Name: ____________________

Abiturprüfung 2013

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Die Buche ist ein in weiten Teilen Europas heimischer Laubbaum.
Ein Biologe modelliert das Höhenwachstum von Buchen durch Funktionen f_a mit der Gleichung

$$f_a(t) = a \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{50}t}\right)^2,\ t \geq 0, \text{ und dem Parameter } a > 0\,.^{1}$$

Dabei wird t als Maßzahl zur Einheit 1 Jahr, $f_a(t)$ als Maßzahl zur Einheit 1 Meter aufgefasst. Der Zeitpunkt des Keimens des Buchensamens wird durch $t = 0$ festgelegt.

a) (1) *Zeichnen Sie den Graphen von* f_{35}.

(2) Bei einer 10 Jahre alten Buche wird eine Höhe von 1,15 m gemessen.
Berechnen Sie den Parameterwert von a derjenigen Funktion f_a*, die das Höhenwachstum dieser Buche beschreibt.*

In allen folgenden Teilaufgaben wird das Höhenwachstum einer speziellen Buche durch die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = f_{35}(t) = 35 \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{50}t}\right)^2,\ t \geq 0,$$

modelliert.

(3) *Berechnen Sie* $f(20)$ *und nennen Sie die Bedeutung dieses Wertes im Sachzusammenhang.*

(4) *Begründen Sie, dass gemäß der Modellierung die Buche nicht höher als 35 m werden kann.*

(14 Punkte)

---

[1] Die Funktion f_a ist für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert, wird aber nur für $t \geq 0$ zur Modellierung verwendet.

Name: ____________________

b) *Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem die Buche am stärksten wächst.*

[Hinweis: In der *Abbildung* auf Seite 3 ist auch der Graph von f' dargestellt.
Zur Kontrolle: $f'(t) = 1{,}4 \cdot \left(e^{-\frac{1}{50}t} - e^{-\frac{1}{25}t} \right)$; $f''(t) = 0{,}028 \cdot \left(2 \cdot e^{-\frac{1}{25}t} - e^{-\frac{1}{50}t} \right)$]

(9 Punkte)

c) In der *Abbildung* auf Seite 3 ist neben dem Graphen der Wachstumsgeschwindigkeit f' der oben genannten Buche auch der Graph der Wachstumsgeschwindigkeit g' einer zweiten Buche mit der Gleichung

$$g'(t) = 1{,}1 \cdot \left(e^{-\frac{1}{50}t} - e^{-\frac{1}{25}t} \right),\ t \geq 0,$$

dargestellt. Die zweite Buche hat an einem anderen Standort zum selben Zeitpunkt wie die erste Buche gekeimt.

(1) *Beschreiben* Sie *den zeitlichen Verlauf der Wachstumsgeschwindigkeiten der beiden Buchen im Vergleich.*

(2) *Begründen Sie, dass der Graph von g' an derselben Stelle ein Maximum besitzt wie der Graph von f'.*

(3) *Begründen Sie anhand der Abbildung, dass die erste Buche zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ eine größere Höhe hat als die zweite Buche.*

(4) Wenn die Funktion *h* die Wachstumsgeschwindigkeit eines Baumes beschreibt, wird durch $m = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} h(t)\,dt$ die mittlere Wachstumsgeschwindigkeit im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ bestimmt.

Ermitteln Sie die mittlere Wachstumsgeschwindigkeit der zweiten Buche in den ersten 50 Jahren nach dem Keimen des Samens.

(19 Punkte)

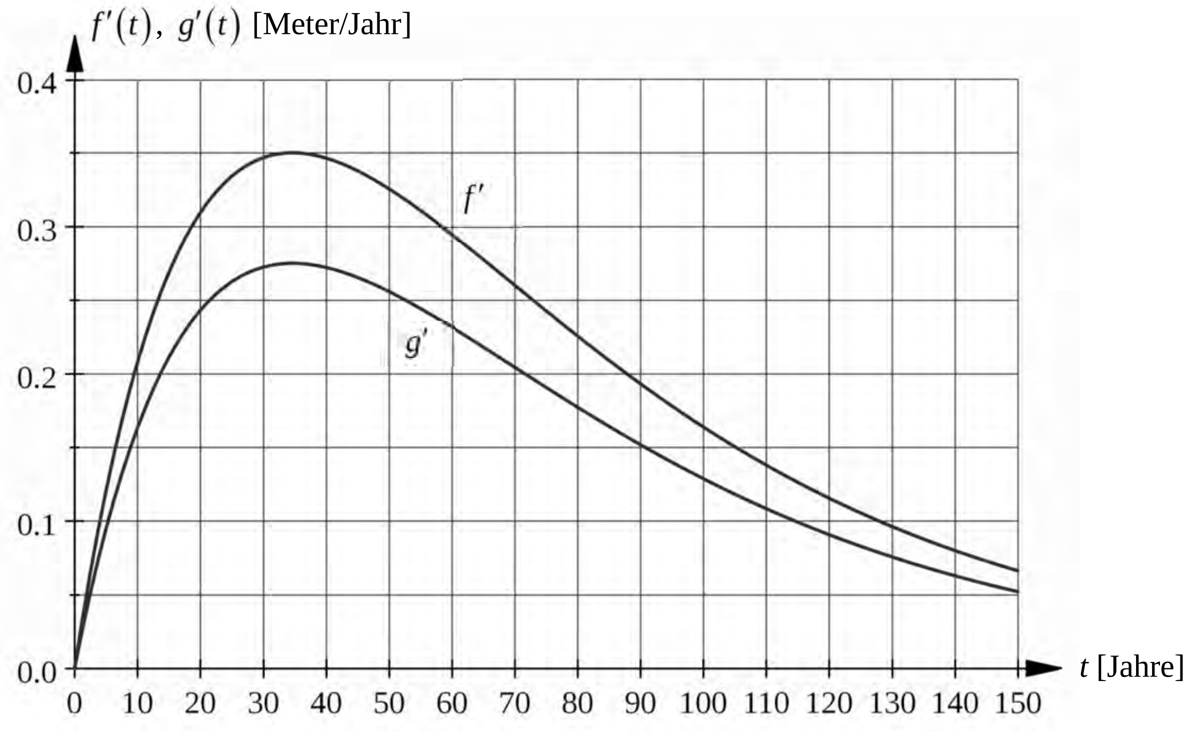
Name: ____________________

d) (1) *Geben Sie eine Gleichung einer Stammfunktion von g' an.*

(2) Jemand behauptet, dass die beiden Buchen 50 Jahre nach ihrer Anpflanzung gemäß den Modellierungen ihres Höhenwachstums einen Höhenunterschied von mindestens 3,50 m aufweisen müssten.

Prüfen Sie, ob die Behauptung wahr ist.

(8 Punkte)



Abbildung

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2013

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2013

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen und Exponentialfunktionen einschließlich notwendiger Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Untersuchungen von Wirkungen (Änderungsrate)
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

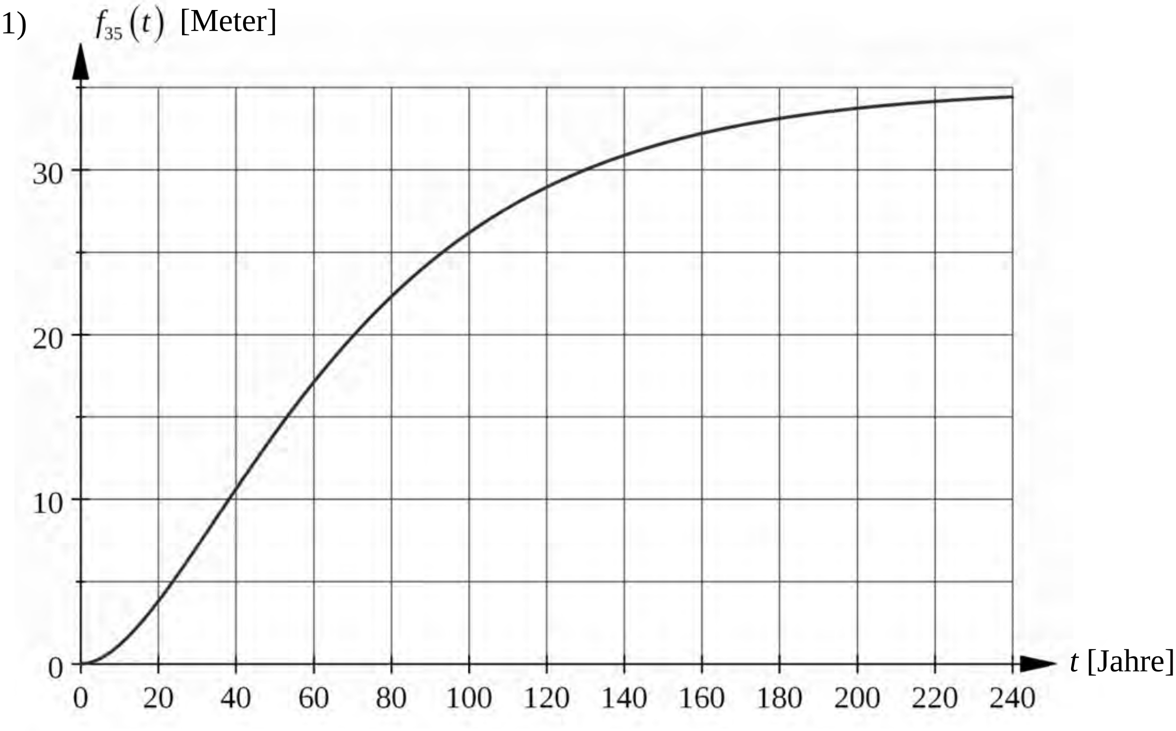
[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1)



(2) Die Gleichung $f_a(10) = 1,15$ hat die Lösung $a \approx 34,9985 \approx 35$.

(3) $f(20) = 35 \cdot \left(1 - e^{-0,4}\right)^2 \approx 3,80$.

20 Jahre nach dem Einpflanzen ist die Buche ungefähr 3,8 m hoch.

(4) Für $t > 0$ gilt $0 < e^{-0,02 \cdot t} < 1$ und daher $f(t) < 35 \cdot (1-0)^2 = 35$.

Diesem Wert nähert sich $f(t)$ für $t \to \infty$.

Modelllösung b)

Gesucht ist das globale Maximum von f'.

Die Gleichung $f''(t)=0$ hat die einzige Nullstelle $t_1 = 50\cdot\ln 2$ $[\approx 34,7]$.

Da f'' an der Stelle t_1 das Vorzeichen von + nach – wechselt, ist $f'(t_1)$ lokales Maximum von f'.

Als einziges lokales Extremum ist $f'(t_1)$ auch globales Maximum von f'.

Die Buche wächst zum Zeitpunkt $t_1 = 50\cdot\ln 2$, d. h. knapp 35 Jahre nach dem Anpflanzen am stärksten.

Modelllösung c)

(1) Die Wachstumsgeschwindigkeiten beider Buchen nehmen bis etwa 35 Jahre nach dem Einpflanzen ständig zu, erreichen zu diesem Zeitpunkt ihre Höchstwerte von ca. 0,35 m/Jahr (Buche 1) bzw. ca. 0,28 m/Jahr (Buche 2). Beide Wachstumsgeschwindigkeiten nehmen danach ständig ab.
Die Wachstumsgeschwindigkeit der ersten Buche ist [bis auf Gleichheit für $t=0$] im gesamten in der *Abbildung* dargestellten Zeitintervall größer als die Wachstumsgeschwindigkeit der zweiten Buche.
[Weitere Aussagen sind denkbar. Nicht alle Gesichtspunkte müssen vom Prüfling genannt werden.]

(2) Für alle $t \geq 0$ gilt: $g'(t) = \frac{1,1}{1,4}\cdot f'(t)$. Der Graph von g' geht daher durch Streckung [mit dem Streckfaktor $s = \frac{11}{14} < 1$] aus dem Graphen von f' hervor.
Daher besitzt g' dieselben Extremstellen wie f'.
[Alternativ kann beispielsweise auch die Maximalstelle von g' berechnet bzw. mit Hilfe der Faktorregel argumentiert werden.]

(3) Die Fläche unter dem Graphen von f' bzw. g' im Intervall $[0;t]$ stellt den Höhenzuwachs des betreffenden Baumes von der Anpflanzung bis zum Zeitpunkt *t* dar. Da die Wachstumsgeschwindigkeit der ersten Buche [bis auf Gleichheit für $t=0$] zu jedem Zeitpunkt *t* des in der *Abbildung* dargestellten Zeitintervalls größer als die Wachstumsgeschwindigkeit der zweiten Buche ist (siehe (1)) und die Anfangshöhen gleich waren, ist die Höhe der ersten Buche zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ größer als die Höhe der zweiten Buche.
[Alternative Lösungswege sind denkbar.]

(4) Die durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit der zweiten Buche in den ersten 50 Jahren nach dem Anpflanzen beträgt $m = \frac{1}{50-0} \cdot \int_0^{50} g'(t)\,dt \approx 0{,}22$ [m/Jahr].

Modelllösung d)

(1) Eine Gleichung einer Stammfunktion k von g' ist wegen

$$\int g'(t)\,dt = 27{,}5 \cdot \left(e^{-\frac{1}{25}t} - 2 \cdot e^{-\frac{1}{50}t} \right) + C$$

z. B. $k(t) = 27{,}5 \cdot \left(e^{-\frac{1}{25}t} - 2 \cdot e^{-\frac{1}{50}t} \right)$.

(2) Gemäß den Modellierungen ihres Höhenwachstums beträgt der Höhenunterschied der beiden 50 Jahre alten Buchen:

$$d = f(50) - \int_0^{50} g'(t)\,dt \left[= f(50) - \left[k(t) \right]_0^{50} = f(50) - \left[k(50) - k(0) \right] \right]$$
$$\approx 2{,}997.$$

Da der Höhenunterschied nur knapp 3 m beträgt, ist die Behauptung falsch.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) zeichnet den Graphen von f_{35}.	5
2	(2) berechnet den Parameterwert von a.	3
3	(3) berechnet $f(20)$ und nennt die Bedeutung dieses Wertes im Sachzusammenhang.	3
4	(4) begründet, dass gemäß der Modellierung die Buche nicht höher als 35 m werden kann.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	bestimmt rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem die Buche am stärksten wächst.	9
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) beschreibt den zeitlichen Verlauf der Wachstumsgeschwindigkeiten der beiden Buchen im Vergleich.	5
2	(2) begründet, dass der Graph von g' an derselben Stelle ein Maximum besitzt wie der Graph von f'.	4
3	(3) begründet anhand der *Abbildung*, dass die erste Buche zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ eine größere Höhe hat als die zweite Buche.	6
4	(4) ermittelt die mittlere Wachstumsgeschwindigkeit der zweiten Buche in den ersten 30 Jahren nach dem Keimen des Samens.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) gibt eine Gleichung einer Stammfunktion von g' an.	3
2	(2) prüft, ob die Behauptung wahr ist.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) zeichnet den Graphen …	5			
2	(2) berechnet den Parameterwert …	3			
3	(3) berechnet $f(20)$ und …	3			
4	(4) begründet, dass gemäß …	3			
sachlich richtige Alternativen: (14) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**14**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt rechnerisch den …	9			
sachlich richtige Alternativen: (9) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**9**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) beschreibt den zeitlichen …	5			
2	(2) begründet, dass der …	4			
3	(3) begründet anhand der …	6			
4	(4) ermittelt die mittlere …	4			
sachlich richtige Alternativen: (19) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**19**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) gibt eine Gleichung …	3			
2	(2) prüft, ob die …	5			
sachlich richtige Alternativen: (8) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe d)	**8**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2013

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Eine Firma baut Sprungschanzen für BMX-Fahrer in verschiedenen Formen, deren seitliches Profil jeweils durch den Graphen einer Funktion f_a mit der Gleichung

$$f_a(x) = -\frac{1}{4 \cdot a^2} x^3 + \frac{3}{4} x, \quad -8 \le x \le 0,$$ [1]

beschrieben wird mit $3{,}2 \le a \le 4$ (x, a und $f_a(x)$ in Metern).

Die Sprungschanzen werden ausgehend vom Startpunkt $S_a\left(-8 \mid f_a(-8)\right)$ von links nach rechts durchfahren und so eingebaut, dass der Absprungpunkt $A\left(0 \mid 0\right)$ auf dem Niveau des Erdbodens liegt, das in der Seitenansicht durch die x-Achse festgelegt ist.
Der Funktionsgraph der Beispielfunktion $f_{3,6}$ ist in der *Abbildung 1* dargestellt.

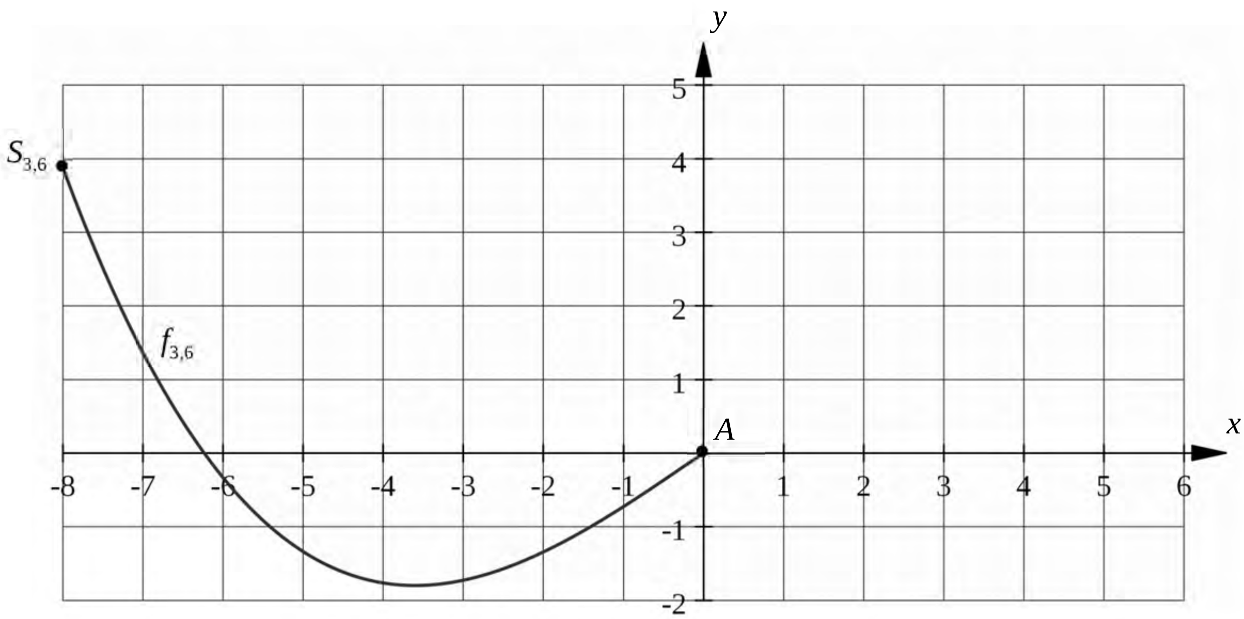


Abbildung 1

[1] Die Funktionen f_a sind für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, werden aber nur für $-8 \le x \le 0$ zur Modellierung verwendet.

Name: ____________________

a) (1) *Berechnen Sie in Abhängigkeit vom Parameter a das Intervall, in dem die durch die Funktion f_a beschriebene Profillinie der Sprungschanze unterhalb des Niveaus des Erdbodens verläuft.*

(2) *Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die Koordinaten des tiefsten Punktes T_a des Sprungschanzen-Profils.*

[Zur Kontrolle: $T_a\left(-a \middle| -\frac{1}{2}a\right)$]

(3) *Skizzieren Sie den Graphen von f_4 in der Abbildung 1 und beschreiben Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Graphen verschiedener Funktionen der Funktionenschar.*

(19 Punkte)

b) Bei der Firma wird eine Sprungschanze bestellt, die im Punkt $S_a\left(-8 \mid f_a(-8)\right)$ die Steigung -3 haben soll.

(1) *Berechnen Sie den Wert von a, für den die Sprungschanze im Punkt S_a die Steigung -3 hat, und die Höhe über dem Erdboden, in der sich bei dieser Sprungschanze der Startpunkt S_a befindet.*

[Zur Kontrolle: $a = \frac{8\sqrt{5}}{5}$]

(2) Laut Angabe der Firma hat die bestellte Sprungschanze zwischen dem Startpunkt S_a und dem Absprungpunkt A die durchschnittliche Steigung $-\frac{1}{2}$.

Prüfen Sie diese Angabe und zeigen Sie, dass der angegebene Durchschnittswert auch als Steigung in einem Punkt C des Sprungschanzen-Profils vorkommt. Erklären Sie, warum der angegebene Durchschnittswert der Steigung nur wenig über den Verlauf der Sprungschanze aussagt.

(3) Die bestellte Sprungschanze ist 2 Meter breit. In dem Bereich, in dem ihr Profil unterhalb des Niveaus des Erdbodens verläuft, muss Erde ausgehoben werden.

Berechnen Sie, wie groß das Erdvolumen ist, das bis zur Profillinie dieser Sprungschanze ausgehoben werden muss.

(18 Punkte)

Name: ____________________

c) (1) *Zeigen Sie, dass alle Sprungschanzen, deren Profil durch eine der Funktionen f_a gegeben ist, im Absprungpunkt A dieselbe Steigung haben.*

Um den BMX-Fahrern nach dem Sprung eine weichere Landung zu ermöglichen, soll rechts vom Punkt *A* im Bereich $0 \le x \le 5$ ein Aufsprunghügel angelegt werden, dessen Profil durch den Graphen der ganzrationalen Funktion 3. Grades *h* mit der Gleichung $h(x) = \frac{3}{100}x^3 - \frac{3}{10}x^2 + \frac{3}{4}x$ modelliert wird. Das Profil des Aufsprunghügels schließt im Punkt *A* ohne Knick an das Profil der Sprungschanze an und geht im Punkt $D(5\,|\,0)$ ebenfalls ohne Knick in die waagerechte Erdoberfläche über (siehe *Abbildung 2*).

(2) Den genannten Eigenschaften entsprechen Bedingungen, aus denen sich die Funktionsgleichung von *h* herleiten lässt.

Geben Sie diese Bedingungen an.

(3) *Bestimmen Sie die Stelle, an der der durch den Graphen der Funktion h modellierte Aufsprunghügel die betragsmäßig größte Steigung hat.* (13 Punkte)

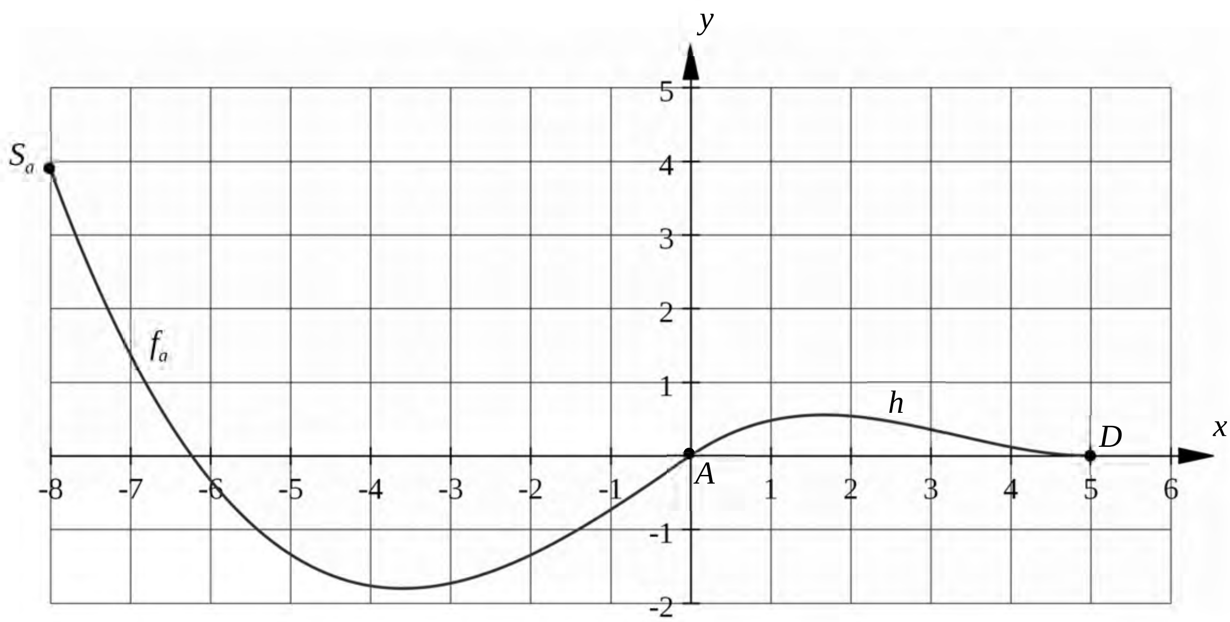


Abbildung 2

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2013

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2013

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen und Exponentialfunktionen einschließlich notwendiger Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Für $-8 \le x \le 0$ und $3{,}2 \le a \le 4$ gilt: $f_a(x) < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \cdot a < x < 0$.

(2) Es gilt: $-8 \le x \le 0$, $3{,}2 \le a \le 4$.

Die Gleichung $f_a'(x_T) = 0$ hat die einzige Nullstelle $x_T = -a$. [$-\sqrt{3}a < x_T < 0$ ist erfüllt.]

Da zusätzlich aus $-8 \le x < 0$ folgt $f_a''(x) > 0$, ist x_T lokale und zugleich globale Minimalstelle von f_a mit $f_a(x_T) = -\frac{1}{2}a$.

Der tiefste Punkt des Sprungschanzen-Profils ist $T_a\left(-a \middle| -\frac{1}{2}a\right)$.

(3)

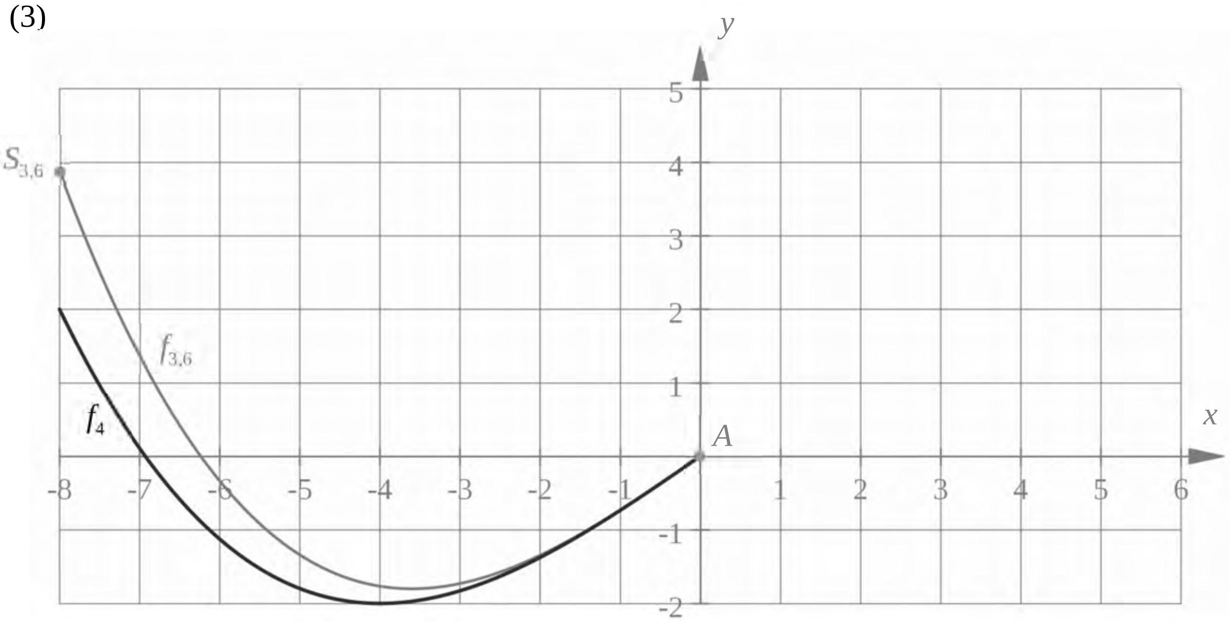


Abbildung 1

Gemeinsamkeiten der Graphen verschiedener Scharfunktionen:

Die Funktionsgraphen aller Scharfunktionen sind im Intervall $]-8;0[$ linksgekrümmt und haben den Punkt A [und in diesem Punkt die Steigung $\frac{3}{4}$] gemeinsam.

Unterschiede:

Für $b > a$ [$3{,}2 \le a < b \le 4$] verläuft der Graph von f_b im Intervall $[-8;0[$ unterhalb des Graphen von f_a.

Auch andere Eigenschaften können genannt werden.

Modelllösung b)

(1) Sei $3{,}2 \le a \le 4$.

$f_a'(-8) = -3 \Leftrightarrow a = \frac{8\sqrt{5}}{5}\ [\approx 3{,}58]$.

Der Parameterwert, für den die Sprungschanze im Punkt S_a die Steigung -3 hat, ist

$a = \frac{8\sqrt{5}}{5}$.

$f_{\frac{8\sqrt{5}}{5}}(-8) = 4$: Der Startpunkt der Sprungschanze liegt 4 Meter über dem Erdboden.

(2) Die durchschnittliche Steigung des Funktionsgraphen von f_a zwischen dem Punkt S_a und dem Punkt A ist die Steigung der Intervallsekante.

Für $a = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ ergibt sich: $\frac{y_A - y_{S_a}}{x_A - x_{S_a}} = \frac{0-4}{0-(-8)} = -\frac{1}{2}$.

Die Angabe der Firma ist korrekt.

Im Intervall $[-8;0]$ hat die Gleichung $f'_{\frac{8\sqrt{5}}{5}}(x_C) = -\frac{1}{2}$ die Lösung $x_C = -\frac{8}{3}\sqrt{3} \approx -4{,}62$.

Somit trifft die Aussage aus der Aufgabenstellung zu.

[Alternativ könnte mit Hilfe der Stetigkeit von f' oder durch Verweis auf den Mittelwertsatz argumentiert werden.]

Neben der soeben gezeigten Aussage kann man lediglich noch aus dem negativen Vorzeichen der durchschnittlichen Steigung der Sprungschanze schließen, dass der Punkt A tiefer liegt als der Punkt S_a.

Über sonstige Eigenschaften des Verlaufs der Sprungschanze wie minimale oder maximale Steigung bzw. das Krümmungsverhalten enthält diese Angabe der Firma keine Information. [Auch andere Eigenschaften können genannt werden.]

(3) Der Flächeninhalt des zwischen dem Graphen von f_a und der x-Achse eingeschlossenen Flächenstücks beträgt $\left| \int_{-a\sqrt{3}}^{0} f_a(x)\,dx \right| = \frac{9}{16}a^2\ [\text{m}^2]$.

Da die Sprungschanze 2 Meter breit ist, ergibt sich für $a = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ ein Erdvolumen von

$\frac{9}{8}a^2 = \frac{72}{5} = 14{,}4\ [\text{m}^3]$.

Modelllösung c)

(1) $f_a'(0) = \frac{3}{4}$ unabhängig von a.

(2) Aus folgenden Bedingungen lässt sich die Funktionsgleichung von h herleiten:

1. $h(0) = 0$, 2. $h'(0) = f'(0) = \frac{3}{4}$, 3. $h(5) = 0$, 4. $h'(5) = 0$.

(3) Der Graph der Funktion h kann die betragsmäßig maximale Steigung nur an einer Wendestelle oder an einer der beiden Randstellen $x_A = 0$ oder $x_D = 5$ haben.

Es gilt $h'(0) = \frac{3}{4}$ und $h'(5) = 0$.

$h''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}$, $h'\left(\frac{10}{3}\right) = -\frac{1}{4}$.

Aus dem Vergleich der Steigungsbeträge an den beiden Randstellen und der einzigen als Wendestelle infrage kommenden Stelle $x = \frac{10}{3}$ folgt, dass der Aufsprunghügel an der Stelle $x_A = 0$ am steilsten ist.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) berechnet in Abhängigkeit vom Parameter a das Intervall, in dem die durch die Funktion f_a beschriebene Profillinie der Sprungschanze unterhalb des Niveaus des Erdbodens verläuft.	4
2	(2) bestimmt in Abhängigkeit von a die Koordinaten des tiefsten Punktes T_a des Sprungschanzen-Profils.	7
3	(3) skizziert den Graphen der Funktion f_4.	4
4	(3) beschreibt Gemeinsamkeiten und Unterschiede verschiedener Funktionen der Funktionenschar.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**maximal erreichbare Punktzahl**
	Der Prüfling	
1	(1) berechnet den Wert von a, für den die Sprungschanze im Punkt S_a die Steigung -3 hat.	3
2	(1) berechnet die Höhe, in der sich bei dieser Sprungschanze der Startpunkt S_a befindet.	2
3	(2) prüft die Angabe der Firma.	3
4	(2) zeigt, dass dieser Durchschnittwert in einem Punkt C des Sprungschanzen-Profils tatsächlich als Steigung vorkommt.	3
5	(2) erklärt, warum der Durchschnittswert der Steigung nur wenig über den Verlauf der Sprungschanze aussagt.	3
6	(3) berechnet das Erdvolumen.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**maximal erreichbare Punktzahl**
	Der Prüfling	
1	(1) zeigt, dass alle Sprungschanzen im Punkt A dieselbe Steigung haben.	3
2	(2) gibt die Bedingungen an, aus denen sich die Funktionsgleichung von h herleiten lässt.	4
3	(3) bestimmt die Stelle, an der der durch den Graphen der Funktion h modellierte Aufsprunghügel die betragsmäßig größte Steigung hat.	6
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK[2]**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet in Abhängigkeit …	4			
2	(2) bestimmt in Abhängigkeit …	7			
3	(3) skizziert den Graphen …	4			
4	(3) beschreibt Gemeinsamkeiten und …	4			
sachlich richtige Alternativen: (19) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**19**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet den Wert …	3			
2	(1) berechnet die Höhe …	2			
3	(2) prüft die Angabe …	3			
4	(2) zeigt, dass dieser …	3			
5	(2) erklärt, warum der …	3			
6	(3) berechnet das Erdvolumen.	4			
sachlich richtige Alternativen: (18) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**18**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass alle …	3			
2	(2) gibt die Bedingungen …	4			
3	(3) bestimmt die Stelle …	6			
sachlich richtige Alternativen: (13) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**13**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

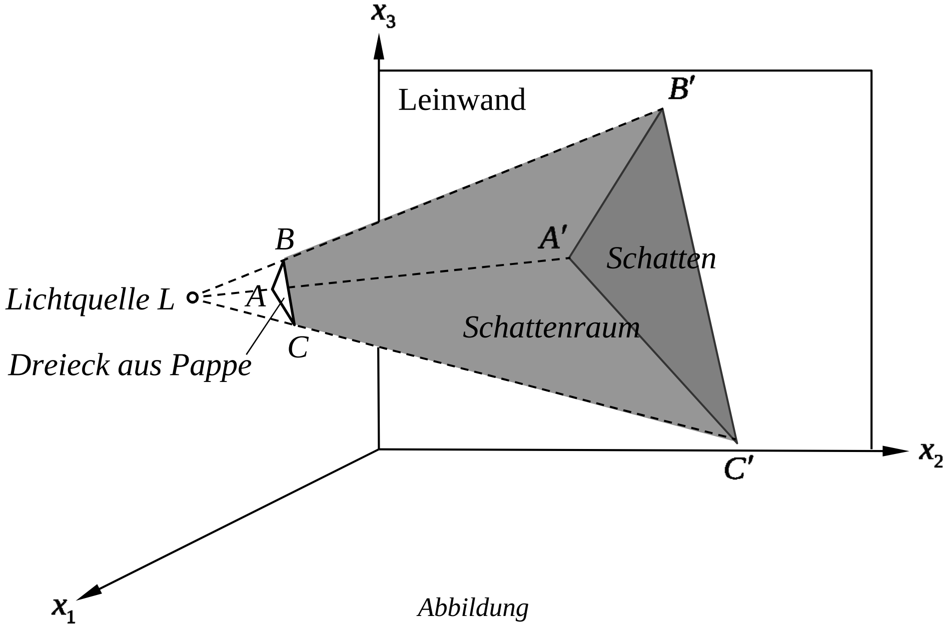
Name: ____________________

Abiturprüfung 2013

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck aus Pappe wird zwischen eine Lichtquelle und eine Leinwand gehalten, auf der es einen Schatten erzeugt (siehe *Abbildung*).



Abbildung

In dieser Aufgabe ist die Leinwand Teil der x_2x_3-Ebene, die Position der Lichtquelle ist $L(40|10|18)$, die Längeneinheit 1 dm.

Das Pappdreieck wird so zwischen Lichtquelle und Leinwand gehalten, dass seine Ecken in den Punkten $A(30|10|16)$, $B(32|11|18)$ und $C(31|12|14)$ liegen.

a) (1) *Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks ABC.*

(2) *Bestimmen Sie die Position des rechten Winkels im rechtwinkligen Dreieck ABC und berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.*

[Kontrollergebnis: $4{,}5\text{ dm}^2$] (12 Punkte)

Name: ____________________

b) *Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte A', B' und C' des Schattens, den das Pappdreieck auf die Leinwand wirft.*

[Zur Kontrolle: $A'(0|10|10)$, $B'(0|15|18)$ und $C'\left(0\left|\frac{170}{9}\right|\frac{2}{9}\right)$]

(12 Punkte)

c) *Zeigen Sie, dass das Schattendreieck $A'B'C'$ des Dreiecks ABC keinen rechten Winkel bei A' hat.*

(5 Punkte)

d) Nun soll das Volumen des Schattenraums zwischen dem Dreieck *ABC* und seinem Schatten $A'B'C'$ berechnet werden (siehe *Abbildung*). Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(1) *Berechnen Sie das Volumen der Pyramide $A'B'C'L$ mit der Grundfläche $A'B'C'$ und der Spitze L.*

Ohne Nachweis darf dabei verwendet werden, dass das Dreieck $A'B'C'$ den Flächeninhalt 60 dm^2 hat.

(2) *Geben Sie eine Gleichung der durch die Punkte A, B und C gegebenen Ebene E_{ABC} in Parameterform an.*
Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{n}$, der senkrecht auf E_{ABC} steht, und geben Sie eine Gleichung der Geraden l an, die durch den Punkt L verläuft und die Ebene E_{ABC} senkrecht schneidet.

[Zur Kontrolle: z. B. $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$]

(3) *Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts F dieser Geraden l mit der Ebene E_{ABC} und berechnen Sie den Abstand der Punkte L und F.*

[Zur Kontrolle: $F(36|14|20)$]

(4) *Ermitteln Sie nun das Volumen des Schattenraums zwischen dem Dreieck ABC und seinem Schatten $A'B'C'$ (siehe Abbildung).*

(21 Punkte)

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2013

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie ohne Alternative

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2013

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
   - Geraden- und Ebenengleichungen in Parameterform und Koordinatenform, Lagebeziehung von Geraden und Ebenen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität und Länge von Vektoren

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Die Seitenlängen des Dreiecks *ABC* betragen

$$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right| = 3\,[\text{dm}],\ |\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\right| = 3\,[\text{dm}] \text{ und } |\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix}-1\\1\\-4\end{pmatrix}\right| = 3\cdot\sqrt{2}\,[\text{dm}].$$

(2) Da die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ gleich lang sind und die Seite $\overline{BC}$ um den Faktor $\sqrt{2}$ länger ist als diese, ist das Dreieck *ABC* gleichschenklig rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei *A*. Der Flächeninhalt beträgt $\frac{1}{2}\cdot 3\,\text{dm}\cdot 3\,\text{dm} = 4{,}5\,\text{dm}^2$.

[Alternativ kann die Position des rechten Winkels mit Hilfe des Skalarprodukts nachgewiesen werden.]

Modelllösung b)

Die gesuchten Eckpunkte A', B' und C' des Schattens des Pappdreiecks auf der Leinwand sind die Schnittpunkte der Geraden *LA*, *LB* bzw. *LC* mit der x_2x_3-Ebene ($x_1 = 0$).

$LA: \vec{x} = \begin{pmatrix}40\\10\\18\end{pmatrix} + a\cdot\begin{pmatrix}-10\\0\\-2\end{pmatrix}$ schneidet für $a = 4$ die x_2x_3-Ebene im Punkt $A'(0\,|\,10\,|\,10)$.

$LB: \vec{x} = \begin{pmatrix}40\\10\\18\end{pmatrix} + b\cdot\begin{pmatrix}-8\\1\\0\end{pmatrix}$ schneidet für $b = 5$ die x_2x_3-Ebene im Punkt $B'(0\,|\,15\,|\,18)$.

$LC: \vec{x} = \begin{pmatrix}40\\10\\18\end{pmatrix} + c\cdot\begin{pmatrix}-9\\2\\-4\end{pmatrix}$ schneidet für $c = \frac{40}{9}$ die x_2x_3-Ebene im Punkt $C'\left(0\,\middle|\,\frac{170}{9}\,\middle|\,\frac{2}{9}\right)$.

Modelllösung c)

Wegen $\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{A'C'} = \begin{pmatrix}0\\5\\8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\80/9\\-88/9\end{pmatrix} = -\frac{304}{9} \neq 0$ hat das Schattendreieck $A'B'C'$ bei A' keinen rechten Winkel.

Modelllösung d)

(1) Der Abstand von L zur x_2x_3-Ebene beträgt 40 dm, also hat die Pyramide $A'B'C'L$ das Volumen $\frac{1}{3}\cdot 40\,\mathrm{dm}\cdot 60\,\mathrm{dm}^2 = 800\,\mathrm{dm}^3$.

(2) $E_{ABC}: \vec{x} = \begin{pmatrix}30\\10\\16\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},\ r,s\in\mathbb{R}$.

Der Vektor $\vec{n}$ ist genau dann ein Normalenvektor der Ebene E_{ABC}, wenn gilt:

$$\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}=0 \wedge \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{rcr}2n_1+n_2+2n_3&=&0\\ n_1+2n_2-2n_3&=&0\end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{rcr}n_1&=&-n_2\\ n_2&=&2n_3\end{array}\right|.$$

$\vec{n} = \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$ erfüllt diese Bedingungen.

Eine Gleichung der Lotgeraden ist: $l: \vec{x} = \begin{pmatrix}40\\10\\18\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix},\ t\in\mathbb{R}$.

(3) $$\begin{pmatrix}30\\10\\16\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}40\\10\\18\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{rcr}2r+s+2t&=&10\\ r+2s-2t&=&0\\ 2r-2s-t&=&2\end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{rcr}2r+s+2t&=&10\\ 3r-3t&=&2\\ 6r+3t&=&22\end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{rcr}2r+s+2t&=&10\\ 3r-3t&=&2\\ 9t&=&18\end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{rcr}r&=&8/3\\ s&=&2/3\\ t&=&2\end{array}\right|$$

Es ergibt sich: $\vec{x}_F = \begin{pmatrix}40\\10\\18\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}36\\14\\20\end{pmatrix},\ F(36\,|\,14\,|\,20)$.

Der Abstand der Punkte L und F ist $\sqrt{(40-36)^2+(10-14)^2+(18-20)^2} = 6$ [dm].

(4) Das gesuchte Volumen des Schattenraums ist die Differenz der Volumina der Pyramiden $A'B'C'L$ und $ABCL$. Letzteres beträgt $\frac{1}{3}\cdot 4{,}5\,\mathrm{dm}^2\cdot 6\,\mathrm{dm} = 9\,\mathrm{dm}^3$.

Der Schattenraum hat somit das Volumen $800\,\mathrm{dm}^3 - 9\,\mathrm{dm}^3 = 791\,\mathrm{dm}^3$.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) berechnet die Seitenlängen des Dreiecks *ABC*.	6
2	(2) bestimmt die Position des rechten Winkels im rechtwinkligen Dreieck *ABC*.	3
3	(2) berechnet den Flächeninhalt des Dreiecks *ABC*.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	ermittelt einen Ansatz zur Bestimmung der gesuchten Eckpunkte des Schattens.	3
2	gibt Gleichungen der Geraden *LA*, *LB* und *LC* an.	5
3	berechnet die Koordinaten der gesuchten Eckpunkte des Schattens.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	zeigt, dass das Schattendreieck $A'B'C'$ des Dreiecks *ABC* keinen rechten Winkel bei A' hat.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) berechnet das Volumen der Pyramide $A'B'C'L$.	3
2	(2) gibt eine Gleichung der Ebene E_{ABC} in Parameterform an.	3
3	(2) bestimmt einen Vektor $\vec{n}$, der senkrecht auf E_{ABC} steht.	3
4	(2) gibt eine Gleichung der Geraden l an.	2
5	(3) bestimmt die Koordinaten des Punktes F.	5
6	(3) berechnet den Abstand der Punkte L und F.	2
7	(4) berechnet die Volumina der Pyramide $ABCL$ und des Schattenraums.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die Seitenlängen …	6			
2	(2) bestimmt die Position …	3			
3	(2) berechnet den Flächeninhalt …	3			
sachlich richtige Alternativen: (12) ………………………………………………………………………. ……………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**12**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt einen Ansatz …	3			
2	gibt Gleichungen der …	5			
3	berechnet die Koordinaten …	4			
sachlich richtige Alternativen: (12) ………………………………………………………………………. ……………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**12**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	zeigt, dass das …	5			
sachlich richtige Alternativen: (5) ………………………………………………………………………. ……………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**5**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet das Volumen …	3			
2	(2) gibt eine Gleichung …	3			
3	(2) bestimmt einen Vektor …	3			
4	(2) gibt eine Gleichung …	2			
5	(3) bestimmt die Koordinaten …	5			
6	(3) berechnet den Abstand …	2			
7	(4) berechnet die Volumina …	3			
sachlich richtige Alternativen: (21) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe d)	**21**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2013

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Von einem Forstbetrieb werden auf verschiedenen Waldflächen Tannen gezogen.[1] Entsprechend ihrer Höhe werden die Tannen in drei Größenklassen eingeteilt: Tannen, die weniger als einen Meter groß sind, gehören zur Größenklasse K (klein); Tannen, die mindestens einen Meter, aber weniger als zwei Meter groß sind, gehören zur Größenklasse M (mittel); Tannen, die mindestens zwei Meter groß sind, gehören zur Größenklasse G (groß).

Jeweils zu Beginn eines festen Zeitraums (Wachstumsperiode), auf den sich im Folgenden die Übergänge zwischen den drei Größenklassen beziehen, wird eine Bestandsaufnahme durchgeführt. Die Übergangsquoten berücksichtigen, dass abgestorbene, kranke oder beschädigte Bäume im Laufe jeder Wachstumsperiode aus dem Bestand entfernt werden.

a) Auf einer der Waldflächen erreichen von den Tannen der Größenklasse K innerhalb einer Wachstumsperiode 50 % die Größenklasse M und 10 % die Größenklasse G, während 30 % in der Größenklasse K verbleiben. Von den Tannen der Größenklasse M erreichen innerhalb einer Wachstumsperiode 55 % die Größenklasse G, während 40 % in der Größenklasse M verbleiben. Von den Tannen der Größenklasse G sind am Ende einer Wachstumsperiode noch 98 % in der Größenklasse G.

Stellen Sie dieses Wachstumsverhalten durch ein Übergangsdiagramm dar und bestimmen Sie eine Übergangsmatrix, die dieses Wachstumsverhalten beschreibt.

(10 Punkte)

[1] Dort wachsen nur Bäume, die von dem Forstbetrieb angepflanzt wurden.

Name: ____________________

Auf einer anderen Waldfläche wird eine andere Art von Tannen gezogen. Eine Zählung ergab die folgende Übergangsmatrix ***A*** für das Übergangsverhalten zwischen den oben genannten Größenklassen innerhalb einer Wachstumsperiode:

$$\begin{array}{cc} & \textit{von:}\quad \mathrm{K} \qquad \mathrm{M} \qquad \mathrm{G} \\ \textit{nach:} & \\ \mathrm{K} & \\ \mathrm{M} & \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}55 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}95 \end{pmatrix} \\ \mathrm{G} & \end{array}$$

In Teilaufgabe b) wird angenommen, dass diese Übergangsquoten auch für die vorangegangenen und folgenden Wachstumsperioden gelten.

b) Die Bestandsaufnahme zu Beginn einer bestimmten Wachstumsperiode ergibt 450 Tannen der Größenklasse K, 4230 Tannen der Größenklasse M und 5320 Tannen der Größenklasse G.

(1) *Bestimmen Sie die Anzahl der Tannen in den einzelnen Größenklassen nach zwei Wachstumsperioden.*

(2) *Bestimmen Sie die Anzahl der Tannen in den einzelnen Größenklassen zwei Wachstumsperioden vor dem Zeitpunkt der Bestandsaufnahme.*

(3) *Zeigen Sie ausgehend von einem beliebigen Bestandsvektor* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, *dass der Gesamtbestand an Tannen am Ende einer Wachstumsperiode 95 % des Bestandes zu Beginn dieser Wachstumsperiode beträgt, und berechnen Sie, nach wie vielen Wachstumsperioden erstmals weniger als 60 % des ursprünglichen Gesamtbestandes an Tannen vorhanden sind.*

(4) *Ermitteln Sie ausgehend vom oben genannten Anfangsbestand (K: 450, M: 4230, G: 5320), nach wie vielen Wachstumsperioden erstmals mehr als 90 % der vorhandenen Tannen zur Größenklasse G gehören.*

(21 Punkte)

Name: ____________________

Nun wird davon ausgegangen, dass jeweils am Ende einer Wachstumsperiode, innerhalb derer sich der Bestand zunächst gemäß der Übergangsmatrix ***A*** entwickelt hat, 56 % des dann vorhandenen Bestandes der Größenklasse G gefällt und danach genau so viele Tannen in der Größenklasse K neu gesetzt werden, wie zuvor in der Größenklasse G gefällt wurden.

c) (1) *Bestimmen Sie ausgehend von einem beliebigen Bestandsvektor* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ *zu Beginn einer Wachstumsperiode, wie viele Tannen in den einzelnen Größenklassen am Ende der Wachstumsperiode* ***nach*** *dem Fällen und* ***vor*** *dem Wiederaufforsten* ***vorhanden*** *sind.*

[Kontrollergebnis: $\begin{pmatrix} 0{,}25x_1 \\ 0{,}7x_1 + 0{,}55x_2 \\ 0{,}176x_2 + 0{,}418x_3 \end{pmatrix}$]

(2) Gesucht ist eine Übergangsmatrix ***C***, die den Übergang zwischen den Größenklassen K, M und G innerhalb einer Wachstumsperiode unter Berücksichtigung der abschließenden Fäll- und Wiederaufforstungsarbeiten beschreibt.

Zeigen Sie, dass $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}224 & 0{,}532 \\ 0{,}7 & 0{,}55 & 0 \\ 0 & 0{,}176 & 0{,}418 \end{pmatrix}$ *gilt.*

(3) *Begründen Sie, dass nach der Wiederaufforstung am Ende einer Wachstumsperiode der Gesamtbestand an Tannen 95 % des Bestandes zu Beginn dieser Wachstumsperiode beträgt.*

(4) *Bestimmen Sie bezogen auf einen beliebigen Bestandsvektor* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ *zu Beginn einer Wachstumsperiode, wie viele Tannen der Größenklasse K nach den Fällarbeiten am Ende der Wachstumsperiode* ***insgesamt*** *neu gesetzt werden müssten, damit die Gesamtzahl der Tannen am Ende der Wachstumsperiode gleich der Anzahl der Tannen zu Beginn dieser Wachstumsperiode ist.*

(19 Punkte)

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2013

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie mit Alternative 2 (Übergangsmatrizen)

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2013

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

   Alternative 2:
   - Übergangsmatrizen, Matrizenmultiplikation als Verkettung von Übergängen

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

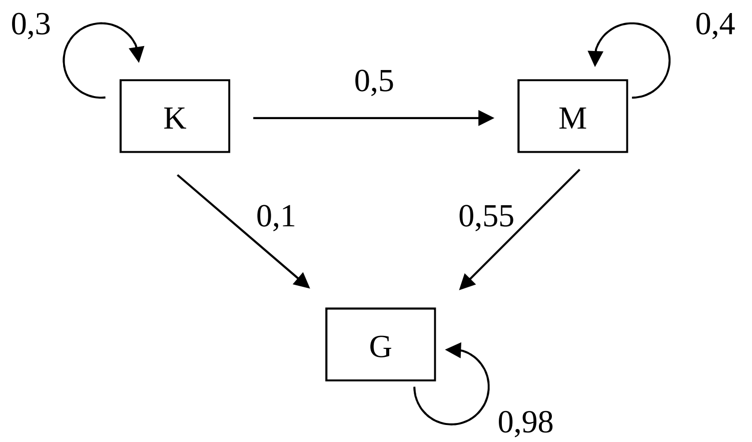
- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)



$$\begin{array}{ccc} & & \textit{von:}\ \ \mathrm{K} \qquad \mathrm{M} \qquad \mathrm{G} \\ \textit{nach:} & & \\ \mathrm{K} & & \\ \mathrm{M} & \boldsymbol{W} = & \begin{pmatrix} 0,3 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,4 & 0 \\ 0,1 & 0,55 & 0,98 \end{pmatrix} \\ \mathrm{G} & & \end{array}$$

Modelllösung b)

(1) $A^2 \cdot \begin{pmatrix} 450 \\ 4230 \\ 5320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0,55 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,95 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 450 \\ 4230 \\ 5320 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28,125 \\ 1531,575 \\ 7465,3 \end{pmatrix}.$

Nach zwei Wachstumsperioden sind etwa 28 Tannen der Größenklasse K, 1532 Tannen der Größenklasse M und 7465 Tannen der Größenklasse G vorhanden.

(2) Die Gleichung $A^2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 450 \\ 4230 \\ 5320 \end{pmatrix}$ ist zu lösen.

Der gesuchte Bestandsvektor ist daher $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-2} \cdot \begin{pmatrix} 450 \\ 4230 \\ 5320 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 7200 \\ 655 \\ 3226 \end{pmatrix}$; also waren zwei Wachstumsperioden zuvor etwa 7200 Tannen der Größenklasse K, 655 Tannen der Größenklasse M und 3226 Tannen der Größenklasse G vorhanden.

(3) Nach einer Wachstumsperiode folgt aus $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25x_1 \\ 0,7x_1 + 0,55x_2 \\ 0,4x_2 + 0,95x_3 \end{pmatrix}$ ein Gesamtbestand

von $(0,25+0,7) \cdot x_1 + (0,55+0,4) \cdot x_2 + 0,95 \cdot x_3 = 0,95 \cdot (x_1 + x_2 + x_3)$.

Somit beträgt der Gesamtbestand unter den gegebenen Bedingungen nach einer Wachstumsperiode 95 % des ursprünglichen Bestandes.
[Auch die Spaltensummen der Matrix $\boldsymbol{A}$ können betrachtet werden.]

Sei n eine natürliche Zahl. Dann gilt: $0,95^n < 0,6 \Leftrightarrow n \geq 10$.
Nach 10 Wachstumsperioden sind erstmals weniger als 60 % des ursprünglichen Gesamtbestandes an Tannen vorhanden.
[Auch die Lösung anhand eines konkreten Beispiels wird akzeptiert.]

(4) Aus $A^3 \cdot \begin{pmatrix} 450 \\ 4230 \\ 5320 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 7 \\ 862 \\ 7705 \end{pmatrix}$ und $A^4 \cdot \begin{pmatrix} 450 \\ 4230 \\ 5320 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 \\ 479 \\ 7664 \end{pmatrix}$ ergibt sich als Anteil der Tannen der Größenklasse G am Gesamtbestand näherungsweise:

$\frac{7705}{7+862+7705} \approx 0,899$ bzw. $\frac{7664}{2+479+7664} \approx 0,941$.

Daher gehören nach 4 Wachstumsperioden erstmals mehr als 90 % der vorhandenen Tannen zur Größenklasse G.

Modelllösung c)

(1) Nach einer Wachstumsperiode ist der Bestandsvektor

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0 \\ 0,7 & 0,55 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25x_1 \\ 0,7x_1 + 0,55x_2 \\ 0,4x_2 + 0,95x_3 \end{pmatrix}.$$

Da 56 % des Bestandes der Größenklasse G am Ende der Wachstumsperiode gefällt werden, ist die verbleibende Anzahl von Tannen dieser Größenklasse:
$0,44 \cdot (0,4x_2 + 0,95x_3) = 0,176x_2 + 0,418x_3$.

Damit ergibt sich als Bestandsvektor nach dem Fällen: $\begin{pmatrix} 0,25x_1 \\ 0,7x_1 + 0,55x_2 \\ 0,176x_2 + 0,418x_3 \end{pmatrix}$.

(2) Die Anzahl der Tannen, die in der Größenklasse K neu gesetzt werden, beträgt $0{,}56\cdot\left(0{,}4x_2+0{,}95x_3\right)=0{,}224x_2+0{,}532x_3$, so dass sich als Bestandsvektor nach dem Wiederaufforsten

$$\begin{pmatrix}0{,}25x_1+0{,}224x_2+0{,}532x_3\\ 0{,}7x_1+0{,}55x_2\\ 0{,}176x_2+0{,}418x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}25 & 0{,}224 & 0{,}532\\ 0{,}7 & 0{,}55 & 0\\ 0 & 0{,}176 & 0{,}418\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

und als Übergangsmatrix $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0{,}25 & 0{,}224 & 0{,}532\\ 0{,}7 & 0{,}55 & 0\\ 0 & 0{,}176 & 0{,}418\end{pmatrix}$ ergibt.

(3) Wenn in der Größenklasse K so viele Tannen neu gesetzt werden, wie zuvor in der Größenklasse G gefällt wurden, beträgt der Gesamtbestand am Ende einer Wachstumsperiode wieder 95 % des Anfangsbestandes, weil sich an der Gesamtsituation gegenüber Aufgabenteil b) (3) nichts geändert hat.

(4) Damit der Bestand zahlenmäßig erhalten bleibt, müssten zusätzlich zu den $0{,}56\cdot\left(0{,}4x_2+0{,}95x_3\right)=0{,}224x_2+0{,}532x_3$ Tannen aus (2) weitere $0{,}05\cdot\left(x_1+x_2+x_3\right)$ Tannen gesetzt werden, insgesamt also

$0{,}224x_2+0{,}532x_3+0{,}05\cdot\left(x_1+x_2+x_3\right)=0{,}05x_1+0{,}274x_2+0{,}582x_3$ Tannen.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	stellt das Wachstumsverhalten durch ein Übergangsdiagramm dar.	5
2	bestimmt eine Übergangsmatrix.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) bestimmt die Anzahl der Tannen in den einzelnen Größenklassen nach zwei Wachstumsperioden.	4
2	(2) bestimmt die Anzahl der Tannen in den einzelnen Größenklassen zwei Wachstumsperioden vor dem Zeitpunkt der Bestandsaufnahme.	5
3	(3) zeigt, dass der Gesamtbestand an Tannen nach einer Wachstumsperiode 95 % des ursprünglichen Bestandes beträgt.	4
4	(3) berechnet, nach wie vielen Wachstumsperioden erstmals weniger als 60 % des ursprünglichen Gesamtbestandes vorhanden sind.	4
5	(4) ermittelt, nach wie vielen Wachstumsperioden erstmals mehr als 90 % der vorhandenen Tannen zur Größenklasse G gehören.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) bestimmt, wie viele Tannen in den einzelnen Größenklassen am Ende der Wachstumsperiode nach dem Fällen und vor dem Aufforsten vorhanden sind.	4
2	(2) bestimmt, wie viele Tannen neu gepflanzt werden.	3
3	(2) zeigt, dass die Matrix $\boldsymbol{C}$ die angegebene Form hat.	4
4	(3) begründet, dass der Gesamtbestand am Ende einer Wachstumsperiode 95 % des Anfangsbestandes beträgt.	3
5	(4) bestimmt, wie viele Tannen insgesamt neu gesetzt werden müssten, damit die Anzahl der Tannen am Ende einer Wachstumsperiode gleich der Anzahl der Tannen zu Beginn dieser Wachstumsperiode ist.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	stellt das Wachstumsverhalten …	5			
2	bestimmt eine Übergangsmatrix.	5			
sachlich richtige Alternativen: (10) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**10**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die Anzahl …	4			
2	(2) bestimmt die Anzahl …	5			
3	(3) zeigt, dass der …	4			
4	(3) berechnet, nach wie …	4			
5	(4) ermittelt, nach wie …	4			
sachlich richtige Alternativen: (21) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**21**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt, wie viele …	4			
2	(2) bestimmt, wie viele …	3			
3	(2) zeigt, dass die …	4			
4	(3) begründet, dass der …	3			
5	(4) bestimmt, wie viele …	5			
sachlich richtige Alternativen: (19) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**19**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2013

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Laut ADFC (Allgemeiner Deutscher Fahrrad Club) nutzen zwei Drittel aller Deutschen ihr Fahrrad privat oder auf dem Weg zur Arbeit mindestens einmal im Monat.
In der gesamten Aufgabe sollen alle genannten Anteile als Wahrscheinlichkeiten verwendet werden.

a) In einer repräsentativen Umfrage werden 100 zufällig ausgewählte Deutsche befragt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

E_1: *Unter den Befragten nutzen genau 70 mindestens einmal im Monat ihr Fahrrad.*

E_2: *Unter den Befragten nutzen mindestens 70 mindestens einmal im Monat ihr Fahrrad.*

E_3: *Unter den Befragten nutzen mindestens 60 und höchstens 70 mindestens einmal im Monat ihr Fahrrad.*

(8 Punkte)

b) Bei Kontrollen der Polizei werden Fahrräder, die Mängel aufweisen, beanstandet. Bei diesen Prüfungen hat durchschnittlich ein Sechstel der Fahrräder Mängel.

Bestimmen Sie die Anzahl n der Fahrräder, die von der Polizei kontrolliert werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens ein Fahrrad mit Mängeln entdeckt wird.

(6 Punkte)

Name: ____________________

c) Die Nutzung des Fahrrads als **regelmäßiges Verkehrsmittel auf dem Weg zur Arbeit** hängt unter anderem von der Ortsgröße ab.

Ortsgröße	Anteil der Personen in der Bevölkerung, die in einem Ort der angegebenen Ortsgröße leben[1]	**davon** regelmäßige Nutzung des Fahrrads[2]
unter 20 000 Einwohner	40,4 %	37 %
20 000 bis 100 000 Einwohner	29,0 %	42 %
über 100 000 Einwohner	30,6 %	43 %

(1) *Stellen Sie den Sachverhalt in einem Baumdiagramm dar und berechnen Sie alle resultierenden Pfadwahrscheinlichkeiten (1. Stufe: Ortsgröße).*

(2) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine aus der Bevölkerung zufällig ausgewählte Person regelmäßig ein Fahrrad als Verkehrsmittel nutzt.*

(13 Punkte)

d) Studien zeigen, dass Fahrradfahrer, die keinen Helm tragen, ein viermal so hohes Risiko für schwere Verletzungen eingehen wie Fahrradfahrer, die einen Helm tragen. Unabhängig davon reduziert sich das Unfallrisiko bei 20- bis 40-jährigen Fahrradfahrern auf 55 % des Risikos bei 10- bis 15-jährigen Kindern.

Bestimmen Sie, um wie viel Prozent bei einem 10- bis 15-jährigen Kind, das keinen Helm trägt, das Risiko für eine schwere Verletzung höher ist als bei einem 20- bis 40-jährigen Fahrradfahrer, der einen Helm trägt.

(5 Punkte)

[1] Quelle: Laufende Raumbeobachtung des Bundesamtes für Bauwesen und Raumordnung (2011)
[2] Fahrradmonitor des ADFC

Name: ____________________

e) Die Einsatzleitung der Polizei vermutet, dass wegen der häufigen Kontrollen mittlerweile weniger als 10 % der Fahrräder Mängel aufweisen. Sie möchte diese Vermutung überprüfen und, falls sie als richtig angenommen wird, die Kontrollen nur noch jährlich statt monatlich durchführen. An einem Morgen werden 200 Fahrräder kontrolliert.

(1) Auf Grundlage dieser Stichprobe soll ein aus Sicht der Polizei sinnvoller Test entworfen werden, um zu überprüfen, ob die Mängelquote wirklich unter 10 % gesunken ist. *Ermitteln Sie aus Sicht der Polizei geeignete Hypothesen und eine dazu passende Entscheidungsregel mit einem Signifikanzniveau von* $\alpha = 0{,}05$ *und begründen Sie die Wahl der Hypothesen.*

(2) *Geben Sie eine begründete Entscheidung an, wenn bei 16 der 200 kontrollierten Fahrräder Mängel festgestellt werden.*

(3) *Beschreiben Sie den Fehler zweiter Art im Sachzusammenhang.*

(18 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Name: ______________________

Tabelle 1: σ-Regeln für Binomialverteilungen

Eine mit den Parametern n und p binomialverteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.
Wenn die LAPLACE-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist, gelten die σ-Regeln:

$P(\mu - 1{,}64\sigma \le X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}90$	$P(\mu - 1{,}64\sigma \le X) \approx 0{,}95$
	$P(X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}95$
$P(\mu - 1{,}96\sigma \le X \le \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}95$	$P(\mu - 1{,}96\sigma \le X) \approx 0{,}975$
	$P(X \le \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}975$
$P(\mu - 2{,}58\sigma \le X \le \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}99$	$P(\mu - 2{,}58\sigma \le X) \approx 0{,}995$
	$P(X \le \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}995$

$P(\mu - 1\sigma \le X \le \mu + 1\sigma) \approx 0{,}683$	$P(\mu - 1\sigma \le X) \approx 0{,}841$
	$P(X \le \mu + 1\sigma) \approx 0{,}841$
$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) \approx 0{,}955$	$P(\mu - 2\sigma \le X) \approx 0{,}977$
	$P(X \le \mu + 2\sigma) \approx 0{,}977$
$P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$	$P(\mu - 3\sigma \le X) \approx 0{,}999$
	$P(X \le \mu + 3\sigma) \approx 0{,}999$

Name: ____________________

Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 10 und *n* = 20

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

		p										
n	*k*	0,02	0,05	0,08	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,5		*n*
10	0	0,8171	0,5987	0,4344	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010	9	10
	1	0,9838	0,9139	0,8121	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107	8	
	2	0,9991	0,9885	0,9599	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547	7	
	3		0,9990	0,9942	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719	6	
	4		0,9999	0,9994	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770	5	
	5				0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230	4	
	6					0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,8281	3	
	7						0,9999	0,9996	0,9984	0,9453	2	
	8	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000							0,9999	0,9893	1	
	9									0,9990	0	
20	0	0,6676	0,3585	0,1887	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	19	20
	1	0,9401	0,7358	0,5169	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000	18	
	2	0,9929	0,9245	0,7879	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002	17	
	3	0,9994	0,9841	0,9294	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013	16	
	4		0,9974	0,9817	0,9568	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059	15	
	5		0,9997	0,9962	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207	14	
	6			0,9994	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577	13	
	7			0,9999	0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316	12	
	8				0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517	11	
	9					0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,4119	10	
	10						0,9994	0,9961	0,9829	0,5881	9	
	11						0,9999	0,9991	0,9949	0,7483	8	
	12							0,9998	0,9987	0,8684	7	
	13								0,9997	0,9423	6	
	14									0,9793	5	
	15	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000								0,9941	4	
	16									0,9987	3	
	17									0,9998	2	
n		0,98	0,95	0,92	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,5	*k*	*n*
		p										

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 - \text{abgelesener Wert}$

Name: ______________________

Tabelle 3: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 50

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

						p							
n	*k*	0,02	0,05	0,1	0,125	0,15	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		*n*
	0	0,3642	0,0769	0,0052	0,0013	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	49	
	1	0,7358	0,2794	0,0338	0,0103	0,0029	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	48	
	2	0,9216	0,5405	0,1117	0,0418	0,0142	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	47	
	3	0,9822	0,7604	0,2503	0,1138	0,0460	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	46	
	4	0,9968	0,8964	0,4312	0,2346	0,1121	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	45	
	5	0,9995	0,9622	0,6161	0,3935	0,2194	0,0480	0,0070	0,0007	0,0000	0,0000	44	
	6	0,9999	0,9882	0,7702	0,5637	0,3613	0,1034	0,0194	0,0025	0,0000	0,0000	43	
	7		0,9968	0,8779	0,7165	0,5188	0,1904	0,0453	0,0073	0,0001	0,0000	42	
	8		0,9992	0,9421	0,8339	0,6681	0,3073	0,0916	0,0183	0,0002	0,0000	41	
	9		0,9998	0,9755	0,9121	0,7911	0,4437	0,1637	0,0402	0,0008	0,0000	40	
	10			0,9906	0,9579	0,8801	0,5836	0,2622	0,0789	0,0022	0,0000	39	
	11			0,9968	0,9817	0,9372	0,7107	0,3816	0,1390	0,0057	0,0000	38	
	12			0,9990	0,9928	0,9699	0,8139	0,5110	0,2229	0,0133	0,0002	37	
	13			0,9997	0,9974	0,9868	0,8894	0,6370	0,3279	0,0280	0,0005	36	
	14			0,9999	0,9991	0,9947	0,9393	0,7481	0,4468	0,0540	0,0013	35	
	15				0,9997	0,9981	0,9692	0,8369	0,5692	0,0955	0,0033	34	
	16				0,9999	0,9993	0,9856	0,9017	0,6839	0,1561	0,0077	33	
	17					0,9998	0,9937	0,9449	0,7822	0,2369	0,0164	32	
50	18					0,9999	0,9975	0,9713	0,8594	0,3356	0,0325	31	50
	19						0,9991	0,9861	0,9152	0,4465	0,0595	30	
	20						0,9997	0,9937	0,9522	0,5610	0,1013	29	
	21						0,9999	0,9974	0,9749	0,6701	0,1611	28	
	22							0,9990	0,9877	0,7660	0,2399	27	
	23							0,9996	0,9944	0,8438	0,3359	26	
	24							0,9999	0,9976	0,9022	0,4439	25	
	25								0,9991	0,9427	0,5561	24	
	26								0,9997	0,9686	0,6641	23	
	27								0,9999	0,9840	0,7601	22	
	28									0,9924	0,8389	21	
	29									0,9966	0,8987	20	
	30									0,9986	0,9405	19	
	31									0,9995	0,9675	18	
	32									0,9998	0,9836	17	
	33									0,9999	0,9923	16	
	34										0,9967	15	
	35			Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000							0,9987	14	
	36										0,9995	13	
	37										0,9998	12	
n		0,98	0,95	0,9	0,875	0,85	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	*k*	*n*
						p							

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ______________________

Tabelle 4: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 100

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

								p								
n	k	0,02	0,03	0,05	0,1	0,15	1/6	0,2	0,25	0,27	0,3	1/3	0,4	0,5		n
	0	0,1326	0,0476	0,0059	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	99	
	1	0,4033	0,1946	0,0371	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	98	
	2	0,6767	0,4198	0,1183	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	97	
	3	0,8590	0,6472	0,2578	0,0078	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	96	
	4	0,9492	0,8179	0,4360	0,0237	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	95	
	5	0,9845	0,9192	0,6160	0,0576	0,0016	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	94	
	6	0,9959	0,9688	0,7660	0,1172	0,0047	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	93	
	7	0,9991	0,9894	0,8720	0,2061	0,0122	0,0038	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	92	
	8	0,9998	0,9968	0,9369	0,3209	0,0275	0,0095	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	91	
	9		0,9991	0,9718	0,4513	0,0551	0,0213	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	90	
	10		0,9998	0,9885	0,5832	0,0994	0,0427	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	89	
	11			0,9957	0,7030	0,1635	0,0777	0,0126	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	88	
	12			0,9985	0,8018	0,2473	0,1297	0,0253	0,0010	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	87	
	13			0,9995	0,8761	0,3474	0,2000	0,0469	0,0025	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	86	
	14			0,9999	0,9274	0,4572	0,2874	0,0804	0,0054	0,0014	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	85	
	15				0,9601	0,5683	0,3877	0,1285	0,0111	0,0033	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	84	
	16				0,9794	0,6725	0,4942	0,1923	0,0211	0,0068	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000	83	
	17				0,9900	0,7633	0,5994	0,2712	0,0376	0,0133	0,0022	0,0002	0,0000	0,0000	82	
	18				0,9954	0,8372	0,6965	0,3621	0,0630	0,0243	0,0045	0,0005	0,0000	0,0000	81	
	19				0,9980	0,8935	0,7803	0,4602	0,0995	0,0420	0,0089	0,0011	0,0000	0,0000	80	
	20				0,9992	0,9337	0,8481	0,5595	0,1488	0,0684	0,0165	0,0024	0,0000	0,0000	79	
	21				0,9997	0,9607	0,8998	0,6540	0,2114	0,1057	0,0288	0,0048	0,0000	0,0000	78	
	22				0,9999	0,9779	0,9369	0,7389	0,2864	0,1552	0,0479	0,0091	0,0001	0,0000	77	
	23					0,9881	0,9621	0,8109	0,3711	0,2172	0,0755	0,0164	0,0003	0,0000	76	
	24					0,9939	0,9783	0,8686	0,4617	0,2909	0,1136	0,0281	0,0006	0,0000	75	
	25					0,9970	0,9881	0,9125	0,5535	0,3737	0,1631	0,0458	0,0012	0,0000	74	
	26					0,9986	0,9938	0,9442	0,6417	0,4620	0,2244	0,0715	0,0024	0,0000	73	
	27					0,9994	0,9969	0,9658	0,7224	0,5516	0,2964	0,1066	0,0046	0,0000	72	
	28					0,9997	0,9985	0,9800	0,7925	0,6379	0,3768	0,1524	0,0084	0,0000	71	
	29					0,9999	0,9993	0,9888	0,8505	0,7172	0,4623	0,2093	0,0148	0,0000	70	
	30						0,9997	0,9939	0,8962	0,7866	0,5491	0,2766	0,0248	0,0000	69	
	31						0,9999	0,9969	0,9307	0,8446	0,6331	0,3525	0,0398	0,0001	68	
	32							0,9984	0,9554	0,8909	0,7107	0,4344	0,0615	0,0002	67	
	33							0,9993	0,9724	0,9261	0,7793	0,5188	0,0913	0,0004	66	
100	34							0,9997	0,9836	0,9518	0,8371	0,6019	0,1303	0,0009	65	100
	35							0,9999	0,9906	0,9697	0,8839	0,6803	0,1795	0,0018	64	
	36							0,9999	0,9948	0,9817	0,9201	0,7511	0,2386	0,0033	63	
	37								0,9973	0,9893	0,9470	0,8123	0,3068	0,0060	62	
	38								0,9986	0,9940	0,9660	0,8630	0,3822	0,0105	61	
	39								0,9993	0,9968	0,9790	0,9034	0,4621	0,0176	60	
	40								0,9997	0,9983	0,9875	0,9341	0,5433	0,0284	59	
	41								0,9999	0,9992	0,9928	0,9566	0,6225	0,0443	58	
	42								0,9999	0,9996	0,9960	0,9724	0,6967	0,0666	57	
	43									0,9998	0,9979	0,9831	0,7635	0,0967	56	
	44									0,9999	0,9989	0,9900	0,8211	0,1356	55	
	45										0,9995	0,9943	0,8689	0,1841	54	
	46										0,9997	0,9969	0,9070	0,2421	53	
	47										0,9999	0,9983	0,9362	0,3086	52	
	48										0,9999	0,9991	0,9577	0,3822	51	
	49											0,9996	0,9729	0,4602	50	
	50											0,9998	0,9832	0,5398	49	
	51											0,9999	0,9900	0,6178	48	
	52												0,9942	0,6914	47	
	53												0,9968	0,7579	46	
	54												0,9983	0,8159	45	
	55												0,9991	0,8644	44	
	56												0,9996	0,9033	43	
	57												0,9998	0,9334	42	
	58												0,9999	0,9557	41	
	59													0,9716	40	
	60													0,9824	39	
	61													0,9895	38	
	62													0,9940	37	
	63													0,9967	36	
	64													0,9982	35	
	65													0,9991	34	
	66													0,9996	33	
	67													0,9998	32	
	68													0,9999	31	
n		0,98	0,97	0,95	0,9	0,85	5/6	0,8	0,75	0,73	0,7	2/3	0,6	0,5	k	n
								p								

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ______________________

Tabelle 5: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 200

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

		p									
n	*k*	0,02	0,04	0,05	0,1	0,15	1/6	0,2	0,25		*n*
	0	0,0176	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	199	
	1	0,0894	0,0027	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	198	
	2	0,2351	0,0125	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	197	
	3	0,4315	0,0395	0,0090	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	196	
	4	0,6288	0,0950	0,0264	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	195	
	5	0,7867	0,1856	0,0623	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	194	
	6	0,8914	0,3084	0,1237	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	193	
	7	0,9507	0,4501	0,2133	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	192	
	8	0,9798	0,5926	0,3270	0,0014	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	191	
	9	0,9925	0,7192	0,4547	0,0035	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	190	
	10	0,9975	0,8200	0,5831	0,0081	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	189	
	11	0,9992	0,8925	0,6998	0,0168	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	188	
	12	0,9998	0,9401	0,7965	0,0320	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	187	
	13	0,9999	0,9688	0,8701	0,0566	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	186	
	14		0,9848	0,9219	0,0929	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	185	
	15		0,9930	0,9556	0,1431	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000	184	
	16		0,9970	0,9762	0,2075	0,0021	0,0003	0,0000	0,0000	183	
	17		0,9988	0,9879	0,2849	0,0043	0,0006	0,0000	0,0000	182	
	18		0,9995	0,9942	0,3724	0,0082	0,0013	0,0000	0,0000	181	
	19		0,9998	0,9973	0,4655	0,0149	0,0027	0,0000	0,0000	180	
	20		0,9999	0,9988	0,5592	0,0255	0,0052	0,0001	0,0000	179	
	21			0,9995	0,6484	0,0415	0,0094	0,0002	0,0000	178	
	22			0,9998	0,7290	0,0645	0,0163	0,0005	0,0000	177	
	23			0,9999	0,7983	0,0959	0,0269	0,0010	0,0000	176	
	24				0,8551	0,1368	0,0426	0,0020	0,0000	175	
	25				0,8995	0,1876	0,0648	0,0036	0,0000	174	
	26				0,9328	0,2480	0,0945	0,0064	0,0000	173	
	27				0,9566	0,3166	0,1329	0,0110	0,0000	172	
	28				0,9729	0,3914	0,1803	0,0179	0,0001	171	
	29				0,9837	0,4697	0,2366	0,0283	0,0002	170	
	30				0,9905	0,5485	0,3007	0,0430	0,0004	169	
	31				0,9946	0,6247	0,3711	0,0632	0,0008	168	
	32				0,9971	0,6958	0,4454	0,0899	0,0014	167	
	33				0,9985	0,7596	0,5210	0,1239	0,0026	166	
	34				0,9992	0,8150	0,5953	0,1656	0,0044	165	
	35				0,9996	0,8613	0,6658	0,2151	0,0073	164	
	36				0,9998	0,8987	0,7305	0,2717	0,0117	163	
	37				0,9999	0,9280	0,7877	0,3345	0,0182	162	
200	38					0,9502	0,8369	0,4019	0,0276	161	200
	39					0,9665	0,8777	0,4718	0,0405	160	
	40					0,9780	0,9106	0,5422	0,0578	159	
	41					0,9860	0,9362	0,6108	0,0804	158	
	42					0,9913	0,9556	0,6758	0,1089	157	
	43					0,9947	0,9699	0,7355	0,1438	156	
	44					0,9969	0,9801	0,7887	0,1852	155	
	45					0,9982	0,9872	0,8349	0,2332	154	
	46					0,9990	0,9919	0,8738	0,2870	153	
	47					0,9995	0,9950	0,9056	0,3458	152	
	48					0,9997	0,9970	0,9310	0,4083	151	
	49					0,9998	0,9983	0,9506	0,4729	150	
	50					0,9999	0,9990	0,9655	0,5379	149	
	51						0,9995	0,9764	0,6017	148	
	52						0,9997	0,9843	0,6626	147	
	53						0,9998	0,9897	0,7192	146	
	54						0,9999	0,9934	0,7707	145	
	55							0,9959	0,8162	144	
	56							0,9975	0,8555	143	
	57							0,9985	0,8885	142	
	58							0,9991	0,9157	141	
	59							0,9995	0,9375	140	
	60							0,9997	0,9546	139	
	61							0,9998	0,9677	138	
	62							0,9999	0,9774	137	
	63								0,9846	136	
	64								0,9897	135	
	65								0,9932	134	
	66								0,9956	133	
	67								0,9972	132	
	68								0,9983	131	
	69								0,9990	130	
	70								0,9994	129	
	71								0,9996	128	
	72								0,9998	127	
	73								0,9999	126	
	74								0,9999	125	
n		0,98	0,96	0,95	0,9	0,85	5/6	0,8	0,75	*k*	*n*
		p									

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 6: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 400

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	*k*	*p* = 0,01	0,02	0,05	0,1		*n*
	0	0,0180	0,0003	0,0000	0,0000	399	
	1	0,0905	0,0028	0,0000	0,0000	398	
	2	0,2366	0,0131	0,0000	0,0000	397	
	3	0,4325	0,0410	0,0000	0,0000	396	
	4	0,6288	0,0973	0,0000	0,0000	395	
	5	0,7859	0,1885	0,0001	0,0000	394	
	6	0,8904	0,3109	0,0002	0,0000	393	
	7	0,9498	0,4515	0,0006	0,0000	392	
	8	0,9792	0,5926	0,0017	0,0000	391	
	9	0,9922	0,7179	0,0042	0,0000	390	
	10	0,9973	0,8179	0,0094	0,0000	389	
	11	0,9992	0,8903	0,0190	0,0000	388	
	12	0,9998	0,9381	0,0355	0,0000	387	
	13	0,9999	0,9673	0,0614	0,0000	386	
	14		0,9838	0,0990	0,0000	385	
	15		0,9924	0,1499	0,0000	384	
	16		0,9966	0,2145	0,0000	383	
	17		0,9986	0,2912	0,0000	382	
	18		0,9994	0,3771	0,0000	381	
	19		0,9998	0,4680	0,0001	380	
	20		0,9999	0,5591	0,0002	379	
	21			0,6459	0,0004	378	
	22			0,7246	0,0009	377	
	23			0,7927	0,0017	376	
	24			0,8490	0,0031	375	
	25			0,8935	0,0054	374	
	26			0,9274	0,0092	373	
	27			0,9520	0,0149	372	
	28			0,9693	0,0235	371	
	29			0,9810	0,0357	370	
	30			0,9886	0,0524	369	
	31			0,9933	0,0746	368	
400	32			0,9962	0,1030	367	400
	33			0,9979	0,1382	366	
	34			0,9989	0,1805	365	
	35			0,9994	0,2296	364	
	36			0,9997	0,2849	363	
	37			0,9999	0,3453	362	
	38			0,9999	0,4095	361	
	39				0,4756	360	
	40				0,5420	359	
	41				0,6067	358	
	42				0,6682	357	
	43				0,7251	356	
	44				0,7763	355	
	45				0,8214	354	
	46				0,8600	353	
	47				0,8924	352	
	48				0,9188	351	
	49				0,9399	350	
	50				0,9564	349	
	51				0,9689	348	
	52				0,9783	347	
	53				0,9851	346	
	54				0,9900	345	
	55				0,9934	344	
	56				0,9957	343	
	57				0,9973	342	
	58				0,9983	341	
	59				0,9989	340	
	60				0,9994	339	
	61				0,9996	338	
	62				0,9998	337	
	63				0,9999	336	
	64				0,9999	335	
n		0,99	0,98	0,95	0,9 = *p*	*k*	*n*

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dezimalen) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$ gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Nur für den Dienstgebrauch!

Name: ____________________

Tabelle 7: Normalverteilung

$\phi(z) = 0,...$

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$\phi(2,32) = 0,9898$

$\phi(-0,9) = 1 - \phi(0,9) = 0,1841$

$\phi(z) = 0,994 \Rightarrow z = 2,51$

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2013

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Stochastik mit Alternative 1 (ein- und zweiseitiger Hypothesentest)

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2013

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
   - Binomialverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung

   Alternative 1:
   - Ein- und zweiseitiger Hypothesentest

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der regelmäßigen Fahrradnutzer unter den 100 befragten Personen. X sei binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = \frac{2}{3}$.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt:

$$P(E_1) = P\left(X = 70\right) = \binom{100}{70} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{70} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{30} \approx 0{,}0673.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt:

$$P(E_2) = P\left(X \geq 70\right) = 1 - P\left(X \leq 69\right) \overset{Tabelle}{\approx} 1 - \left(1 - 0{,}2766\right) = 0{,}2766.$$

Mit den obigen Festlegungen gilt:

$$\begin{aligned} P(E_3) &= P\left(60 \leq X \leq 70\right) \\ &= P\left(X \leq 70\right) - P\left(X \leq 59\right) \\ &\overset{Tabelle}{\approx} \left(1 - 0{,}2093\right) - \left(1 - 0{,}9341\right) \\ &= 0{,}7248. \end{aligned}$$

[Der auf 4 Nachkommastellen genaue Wert ist 0,7249.]

Modelllösung b)

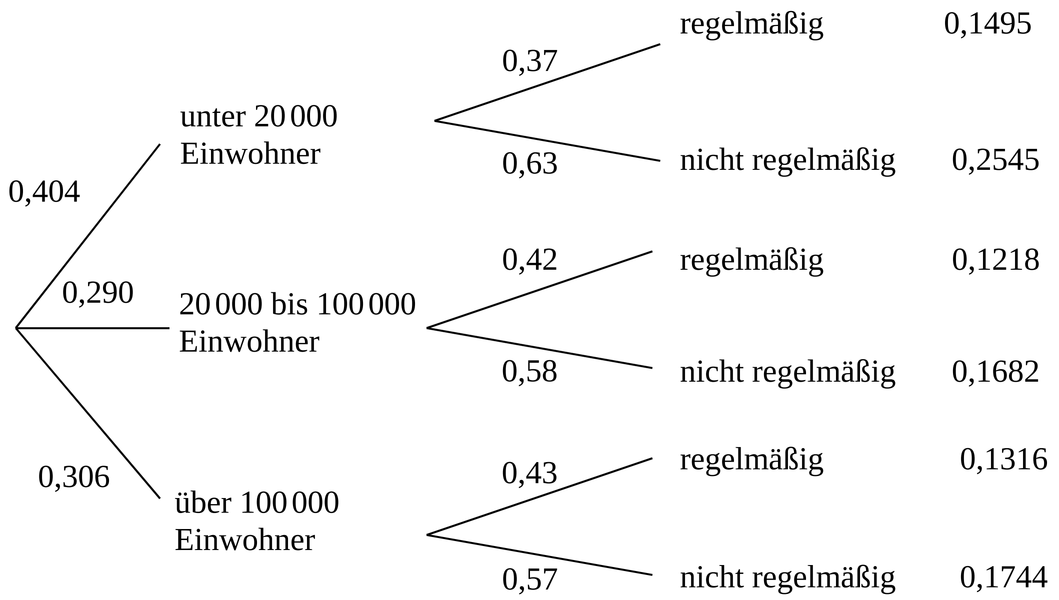
X: Anzahl der Fahrräder mit Mängeln; X ist $B_{n,\frac{1}{6}}$-verteilt.

$$P(X \geq 1) \geq 0{,}9 \Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0{,}9 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0{,}9 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}1 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0{,}1}{\ln \frac{5}{6}}$$

Aus $\frac{\ln 0{,}1}{\ln \frac{5}{6}} \approx 12{,}63$ erhält man: Es müssen mindestens 13 Fahrräder von der Polizei kontrolliert werden. [Die Ungleichung $\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}1$ kann auch durch Probieren gelöst werden, da der Wert der linken Seite der Ungleichung für wachsende n monoton fällt.]

Modelllösung c)

(1)



(2) $P(\text{"regelm. Nutzung"}) = 0,404 \cdot 0,37 + 0,290 \cdot 0,42 + 0,306 \cdot 0,43 = 0,40286$

Modelllösung d)

Zur Veranschaulichung der Situation kann folgende Tabelle helfen:

	mit Helm	ohne Helm
10 bis 15 Jahre	x	$4x$
20 bis 40 Jahre	$0,55x$	$2,2x$

Das gesuchte Verhältnis beträgt also: $4x:(0,55x) \approx 7,27$.

Damit ist das Verletzungsrisiko auf das ca. 7,27-Fache erhöht, es ist um ca. 627 % höher als bei einem älteren Fahrradfahrer, der einen Helm trägt.

Modelllösung e)

(1) Sei p die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrrad Mängel hat.

Getestet wird $H_0: p \geq 0{,}1$ gegen $H_1: p < 0{,}1$.

Es handelt sich um einen linksseitigen Hypothesentest mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$, d. h., die $1{,}64\sigma$-Regel ist anzuwenden, falls $\sigma \geq 3$.

Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Fahrräder mit Mängeln in einer Stichprobe von $n = 200$ kontrollierten Fahrrädern an.

Bei Annahme der Gültigkeit von H_0 ist X im Extremfall ($p = 0{,}1$) $B_{200;0,1}$-verteilt.

$\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0{,}1 = 20$, $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{200 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = \sqrt{18} > 3$.

Mit $\mu - 1{,}64 \cdot \sigma = 20 - 1{,}64 \cdot \sqrt{18} \approx 13{,}04 \approx 13$ ergibt sich als Annahmebereich $A = [13;200]$.

Anmerkungen:

1. Streng genommen ist die Laplace-Bedingung für $p > 0{,}953$ nicht mehr erfüllt, für dieses p ist aber der Annahmebereich auf Grund der Eigenschaften der Binomialverteilung sowieso geeignet.
2. Statt mit einer σ-Regel kann der Ablehnungsbereich $\overline{A}$ auch mit dem Ansatz $P(X \geq k) \leq 0{,}05$ und der Tabelle „Kumulierte Binomialverteilung für $n = 200$“ bestimmt werden.

   Entscheidungsregel: Wenn bei 200 kontrollierten Fahrrädern höchstens 12 Fahrräder Mängel aufweisen, kann von einer geringeren Mängelwahrscheinlichkeit als 0,1 ausgegangen werden und die Kontrollen können reduziert werden. Sind es mehr als 12, wird die Hypothese H_0 nicht verworfen.

   Bei der Wahl der Hypothesen besteht die Intention, den Fehler zu vermeiden, dass die Anzahl der Kontrollen verringert wird, obwohl der Anteil der Fahrräder mit Mängeln in Wirklichkeit nicht gesunken ist (Fehler 1. Art). Daraus ergibt sich die Wahl der H_0-Hypothese als $H_0: p \geq 0{,}1$ und die H_1-Hypothese als ihre Alternative.

(2) 16 liegt nicht im Ablehnungsbereich, das heißt, die Hypothese wird nicht verworfen. Man kann also nicht signifikant davon ausgehen, dass weniger als 10 % der Fahrräder Mängel aufweisen.

(3) H_1 ist wahr, d. h., es sind tatsächlich weniger als 10 % der Fahrräder mängelbehaftet. Ein Fehler 2. Art liegt dann vor, wenn man aufgrund des Stichprobenergebnisses die Hypothese H_0 nicht ablehnt.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	berechnet die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_1.	2
2	berechnet die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_2.	3
3	berechnet die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_3.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	ermittelt einen Ansatz.	2
2	bestimmt die Anzahl der Fahrräder, die mindestens kontrolliert werden müssen.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) stellt den Sachverhalt in einem Baumdiagramm dar.	4
2	(1) berechnet alle resultierenden Pfadwahrscheinlichkeiten.	6
3	(2) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	bestimmt den gesuchten Prozentsatz.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) ermittelt geeignete Hypothesen.	4
2	(1) ermittelt eine Entscheidungsregel.	6
3	(1) begründet die Wahl der Hypothesen.	3
4	(2) gibt eine begründete Entscheidung im Sachzusammenhang an.	2
5	(3) beschreibt den Fehler 2. Art.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	berechnet die Wahrscheinlichkeit …	2			
2	berechnet die Wahrscheinlichkeit …	3			
3	berechnet die Wahrscheinlichkeit …	3			
sachlich richtige Alternativen: (8) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**8**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt einen Ansatz.	2			
2	bestimmt die Anzahl …	4			
sachlich richtige Alternativen: (6) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**6**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) stellt den Sachverhalt …	4			
2	(1) berechnet alle resultierenden …	6			
3	(2) bestimmt die gesuchte …	3			
sachlich richtige Alternativen: (13) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**13**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt den gesuchten …	5			
sachlich richtige Alternativen: (5) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe d)	**5**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt geeignete Hypothesen.	4			
2	(1) ermittelt eine Entscheidungsregel.	6			
3	(1) begründet die Wahl …	3			
4	(2) gibt eine begründete …	2			
5	(3) beschreibt den Fehler …	3			
sachlich richtige Alternativen: (18) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe e)	**18**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2013

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Bundeslandwirtschaftsministerin Ilse Aigner hat im April 2009 den Anbau von Gen-Mais in Deutschland verboten, da ihrer Ansicht nach Risiken für die Umwelt nicht ausgeschlossen werden konnten. Im Januar 2010 fand eine repräsentative Umfrage unter der deutschen Bevölkerung mit folgender Fragestellung statt: „Sollte der Anbau von Gen-Mais in Deutschland weiterhin verboten bleiben?“

Die Tabelle gibt die Ergebnisse der Umfrage nach Altersgruppen aufgeschlüsselt wieder:

Altersgruppe / Antwort	14 bis 29 Jahre	30 bis 39 Jahre	40 bis 49 Jahre	50 bis 59 Jahre	60 Jahre und älter
„Ja“	166	112	153	129	232
„Nein“	33	24	30	19	45
keine Angabe	12	14	8	4	24
Anzahl der Befragten	211	150	191	152	301

a) (1) Eine Person wird zufällig aus den 1005 Teilnehmern der Umfrage ausgewählt.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie keine Angabe gemacht hat.

(2) Unter den Befragten der Altersgruppe 14 bis 29 befanden sich 57 Schüler. Von diesen antworteten $\frac{2}{3}$ mit „Ja“.

Bestimmen Sie den Anteil der Nicht-Schüler unter den 14- bis 29-Jährigen, die mit „Ja“ geantwortet haben.

(8 Punkte)

Name: ____________________

b) Die Umfrage wurde auch nach Herkunft der Teilnehmer (West- oder Ostdeutschland) ausgewertet:

Antwort \ Herkunft	West	Ost
„Ja“	643	149
„Nein“	112	39
keine Angabe	52	10

(1) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Teilnehmer der Umfrage, der mit „Ja“ geantwortet hat, aus Westdeutschland stammt.*

(2) Aus den Teilnehmern der Umfrage werden zwei Personen zufällig ausgewählt. Beide haben mit „Ja“ geantwortet.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die zweite Person aus demselben Teil Deutschlands stammt wie die erste (Ost bzw. West).

(10 Punkte)

Im folgenden Aufgabenteil sollen die in der obigen Umfrage ermittelten relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten für die Bevölkerung in Deutschland angenommen werden.

c) Eine weitere Umfrage unter *n* zufällig ausgewählten Personen wird mit derselben Fragestellung durchgeführt.

(1) Angenommen, bei dieser Umfrage werden nur Personen aus der Altersgruppe 50 bis 59 befragt.

Begründen Sie, dass die Zufallsgröße X: „Anzahl der Befragten, die mit ‚Nein‘ geantwortet haben“ als binomialverteilt angenommen werden kann, und zeigen Sie, dass die zugehörige Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{8}$ *beträgt.*

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(2) *unter 40 zufällig in der Altersgruppe 50 bis 59 ausgewählten Personen die Anzahl derer, die mit „Nein“ antworten, genau dem Erwartungswert dieser Altersgruppe entspricht,*

Name: ____________________

(3) *unter 50 zufällig in der Altersgruppe 50 bis 59 ausgewählten Personen mindestens 42* ***nicht*** *mit „Nein“ antworten,*

(4) *von 10 zufällig ausgewählten Personen alle eine Angabe („Ja“ oder „Nein“) machen, wenn diesmal bei der Umfrage nur Personen im Alter von 14 bis 49 befragt werden.*

(17 Punkte)

d) (1) Um z. B. den unbekannten Anteil p_{M} der Befürworter unter allen Männern zu schätzen, kann man eine Umfrage unter zufällig ausgewählten Männern durchführen, die Anzahl X der Befürworter in der Umfrage ermitteln und daraus ein 95%-Konfidenzintervall K_{M} für p_{M} ermitteln.

Erklären Sie die Bedeutung dieses Intervalls im Sachzusammenhang.

In der tatsächlich durchgeführten Umfrage sprachen sich von den 487 befragten Männern 366 für ein Verbot des Anbaus von Gen-Mais aus, von den befragten 518 Frauen sogar 426. Für den unbekannten Anteil p_{M} der Befürworter unter allen Männern wurde als 95%-Konfidenzintervall daraus näherungsweise das Intervall $K_{\mathrm{M}} = [0{,}7113; 0{,}7878]$ ermittelt.

(2) *Bestimmen Sie aufgrund der Umfrage ein 95%-Konfidenzintervall K_F für den unbekannten Anteil p_F der Befürworter unter den Frauen.*

Gehen Sie dabei ohne Beweis davon aus, dass die Zufallsgröße Y: „Anzahl der Frauen, die mit ‚Ja‘ geantwortet haben“ binomialverteilt ist und die Laplace-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist.

(15 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Name: ____________________

Tabelle 1: σ-Regeln für Binomialverteilungen

Eine mit den Parametern n und p binomialverteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.
Wenn die LAPLACE-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist, gelten die σ-Regeln:

$P(\mu - 1{,}64\sigma \le X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}90$	$P(\mu - 1{,}64\sigma \le X) \approx 0{,}95$
	$P(X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}95$
$P(\mu - 1{,}96\sigma \le X \le \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}95$	$P(\mu - 1{,}96\sigma \le X) \approx 0{,}975$
	$P(X \le \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}975$
$P(\mu - 2{,}58\sigma \le X \le \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}99$	$P(\mu - 2{,}58\sigma \le X) \approx 0{,}995$
	$P(X \le \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}995$

$P(\mu - 1\sigma \le X \le \mu + 1\sigma) \approx 0{,}683$	$P(\mu - 1\sigma \le X) \approx 0{,}841$
	$P(X \le \mu + 1\sigma) \approx 0{,}841$
$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) \approx 0{,}955$	$P(\mu - 2\sigma \le X) \approx 0{,}977$
	$P(X \le \mu + 2\sigma) \approx 0{,}977$
$P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$	$P(\mu - 3\sigma \le X) \approx 0{,}999$
	$P(X \le \mu + 3\sigma) \approx 0{,}999$

Name: ______________________

Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 10 und *n* = 20

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) \; = \; \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

						p						
n	*k*	0,02	0,05	0,08	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,5		*n*
10	0	0,8171	0,5987	0,4344	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010	9	10
	1	0,9838	0,9139	0,8121	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107	8	
	2	0,9991	0,9885	0,9599	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547	7	
	3		0,9990	0,9942	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719	6	
	4		0,9999	0,9994	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770	5	
	5				0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230	4	
	6					0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,8281	3	
	7						0,9999	0,9996	0,9984	0,9453	2	
	8	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000							0,9999	0,9893	1	
	9									0,9990	0	
20	0	0,6676	0,3585	0,1887	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	19	20
	1	0,9401	0,7358	0,5169	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000	18	
	2	0,9929	0,9245	0,7879	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002	17	
	3	0,9994	0,9841	0,9294	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013	16	
	4		0,9974	0,9817	0,9568	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059	15	
	5		0,9997	0,9962	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207	14	
	6			0,9994	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577	13	
	7			0,9999	0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316	12	
	8				0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517	11	
	9					0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,4119	10	
	10						0,9994	0,9961	0,9829	0,5881	9	
	11						0,9999	0,9991	0,9949	0,7483	8	
	12							0,9998	0,9987	0,8684	7	
	13								0,9997	0,9423	6	
	14									0,9793	5	
	15	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000								0,9941	4	
	16									0,9987	3	
	17									0,9998	2	
n		0,98	0,95	0,92	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,5	*k*	*n*
						p						

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 - \text{abgelesener Wert}$

Name: ______________________

Tabelle 3: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 50

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

						p							
n	*k*	0,02	0,05	0,1	0,125	0,15	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		*n*
	0	0,3642	0,0769	0,0052	0,0013	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	49	
	1	0,7358	0,2794	0,0338	0,0103	0,0029	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	48	
	2	0,9216	0,5405	0,1117	0,0418	0,0142	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	47	
	3	0,9822	0,7604	0,2503	0,1138	0,0460	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	46	
	4	0,9968	0,8964	0,4312	0,2346	0,1121	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	45	
	5	0,9995	0,9622	0,6161	0,3935	0,2194	0,0480	0,0070	0,0007	0,0000	0,0000	44	
	6	0,9999	0,9882	0,7702	0,5637	0,3613	0,1034	0,0194	0,0025	0,0000	0,0000	43	
	7		0,9968	0,8779	0,7165	0,5188	0,1904	0,0453	0,0073	0,0001	0,0000	42	
	8		0,9992	0,9421	0,8339	0,6681	0,3073	0,0916	0,0183	0,0002	0,0000	41	
	9		0,9998	0,9755	0,9121	0,7911	0,4437	0,1637	0,0402	0,0008	0,0000	40	
	10			0,9906	0,9579	0,8801	0,5836	0,2622	0,0789	0,0022	0,0000	39	
	11			0,9968	0,9817	0,9372	0,7107	0,3816	0,1390	0,0057	0,0000	38	
	12			0,9990	0,9928	0,9699	0,8139	0,5110	0,2229	0,0133	0,0002	37	
	13			0,9997	0,9974	0,9868	0,8894	0,6370	0,3279	0,0280	0,0005	36	
	14			0,9999	0,9991	0,9947	0,9393	0,7481	0,4468	0,0540	0,0013	35	
	15				0,9997	0,9981	0,9692	0,8369	0,5692	0,0955	0,0033	34	
	16				0,9999	0,9993	0,9856	0,9017	0,6839	0,1561	0,0077	33	
	17					0,9998	0,9937	0,9449	0,7822	0,2369	0,0164	32	
50	18					0,9999	0,9975	0,9713	0,8594	0,3356	0,0325	31	50
	19						0,9991	0,9861	0,9152	0,4465	0,0595	30	
	20						0,9997	0,9937	0,9522	0,5610	0,1013	29	
	21						0,9999	0,9974	0,9749	0,6701	0,1611	28	
	22							0,9990	0,9877	0,7660	0,2399	27	
	23							0,9996	0,9944	0,8438	0,3359	26	
	24							0,9999	0,9976	0,9022	0,4439	25	
	25								0,9991	0,9427	0,5561	24	
	26								0,9997	0,9686	0,6641	23	
	27								0,9999	0,9840	0,7601	22	
	28									0,9924	0,8389	21	
	29									0,9966	0,8987	20	
	30									0,9986	0,9405	19	
	31									0,9995	0,9675	18	
	32									0,9998	0,9836	17	
	33									0,9999	0,9923	16	
	34										0,9967	15	
	35										0,9987	14	
	36										0,9995	13	
	37										0,9998	12	
n		0,98	0,95	0,9	0,875	0,85	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	*k*	*n*
						p							

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 - \text{abgelesener Wert}$

Name: ____________________

Tabelle 4: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 100

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

								p								
n	k	0,02	0,03	0,05	0,1	0,15	1/6	0,2	0,25	0,27	0,3	1/3	0,4	0,5		n
	0	0,1326	0,0476	0,0059	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	99	
	1	0,4033	0,1946	0,0371	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	98	
	2	0,6767	0,4198	0,1183	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	97	
	3	0,8590	0,6472	0,2578	0,0078	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	96	
	4	0,9492	0,8179	0,4360	0,0237	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	95	
	5	0,9845	0,9192	0,6160	0,0576	0,0016	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	94	
	6	0,9959	0,9688	0,7660	0,1172	0,0047	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	93	
	7	0,9991	0,9894	0,8720	0,2061	0,0122	0,0038	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	92	
	8	0,9998	0,9968	0,9369	0,3209	0,0275	0,0095	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	91	
	9		0,9991	0,9718	0,4513	0,0551	0,0213	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	90	
	10		0,9998	0,9885	0,5832	0,0994	0,0427	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	89	
	11			0,9957	0,7030	0,1635	0,0777	0,0126	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	88	
	12			0,9985	0,8018	0,2473	0,1297	0,0253	0,0010	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	87	
	13			0,9995	0,8761	0,3474	0,2000	0,0469	0,0025	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	86	
	14			0,9999	0,9274	0,4572	0,2874	0,0804	0,0054	0,0014	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	85	
	15				0,9601	0,5683	0,3877	0,1285	0,0111	0,0033	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	84	
	16				0,9794	0,6725	0,4942	0,1923	0,0211	0,0068	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000	83	
	17				0,9900	0,7633	0,5994	0,2712	0,0376	0,0133	0,0022	0,0002	0,0000	0,0000	82	
	18				0,9954	0,8372	0,6965	0,3621	0,0630	0,0243	0,0045	0,0005	0,0000	0,0000	81	
	19				0,9980	0,8935	0,7803	0,4602	0,0995	0,0420	0,0089	0,0011	0,0000	0,0000	80	
	20				0,9992	0,9337	0,8481	0,5595	0,1488	0,0684	0,0165	0,0024	0,0000	0,0000	79	
	21				0,9997	0,9607	0,8998	0,6540	0,2114	0,1057	0,0288	0,0048	0,0000	0,0000	78	
	22				0,9999	0,9779	0,9369	0,7389	0,2864	0,1552	0,0479	0,0091	0,0001	0,0000	77	
	23					0,9881	0,9621	0,8109	0,3711	0,2172	0,0755	0,0164	0,0003	0,0000	76	
	24					0,9939	0,9783	0,8686	0,4617	0,2909	0,1136	0,0281	0,0006	0,0000	75	
	25					0,9970	0,9881	0,9125	0,5535	0,3737	0,1631	0,0458	0,0012	0,0000	74	
	26					0,9986	0,9938	0,9442	0,6417	0,4620	0,2244	0,0715	0,0024	0,0000	73	
	27					0,9994	0,9969	0,9658	0,7224	0,5516	0,2964	0,1066	0,0046	0,0000	72	
	28					0,9997	0,9985	0,9800	0,7925	0,6379	0,3768	0,1524	0,0084	0,0000	71	
	29					0,9999	0,9993	0,9888	0,8505	0,7172	0,4623	0,2093	0,0148	0,0000	70	
	30						0,9997	0,9939	0,8962	0,7866	0,5491	0,2766	0,0248	0,0000	69	
	31						0,9999	0,9969	0,9307	0,8446	0,6331	0,3525	0,0398	0,0001	68	
	32							0,9984	0,9554	0,8909	0,7107	0,4344	0,0615	0,0002	67	
	33							0,9993	0,9724	0,9261	0,7793	0,5188	0,0913	0,0004	66	
100	34							0,9997	0,9836	0,9518	0,8371	0,6019	0,1303	0,0009	65	100
	35							0,9999	0,9906	0,9697	0,8839	0,6803	0,1795	0,0018	64	
	36							0,9999	0,9948	0,9817	0,9201	0,7511	0,2386	0,0033	63	
	37								0,9973	0,9893	0,9470	0,8123	0,3068	0,0060	62	
	38								0,9986	0,9940	0,9660	0,8630	0,3822	0,0105	61	
	39								0,9993	0,9968	0,9790	0,9034	0,4621	0,0176	60	
	40								0,9997	0,9983	0,9875	0,9341	0,5433	0,0284	59	
	41								0,9999	0,9992	0,9928	0,9566	0,6225	0,0443	58	
	42								0,9999	0,9996	0,9960	0,9724	0,6967	0,0666	57	
	43									0,9998	0,9979	0,9831	0,7635	0,0967	56	
	44									0,9999	0,9989	0,9900	0,8211	0,1356	55	
	45										0,9995	0,9943	0,8689	0,1841	54	
	46										0,9997	0,9969	0,9070	0,2421	53	
	47										0,9999	0,9983	0,9362	0,3086	52	
	48										0,9999	0,9991	0,9577	0,3822	51	
	49											0,9996	0,9729	0,4602	50	
	50											0,9998	0,9832	0,5398	49	
	51											0,9999	0,9900	0,6178	48	
	52												0,9942	0,6914	47	
	53												0,9968	0,7579	46	
	54												0,9983	0,8159	45	
	55												0,9991	0,8644	44	
	56												0,9996	0,9033	43	
	57												0,9998	0,9334	42	
	58												0,9999	0,9557	41	
	59													0,9716	40	
	60													0,9824	39	
	61													0,9895	38	
	62													0,9940	37	
	63													0,9967	36	
	64													0,9982	35	
	65													0,9991	34	
	66													0,9996	33	
	67													0,9998	32	
	68													0,9999	31	
n		0,98	0,97	0,95	0,9	0,85	5/6	0,8	0,75	0,73	0,7	2/3	0,6	0,5	k	n
								p								

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 5: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 200

$$F(n;p;k) = B(n;p;0)+\ldots+B(n;p;k) = \binom{n}{0}p^{0}(1-p)^{n-0}+\ldots+\binom{n}{k}p^{k}(1-p)^{n-k}$$

p

n	k	0,02	0,04	0,05	0,1	0,15	1/6	0,2	0,25		n
	0	0,0176	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	199	
	1	0,0894	0,0027	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	198	
	2	0,2351	0,0125	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	197	
	3	0,4315	0,0395	0,0090	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	196	
	4	0,6288	0,0950	0,0264	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	195	
	5	0,7867	0,1856	0,0623	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	194	
	6	0,8914	0,3084	0,1237	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	193	
	7	0,9507	0,4501	0,2133	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	192	
	8	0,9798	0,5926	0,3270	0,0014	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	191	
	9	0,9925	0,7192	0,4547	0,0035	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	190	
	10	0,9975	0,8200	0,5831	0,0081	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	189	
	11	0,9992	0,8925	0,6998	0,0168	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	188	
	12	0,9998	0,9401	0,7965	0,0320	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	187	
	13	0,9999	0,9688	0,8701	0,0566	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	186	
	14		0,9848	0,9219	0,0929	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	185	
	15		0,9930	0,9556	0,1431	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000	184	
	16		0,9970	0,9762	0,2075	0,0021	0,0003	0,0000	0,0000	183	
	17		0,9988	0,9879	0,2849	0,0043	0,0006	0,0000	0,0000	182	
	18		0,9995	0,9942	0,3724	0,0082	0,0013	0,0000	0,0000	181	
	19		0,9998	0,9973	0,4655	0,0149	0,0027	0,0000	0,0000	180	
	20		0,9999	0,9988	0,5592	0,0255	0,0052	0,0001	0,0000	179	
	21			0,9995	0,6484	0,0415	0,0094	0,0002	0,0000	178	
	22			0,9998	0,7290	0,0645	0,0163	0,0005	0,0000	177	
	23			0,9999	0,7983	0,0959	0,0269	0,0010	0,0000	176	
	24				0,8551	0,1368	0,0426	0,0020	0,0000	175	
	25				0,8995	0,1876	0,0648	0,0036	0,0000	174	
	26				0,9328	0,2480	0,0945	0,0064	0,0000	173	
	27				0,9566	0,3166	0,1329	0,0110	0,0000	172	
	28				0,9729	0,3914	0,1803	0,0179	0,0001	171	
	29				0,9837	0,4697	0,2366	0,0283	0,0002	170	
	30				0,9905	0,5485	0,3007	0,0430	0,0004	169	
	31				0,9946	0,6247	0,3711	0,0632	0,0008	168	
	32				0,9971	0,6958	0,4454	0,0899	0,0014	167	
	33				0,9985	0,7596	0,5210	0,1239	0,0026	166	
	34				0,9992	0,8150	0,5953	0,1656	0,0044	165	
	35				0,9996	0,8613	0,6658	0,2151	0,0073	164	
	36				0,9998	0,8987	0,7305	0,2717	0,0117	163	
	37				0,9999	0,9280	0,7877	0,3345	0,0182	162	
200	38					0,9502	0,8369	0,4019	0,0276	161	200
	39					0,9665	0,8777	0,4718	0,0405	160	
	40					0,9780	0,9106	0,5422	0,0578	159	
	41					0,9860	0,9362	0,6108	0,0804	158	
	42					0,9913	0,9556	0,6758	0,1089	157	
	43					0,9947	0,9699	0,7355	0,1438	156	
	44					0,9969	0,9801	0,7887	0,1852	155	
	45					0,9982	0,9872	0,8349	0,2332	154	
	46					0,9990	0,9919	0,8738	0,2870	153	
	47					0,9995	0,9950	0,9056	0,3458	152	
	48					0,9997	0,9970	0,9310	0,4083	151	
	49					0,9998	0,9983	0,9506	0,4729	150	
	50					0,9999	0,9990	0,9655	0,5379	149	
	51						0,9995	0,9764	0,6017	148	
	52						0,9997	0,9843	0,6626	147	
	53						0,9998	0,9897	0,7192	146	
	54						0,9999	0,9934	0,7707	145	
	55							0,9959	0,8162	144	
	56							0,9975	0,8555	143	
	57							0,9985	0,8885	142	
	58							0,9991	0,9157	141	
	59							0,9995	0,9375	140	
	60							0,9997	0,9546	139	
	61							0,9998	0,9677	138	
	62							0,9999	0,9774	137	
	63								0,9846	136	
	64								0,9897	135	
	65								0,9932	134	
	66								0,9956	133	
	67								0,9972	132	
	68								0,9983	131	
	69								0,9990	130	
	70								0,9994	129	
	71								0,9996	128	
	72								0,9998	127	
	73								0,9999	126	
	74								0,9999	125	
n		0,98	0,96	0,95	0,9	0,85	5/6	0,8	0,75	k	n

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

p

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ______________________

Tabelle 6: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 400

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

		p					
n	*k*	0,01	0,02	0,05	0,1		*n*
	0	0,0180	0,0003	0,0000	0,0000	399	
	1	0,0905	0,0028	0,0000	0,0000	398	
	2	0,2366	0,0131	0,0000	0,0000	397	
	3	0,4325	0,0410	0,0000	0,0000	396	
	4	0,6288	0,0973	0,0000	0,0000	395	
	5	0,7859	0,1885	0,0001	0,0000	394	
	6	0,8904	0,3109	0,0002	0,0000	393	
	7	0,9498	0,4515	0,0006	0,0000	392	
	8	0,9792	0,5926	0,0017	0,0000	391	
	9	0,9922	0,7179	0,0042	0,0000	390	
	10	0,9973	0,8179	0,0094	0,0000	389	
	11	0,9992	0,8903	0,0190	0,0000	388	
	12	0,9998	0,9381	0,0355	0,0000	387	
	13	0,9999	0,9673	0,0614	0,0000	386	
	14		0,9838	0,0990	0,0000	385	
	15		0,9924	0,1499	0,0000	384	
	16		0,9966	0,2145	0,0000	383	
	17		0,9986	0,2912	0,0000	382	
	18		0,9994	0,3771	0,0000	381	
	19		0,9998	0,4680	0,0001	380	
	20		0,9999	0,5591	0,0002	379	
	21			0,6459	0,0004	378	
	22			0,7246	0,0009	377	
	23			0,7927	0,0017	376	
	24			0,8490	0,0031	375	
	25			0,8935	0,0054	374	
	26			0,9274	0,0092	373	
	27			0,9520	0,0149	372	
	28			0,9693	0,0235	371	
	29			0,9810	0,0357	370	
	30			0,9886	0,0524	369	
	31			0,9933	0,0746	368	
400	32			0,9962	0,1030	367	400
	33			0,9979	0,1382	366	
	34			0,9989	0,1805	365	
	35			0,9994	0,2296	364	
	36			0,9997	0,2849	363	
	37			0,9999	0,3453	362	
	38			0,9999	0,4095	361	
	39				0,4756	360	
	40				0,5420	359	
	41				0,6067	358	
	42				0,6682	357	
	43				0,7251	356	
	44				0,7763	355	
	45				0,8214	354	
	46				0,8600	353	
	47				0,8924	352	
	48				0,9188	351	
	49				0,9399	350	
	50				0,9564	349	
	51				0,9689	348	
	52				0,9783	347	
	53				0,9851	346	
	54				0,9900	345	
	55				0,9934	344	
	56				0,9957	343	
	57				0,9973	342	
	58				0,9983	341	
	59				0,9989	340	
	60				0,9994	339	
	61				0,9996	338	
	62				0,9998	337	
	63				0,9999	336	
	64				0,9999	335	
n		0,99	0,98	0,95	0,9	*k*	*n*
		p					

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dezimalen) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$ gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 7: Normalverteilung

$\phi(z) = 0,...$

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$\phi(2,32) = 0,9898$

$\phi(-0,9) = 1 - \phi(0,9) = 0,1841$

$\phi(z) = 0,994 \Rightarrow z = 2,51$

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2013

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Stochastik mit Alternative 2 (Schätzen von Parametern für binomialverteilte Zufallsgrößen)

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2013

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
   - Binomialverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung

   Alternative 2:
   - Schätzen von Parametern für binomialverteilte Zufallsgrößen

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) An der Umfrage haben $211+150+191+152+301=1005$ Personen teilgenommen. Davon haben $12+14+8+4+24=62$ Personen keine Angaben gemacht. Da jede Person mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewählt wird, beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(\text{"Keine Angabe"})=\frac{62}{1005}\approx 0{,}0617$.

(2) Die Anzahl der Nicht-Schüler beträgt $211-57=154$. Von diesen antworteten $166-38=128$ mit „Ja“. Der gesuchte Anteil beträgt also $\frac{128}{154}\approx 0{,}8312$.

Modelllösung b)

(1) Mit „Ja“ haben $643+149=792$ Personen geantwortet. Von diesen kommen 643 aus dem Westen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also

$$P_{\text{"Ja"}}(\text{"West"})=\frac{643}{792}\approx 0{,}8119.$$

(2) Die Wahrscheinlichkeit beträgt

$$\frac{643}{792}\cdot\frac{642}{791}+\frac{149}{792}\cdot\frac{148}{791}\approx 0{,}69.$$

Die (Näherungs-)Lösung

$$\left(\frac{643}{792}\right)^2+\left(\frac{149}{792}\right)^2\approx 0{,}69$$

wird ebenfalls akzeptiert.

Modelllösung c)

(1) Die Zufallsgröße X kann als binomialverteilt angenommen werden, da bei zufälliger Auswahl der Teilnehmer

- X die Anzahl von „Treffern“ („Nein“-Stimmen) zählt,
- eine konstante Wahrscheinlichkeit p für die Antwort „Nein“ angenommen werden kann, die dem Anteil in der Bevölkerung entspricht,
- die Antworten voneinander unabhängig sind.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt $p = \frac{19}{152} = \frac{1}{8}$.

(2) Bezeichnet X: „Anzahl der ‚Nein’-Antworten in der Umfrage in der Altersgruppe 50 bis 59“, so ist X binomialverteilt mit $n = 40$, $p = \frac{1}{8}$.

Die erwartete Anzahl ist $\mu = \frac{1}{8} \cdot 40 = 5$, die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also

$$P(X = 5) = \binom{40}{5} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^5 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{35} \approx 0{,}1875.$$

(3) Bezeichnet nun X: „Anzahl der ‚Nein’-Antworten in der Umfrage in der Altersgruppe 50 bis 59“, so ist X binomialverteilt mit $n = 50$, $p = \frac{1}{8}$.

Dann beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(X \le 8) \overset{Tabelle}{\approx} 0{,}8339$.

(4) Bezeichnet nun X: „Anzahl der ‚Ja‘- oder ‚Nein‘-Antworten in der Umfrage in der Altersgruppe kleiner 50“, so ist X binomialverteilt mit

$$n = 10,\ p = \frac{166 + 112 + 153 + 33 + 24 + 30}{211 + 150 + 191} = \frac{518}{552} = \frac{259}{276}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle eine Angabe machen, beträgt

$$P(\text{"10-mal Ja oder Nein"}) = \left(\frac{259}{276}\right)^{10} \approx 0{,}5295.$$

Modelllösung d)

(1) K_M enthält alle Werte für den wahren Anteil der Befürworter unter den Männern, die auf dem 95%-Niveau mit den Daten vereinbar sind. [Formal: p_M liegt genau dann im Intervall K_M, falls ein Test auf dem 5%-Niveau die Hypothese „ p_M *ist der korrekte Anteil der Befürworter unter den Männern*“ nicht verwerfen würde.]

(2) Es bezeichne p_F den Anteil der Befürworter in der weiblichen Bevölkerung. Es bezeichne Y die Anzahl der Frauen, die bei der Umfrage mit „Ja" geantwortet haben. Dann kann Y als binomialverteilt angenommen werden mit unbekannter Trefferwahrscheinlichkeit p_F und Stichprobenumfang $n = 518$. Laut Voraussetzung ist die Laplace-Bedingung erfüllt.

Die Randpunkte des gesuchten Konfidenzintervalls bestimmt man dann näherungsweise so:

$$\left| p_F - \frac{426}{518} \right| = 1,96 \cdot \frac{\sigma_F}{518}.$$

Durch Quadrieren erhält man:

$$\left(p_F - \frac{426}{518} \right)^2 = 1,96^2 \cdot \frac{\sigma_F^{\ 2}}{518^2} \Leftrightarrow \left(p_F - \frac{426}{518} \right)^2 = 1,96^2 \cdot \frac{p_F \cdot (1 - p_F)}{518}.$$

Diese Gleichung löst man nach p_F auf:

$$p_F^{\ 2} - \frac{852}{518} p_F + \left(\frac{426}{518} \right)^2 = \frac{1,96^2}{518} p_F (1 - p_F)$$

$$\Leftrightarrow p_F^{\ 2} - \frac{852}{518} p_F + \left(\frac{426}{518} \right)^2 = \frac{1,96^2}{518} p_F - \frac{1,96^2}{518} p_F^{\ 2}$$

$$\Leftrightarrow p_F^{\ 2} \cdot \left(1 + \frac{1,96^2}{518} \right) + \left(-\frac{852}{518} - \frac{1,96^2}{518} \right) p_F + \left(\frac{426}{518} \right)^2 = 0,$$

also (TR) $p_F \approx 0,7871 \vee p_F \approx 0,8529$.

Als näherungsweises Konfidenzintervall für den unbekannten Anteil p_M erhält man

$K_F = [0,7871;\, 0,8529]$.

[Hinreichend genaue Rundungen bei Zwischenergebnissen sollen nicht zu Punktabzügen führen; ebenso sollte eine verkürzte Darstellung des Lösungsweges bei korrektem Ansatz und Ergebnis mit voller Punktzahl versehen werden.]

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) bestimmt die Wahrscheinlichkeit für „Keine Angabe".	3
2	(2) bestimmt den gesuchten Anteil.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3
2	(2) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	7
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) begründet, dass X eine binomialverteilte Zufallsgröße ist.	3
2	(1) zeigt, dass die Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{8}$ beträgt.	2
3	(2) berechnet den Erwartungswert und die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	4
4	(3) berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3
5	(4) berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) erklärt die Bedeutung des Intervalls im Sachzusammenhang.	4
2	(2) bestimmt einen Ansatz zur Bestimmung des Konfidenzintervalls.	4
3	(2) bestimmt das Konfidenzintervall.	7
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die Wahrscheinlichkeit …	3			
2	(2) bestimmt den gesuchten …	5			
sachlich richtige Alternativen: (8) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**8**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die gesuchte …	3			
2	(2) bestimmt die gesuchte …	7			
sachlich richtige Alternativen: (10) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**10**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass X …	3			
2	(1) zeigt, dass die …	2			
3	(2) berechnet den Erwartungswert …	4			
4	(3) berechnet die gesuchte …	3			
5	(4) berechnet die gesuchte …	5			
sachlich richtige Alternativen: (17) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**17**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) erklärt die Bedeutung …	4			
2	(2) bestimmt einen Ansatz …	4			
3	(2) bestimmt das Konfidenzintervall.	7			
sachlich richtige Alternativen: (15) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe d)	**15**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0