



Name: _____

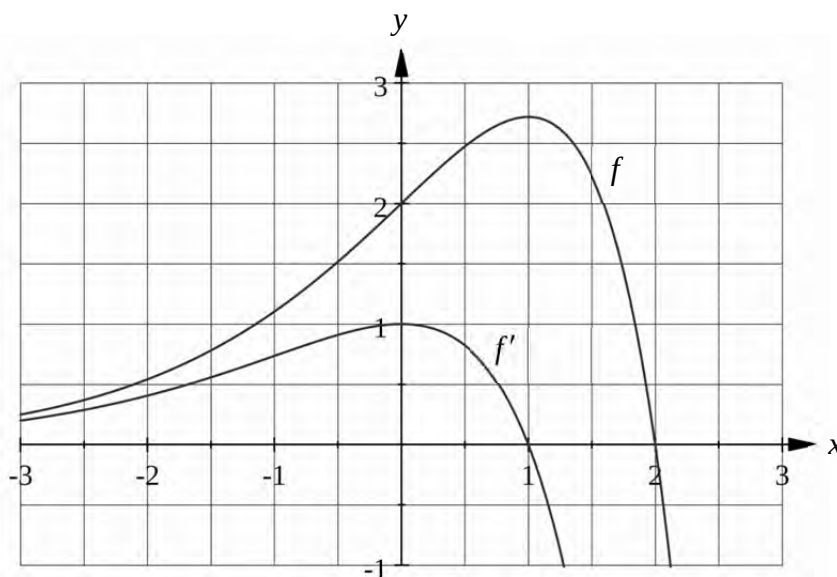
Abiturprüfung 2014

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = (2-x) \cdot e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Die Graphen der Funktion f und ihrer Ableitungsfunktion f' sind in der *Abbildung* dargestellt.



Abbildung

- a) (1) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen.
- (2) Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte des Graphen von f .
[Zur Kontrolle: $f'(x) = (1-x) \cdot e^x$]
- (3) Untersuchen Sie, ob sich die Graphen der Funktionen f und f' schneiden.

(5 + 16 + 4 Punkte)



Name: _____

b) (1) Zeigen Sie, dass die Funktion F mit der Gleichung $F(x) = (3-x) \cdot e^x$ eine Stammfunktion von f ist.

(2) Ermitteln Sie für $0 \leq z \leq 2$ den Inhalt $A(z)$ der zwischen dem Graphen von f und der x -Achse im Intervall $[0; z]$ eingeschlossenen Fläche in Abhängigkeit von z .

[Zur Kontrolle: $A(z) = (3-z) \cdot e^z - 3$] (4 + 6 Punkte)

c) Auf einem Erdölfeld wird Öl gefördert. Durch die Funktion f wird nun für $0 \leq x \leq 2$ die Förderrate¹ von Beginn des Jahres 2013 bis Ende des Jahres 2014 modelliert. Dabei wird x als Maßzahl der Zeit zur Einheit 1 Jahr und $f(x)$ als Maßzahl der Förderrate zur Einheit 1 Million Tonnen pro Jahr aufgefasst.

(1) Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von f im Intervall $[0; 2]$ im Sachzusammenhang.

(2) Bestimmen Sie die für den gesamten Zeitraum von Beginn des Jahres 2013 bis Ende des Jahres 2014 zu erwartende Fördermenge.

(3) Am Ende des ersten Quartals 2014 erkennt der Betreiber, dass die Förderrate von diesem Zeitpunkt an – im Gegensatz zur Modellierung durch die Funktion f – bis zum Ende der Ölförderung linear abnehmen wird. Zur Darstellung der Förderrate für die verbleibende Dauer der Ölförderung wird daher eine lineare Funktion g gesucht, deren Graph zum Zeitpunkt $x = \frac{5}{4}$ dieselbe Steigung hat wie der Graph der Funktion f .

Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Funktion g .

Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Ölförderung enden wird.

[Zur Kontrolle: $g(x) = \frac{1}{16} e^{\frac{5}{4}} \cdot (17 - 4x)$] (3 + 4 + 8 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

¹ Unter **Förderrate** ist stets die **momentane Förderrate** zu verstehen.

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2014

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung¹

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2014

1. Inhaltliche Schwerpunkte

- Untersuchung von ganzrationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen und Exponentialfunktionen in Sachzusammenhängen, notwendiger Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel)
- Untersuchungen von Wirkungen (Änderungsrate)
- Flächenberechnung durch Integration

2. Medien/Materialien

- entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

¹ Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modellösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

$$(1) f(0) = (2-0) \cdot e^0 = 2.$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (2-x) \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Schnittpunkt mit der y -Achse: $(0|2)$,

Schnittpunkt mit der x -Achse: $(2|0)$.

$$(2) f'(x) = ((2-x) \cdot e^x)' = -1 \cdot e^x + (2-x) \cdot e^x = (1-x) \cdot e^x.$$

$f'(x_E) = 0 \Leftrightarrow (1-x_E) \cdot e^{x_E} = 0 \Leftrightarrow x_E = 1$. Da die Funktion f' an der Stelle $x_E = 1$ das

Vorzeichen von $+$ nach $-$ wechselt, ist $f(x_E) = e$ lokales Maximum von f .

$H(1|e)$ ist Hochpunkt des Graphen von f .

$$f''(x) = ((1-x) \cdot e^x)' = -1 \cdot e^x + (1-x) \cdot e^x = -x \cdot e^x.$$

$f''(x_W) = 0 \Leftrightarrow -x_W \cdot e^{x_W} = 0 \Leftrightarrow x_W = 0$. Da die Funktion f'' an der Stelle $x_W = 0$ das

Vorzeichen wechselt, ist x_W Wendestelle von f .

$W(0|2)$ ist Wendepunkt des Graphen von f .

$$(3) \text{ Wegen } f(x_S) = f'(x_S) \Leftrightarrow (2-x_S) \cdot e^{x_S} = (1-x_S) \cdot e^{x_S} \Leftrightarrow e^{x_S} = 0 \text{ hat die Gleichung}$$

$f(x_S) = f'(x_S)$ keine Lösung.

Daher haben die Graphen von f und f' keinen Schnittpunkt.

Teilaufgabe b)

(1) Wegen $F'(x) = ((3-x) \cdot e^x)' = -1 \cdot e^x + (3-x) \cdot e^x = (2-x) \cdot e^x = f(x)$ ist F eine Stammfunktion von f .

(2) Für $0 \leq x \leq 2$ gilt $f(x) = (2-x) \cdot e^x \geq 0$. Daher ist

$$\begin{aligned} A(z) &= \int_0^z f(x) dx \\ &= F(z) - F(0) \\ &= (3-z) \cdot e^z - 3 \cdot e^0 \\ &= (3-z) \cdot e^z - 3 \end{aligned}$$

der gesuchte Flächeninhalt.

Teilaufgabe c)

(1) Die Förderrate² steigt von 2 Millionen Tonnen pro Jahr zu Beginn des Jahres 2013 [streng monoton] auf den Höchstwert von ca. 2,72 Millionen Tonnen pro Jahr am Ende des Jahres an. Danach nimmt sie [streng monoton] bis zum Ende des Jahres 2014 auf Null ab.

(2) Die gesamte Fördermenge der Jahre 2013 und 2014 entspricht dem Inhalt der vom Graphen von f und den Koordinatenachsen im 1. Quadranten eingeschlossenen Fläche. Mit dem Kontrollergebnis von b) (2) ergibt sich: $A(2) = (3-2) \cdot e^2 - 3 = e^2 - 3 \approx 4,39$. Die gesamte Fördermenge beträgt ca. 4,39 Millionen Tonnen.

² Unter „Förderrate“ ist stets die „momentane Förderrate“ zu verstehen.

(3) Dem Ende des 1. Quartals 2014 entspricht der Zeitpunkt $x = \frac{5}{4}$.

Für $x \geq \frac{5}{4}$ [$x \leq x_0$ (siehe unten)] kann die Förderrate durch die lineare Funktion g

dargestellt werden, für die $g\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(\frac{5}{4}\right)$ und $g'(x) = f'\left(\frac{5}{4}\right)$ gilt.

$$\begin{aligned}g(x) &= f'\left(\frac{5}{4}\right) \cdot \left(x - \frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{5}{4}\right) \\&= \left(1 - \frac{5}{4}\right) \cdot e^{\frac{5}{4}} \cdot \left(x - \frac{5}{4}\right) + \left(2 - \frac{5}{4}\right) \cdot e^{\frac{5}{4}} \\&= -\frac{1}{4} e^{\frac{5}{4}} \cdot \left(x - \frac{5}{4}\right) + \frac{3}{4} \cdot e^{\frac{5}{4}} \\&= \frac{1}{16} e^{\frac{5}{4}} \cdot (5 - 4x) + \frac{12}{16} \cdot e^{\frac{5}{4}} \\&= \frac{1}{16} e^{\frac{5}{4}} \cdot (17 - 4x).\end{aligned}$$

Der Zeitpunkt x_0 , zu dem die Ölförderung endet, ist die Nullstelle der Funktion g .

$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{17}{4}$: Mit Ablauf des 1. Quartals 2017 wird die Ölförderung enden.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: _____ Kursbezeichnung: _____

Schule: _____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK ³	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) berechnet die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen.	5			
2	(2) berechnet $f'(x)$.	3			
3	(2) bestimmt rechnerisch die Koordinaten des Hochpunktes.	5			
4	(2) berechnet $f''(x)$.	3			
5	(2) bestimmt rechnerisch die Koordinaten des Wendepunktes.	5			
6	(3) untersucht, ob sich die Graphen von f und f' schneiden.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (25)					
	Summe Teilaufgabe a)	25			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) zeigt, dass die Funktion F eine Stammfunktion von f ist.	4			
2	(2) ermittelt $A(z)$.	6			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (10)					
	Summe Teilaufgabe b)	10			

³ EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) beschreibt den Verlauf des Graphen von f im Intervall $[0; 2]$ im Sachzusammenhang.	3			
2	(2) bestimmt die für den gesamten Zeitraum von Beginn des Jahres 2013 bis Ende des Jahres 2014 zu erwartende Fördermenge.	4			
3	(3) ermittelt eine Gleichung der Funktion g .	5			
4	(3) berechnet den Zeitpunkt, zu dem die Ölförderung enden wird.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (15)					
	Summe Teilaufgabe c)	15			

	Summe insgesamt	50			
--	------------------------	-----------	--	--	--

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.



Name: _____

Abiturprüfung 2014

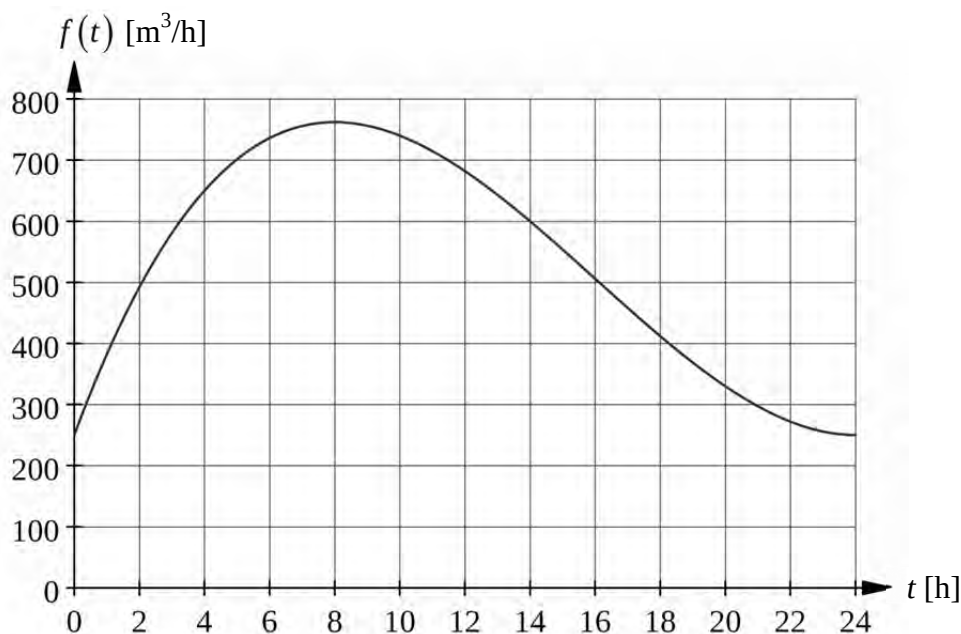
Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

In ein Staubecken oberhalb eines Bergdorfes fließt ein Bach. Die momentane¹ Zuflussrate aus dem Bach kann an einem Tag mit starken Regenfällen durch die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = \frac{1}{4}t^3 - 12t^2 + 144t + 250, \quad t \in \mathbb{R},$$

für einen bestimmten Beobachtungszeitraum modelliert werden. Dabei fasst man t als Maßzahl zur Einheit 1 h und $f(t)$ als Maßzahl zur Einheit $1 \text{ m}^3/\text{h}$ auf. Der Beobachtungszeitraum beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ und endet zum Zeitpunkt $t = 24$.



Abbildung

¹ Im Folgenden wird zur besseren Lesbarkeit nur der Begriff **Zuflussrate** verwendet; darunter ist stets die **momentane Zuflussrate** zu verstehen.



Name: _____

- a) (1) Berechnen Sie die Zuflussrate zu Beginn und am Ende des Beobachtungszeitraums.
(2) Bestimmen Sie den Zeitpunkt $t_m \in [0; 24]$, zu dem die Zuflussrate ihr Maximum annimmt, und berechnen Sie dieses Maximum.
- (3 + 9 Punkte)

- b) (1) Bestimmen Sie die Wendestelle des Graphen der Funktion f .
(2) Bestimmen Sie den Zeitpunkt des Beobachtungszeitraums, zu dem sich die Zuflussrate am stärksten ändert.
(3) Geben Sie nun die Bedeutung der Wendestelle aus (1) im Sachzusammenhang an.
(4) Geben Sie einen Zeitraum an, in dem die Funktion f die Zuflussrate nicht sinnvoll beschreiben könnte, und begründen Sie dies.
- (6 + 6 + 3 + 4 Punkte)

- c) Zum Zeitpunkt $t = 0$ kann das Staubecken noch 4500 m^3 Wasser aufnehmen.
(1) Entscheiden Sie, ob das Staubecken das gesamte Wasser aus dem Bach während der 24 Stunden des Beobachtungszeitraums aufnehmen könnte.
(2) Die Gleichung $\int_0^a f(t) dt = 4500$ hat die (positive) Lösung $a \approx 7,6$.
Geben Sie die Bedeutung dieser Lösung im Sachzusammenhang an.

Um ein Überlaufen des Staubeckens zu verhindern, wird zum Zeitpunkt $t = 6$ ein vorher verschlossener Notablauf geöffnet. Durch diesen fließt Wasser mit einer konstanten Abflussrate von $600 \text{ m}^3/\text{h}$ aus dem Staubecken ab. Der Notablauf bleibt bis zum Ende des Beobachtungszeitraums geöffnet. Ohne Nachweis darf verwendet werden, dass die Zuflussrate für $6 \leq t < 14$ größer und für $14 < t \leq 24$ kleiner als $600 \text{ m}^3/\text{h}$ ist (vgl. Abbildung auf Seite 1).

- (3) Interpretieren Sie den Ausdruck $\int_0^6 f(t) dt + \int_6^{14} (f(t) - 600) dt$ im Sachzusammenhang.
Geben Sie insbesondere die Bedeutung des Zeitpunkts $t = 14$ an.
(4) Entscheiden Sie nun, ob das Staubecken innerhalb des Beobachtungszeitraums überläuft.
- (5 + 3 + 6 + 5 Punkte)



Name: _____

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2014

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung¹

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2014

1. Inhaltliche Schwerpunkte

- Untersuchung von ganzrationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen und Exponentialfunktionen in Sachzusammenhängen, notwendige Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel)
- Untersuchung von Wirkungen (Integral der Änderungsrate)
- Flächenberechnung durch Integration

2. Medien/Materialien

- entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

¹ Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modellösungen

Die jeweilige Modellösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modellösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modellösung“).

Teilaufgabe a)

(1) $f(0) = 250 \text{ [m}^3\text{/h]}$,

$$f(24) = 250 \text{ [m}^3\text{/h]}.$$

(2) Gesucht ist das globale Maximum der Funktion f im Intervall $[0; 24]$. Dieses kann ein lokales Maximum oder ein Randwert sein.

$$f'(t) = \frac{3}{4}t^2 - 24t + 144,$$

$$f'(t_m) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}t_m^2 - 24t_m + 144 = 0 \Leftrightarrow t_m = 8 \vee t_m = 24.$$

Das potenzielle lokale Extremum $f(8) = 762$ ist aufgrund des Vergleichs mit den Randwerten $f(0) = f(24) = 250$ aus (1) globales Maximum der Funktion f im Intervall $[0; 24]$.

8 Stunden nach Beginn des Beobachtungszeitraums nimmt die Zuflussrate ihr Maximum von $762 \text{ m}^3\text{/h}$ an.

Teilaufgabe b)

(1) Es gilt $f''(t) \stackrel{a)(2)}{=} \left(\frac{3}{4}t^2 - 24t + 144 \right)' = \frac{3}{2}t - 24$.

Aus $f''(t_w) = 0 \Leftrightarrow t_w = 16$ und $f'''(t_w) = \frac{3}{2} \neq 0$ folgt, dass $t_w = 16$ die [einzige]

Wendestelle des Graphen der Funktion f ist.

- (2) Die Zuflussrate ändert sich am stärksten zum Zeitpunkt t_w oder an den Randstellen des Intervalls $[0; 24]$.

Der Vergleich der Werte $f'(0) = 144$, $f'(t_w) = -48$ und $f'(24) = 0$ ergibt:

Die Zuflussrate ändert sich am stärksten zu Beginn des Beobachtungszeitraums.

- (3) Die Wendestelle $t_w = 16$ bezeichnet den Zeitpunkt des Intervalls $[0; 24]$, zu dem die Zuflussrate am stärksten abnimmt.
- (4) Beispielsweise könnte die Funktion f die Zuflussrate im Zeitraum $[-2; 0]$ nicht sinnvoll beschreiben, da $f(-2) = -88$ $[\text{m}^3/\text{h}]$ ist und negative Zuflussraten im Sachzusammenhang nicht auftreten können.

Teilaufgabe c)

$$(1) \int_0^{24} f(t) dt = \left[\frac{1}{16} t^4 - 4t^3 + 72t^2 + 250t \right]_0^{24} \\ = 12912.$$

Das Staubecken könnte die 12912 m^3 Wasser nicht aufnehmen.

(2) Die Lösung $a \approx 7,6$ der Gleichung $\int_0^a f(t) dt = 4500$ bezeichnet den Zeitpunkt, zu dem das Staubecken voll wäre.

(3) Der Ausdruck gibt an, um wie viel m^3 das Wasser [-Volumen] im Staubecken während der ersten 14 Stunden des Beobachtungszeitraums zunimmt. Dabei wird berücksichtigt, dass im Intervall $[6; 14]$ die Zulauftrate um den Betrag der Ablauftrate zu vermindern ist.

Wegen $f(14) = 600$ sind zum Zeitpunkt $t = 14$ Zulauftrate und Ablauftrate gleich groß.

[Laut Aufgabenstellung ist die Zulauftrate für $6 \leq t < 14$ größer und für $14 < t \leq 24$ kleiner als $600 \text{ m}^3/\text{h}$.] Zum Zeitpunkt $t = 14$ ist [daher] am meisten Wasser im Staubecken.

(4) Wegen

$$\int_0^6 f(t) dt + \int_6^{14} (f(t) - 600) dt = \int_0^{14} f(t) dt - \int_6^{14} 600 dt \\ = 9037 - 4800 \\ = 4237$$

werden die vorgegebenen 4500 m^3 nicht erreicht, so dass das Staubecken nicht überläuft.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: _____ Kursbezeichnung: _____

Schule: _____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK ²	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) berechnet die Zuflussrate zu Beginn und am Ende des Beobachtungszeitraums.	3			
2	(2) bestimmt den Zeitpunkt, zu dem die Zuflussrate ihr Maximum annimmt, und berechnet dieses Maximum.	9			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (12)					
.....					
.....					
	Summe Teilaufgabe a)	12			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) bestimmt die Wendestelle des Graphen der Funktion f .	6			
2	(2) bestimmt den Zeitpunkt des Beobachtungszeitraums, zu dem sich die Zuflussrate am stärksten ändert.	6			
3	(3) gibt die Bedeutung der Wendestelle aus (1) im Sachzusammenhang an.	3			
4	(4) gibt einen Zeitraum an, in dem die Funktion f die Zuflussrate nicht sinnvoll beschreiben könnte, und begründet dies.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (19)					
.....					
.....					
	Summe Teilaufgabe b)	19			

² EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

Anforderungen		Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) entscheidet, ob das Staubecken das gesamte Wasser aus dem Bach während der 24 Stunden des Beobachtungszeitraums aufnehmen könnte.	5			
2	(2) gibt die Bedeutung der Lösung im Sachzusammenhang an.	3			
3	(3) interpretiert den Ausdruck im Sachzusammenhang.	3			
4	(3) gibt die Bedeutung des Zeitpunkts $t = 14$ an.	3			
5	(4) entscheidet, ob das Staubecken innerhalb des Beobachtungszeitraums überläuft.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (19)					
	Summe Teilaufgabe c)	19			

	Summe insgesamt	50			
--	------------------------	-----------	--	--	--

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.



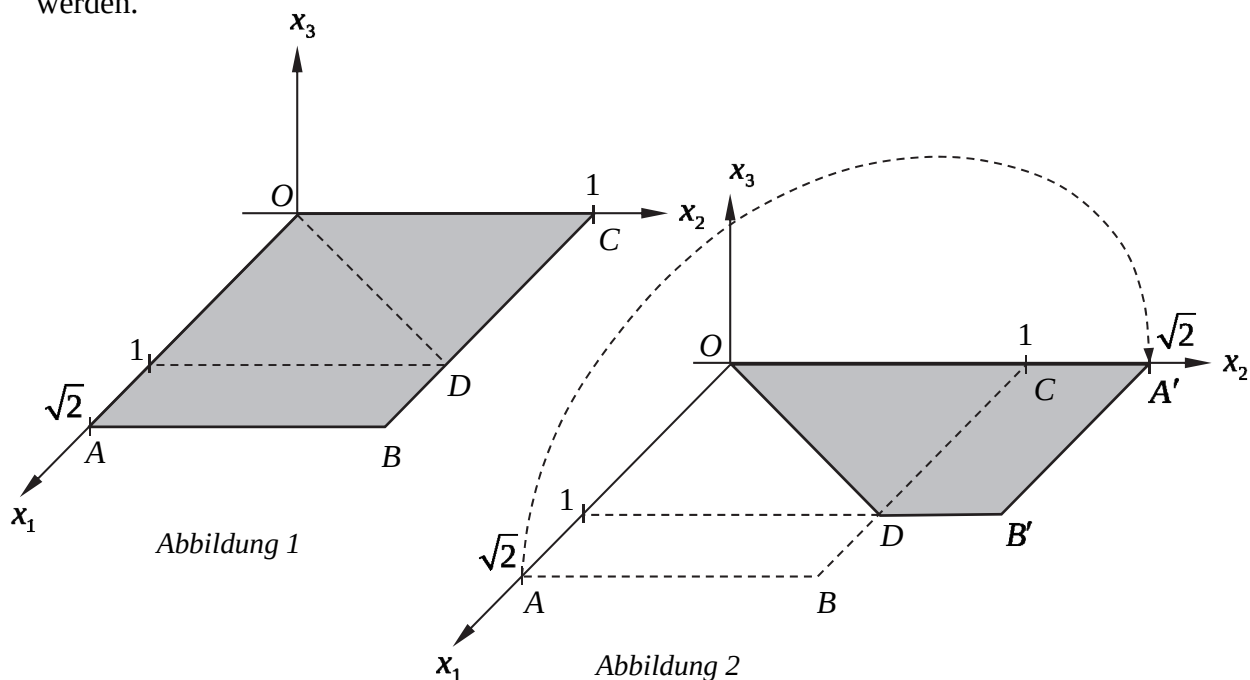
Name: _____

Abiturprüfung 2014

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Ein Blatt DIN-A4-Papier liegt in der $x_1 - x_2$ -Ebene. Gegeben sind seine Eckpunkte $O(0|0|0)$, $A(\sqrt{2}|0|0)$, $B(\sqrt{2}|1|0)$ und $C(0|1|0)$ sowie der Punkt $D(1|1|0)$.¹ Das Blatt wird jetzt entlang der Strecke \overline{OD} gefaltet. Das Dreieck ODC bleibt dabei fest, während das Viereck $OABD$ in das Viereck $OA'B'D$ übergeht, das wieder in der $x_1 - x_2$ -Ebene liegt. Die Gegebenheiten sind in den folgenden Schrägbildern dargestellt. Zur Veranschaulichung kann das als Seite 3 beigefügte DIN-A4-Blatt entsprechend gefaltet werden.



- a) (1) Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M der Strecke \overline{OD} an.
 (2) Zeigen Sie, dass die Gerade CM senkrecht zur Geraden OD ist.
 (3) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes C von der Geraden OD .

(3 + 5 + 4 Punkte)

¹ Als Längeneinheit (LE) wird die Länge der kürzeren Seite des DIN-A4-Blattes verwendet.



Name: _____

b) Die Ecke des Blattes, die durch das Falten aus der Position A in die Position A' gebracht wird, bewegt sich bei dem Faltvorgang auf einem Halbkreis in einer Ebene E , die senkrecht zur $x_1 - x_2$ -Ebene ist (siehe *Abbildungen 1 bis 3*).

- (1) Leiten Sie je eine Gleichung dieser Ebene E in Parameterform und in Koordinatenform her. [Zur Kontrolle: $E: x_1 + x_2 = \sqrt{2}$]
- (2) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Ebene E mit der Geraden OD .
[Zur Kontrolle: $S\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \mid \frac{1}{2}\sqrt{2} \mid 0\right)$] (8 + 6 Punkte)

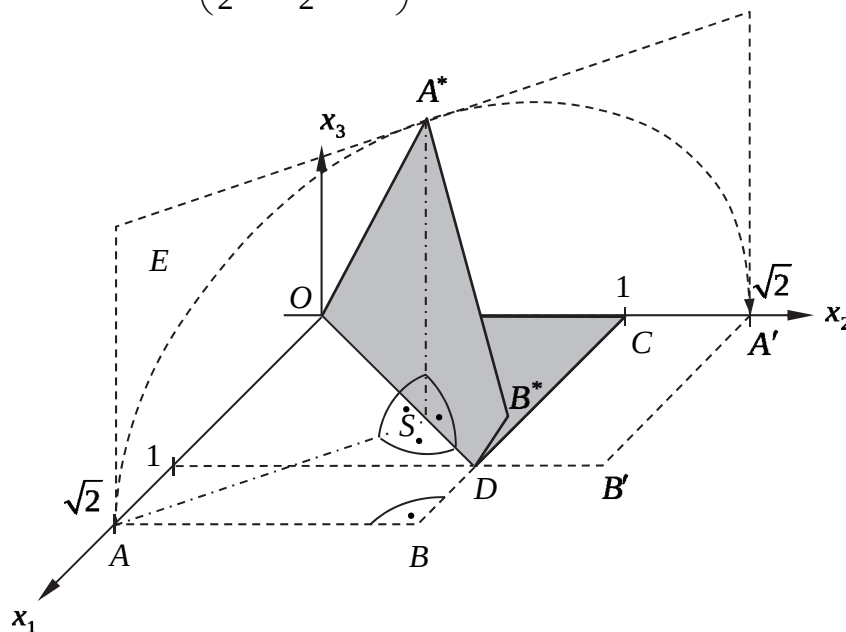


Abbildung 3

Während des Faltvorgangs wird das beim Falten bewegte Papier-Viereck auch in die Position des Vierecks OA^*B^*D gebracht, das in einer sowohl zur $x_1 - x_2$ -Ebene als auch zur Ebene E aus b) senkrechten Ebene E^* liegt (siehe *Abbildung 3*).

- c) (1) Leiten Sie eine Gleichung der Ebene E^* in Parameterform her.
- (2) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes A^* . (4 + 6 Punkte)
- d) (1) Begründen Sie, dass das Viereck $ABDS$ ein Drachenviereck ist.
- (2) Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Vierecks $ABDS$. (8 + 6 Punkte)



Name: _____

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2014

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Analytische Geometrie
Vektorielle Geometrie

2. Aufgabenstellung¹

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2014

1. Inhaltliche Schwerpunkte

Vektorielle Geometrie

- Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
- Geraden- und Ebenengleichungen in Parameterform und Koordinatenform
- Lagebeziehung von Geraden und Ebenen
- Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität und Länge von Vektoren

2. Medien/Materialien

- entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

¹ Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modellösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Elementargeometrische Lösungswege sind möglich. Dabei ist auf Vollständigkeit der Argumentation zu achten.

Teilaufgabe a)

(1) Der Mittelpunkt der Strecke \overline{OD} ist $M\left(\frac{1}{2} \mid \frac{1}{2} \mid 0\right)$.

(2) $\overline{CM} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wegen $\overline{CM} \cdot \overline{OD} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ ist die

Gerade CM senkrecht zur Geraden OD .

(3) Wegen (2) ist der gesuchte Abstand des Punktes C von der Geraden OD gleich der Länge der Strecke \overline{CM} :

$$|\overline{CM}| = \left| \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ [LE]}.$$

Teilaufgabe b)

- (1) Die Ebene E ist laut Aufgabenstellung senkrecht zur $x_1 - x_2$ -Ebene und enthält die Gerade AA' . Daher gilt:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r, s \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Aus } \begin{cases} \sqrt{2} - \sqrt{2}r = x_1 \\ \sqrt{2}r = x_2 \\ s = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2} = x_1 + x_2 \\ \sqrt{2}r = x_2 \\ s = x_3 \end{cases} \text{ ergibt sich als Koordinatengleichung von } E:$$

$$x_1 + x_2 = \sqrt{2}.$$

[Alternative: Die Gerade AA' hat offensichtlich die Gleichung $x_1 + x_2 = \sqrt{2}$. Da E senkrecht zu dieser in der $x_1 - x_2$ -Ebene verlaufenden Geraden ist, hat E dieselbe Gleichung.]

- (2) Es ist $OD: \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$ [s. o.]. Durch Einsetzen in die Koordinatengleichung von

$$E \text{ erhält man } r_s + r_s = \sqrt{2} \Leftrightarrow r_s = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ und daraus } \vec{x}_s = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ bzw. den gesuchten}$$

$$\text{Schnittpunkt } S\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \mid \frac{1}{2}\sqrt{2} \mid 0\right).$$

Teilaufgabe c)

- (1) Die Ebene E^* ist laut Aufgabenstellung senkrecht zur $x_1 - x_2$ -Ebene und enthält die Gerade OD . Daher gilt:

$$E^*: \vec{x} = u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u, v \in \mathbb{R}.$$

(2) A^* liegt auf der Schnittgeraden $h: \vec{x} = \vec{x}_s + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$, der Ebenen

E und E^* . Somit sind die erste und zweite Koordinate des Punktes A^* bekannt:

$A^* \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \mid \frac{1}{2}\sqrt{2} \mid x_3^* \right)$. Für die dritte Koordinate von A^* gilt:

$$x_3^* = |A^*S| = |AS| = \left| \frac{1}{2}\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{1}{2}\sqrt{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}\sqrt{2+2+0} = 1.$$

Teilaufgabe d)

(1) Für das in der $x_1 - x_2$ -Ebene liegende Viereck $ABDS$ ist zu zeigen:

$$|AS| = |AB| \wedge |DS| = |DB|.$$

Aus c) (2) ist bekannt: $|AS| = 1$ [LE]. Da laut Aufgabenstellung auch $|AB| = 1$ [LE]

gilt, ergibt sich $|AS| = |AB|$.

$$|DB| = \left| \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2} - 1 \text{ [LE]},$$

$$|DS| = \left| \frac{1}{2}\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2} \left| \frac{1}{2}\sqrt{2} - 1 \right| = \sqrt{2} \left| \frac{1}{2}\sqrt{2} - 1 \right| = |1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1 \text{ [LE]}.$$

Somit gilt auch $|DS| = |DB|$. Das Viereck $ABDS$ ist ein Drachenviereck.

[Andere Lösungswege sind denkbar.]

(2) Das Drachenviereck $ABDS$ besteht aus den zwei kongruenten rechtwinkligen Dreiecken ABD und ASD .

Sein Flächeninhalt beträgt daher $2 \cdot \frac{1}{2} |AB| \cdot |BD| = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} - 1$ [FE].

[Andere Lösungswege sind denkbar.]

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: _____ Kursbezeichnung: _____

Schule: _____

Teilaufgabe a)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK ²	ZK	DK
1	(1) gibt die Koordinaten des Mittelpunktes der Strecke \overline{OD} an.	3			
2	(2) zeigt, dass die Gerade CM senkrecht zur Geraden OD ist.	5			
3	(3) bestimmt den Abstand des Punktes C von der Geraden OD .	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (12)					
Summe Teilaufgabe a)		12			

Teilaufgabe b)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) leitet je eine Gleichung der Ebene E in Parameterform und Koordinatenform her.	8			
2	(2) bestimmt die Koordinaten des Schnittpunktes S der Ebene E mit der Geraden OD .	6			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (14)					
Summe Teilaufgabe b)		14			

² EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) leitet eine Gleichung der Ebene E^* in Parameterform her.	4			
2	(2) ermittelt die Koordinaten des Punktes A^* .	6			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (10)					
Summe Teilaufgabe c)		10			

Teilaufgabe d)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) begründet, dass das Viereck $ABDS$ ein Drachenviereck ist.	8			
2	(2) ermittelt den Flächeninhalt des Vierecks $ABDS$.	6			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (14)					
Summe Teilaufgabe d)		14			

Summe insgesamt		50			
------------------------	--	-----------	--	--	--

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	50			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	50			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	100			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOST				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: _____

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _____ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0



Name: _____

Abiturprüfung 2014

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Die Entwicklung der Population einer bestimmten Seevogelart in einem festgelegten Beobachtungsgebiet wird durch folgende Modellannahmen beschrieben:

Die Überlebensrate der Vögel in den ersten beiden Lebensjahren wird jeweils mit 0,6 angenommen, in den späteren Lebensjahren mit 0,8. Die erste Brut findet im 3. Lebensjahr statt, der Bruterfolg wird mit 0,5 Jungvögeln pro Elternvogel und Jahr angenommen.

Die Vögel werden in drei Altersgruppen eingeteilt, deren Anzahlen

x_1 : Anzahl der Jungvögel im 1. Lebensjahr (Altersgruppe 1)

x_2 : Anzahl der Vögel im 2. Lebensjahr (Altersgruppe 2)

x_3 : Anzahl der Altvögel, die älter als 2 Jahre sind (Altersgruppe 3)

durch jährliche Zählungen ermittelt und jeweils zu einer Verteilung¹ $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ zusammen-

gefasst werden. Die Matrix $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,5 \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,8 \end{pmatrix}$ beschreibt dieses Modell.

a) Die aktuelle Zählung ergibt $x_1 = 2000$, $x_2 = 4000$ und $x_3 = 15000$.

(1) Berechnen Sie, ausgehend von diesen Zahlen, die Verteilung der Vögel nach einem Jahr und nach 2 Jahren.

(2) Bestimmen Sie die Verteilung der Vögel, die sich aus dem Modell für das Vorjahr ergäbe.

(3) Fünf Elemente der Matrix L haben den Wert Null.

Erklären Sie für jedes dieser Elemente aus dem Sachzusammenhang heraus, warum es den Wert Null hat.

(5 + 5 + 5 Punkte)

¹ Verteilungsvektoren werden der Einfachheit halber im Folgenden kurz „Verteilung“ genannt.



Name: _____

b) (1) Untersuchen Sie, ob es eine von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ verschiedene stationäre Verteilung gibt, d. h.

eine Verteilung, die sich innerhalb eines Jahres nicht ändert.

(2) Wenn sich die Population sehr lange nach dem durch die Matrix L beschriebenen Modell entwickelt, wird sie sich pro Jahr näherungsweise um einen festen Prozentsatz p verkleinern. Nach 20 Jahren wird sie noch aus insgesamt 17870 Vögeln, nach weiteren 10 Jahren aus 15422 Vögeln bestehen.

Berechnen Sie anhand dieser Angaben einen Näherungswert für den Prozentsatz p .

(3) Langfristig gilt $p \approx 1,462\%$.

Ermitteln Sie näherungsweise, in wie viel Jahren sich unter dieser Voraussetzung die Population jeweils halbiert.

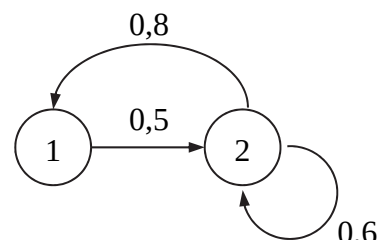
Durch Schutzmaßnahmen wird – bei sonst gleichbleibenden Modellannahmen – der Bruterfolg auf die Quote von $\frac{5}{9}$ Jungvögeln pro Elternvogel und Jahr erhöht.

(4) Zeigen Sie, dass die Verteilung $n \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ für jede positive ganze Zahl n eine stationäre Verteilung ist.

(5) Berechnen Sie für eine konkrete stationäre Verteilung aus (4) die prozentualen Anteile jeder der 3 Altersgruppen an der Gesamtzahl der Vögel und zeigen Sie, dass sich für jede stationäre Verteilung aus (4) unabhängig von n dieselben Anteile ergeben.

(6 + 5 + 5 + 4 + 6 Punkte)

c) Die Entwicklung einer Population einer anderen Vogelart ist durch den nebenstehenden Übergangsgraphen gegeben, wobei sich die Übergangsquoten wieder auf ein Jahr beziehen.



(1) Geben Sie dazu eine Übergangsmatrix M an.

(2) Beschreiben Sie anhand des Übergangsgraphen, nach welchen Modellannahmen die Entwicklung der Population dieser anderen Vogelart im Vergleich zur bisher betrachteten Seevogelart abläuft.

(4 + 5 Punkte)



Name: _____

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2014

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Analytische Geometrie
Matrizenrechnung

2. Aufgabenstellung¹

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2014

1. Inhaltliche Schwerpunkte

Lineare Algebra/Analytische Geometrie

- Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

Matrizenrechnung

- Übergangsmatrizen
- Matrizenmultiplikation als Verkettung von Übergängen

2. Medien/Materialien

- entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

¹ Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,5 \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 4000 \\ 15000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7500 \\ 1200 \\ 14400 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,5 \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7500 \\ 1200 \\ 14400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7200 \\ 4500 \\ 12240 \end{pmatrix}.$$

$$(2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,5 \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 4000 \\ 15000 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,5w_3 = 2000 \\ 0,6w_1 = 4000 \\ 0,6w_2 + 0,8w_3 = 15000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_1 = 6666\frac{2}{3} \\ w_2 = 19666\frac{2}{3} \\ w_3 = 4000 \end{cases}.$$

Aus dem Modell ergäben sich für das Vorjahr 6667 Jungvögel, 19667 Vögel im zweiten Lebensjahr und 4000 Altvögel.

[Sinnvoll gerundete Ergebnisse werden akzeptiert.]

- (3) $l_{11} = 0$: Jungvögel wechseln nach einem Jahr in die nächste Altersgruppe und bekommen noch keinen Nachwuchs.
- $l_{22} = 0$: Vögel im zweiten Lebensjahr wechseln nach einem Jahr in die nächste Altersgruppe.
- $l_{12} = 0$: Vögel im zweiten Lebensjahr bekommen noch keinen Nachwuchs [und können nicht in die Altersgruppe 1 zurückwechseln].
- $l_{23} = 0$: Altvögel der Altersgruppe 3 können nicht in die Altersgruppe 2 zurückwechseln.
- $l_{31} = 0$: Die Altersgruppe 2 kann nicht übersprungen werden.

Teilaufgabe b)

$$(1) \text{ Aus } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,5 \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \text{ ergibt sich}$$

$$\begin{cases} -s_1 + 0,5s_3 = 0 \\ 0,6s_1 - s_2 = 0 \\ 0,6s_2 - 0,2s_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -s_1 + 0,5s_3 = 0 \\ -s_2 + 0,3s_3 = 0 \\ 0,6s_2 - 0,2s_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -s_1 + 0,5s_3 = 0 \\ -s_2 + 0,3s_3 = 0 \\ -0,02s_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = 0 \\ s_3 = 0 \end{cases}.$$

Es gibt somit keine von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ verschiedene stationäre Verteilung.

$$(2) \quad p = 1 - q \approx 1 - \sqrt[10]{\frac{15422}{17870}} \approx 1 - 0,98538 = 0,01462$$

Ein Näherungswert ist $p \approx 1,462 \%$.

(3) Sei k die Anzahl der Jahre, in denen sich die Population jeweils halbiert. Dann gilt:

$$(1-p)^k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k \cdot \ln(1-p) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow k = \frac{-\ln 2}{\ln(1-p)}.$$

Für $p \approx 1,462 \%$ ergibt sich $k \approx 47,1$.

In ca. 47 Jahren halbiert sich die Population.

(4) Die Übergangsmatrix lautet nun $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5/9 \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,8 \end{pmatrix}$. Für jede positive ganze Zahl n gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5/9 \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \left(n \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5/9 \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \cdot n \\ 3 \cdot n \\ 9 \cdot n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot n \\ 3 \cdot n \\ 9 \cdot n \end{pmatrix} = n \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

- (5) Wählt man z. B. $n = 1$, so erhält man die stationäre Verteilung $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Die Anteile betragen

$$p_1 = \frac{5}{5+3+9} = \frac{5}{17} \approx 29,4\%, \quad p_2 = \frac{3}{17} \approx 17,6\%, \quad p_3 = \frac{9}{17} \approx 52,9\%.$$

Die Gesamtzahl der Vögel setzt sich aus ca. 29 % Jungvögeln, ca. 18 % Vögeln der Altersgruppe 2 und ca. 53 % Altvögeln zusammen.

Die entsprechende Berechnung für $\begin{pmatrix} 5n \\ 3n \\ 9n \end{pmatrix}$, wobei n eine positive ganze Zahl ist, ergibt die

von n unabhängigen Anteile $\frac{5n}{5n+3n+9n} = \frac{5}{17}$, $\frac{3n}{5n+3n+9n} = \frac{3}{17}$ und $\frac{9n}{5n+3n+9n} = \frac{9}{17}$.

Teilaufgabe c)

(1) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0,8 \\ 0,5 & 0,6 \end{pmatrix}$.

- (2) Bei dieser Vogelart werden nur zwei Altersgruppen unterschieden. Die erste Brut findet schon im 2. Lebensjahr statt. Die Überlebensrate beträgt im 1. Lebensjahr 0,5 und in den folgenden Lebensjahren jeweils 0,6. Auf einen Elternvogel kommen pro Jahr 0,8 Jungvögel.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: _____ Kursbezeichnung: _____

Schule: _____

Teilaufgabe a)

Anforderungen		Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK ²	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) berechnet die Verteilung nach einem Jahr und nach 2 Jahren.	5			
2	(2) bestimmt die Verteilung des Vorjahres.	5			
3	(3) erklärt für jedes der genannten 5 Elemente der Matrix <i>L</i> aus dem Sachzusammenhang heraus, warum es den Wert Null hat.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (15)					
Summe Teilaufgabe a)		15			

² EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) untersucht, ob es eine von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ verschiedene Verteilung gibt, die sich innerhalb eines Jahres nicht ändert.	6			
2	(2) berechnet einen Näherungswert für den Prozentsatz p .	5			
3	(3) ermittelt näherungsweise, in wie viel Jahren sich die Population jeweils halbiert.	5			
4	(4) zeigt, dass die Verteilung $n \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ für jede positive ganze Zahl n eine stationäre Verteilung ist.	4			
5	(5) berechnet für eine konkrete stationäre Verteilung aus (4) die prozentualen Anteile jeder der 3 Altersgruppen an der Gesamtzahl der Vögel und zeigt, dass sich für jede stationäre Verteilung aus (4) unabhängig von n dieselben Anteile ergeben.	6			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (26)					
	Summe Teilaufgabe b)	26			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) gibt eine Übergangsmatrix M an.	4			
2	(2) beschreibt anhand des Übergangsgraphen, nach welchen Modellannahmen die Entwicklung der Population dieser anderen Vogelart im Vergleich zur bisher betrachteten Seevogelart abläuft.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9)					
	Summe Teilaufgabe c)	9			

	Summe insgesamt	50			
--	------------------------	-----------	--	--	--

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	50			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	50			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	100			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOST				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: _____

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _____ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0



Name: _____

Abiturprüfung 2014

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Das Produkt „Fußball-Bundesliga“ ist ein Erfolgsmodell. Die Zuschauerzahlen erreichten in der Saison 2011/12 einen Rekord von durchschnittlich mehr als 40 000 pro Spiel. Dabei ist das Publikum mittlerweile zu 25 % weiblich.

Dieser Prozentsatz soll im Folgenden als Wahrscheinlichkeit verwendet werden.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 200 bei einem Bundesliga-Spiel zufällig ausgewählten Zuschauern¹

- (1) genau 48 weibliche Zuschauer befinden,
- (2) mindestens 35 und höchstens 60 weibliche Zuschauer befinden,
- (3) eine Anzahl von weiblichen Zuschauern befindet, die um mindestens 10 von ihrem Erwartungswert abweicht.

(2 + 3 + 5 Punkte)

b) Beschreiben Sie im vorliegenden Sachzusammenhang ein Ereignis E , dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term

$$P(E) = 1 - \sum_{k=0}^{300} \binom{1000}{k} \cdot 0,25^k \cdot 0,75^{1000-k}$$

berechnet werden kann.

[Hinweis: Der Wert dieses Terms muss nicht berechnet werden.]

(4 Punkte)

¹ Der Begriff „Zuschauer“ soll stets männliche und weibliche Zuschauer umfassen.



Name: _____

c) Bei einem Bundesliga-Spiel strömen 20 000 Zuschauer ins Stadion. An weibliche Zuschauer soll ein Flyer verteilt werden, der auf ein spezielles Getränkeangebot hinweist.

- (1) Ermitteln Sie auf der Grundlage der 20 000 Zuschauer das zum Erwartungswert symmetrische Intervall kleinster Länge, in dem die Anzahl der weiblichen Zuschauer mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,9 liegt.
- (2) Vor dem Spiel bildet sich an einem Kassenhäuschen eine Schlange von 50 Zuschauern. Nennen Sie eine Voraussetzung, unter der die Wahrscheinlichkeit P , dass sich in der Schlange 12 weibliche Zuschauer befinden, folgendermaßen berechnet werden kann:

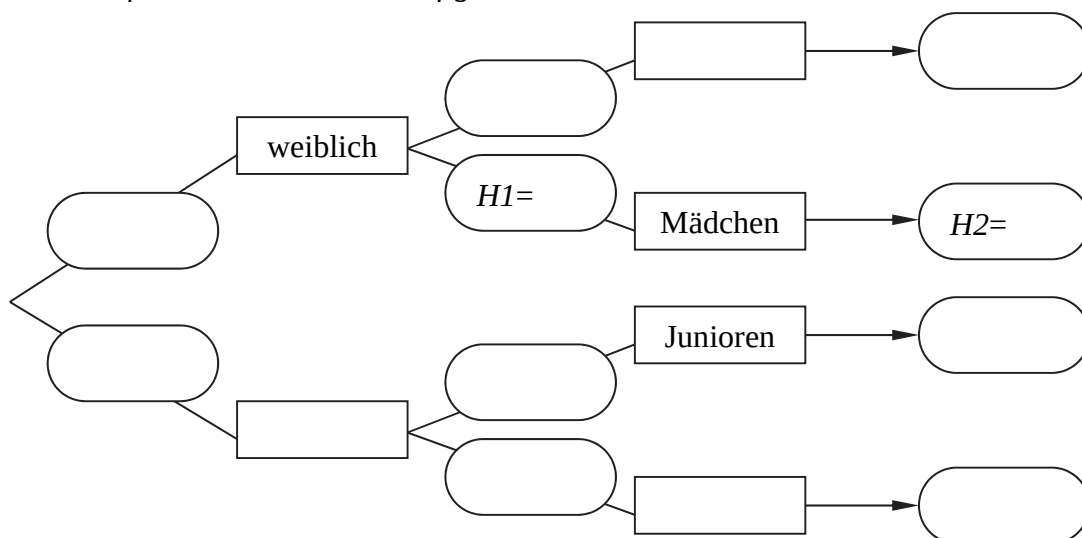
$$P = \binom{50}{12} \cdot 0,25^{12} \cdot 0,75^{38}.$$

Entscheiden Sie, ob diese Berechnung in der vorliegenden Situation zulässig ist.

(6 + 5 Punkte)

d) Im Deutschen Fußballbund (DFB) sind 1 077 215 weibliche Mitglieder gemeldet², was einem Anteil von (ungefähr) 15,84 % entspricht. Von diesen gehören 31,78 % zur Altersklasse „Mädchen“, der Rest zur Altersklasse „Frauen“. Bei den männlichen Mitgliedern unterscheidet man die Altersklassen „Junioren“ und „Senioren“. Insgesamt beträgt der Anteil der Jugendlichen („Mädchen“ und „Junioren“) im DFB 33,09 %.

- (1) Stellen Sie die gegebenen Daten in dem folgenden Baumdiagramm dar und notieren Sie alle fehlenden relativen Häufigkeiten.



² Gehen Sie davon aus, dass es sich um aktuelle Daten handelt.



Name: _____

(2) *Beschreiben Sie die relativen Häufigkeiten, die im Diagramm als H1 bzw. H2 bezeichnet werden, mit Worten.*

(3) *Zwei Mitglieder des DFB werden zufällig ausgewählt.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei den beiden Personen um einen männlichen Jugendlichen (Junior) und ein Mädchen handelt.*

(7 + 3 + 4 Punkte)

e) Um den Stadionbesuch für weibliche Zuschauer attraktiver zu gestalten, werden für diese an den Imbissständen des Stadions spezielle Angebote gemacht.

Der Verkaufsleiter vermutet, dass der Anteil weiblicher Zuschauer sogar auf über 25 % gestiegen ist, so dass er zusätzliche Vorräte für die speziellen Angebote bereitstellen müsste. Er möchte aber unbedingt vermeiden, auf größeren Mengen verderblicher Ware sitzen zu bleiben.

Um eine Entscheidung treffen zu können, nutzt er Fotos, die im Rahmen eines Anti-Hooligan-Programms von jedem einzelnen Zuschauer beim Einlass gemacht werden. Er lässt 1 000 Fotos zufällig auswählen und in dieser Stichprobe die Anzahl der Fotos bestimmen, die weibliche Zuschauer zeigen.

(1) Der Verkaufsleiter testet die Nullhypothese $H_0: p \leq 0,25$.

Begründen Sie die Wahl dieser Nullhypothese aus der Sicht des Verkaufsleiters und ermitteln Sie eine Entscheidungsregel für die genannte Stichprobe (Irrtumswahrscheinlichkeit 0,05).

(2) *Beschreiben Sie den Fehler 2. Art im Sachzusammenhang und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit seines Auftretens für den Fall, dass der Anteil der weiblichen Zuschauer tatsächlich 30 % beträgt.*

(7 + 4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung



Name: _____

Tabelle 1: σ -Regeln für Binomialverteilungen

Eine mit den Parametern n und p binomialverteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.

Wenn die LAPLACE-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist, gelten die σ -Regeln:

$P(\mu - 1,64\sigma \leq X \leq \mu + 1,64\sigma) \approx 0,90$	$P(\mu - 1,64\sigma \leq X) \approx 0,95$
	$P(X \leq \mu + 1,64\sigma) \approx 0,95$
$P(\mu - 1,96\sigma \leq X \leq \mu + 1,96\sigma) \approx 0,95$	$P(\mu - 1,96\sigma \leq X) \approx 0,975$
	$P(X \leq \mu + 1,96\sigma) \approx 0,975$
$P(\mu - 2,58\sigma \leq X \leq \mu + 2,58\sigma) \approx 0,99$	$P(\mu - 2,58\sigma \leq X) \approx 0,995$
	$P(X \leq \mu + 2,58\sigma) \approx 0,995$

$P(\mu - 1\sigma \leq X \leq \mu + 1\sigma) \approx 0,683$	$P(\mu - 1\sigma \leq X) \approx 0,841$
	$P(X \leq \mu + 1\sigma) \approx 0,841$
$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954$	$P(\mu - 2\sigma \leq X) \approx 0,977$
	$P(X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,977$
$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$	$P(\mu - 3\sigma \leq X) \approx 0,999$
	$P(X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,999$



Name: _____

Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für $n = 10$ und $n = 20$

$$F(n; p; k) = B(n; p; 0) + \dots + B(n; p; k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \dots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

		p										
n	k	0,02	0,05	0,08	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,5		n
10	0	0,8171	0,5987	0,4344	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010	9	10
	1	0,9838	0,9139	0,8121	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107	8	
	2	0,9991	0,9885	0,9599	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547	7	
	3		0,9990	0,9942	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719	6	
	4		0,9999	0,9994	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770	5	
	5				0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230	4	
	6					0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,8281	3	
	7						0,9999	0,9996	0,9984	0,9453	2	
	8								0,9999	0,9893	1	
	9									0,9990	0	
20	0	0,6676	0,3585	0,1887	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	19	20
	1	0,9401	0,7358	0,5169	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000	18	
	2	0,9929	0,9245	0,7879	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002	17	
	3	0,9994	0,9841	0,9294	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013	16	
	4		0,9974	0,9817	0,9568	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059	15	
	5		0,9997	0,9962	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207	14	
	6			0,9994	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577	13	
	7			0,9999	0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316	12	
	8				0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517	11	
	9					0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,4119	10	
10						0,9994	0,9961	0,9829	0,5881	9		
11						0,9999	0,9991	0,9949	0,7483	8		
12							0,9998	0,9987	0,8684	7		
13								0,9997	0,9423	6		
14									0,9793	5		
15									0,9941	4		
16									0,9987	3		
17									0,9998	2		
n		0,98	0,95	0,92	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,5	k	n

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n; p; k) = 1 -$ abgelesener Wert



Name: _____

Tabelle 3: Kumulierte Binomialverteilung für $n = 50$

$$F(n; p; k) = B(n; p; 0) + \dots + B(n; p; k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \dots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	k	p										n	
		0,02	0,05	0,1	0,125	0,15	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		
50	0	0,3642	0,0769	0,0052	0,0013	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	49	
	1	0,7358	0,2794	0,0338	0,0103	0,0029	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	48	
	2	0,9216	0,5405	0,1117	0,0418	0,0142	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	47	
	3	0,9822	0,7604	0,2503	0,1138	0,0460	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	46	
	4	0,9968	0,8964	0,4312	0,2346	0,1121	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	45	
	5	0,9995	0,9622	0,6161	0,3935	0,2194	0,0480	0,0070	0,0007	0,0000	0,0000	44	
	6	0,9999	0,9882	0,7702	0,5637	0,3613	0,1034	0,0194	0,0025	0,0000	0,0000	43	
	7		0,9968	0,8779	0,7165	0,5188	0,1904	0,0453	0,0073	0,0001	0,0000	42	
	8		0,9992	0,9421	0,8339	0,6681	0,3073	0,0916	0,0183	0,0002	0,0000	41	
	9		0,9998	0,9755	0,9121	0,7911	0,4437	0,1637	0,0402	0,0008	0,0000	40	
	10			0,9906	0,9579	0,8801	0,5836	0,2622	0,0789	0,0022	0,0000	39	
	11			0,9968	0,9817	0,9372	0,7107	0,3816	0,1390	0,0057	0,0000	38	
	12			0,9990	0,9928	0,9699	0,8139	0,5110	0,2229	0,0133	0,0002	37	
	13			0,9997	0,9974	0,9868	0,8894	0,6370	0,3279	0,0280	0,0005	36	
	14			0,9999	0,9991	0,9947	0,9393	0,7481	0,4468	0,0540	0,0013	35	
	15				0,9997	0,9981	0,9692	0,8369	0,5692	0,0955	0,0033	34	
	16				0,9999	0,9993	0,9856	0,9017	0,6839	0,1561	0,0077	33	
	17					0,9998	0,9937	0,9449	0,7822	0,2369	0,0164	32	
	18					0,9999	0,9975	0,9713	0,8594	0,3356	0,0325	31	
	19						0,9991	0,9861	0,9152	0,4465	0,0595	30	
	20						0,9997	0,9937	0,9522	0,5610	0,1013	29	
	21						0,9999	0,9974	0,9749	0,6701	0,1611	28	
	22							0,9990	0,9877	0,7660	0,2399	27	
	23							0,9996	0,9944	0,8438	0,3359	26	
	24							0,9999	0,9976	0,9022	0,4439	25	
	25								0,9991	0,9427	0,5561	24	
	26								0,9997	0,9686	0,6641	23	
	27								0,9999	0,9840	0,7601	22	
	28									0,9924	0,8389	21	
	29									0,9966	0,8987	20	
	30									0,9986	0,9405	19	
	31									0,9995	0,9675	18	
	32									0,9998	0,9836	17	
	33									0,9999	0,9923	16	
	34										0,9967	15	
	35										0,9987	14	
	36										0,9995	13	
37										0,9998	12		
n		0,98	0,95	0,9	0,875	0,85	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	k	n

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n; p; k) = 1 -$ abgelesener Wert



Name: _____

Tabelle 4: Kumulierte Binomialverteilung für $n = 200$

$$F(n; p; k) = B(n; p; 0) + \dots + B(n; p; k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \dots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	k	p								n	
		0,02	0,04	0,05	0,1	0,15	1/6	0,2	0,25		
200	0	0,0176	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	199	
	1	0,0894	0,0027	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	198	
	2	0,2351	0,0125	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	197	
	3	0,4315	0,0395	0,0090	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	196	
	4	0,6288	0,0950	0,0264	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	195	
	5	0,7867	0,1856	0,0623	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	194	
	6	0,8914	0,3084	0,1237	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	193	
	7	0,9507	0,4501	0,2133	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	192	
	8	0,9798	0,5926	0,3270	0,0014	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	191	
	9	0,9925	0,7192	0,4547	0,0035	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	190	
	10	0,9975	0,8200	0,5831	0,0081	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	189	
	11	0,9992	0,8925	0,6998	0,0168	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	188	
	12	0,9998	0,9401	0,7965	0,0320	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	187	
	13	0,9999	0,9688	0,8701	0,0566	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	186	
	14		0,9848	0,9219	0,0929	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	185	
	15		0,9930	0,9556	0,1431	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000	184	
	16		0,9970	0,9762	0,2075	0,0021	0,0003	0,0000	0,0000	183	
	17		0,9988	0,9879	0,2849	0,0043	0,0006	0,0000	0,0000	182	
	18		0,9995	0,9942	0,3724	0,0082	0,0013	0,0000	0,0000	181	
	19		0,9998	0,9973	0,4655	0,0149	0,0027	0,0000	0,0000	180	
	20		0,9999	0,9988	0,5592	0,0255	0,0052	0,0001	0,0000	179	
	21			0,9995	0,6484	0,0415	0,0094	0,0002	0,0000	178	
	22			0,9998	0,7290	0,0645	0,0163	0,0005	0,0000	177	
	23			0,9999	0,7983	0,0959	0,0269	0,0010	0,0000	176	
	24				0,8551	0,1368	0,0426	0,0020	0,0000	175	
	25				0,8995	0,1876	0,0648	0,0036	0,0000	174	
	26				0,9328	0,2480	0,0945	0,0064	0,0000	173	
	27				0,9566	0,3166	0,1329	0,0110	0,0000	172	
	28				0,9729	0,3914	0,1803	0,0179	0,0001	171	
	29				0,9837	0,4697	0,2366	0,0283	0,0002	170	
	30				0,9905	0,5485	0,3007	0,0430	0,0004	169	
	31				0,9946	0,6247	0,3711	0,0632	0,0008	168	
	32				0,9971	0,6958	0,4454	0,0899	0,0014	167	
	33				0,9985	0,7596	0,5210	0,1239	0,0026	166	
	34				0,9992	0,8150	0,5953	0,1656	0,0044	165	
	35				0,9996	0,8613	0,6658	0,2151	0,0073	164	
	36				0,9998	0,8987	0,7305	0,2717	0,0117	163	
	37				0,9999	0,9280	0,7877	0,3345	0,0182	162	
	38					0,9502	0,8369	0,4019	0,0276	161	
	39					0,9665	0,8777	0,4718	0,0405	160	
	40					0,9780	0,9106	0,5422	0,0578	159	
	41					0,9860	0,9362	0,6108	0,0804	158	
	42					0,9913	0,9556	0,6758	0,1089	157	
	43					0,9947	0,9699	0,7355	0,1438	156	
	44					0,9969	0,9801	0,7887	0,1852	155	
	45					0,9982	0,9872	0,8349	0,2332	154	
	46					0,9990	0,9919	0,8738	0,2870	153	
	47					0,9995	0,9950	0,9056	0,3458	152	
	48					0,9997	0,9970	0,9310	0,4083	151	
	49					0,9998	0,9983	0,9506	0,4729	150	
	50					0,9999	0,9990	0,9655	0,5379	149	
	51						0,9995	0,9764	0,6017	148	
	52						0,9997	0,9843	0,6626	147	
	53						0,9998	0,9897	0,7192	146	
	54						0,9999	0,9934	0,7707	145	
	55							0,9959	0,8162	144	
	56							0,9975	0,8555	143	
	57							0,9985	0,8885	142	
	58							0,9991	0,9157	141	
	59							0,9995	0,9375	140	
	60							0,9997	0,9546	139	
	61							0,9998	0,9677	138	
	62							0,9999	0,9774	137	
	63								0,9846	136	
	64								0,9897	135	
	65								0,9932	134	
	66								0,9956	133	
	67								0,9972	132	
	68								0,9983	131	
	69								0,9990	130	
	70								0,9994	129	
	71								0,9996	128	
	72								0,9998	127	
	73								0,9999	126	
74								0,9999	125		
n		0,98	0,96	0,95	0,9	0,85	5/6	0,8	0,75	k	n

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n; p; k) = 1 -$ abgelesener Wert



Name: _____

Tabelle 5: Kumulierte Binomialverteilung für $n = 1000$

$$F(n; p; k) = B(n; p; 0) + \dots + B(n; p; k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \dots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	k	p				n	n
		0,2	0,25	0,3	0,35		
1000	250	0,9999	0,5170	0,0003	0,0000	749	1000
	251	1,0000	0,5460	0,0003	0,0000	748	
	252	1,0000	0,5747	0,0004	0,0000	747	
	253	1,0000	0,6031	0,0006	0,0000	746	
	254	1,0000	0,6308	0,0007	0,0000	745	
	255	1,0000	0,6579	0,0009	0,0000	744	
	256	1,0000	0,6842	0,0012	0,0000	743	
	257	1,0000	0,7095	0,0015	0,0000	742	
	258	1,0000	0,7338	0,0019	0,0000	741	
	259	1,0000	0,7571	0,0023	0,0000	740	
	260	1,0000	0,7791	0,0029	0,0000	739	
	261	1,0000	0,8000	0,0036	0,0000	738	
	262	1,0000	0,8196	0,0044	0,0000	737	
	263	1,0000	0,8380	0,0055	0,0000	736	
	264	1,0000	0,8550	0,0067	0,0000	735	
	265	1,0000	0,8708	0,0081	0,0000	734	
	266	1,0000	0,8854	0,0098	0,0000	733	
	267	1,0000	0,8987	0,0118	0,0000	732	
	268	1,0000	0,9109	0,0142	0,0000	731	
	269	1,0000	0,9219	0,0169	0,0000	730	
	270	1,0000	0,9319	0,0201	0,0000	729	
	271	1,0000	0,9408	0,0238	0,0000	728	
	272	1,0000	0,9488	0,0280	0,0000	727	
	273	1,0000	0,9559	0,0329	0,0000	726	
	274	1,0000	0,9622	0,0384	0,0000	725	
	275	1,0000	0,9677	0,0446	0,0000	724	
	276	1,0000	0,9725	0,0516	0,0000	723	
	277	1,0000	0,9768	0,0594	0,0000	722	
	278	1,0000	0,9804	0,0682	0,0000	721	
	279	1,0000	0,9836	0,0779	0,0000	720	
	280	1,0000	0,9863	0,0886	0,0000	719	
	281	1,0000	0,9886	0,1003	0,0000	718	
	282	1,0000	0,9905	0,1132	0,0000	717	
	283	1,0000	0,9922	0,1271	0,0000	716	
	284	1,0000	0,9936	0,1422	0,0000	715	
285	1,0000	0,9948	0,1585	0,0000	714		
286	1,0000	0,9957	0,1759	0,0000	713		
287	1,0000	0,9966	0,1945	0,0000	712		
288	1,0000	0,9972	0,2142	0,0000	711		
289	1,0000	0,9978	0,2350	0,0000	710		
290	1,0000	0,9982	0,2569	0,0000	709		
291	1,0000	0,9986	0,2798	0,0000	708		
292	1,0000	0,9989	0,3036	0,0001	707		
293	1,0000	0,9991	0,3282	0,0001	706		
294	1,0000	0,9993	0,3536	0,0001	705		
295	1,0000	0,9995	0,3797	0,0001	704		
296	1,0000	0,9996	0,4063	0,0002	703		
297	1,0000	0,9997	0,4333	0,0002	702		
298	1,0000	0,9997	0,4606	0,0003	701		
299	1,0000	0,9998	0,4881	0,0004	700		
300	1,0000	0,9999	0,5156	0,0005	699		
301	1,0000	0,9999	0,5430	0,0006	698		
302	1,0000	0,9999	0,5702	0,0007	697		
303	1,0000	0,9999	0,5971	0,0009	696		
304	1,0000	1,0000	0,6235	0,0012	695		
305	1,0000	1,0000	0,6493	0,0014	694		
306	1,0000	1,0000	0,6744	0,0018	693		
307	1,0000	1,0000	0,6988	0,0022	692		
308	1,0000	1,0000	0,7223	0,0028	691		
309	1,0000	1,0000	0,7448	0,0034	690		
310	1,0000	1,0000	0,7663	0,0041	339		
311	1,0000	1,0000	0,7868	0,0050	338		
312	1,0000	1,0000	0,8061	0,0061	337		
313	1,0000	1,0000	0,8244	0,0074	686		
314	1,0000	1,0000	0,8415	0,0089	685		
n		0,8	0,75	0,7	0,65	k	n

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$ gilt: $F(n; p; k) = 1 -$ abgelesener Wert



Name: _____

Tabelle 6: Normalverteilung

$$\phi(z) = 0, \dots$$

$$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$$\phi(2,32) = 0,9898$$

$$\phi(z) = 0,994 \Rightarrow z = 2,51$$

$$\phi(-0,9) = 1 - \phi(0,9) = 0,1841$$

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2014

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Stochastik

2. Aufgabenstellung¹

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2014

1. Inhaltliche Schwerpunkte

- Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
- Binomialverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung
- Ein- und zweiseitiger Hypothesentest

2. Medien/Materialien

- entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

¹ Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

Die Zufallsgröße X : Anzahl der weiblichen Zuschauer kann als binomialverteilt angenommen werden mit $p = 0,25$ und $n = 200$.

$$(1) P(X = 48) = P(X \leq 48) - P(X \leq 47) \stackrel{\text{Tabelle}}{\approx} 0,4083 - 0,3458 = 0,0625$$

$$(2) P(35 \leq X \leq 60) = P(X \leq 60) - P(X \leq 34) \stackrel{\text{Tabelle}}{\approx} 0,9546 - 0,0044 = 0,9502$$

$$(3) \text{ Der Erwartungswert beträgt } \mu = 200 \cdot 0,25 = 50.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist somit:

$$P(X \leq 40) + P(X \geq 60) = P(X \leq 40) + (1 - P(X \leq 59)) \stackrel{\text{Tabelle}}{\approx} 0,0578 + (1 - 0,9375) = 0,1203.$$

Teilaufgabe b)

Im vorliegenden Sachzusammenhang kann das Ereignis E z. B. folgendermaßen lauten: „Unter 1000 zufällig ausgewählten Zuschauern eines Fußballspiels sind mehr als 300 weiblich“.

Teilaufgabe c)

(1) Die Zufallsgröße X : Anzahl der weiblichen Zuschauer kann als binomialverteilt angenommen werden mit $p = 0,25$ und $n = 20000$.

$$\text{Es ist } \mu = p \cdot n = 5000 \text{ und } \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{20000 \cdot 0,25 \cdot 0,75} \approx 61,24 > 3.$$

Damit ist die Laplace-Bedingung erfüllt und es gilt

$$P(\mu - 1,64\sigma \leq X \leq \mu + 1,64\sigma) \approx 0,90.$$

Wegen $4899 \leq \mu - 1,64\sigma \leq 4900$ und $5100 \leq \mu + 1,64\sigma \leq 5101$ ist das gesuchte Intervall [unter Verwendung der üblichen Näherungswerte ebenso wie bei genauer Rechnung] das Intervall [4899; 5101].

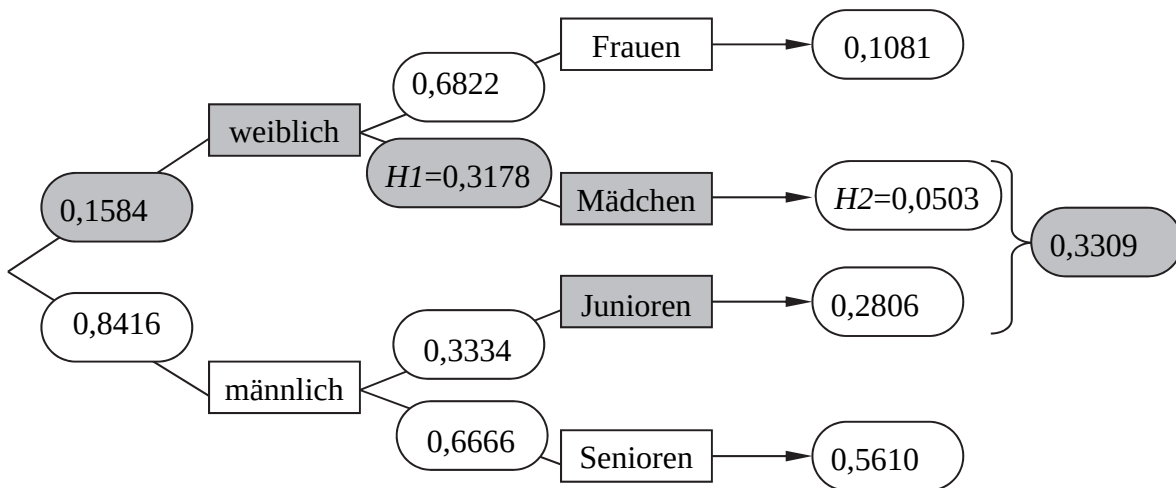
- (2) Die Verwendung der Formel setzt voraus, dass die Zufallsgröße X : *Anzahl der weiblichen Zuschauer in der Schlange* binomialverteilt ist mit $p = 0,25$ und $n = 50$.

Das bedeutet z. B.: Jede Person in der Schlange ist unabhängig von den anderen Personen mit gleichbleibender Wahrscheinlichkeit von $p = 0,25$ weiblich.

Dies kann jedoch nicht vorausgesetzt werden, da sich in einer Warteschlange von 50 Personen z. B. auch Gruppen von Personen (Familien-, Vereins-, Fanclubmitglieder ...) befinden können.

Teilaufgabe d)

- (1) Die gegebenen Daten sind hier grau unterlegt. Mit den Daten ergibt sich folgendes Baumdiagramm:



- (2) $H1$ ist der Anteil der Mädchen an den weiblichen Mitgliedern des DFB, $H2$ ist der Anteil der Mädchen an der Gesamtheit aller DFB-Mitglieder.
- (3) [Da zufällig ausgewählt wurde, können die relativen Häufigkeiten des Baumdiagramms als Wahrscheinlichkeiten verwendet werden.]
 Die Wahrscheinlichkeit, zufällig einen männlichen Jugendlichen auszuwählen, beträgt ca. 0,2806. Die Wahrscheinlichkeit, zufällig ein Mädchen auszuwählen, beträgt ca. 0,0503. [Wegen der großen Anzahl der DFB-Mitglieder ändert sich die jeweilige Wahrscheinlichkeit bei der Auswahl der zweiten Person im Rahmen der vorgegebenen Genauigkeit nicht.]
 Das betrachtete Ereignis umfasst zwei Ergebnisse, die sich in der Reihenfolge unterscheiden. Daher beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit ca. $2 \cdot 0,2806 \cdot 0,0503 \approx 0,0282$.

Teilaufgabe e)

- (1) Mit der Wahl von $H_0: p \leq 0,25$ als Nullhypothese beschränkt der Verkaufsleiter die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers 1. Art, in dessen Folge er auf größeren Mengen verderblicher Ware sitzen bleiben könnte, durch die [gegebene] Irrtumswahrscheinlichkeit auf höchstens 0,05.

Die Zufallsgröße X : *Anzahl weiblicher Zuschauer* kann als binomialverteilt angenommen werden. Es handelt sich um einen rechtsseitigen Test mit $n = 1000$, $z = 1,64$, $\mu = 250$ und $\sigma = \sqrt{1000 \cdot 0,25 \cdot 0,75} \approx 13,69 > 3$.

Da die Laplace-Bedingung erfüllt ist, gilt $P(X > \mu + 1,64\sigma) \approx 0,05$.

Mit $\mu + 1,64\sigma \approx 272,5$ ergibt sich als Entscheidungsregel:

Verwirf die Nullhypothese, falls 273 oder mehr weibliche Zuschauer gezählt werden.

[Alternative: Bei Verwendung der Tabelle oder eines geeigneten Taschenrechners erhält man: $P_{p=0,25}(X \geq 273) \approx 0,0512 > 0,05$ und $P_{p=0,25}(X \geq 274) \approx 0,0441 < 0,05$.

Als Entscheidungsregel ergibt sich in diesem Fall:

Verwirf die Nullhypothese, falls 274 oder mehr weibliche Zuschauer gezählt werden.]

- (2) Der Fehler 2. Art besteht darin, dass die Nullhypothese [entsprechend der Entscheidungsregel bei einem Stichprobenergebnis kleiner als 273 [bzw. 274]] irrtümlich nicht verworfen wird, obwohl mehr als 25 % der Zuschauer im Stadion weiblich sind.

Die Wahrscheinlichkeit seines Auftretens beträgt $\beta = P_{p=0,3}(X \leq 272) \stackrel{\text{Tabelle}}{\approx} 0,0280$.

[Zur Alternative aus (1) gehört $\beta = P_{p=0,3}(X \leq 273) \stackrel{\text{Tabelle}}{\approx} 0,0329$.]

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: _____ Kursbezeichnung: _____

Schule: _____

Teilaufgabe a)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK ²	ZK	DK
1	(1) berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	2			
2	(2) berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3			
3	(3) berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (10)					
Summe Teilaufgabe a)		10			

Teilaufgabe b)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	beschreibt ein passendes Ereignis <i>E</i> .	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4)					
Summe Teilaufgabe b)		4			

² EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) ermittelt das gesuchte Intervall.	6			
2	(2) nennt eine Voraussetzung für die Verwendung des Terms.	3			
3	(2) entscheidet, ob die Verwendung des Terms zulässig ist.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11)					
Summe Teilaufgabe c)		11			

Teilaufgabe d)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) stellt die gegebenen Daten in dem Baumdiagramm dar und notiert alle fehlenden relativen Häufigkeiten.	7			
2	(2) beschreibt die relativen Häufigkeiten $H1$ und $H2$ mit Worten.	3			
3	(3) ermittelt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (14)					
Summe Teilaufgabe d)		14			

Teilaufgabe e)

Anforderungen		Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) begründet die Wahl der Nullhypothese.	2			
2	(1) ermittelt eine Entscheidungsregel.	5			
3	(2) beschreibt den Fehler 2. Art im Sachzusammenhang und berechnet die Wahrscheinlichkeit seines Auftretens.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11)					
Summe Teilaufgabe e)		11			

Summe insgesamt	50			
------------------------	-----------	--	--	--

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktzahl aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	50			
Übertrag der Punktzahl aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	50			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	100			
aus der Punktzahl resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOST				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktzahlen aus EK und ZK: _____

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _____ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0