	
	17									0,9998	2	
$n$		0,98	0,95	0,92	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,5	$k$	$n$

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h.  $p \geq 0,5$ , gilt:  $F(n; p; k) = 1 -$  abgelesener Wert





Name: \_\_\_\_\_

**Tabelle 3: Kumulierte Binomialverteilung für  $n = 50$**

$$F(n; p; k) = B(n; p; 0) + \dots + B(n; p; k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \dots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	k	p										n	n
		0,02	0,05	0,1	0,125	0,15	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		
50	0	0,3642	0,0769	0,0052	0,0013	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	49	50
	1	0,7358	0,2794	0,0338	0,0103	0,0029	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	48	
	2	0,9216	0,5405	0,1117	0,0418	0,0142	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	47	
	3	0,9822	0,7604	0,2503	0,1138	0,0460	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	46	
	4	0,9968	0,8964	0,4312	0,2346	0,1121	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	45	
	5	0,9995	0,9622	0,6161	0,3935	0,2194	0,0480	0,0070	0,0007	0,0000	0,0000	44	
	6	0,9999	0,9882	0,7702	0,5637	0,3613	0,1034	0,0194	0,0025	0,0000	0,0000	43	
	7		0,9968	0,8779	0,7165	0,5188	0,1904	0,0453	0,0073	0,0001	0,0000	42	
	8		0,9992	0,9421	0,8339	0,6681	0,3073	0,0916	0,0183	0,0002	0,0000	41	
	9		0,9998	0,9755	0,9121	0,7911	0,4437	0,1637	0,0402	0,0008	0,0000	40	
	10			0,9906	0,9579	0,8801	0,5836	0,2622	0,0789	0,0022	0,0000	39	
	11			0,9968	0,9817	0,9372	0,7107	0,3816	0,1390	0,0057	0,0000	38	
	12			0,9990	0,9928	0,9699	0,8139	0,5110	0,2229	0,0133	0,0002	37	
	13			0,9997	0,9974	0,9868	0,8894	0,6370	0,3279	0,0280	0,0005	36	
	14			0,9999	0,9991	0,9947	0,9393	0,7481	0,4468	0,0540	0,0013	35	
	15				0,9997	0,9981	0,9692	0,8369	0,5692	0,0955	0,0033	34	
	16				0,9999	0,9993	0,9856	0,9017	0,6839	0,1561	0,0077	33	
	17					0,9998	0,9937	0,9449	0,7822	0,2369	0,0164	32	
	18					0,9999	0,9975	0,9713	0,8594	0,3356	0,0325	31	
	19						0,9991	0,9861	0,9152	0,4465	0,0595	30	
	20						0,9997	0,9937	0,9522	0,5610	0,1013	29	
	21						0,9999	0,9974	0,9749	0,6701	0,1611	28	
	22							0,9990	0,9877	0,7660	0,2399	27	
	23							0,9996	0,9944	0,8438	0,3359	26	
	24							0,9999	0,9976	0,9022	0,4439	25	
	25								0,9991	0,9427	0,5561	24	
	26								0,9997	0,9686	0,6641	23	
	27								0,9999	0,9840	0,7601	22	
	28									0,9924	0,8389	21	
	29									0,9966	0,8987	20	
	30									0,9986	0,9405	19	
	31									0,9995	0,9675	18	
	32									0,9998	0,9836	17	
	33									0,9999	0,9923	16	
	34										0,9967	15	
	35										0,9987	14	
	36										0,9995	13	
37										0,9998	12		
n		0,98	0,95	0,9	0,875	0,85	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	k	n

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h.  $p \geq 0,5$ , gilt:  $F(n; p; k) = 1 -$  abgelesener Wert



Name: \_\_\_\_\_

**Tabelle 4: Kumulierte Binomialverteilung für n = 100**

$$F(n; p; k) = B(n; p; 0) + \dots + B(n; p; k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \dots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	k	p												n			
		0,02	0,03	0,05	0,1	0,15	1/6	0,2	0,25	0,27	0,3	1/3	0,4		0,5		
100	0	0,1326	0,0476	0,0059	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	99	
	1	0,4033	0,1946	0,0371	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	98	
	2	0,6767	0,4198	0,1183	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	97	
	3	0,8590	0,6472	0,2578	0,0078	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	96	
	4	0,9492	0,8179	0,4360	0,0237	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	95	
	5	0,9845	0,9192	0,6160	0,0576	0,0016	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	94	
	6	0,9959	0,9688	0,7660	0,1172	0,0047	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	93	
	7	0,9991	0,9894	0,8720	0,2061	0,0122	0,0038	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	92	
	8	0,9998	0,9968	0,9369	0,3209	0,0275	0,0095	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	91	
	9		0,9991	0,9718	0,4513	0,0551	0,0213	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	90	
	10		0,9998	0,9885	0,5832	0,0994	0,0427	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	89	
	11			0,9957	0,7030	0,1635	0,0777	0,0126	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	88	
	12			0,9985	0,8018	0,2473	0,1297	0,0253	0,0010	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	87	
	13			0,9995	0,8761	0,3474	0,2000	0,0469	0,0025	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	86	
	14				0,9274	0,4572	0,2874	0,0804	0,0054	0,0014	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	85	
	15					0,9601	0,5683	0,3877	0,1285	0,0111	0,0033	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	84	
	16					0,9794	0,6725	0,4942	0,1923	0,0211	0,0068	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000	83	
	17					0,9900	0,7633	0,5994	0,2712	0,0376	0,0133	0,0022	0,0002	0,0000	0,0000	82	
	18					0,9954	0,8372	0,6965	0,3621	0,0630	0,0243	0,0045	0,0005	0,0000	0,0000	81	
	19					0,9980	0,8935	0,7803	0,4602	0,0995	0,0420	0,0089	0,0011	0,0000	0,0000	80	
	20					0,9992	0,9337	0,8481	0,5595	0,1488	0,0684	0,0165	0,0024	0,0000	0,0000	79	
	21					0,9997	0,9607	0,8998	0,6540	0,2114	0,1057	0,0288	0,0048	0,0000	0,0000	78	
	22					0,9999	0,9779	0,9369	0,7389	0,2864	0,1552	0,0479	0,0091	0,0001	0,0000	77	
	23						0,9881	0,9621	0,8109	0,3711	0,2172	0,0755	0,0164	0,0003	0,0000	76	
	24						0,9939	0,9783	0,8686	0,4617	0,2909	0,1136	0,0281	0,0006	0,0000	75	
	25						0,9970	0,9881	0,9125	0,5535	0,3737	0,1631	0,0458	0,0012	0,0000	74	
	26						0,9986	0,9938	0,9442	0,6417	0,4620	0,2244	0,0715	0,0024	0,0000	73	
	27						0,9994	0,9969	0,9658	0,7224	0,5516	0,2964	0,1066	0,0046	0,0000	72	
	28						0,9997	0,9985	0,9800	0,7925	0,6379	0,3768	0,1524	0,0084	0,0000	71	
	29						0,9999	0,9993	0,9888	0,8505	0,7172	0,4623	0,2093	0,0148	0,0000	70	
	30							0,9997	0,9939	0,8962	0,7866	0,5491	0,2766	0,0248	0,0000	69	
	31							0,9999	0,9969	0,9307	0,8446	0,6331	0,3525	0,0398	0,0001	68	
	32								0,9984	0,9554	0,8909	0,7107	0,4344	0,0615	0,0002	67	
	33								0,9993	0,9724	0,9261	0,7793	0,5188	0,0913	0,0004	66	
	34								0,9997	0,9836	0,9518	0,8371	0,6019	0,1303	0,0009	65	
	35								0,9999	0,9906	0,9697	0,8839	0,6803	0,1795	0,0018	64	
	36								0,9999	0,9948	0,9817	0,9201	0,7511	0,2386	0,0033	63	
	37									0,9973	0,9893	0,9470	0,8123	0,3068	0,0060	62	
	38									0,9986	0,9940	0,9660	0,8630	0,3822	0,0105	61	
	39									0,9993	0,9968	0,9790	0,9034	0,4621	0,0176	60	
	40									0,9997	0,9983	0,9875	0,9341	0,5433	0,0284	59	
	41									0,9999	0,9992	0,9928	0,9566	0,6225	0,0443	58	
	42									0,9999	0,9996	0,9960	0,9724	0,6967	0,0666	57	
	43										0,9998	0,9979	0,9831	0,7635	0,0967	56	
	44										0,9999	0,9989	0,9900	0,8211	0,1356	55	
	45											0,9995	0,9943	0,8689	0,1841	54	
	46											0,9997	0,9969	0,9070	0,2421	53	
	47											0,9999	0,9983	0,9362	0,3086	52	
	48											0,9999	0,9991	0,9577	0,3822	51	
	49												0,9996	0,9729	0,4602	50	
	50												0,9998	0,9832	0,5398	49	
	51												0,9999	0,9900	0,6178	48	
	52													0,9942	0,6914	47	
	53													0,9968	0,7579	46	
	54													0,9983	0,8159	45	
	55													0,9991	0,8644	44	
	56													0,9996	0,9033	43	
	57													0,9998	0,9334	42	
	58													0,9999	0,9557	41	
	59														0,9716	40	
	60														0,9824	39	
	61														0,9895	38	
	62														0,9940	37	
	63														0,9967	36	
	64														0,9982	35	
	65														0,9991	34	
	66														0,9996	33	
	67														0,9998	32	
	68														0,9999	31	
	n	k	0,98	0,97	0,95	0,9	0,85	5/6	0,8	0,75	0,73	0,7	2/3	0,6	0,5	k	n

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h.  $p \geq 0,5$ , gilt:  $F(n; p; k) = 1 -$  abgelesener Wert

Nur für den Dienstgebrauch!



Name: \_\_\_\_\_

**Tabelle 5: Kumulierte Binomialverteilung für  $n = 200$**

$$F(n; p; k) = B(n; p; 0) + \dots + B(n; p; k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \dots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	k	p								n	
		0,02	0,04	0,05	0,1	0,15	1/6	0,2	0,25		
200	0	0,0176	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	199	
	1	0,0894	0,0027	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	198	
	2	0,2351	0,0125	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	197	
	3	0,4315	0,0395	0,0090	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	196	
	4	0,6288	0,0950	0,0264	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	195	
	5	0,7867	0,1856	0,0623	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	194	
	6	0,8914	0,3084	0,1237	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	193	
	7	0,9507	0,4501	0,2133	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	192	
	8	0,9798	0,5926	0,3270	0,0014	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	191	
	9	0,9925	0,7192	0,4547	0,0035	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	190	
	10	0,9975	0,8200	0,5831	0,0081	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	189	
	11	0,9992	0,8925	0,6998	0,0168	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	188	
	12	0,9998	0,9401	0,7965	0,0320	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	187	
	13	0,9999	0,9688	0,8701	0,0566	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	186	
	14		0,9848	0,9219	0,0929	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	185	
	15		0,9930	0,9556	0,1431	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000	184	
	16		0,9970	0,9762	0,2075	0,0021	0,0003	0,0000	0,0000	183	
	17		0,9988	0,9879	0,2849	0,0043	0,0006	0,0000	0,0000	182	
	18		0,9995	0,9942	0,3724	0,0082	0,0013	0,0000	0,0000	181	
	19		0,9998	0,9973	0,4655	0,0149	0,0027	0,0000	0,0000	180	
	20		0,9999	0,9988	0,5592	0,0255	0,0052	0,0001	0,0000	179	
	21			0,9995	0,6484	0,0415	0,0094	0,0002	0,0000	178	
	22			0,9998	0,7290	0,0645	0,0163	0,0005	0,0000	177	
	23			0,9999	0,7983	0,0959	0,0269	0,0010	0,0000	176	
	24				0,8551	0,1368	0,0426	0,0020	0,0000	175	
	25				0,8995	0,1876	0,0648	0,0036	0,0000	174	
	26				0,9328	0,2480	0,0945	0,0064	0,0000	173	
	27				0,9566	0,3166	0,1329	0,0110	0,0000	172	
	28				0,9729	0,3914	0,1803	0,0179	0,0001	171	
	29				0,9837	0,4697	0,2366	0,0283	0,0002	170	
	30				0,9905	0,5485	0,3007	0,0430	0,0004	169	
	31				0,9946	0,6247	0,3711	0,0632	0,0008	168	
	32				0,9971	0,6958	0,4454	0,0899	0,0014	167	
	33				0,9985	0,7596	0,5210	0,1239	0,0026	166	
	34				0,9992	0,8150	0,5953	0,1656	0,0044	165	
	35				0,9996	0,8613	0,6658	0,2151	0,0073	164	
	36				0,9998	0,8987	0,7305	0,2717	0,0117	163	
	37				0,9999	0,9280	0,7877	0,3345	0,0182	162	
	38					0,9502	0,8369	0,4019	0,0276	161	
	39					0,9665	0,8777	0,4718	0,0405	160	
	40					0,9780	0,9106	0,5422	0,0578	159	
	41					0,9860	0,9362	0,6108	0,0804	158	
	42					0,9913	0,9556	0,6758	0,1089	157	
	43					0,9947	0,9699	0,7355	0,1438	156	
	44					0,9969	0,9801	0,7887	0,1852	155	
	45					0,9982	0,9872	0,8349	0,2332	154	
	46					0,9990	0,9919	0,8738	0,2870	153	
	47					0,9995	0,9950	0,9056	0,3458	152	
	48					0,9997	0,9970	0,9310	0,4083	151	
	49					0,9998	0,9983	0,9506	0,4729	150	
	50					0,9999	0,9990	0,9655	0,5379	149	
	51						0,9995	0,9764	0,6017	148	
	52						0,9997	0,9843	0,6626	147	
	53						0,9998	0,9897	0,7192	146	
	54						0,9999	0,9934	0,7707	145	
	55							0,9959	0,8162	144	
	56							0,9975	0,8555	143	
	57							0,9985	0,8885	142	
	58							0,9991	0,9157	141	
	59							0,9995	0,9375	140	
	60							0,9997	0,9546	139	
	61							0,9998	0,9677	138	
	62							0,9999	0,9774	137	
	63								0,9846	136	
	64								0,9897	135	
	65								0,9932	134	
	66								0,9956	133	
	67								0,9972	132	
	68								0,9983	131	
	69								0,9990	130	
	70								0,9994	129	
	71								0,9996	128	
	72								0,9998	127	
	73								0,9999	126	
74								0,9999	125		
		0,98	0,96	0,95	0,9	0,85	5/6	0,8	0,75	k	n

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h.  $p \geq 0,5$ , gilt:  $F(n; p; k) = 1 -$  abgelesener Wert



Name: \_\_\_\_\_

**Tabelle 6: Kumulierte Binomialverteilung für  $n = 400$**

$$F(n; p; k) = B(n; p; 0) + \dots + B(n; p; k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \dots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	k	p				n	n
		0,01	0,02	0,05	0,1		
400	0	0,0180	0,0003	0,0000	0,0000	399	400
	1	0,0905	0,0028	0,0000	0,0000	398	
	2	0,2366	0,0131	0,0000	0,0000	397	
	3	0,4325	0,0410	0,0000	0,0000	396	
	4	0,6288	0,0973	0,0000	0,0000	395	
	5	0,7859	0,1885	0,0001	0,0000	394	
	6	0,8904	0,3109	0,0002	0,0000	393	
	7	0,9498	0,4515	0,0006	0,0000	392	
	8	0,9792	0,5926	0,0017	0,0000	391	
	9	0,9922	0,7179	0,0042	0,0000	390	
	10	0,9973	0,8179	0,0094	0,0000	389	
	11	0,9992	0,8903	0,0190	0,0000	388	
	12	0,9998	0,9381	0,0355	0,0000	387	
	13	0,9999	0,9673	0,0614	0,0000	386	
	14		0,9838	0,0990	0,0000	385	
	15		0,9924	0,1499	0,0000	384	
	16		0,9966	0,2145	0,0000	383	
	17		0,9986	0,2912	0,0000	382	
	18		0,9994	0,3771	0,0000	381	
	19		0,9998	0,4680	0,0001	380	
	20		0,9999	0,5591	0,0002	379	
	21			0,6459	0,0004	378	
	22			0,7246	0,0009	377	
	23			0,7927	0,0017	376	
	24			0,8490	0,0031	375	
	25			0,8935	0,0054	374	
	26			0,9274	0,0092	373	
	27			0,9520	0,0149	372	
	28			0,9693	0,0235	371	
	29			0,9810	0,0357	370	
	30			0,9886	0,0524	369	
	31			0,9933	0,0746	368	
	32			0,9962	0,1030	367	
	33			0,9979	0,1382	366	
	34			0,9989	0,1805	365	
	35			0,9994	0,2296	364	
	36			0,9997	0,2849	363	
	37			0,9999	0,3453	362	
	38			0,9999	0,4095	361	
	39				0,4756	360	
	40				0,5420	359	
	41				0,6067	358	
	42				0,6682	357	
	43				0,7251	356	
	44				0,7763	355	
	45				0,8214	354	
	46				0,8600	353	
	47				0,8924	352	
	48				0,9188	351	
	49				0,9399	350	
	50				0,9564	349	
	51				0,9689	348	
	52				0,9783	347	
	53				0,9851	346	
	54				0,9900	345	
	55				0,9934	344	
	56				0,9957	343	
	57				0,9973	342	
	58				0,9983	341	
	59				0,9989	340	
	60				0,9994	339	
	61				0,9996	338	
	62				0,9998	337	
	63				0,9999	336	
64				0,9999	335		
		0,99	0,98	0,95	0,9	k	n

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h.  $p \geq 0,5$  gilt:  $F(n; p; k) = 1 -$  abgelesener Wert



Name: \_\_\_\_\_

**Tabelle 7: Normalverteilung**

$$\phi(z) = 0, \dots$$

$$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$$\phi(2,32) = 0,9898$$

$$\phi(z) = 0,994 \Rightarrow z = 2,51$$

$$\phi(-0,9) = 1 - \phi(0,9) = 0,1841$$

## *Unterlagen für die Lehrkraft*

# **Abiturprüfung 2013**

## *Mathematik, Leistungskurs*

---

### **1. Aufgabenart**

Stochastik mit Alternative 2 (Schätzen von Parametern für binomialverteilte Zufallsgrößen)

### **2. Aufgabenstellung<sup>1</sup>**

siehe Prüfungsaufgabe

### **3. Materialgrundlage**

- entfällt

### **4. Bezüge zu den Vorgaben 2013**

#### *1. Inhaltliche Schwerpunkte*

- Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
- Binomialverteilung und Normalverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung

Alternative 2:

- Schätzen von Parametern für binomialverteilte Zufallsgrößen

#### *2. Medien/Materialien*

- entfällt

### **5. Zugelassene Hilfsmittel**

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

---

<sup>1</sup> Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

## 6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

### 6.1 Modellösungen

#### Modellösung a)

(1) An der Umfrage haben  $211 + 150 + 191 + 152 + 301 = 1005$  Personen teilgenommen.

Davon haben  $12 + 14 + 8 + 4 + 24 = 62$  Personen keine Angaben gemacht. Da jede Person mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewählt wird, beträgt die gesuchte Wahr-

scheinlichkeit  $P(\text{"Keine Angabe"}) = \frac{62}{1005} \approx 0,0617$ .

(2) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt

$$P(\text{"3-mal älter als 50 und Ja"}) = \frac{361}{1005} \cdot \frac{360}{1004} \cdot \frac{359}{1003} \approx 0,0461.$$

Hier ist eine näherungsweise Berechnung mit Hilfe der Binomialverteilung aufgrund des großen Stichprobenumfangs sowie der großen Anzahl der günstigen Ergebnisse in der Stichprobe möglich:

$$P(\text{"3-mal älter als 50 und Ja"}) \approx \left( \frac{361}{1005} \right)^3 \approx 0,0463.$$

(3) Die Anzahl der Nicht-Schüler beträgt  $211 - 57 = 154$ . Von diesen antworteten

$166 - 38 = 128$  mit „Ja“. Der gesuchte Anteil beträgt also  $\frac{128}{154} \approx 0,8312$ .

#### Modellösung b)

(1) Die 166 „Ja“-Stimmen setzen sich aus den  $\frac{2}{3} \cdot x$  „Ja“-Stimmen der  $x$  Schüler und den

$r \cdot (211 - x)$  „Ja“-Stimmen der Nicht-Schüler zusammen. Somit gilt die angegebene Gleichung.

$$(2) \quad \frac{2}{3} \cdot x + r \cdot (211 - x) = 166 \Leftrightarrow \left( \frac{2}{3} - r \right) \cdot x = 166 - r \cdot 211 \Leftrightarrow x = \frac{166 - r \cdot 211}{\frac{2}{3} - r}.$$

Mit  $r \approx 0,831$  ergibt sich  $x \approx \frac{166 - 0,831 \cdot 211}{\frac{2}{3} - 0,831} \approx 57$ .

Der Wert  $x = 57$  ist durch 3 teilbar im Einklang mit der Aufgabenstellung.

[Ein Vergleich mit den beiden benachbarten durch 3 teilbaren Werten 54 und 60, der

$$r = \frac{166 - \frac{2}{3} \cdot 54}{211 - 54} \approx 0,828 \text{ bzw. } r = \frac{166 - \frac{2}{3} \cdot 60}{211 - 60} \approx 0,834 \text{ ergibt, sowie eine ergänzende}$$

Monotoniebetrachtung der Funktion  $x \mapsto r(x) = \frac{166 - \frac{2}{3} \cdot x}{211 - x}$  wird nicht erwartet.]

### Modelllösung c)

- (1) Mit „Ja“ haben  $643 + 149 = 792$  Personen geantwortet. Von diesen kommen 643 aus dem Westen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also

$$P_{\text{„Ja“}}(\text{„West“}) = \frac{643}{792} \approx 0,8119.$$

- (2) Die Wahrscheinlichkeit beträgt

$$\frac{643}{792} \cdot \frac{642}{791} + \frac{149}{792} \cdot \frac{148}{791} \approx 0,69.$$

Die (Näherungs-)Lösung

$$\left(\frac{643}{792}\right)^2 + \left(\frac{149}{792}\right)^2 \approx 0,69$$

wird ebenfalls akzeptiert.



**Modelllösung d)**

(1) Die Zufallsgröße  $X$  kann als binomialverteilt angenommen werden, da bei zufälliger Auswahl der Teilnehmer

- $X$  die Anzahl von „Treffern“ („Nein“-Stimmen) zählt,
- eine konstante Wahrscheinlichkeit  $p$  für die Antwort „Nein“ angenommen werden kann, die dem Anteil in der Bevölkerung entspricht,
- die Antworten voneinander unabhängig sind.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt  $p = \frac{19}{152} = \frac{1}{8}$ .

(2) Bezeichnet  $X$ : „Anzahl der ‚Nein‘-Antworten in der Umfrage in der Altersgruppe

50 bis 59“, so ist  $X$  binomialverteilt mit  $n = 40$ ,  $p = \frac{1}{8}$ .

Die erwartete Anzahl ist  $\mu = \frac{1}{8} \cdot 40 = 5$ , die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also

$$P(X = 5) = \binom{40}{5} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^5 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{35} \approx 0,1875.$$

(3) Bezeichnet nun  $X$ : „Anzahl der ‚Ja‘- oder ‚Nein‘-Antworten in der Umfrage in der Altersgruppe kleiner 50“, so ist  $X$  binomialverteilt mit

$$n = 10, \quad p = \frac{166 + 112 + 153 + 33 + 24 + 30}{211 + 150 + 191} = \frac{518}{552} = \frac{259}{276}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle eine Angabe machen, beträgt

$$P(\text{„10-mal Ja oder Nein“}) = \left(\frac{259}{276}\right)^{10} \approx 0,5295.$$

**Modelllösung e)**

- (1)  $K_M$  enthält alle Werte für den wahren Anteil der Befürworter unter den Männern, die auf dem 90%-Niveau mit den Daten vereinbar sind. [Formal:  $p_M$  liegt genau dann im Intervall  $K_M$ , falls ein Test auf dem 10%-Niveau die Hypothese „ $p_M$  ist der korrekte Anteil der Befürworter unter den Männern“ nicht verwerfen würde.]
- (2) Es bezeichne  $p_F$  den Anteil der Befürworter in der weiblichen Bevölkerung und  $Y$  die Anzahl der Frauen, die bei der Umfrage mit „Ja“ geantwortet haben. Dann kann  $Y$  nach Aufgabenstellung als binomialverteilt angenommen werden mit unbekanntem  $p = p_F$  sowie  $n = 518$ ,  $\sigma_F = \sqrt{518 \cdot p_F \cdot (1 - p_F)} > 3$ .

Die Randpunkte des gesuchten Konfidenzintervalls bestimmt man dann näherungsweise so:

$$\left| p_F - \frac{426}{518} \right| = 1,64 \cdot \frac{\sigma_F}{518}.$$

Durch Quadrieren erhält man:

$$\left( p_F - \frac{426}{518} \right)^2 = 1,64^2 \cdot \frac{\sigma_F^2}{518^2} \Leftrightarrow \left( p_F - \frac{426}{518} \right)^2 = 1,64^2 \cdot \frac{p_F \cdot (1 - p_F)}{518}.$$

Diese Gleichung löst man nach  $p_F$  auf:

$$\begin{aligned} p_F^2 - \frac{852}{518} p_F + \left( \frac{426}{518} \right)^2 &= \frac{1,64^2}{518} p_F (1 - p_F) \\ \Leftrightarrow p_F^2 - \frac{852}{518} p_F + \left( \frac{426}{518} \right)^2 &= \frac{1,64^2}{518} p_F - \frac{1,64^2}{518} p_F^2 \\ \Leftrightarrow p_F^2 \cdot \left( 1 + \frac{1,64^2}{518} \right) + \left( -\frac{852}{518} - \frac{1,64^2}{518} \right) p_F + \left( \frac{426}{518} \right)^2 &= 0, \end{aligned}$$

also (Taschenrechner)  $p_F \approx 0,7932 \vee p_F \approx 0,8482$ .

Als näherungsweise Konfidenzintervall für den unbekanntem Anteil  $p_F$  erhält man

$$K_F = [0,7932; 0,8482].$$

[Hinreichend genaue Rundungen bei Zwischenergebnissen sollen nicht zu Punktabzügen führen; ebenso sollte eine verkürzte Darstellung des Lösungsweges bei korrektem Ansatz und Ergebnis mit voller Punktzahl versehen werden.]

(3)  $K_F$  und  $K_M$  haben keine Werte gemeinsam, alle Werte aus  $K_M$  sind kleiner als die Werte aus  $K_F$ . Es ist daher plausibel anzunehmen, dass der Anteil der Befürworter unter den Frauen größer als der unter den Männern ist.

Alternativ: Die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden Umfragen so ausfallen, wie in der Aufgabenstellung angegeben, wenn tatsächlich  $p_M \geq p_F$  gilt, ist eher gering, weil entweder  $p_M$  oder  $p_F$  nicht in ihrem jeweiligen Konfidenzintervall liegen würden.

## 6.2 Teilleistungen – Kriterien

### Teilaufgabe a)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	(1) bestimmt die Wahrscheinlichkeit für „Keine Angabe“.	3
2	(2) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	4
3	(3) bestimmt den gesuchten Anteil.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

### Teilaufgabe b)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	(1) begründet die Gültigkeit der Gleichung.	3
2	(2) ermittelt die gesuchte Anzahl $x$ der Schüler.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

**Teilaufgabe c)**

	<b>Anforderungen</b>	maximal erreichbare Punktzahl
	<b>Der Prüfling</b>	
1	(1) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3
2	(2) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

**Teilaufgabe d)**

	<b>Anforderungen</b>	maximal erreichbare Punktzahl
	<b>Der Prüfling</b>	
1	(1) begründet, dass $X$ als binomialverteilt angenommen werden kann, und zeigt, dass die Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{8}$ beträgt.	4
2	(2) berechnet den Erwartungswert und die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3
3	(3) berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

**Teilaufgabe e)**

	<b>Anforderungen</b>	maximal erreichbare Punktzahl
	<b>Der Prüfling</b>	
1	(1) erklärt die Bedeutung des Intervalls im Sachzusammenhang.	3
2	(2) bestimmt einen Ansatz zur Bestimmung des Konfidenzintervalls.	4
3	(2) bestimmt das Konfidenzintervall.	5
4	(3) interpretiert die fehlende Überschneidung im Sachzusammenhang.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

**7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit**

Name des Prüflings: \_\_\_\_\_ Kursbezeichnung: \_\_\_\_\_

Schule: \_\_\_\_\_

**Teilaufgabe a)**

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK <sup>2</sup>	ZK	DK
	<b>Der Prüfling</b>				
1	(1) bestimmt die Wahrscheinlichkeit ...	3			
2	(2) bestimmt die gesuchte ...	4			
3	(3) bestimmt den gesuchten ...	4			
sachlich richtige Alternativen: (11) ..... .....					
	<b>Summe Teilaufgabe a)</b>	<b>11</b>			

**Teilaufgabe b)**

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	<b>Der Prüfling</b>				
1	(1) begründet die Gültigkeit ...	3			
2	(2) ermittelt die gesuchte ...	3			
sachlich richtige Alternativen: (6) ..... .....					
	<b>Summe Teilaufgabe b)</b>	<b>6</b>			

**Teilaufgabe c)**

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	<b>Der Prüfling</b>				
1	(1) bestimmt die gesuchte ...	3			
2	(2) bestimmt die gesuchte ...	5			
sachlich richtige Alternativen: (8) ..... .....					
	<b>Summe Teilaufgabe c)</b>	<b>8</b>			

<sup>2</sup> EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

**Teilaufgabe d)**

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) begründet, dass $X \dots$	4			
2	(2) berechnet den Erwartungswert ...	3			
3	(3) berechnet die gesuchte ...	3			
sachlich richtige Alternativen: (10) ..... .....					
<b>Summe Teilaufgabe d)</b>		<b>10</b>			

**Teilaufgabe e)**

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) erklärt die Bedeutung ...	3			
2	(2) bestimmt einen Ansatz ...	4			
3	(2) bestimmt das Konfidenzintervall.	5			
4	(3) interpretiert die fehlende ...	3			
sachlich richtige Alternativen: (15) ..... .....					
<b>Summe Teilaufgabe e)</b>		<b>15</b>			

<b>Summe insgesamt</b>		<b>50</b>			
------------------------	--	-----------	--	--	--

**Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)**

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktzahl aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	50			
Übertrag der Punktzahl aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	50			
Übertrag der Punktzahl aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	50			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	150			
aus der Punktzahl resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOST				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktzahlen aus EK und ZK: \_\_\_\_\_

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: \_\_\_\_\_

Die Klausur wird abschließend mit der Note: \_\_\_\_\_ (\_\_\_\_ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

**Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)**

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

<b>Note</b>	<b>Punkte</b>	<b>Erreichte Punktzahl</b>
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0