Name: ____________________

Abiturprüfung 2014

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Ein Ölfeld wird seit Beginn des Jahres 1990 mit Bohrungen in mehreren Erdöl führenden Schichten erschlossen. Die momentane Förderrate[1] aus diesem Ölfeld im Zeitraum von Anfang 1990 bis Ende 2009 kann im Intervall $[0;20]$ durch die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = (1020 - 40t) \cdot e^{\frac{1}{10}t}, \; t \in \mathbb{R},$$

modelliert werden.
Dabei wird t als Maßzahl zur Einheit 1 Jahr und $f(t)$ als Maßzahl zur Einheit **1000 Tonnen** pro Jahr aufgefasst. Der Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dem Beginn des Jahres 1990.
Der Graph von f ist in der *Abbildung 1* in dem für die Modellierung zu betrachtenden Intervall dargestellt.

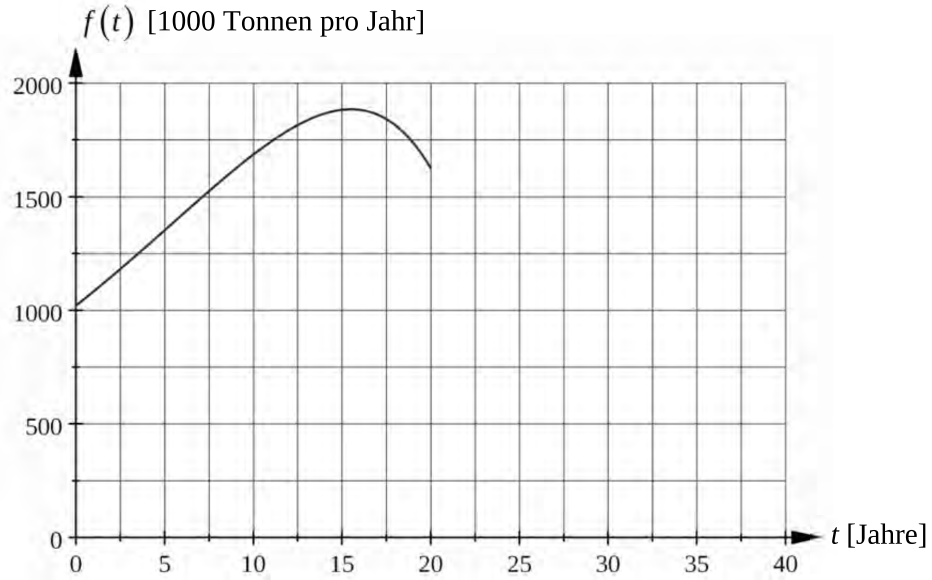


Abbildung 1

[1] Im Folgenden wird vereinfachend nur der Begriff der **Förderrate** verwendet, wobei durchgehend die **momentane Förderrate** gemeint und zu betrachten ist.

Name: ____________________

a) (1) *Bestimmen Sie den Zeitpunkt im betrachteten Zeitraum von Anfang 1990 bis Ende 2009, zu dem die Förderrate maximal ist, und berechnen Sie den Maximalwert.*

[Zur Kontrolle: $f'(t) = (62 - 4t) \cdot e^{\frac{1}{10}t}$]

(2) *Zeigen Sie, dass die Förderrate im Zeitraum von Mitte 2005 bis Ende 2009 ständig zurückgeht und der Rückgang dabei immer stärker wird.*

(8 + 7 Punkte)

b) Die Menge des Erdöls, das seit dem Beginn der Ölförderung Anfang 1990 bis zu einem beliebigen Zeitpunkt t des betrachteten Zeitraums aus dem Ölfeld gefördert wurde, wird durch eine Funktion $M: \ t \mapsto M(t), \ 0 \le t \le 20$, beschrieben.

(1) *Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Funktion M.*

(2) *Berechnen Sie die gesamte Fördermenge aus dem Ölfeld von Anfang 1990 bis Ende 2009.*

(4 + 2 Punkte)

Seit Anfang des Jahres 2010 schwächt sich der Rückgang der Förderrate ab. Diese soll daher für $t > 20$ durch eine Funktion $g_{k,b}$ mit der Gleichung

$$g_{k,b}(t) = k \cdot e^{-\frac{1}{10}t} + b, \ k, b, t \in \mathbb{R}, \ k > 0,$$

modelliert werden. Dabei wird wieder t als Maßzahl zur Einheit 1 Jahr und $g_{k,b}(t)$ als Maßzahl zur Einheit 1000 Tonnen pro Jahr aufgefasst. Der Zeitpunkt $t = 20$ entspricht dem Beginn des Jahres 2010.

c) (1) *Begründen Sie, dass aus der Voraussetzung $k > 0$ der streng monotone Rückgang der Förderrate folgt.*

(2) *Bestimmen Sie die Werte der Parameter k und b so, dass der Graph der Funktion $g_{k,b}$ durch den Punkt $P(20 \mid f(20))$ verläuft und dort dieselbe Steigung wie der Graph der Funktion f hat.*

(4 + 4 Punkte)

Name: ____________________

Für $k = 180 \cdot e^4$ und $b = 40 \cdot e^2$ wird die Funktion $g_{k,b}$ der Einfachheit halber mit g bezeichnet:

$$g(t) = 180 \cdot e^{4 - \frac{1}{10}t} + 40 \cdot e^2,\ t \in \mathbb{R}.$$

Sie modelliert für $20 < t \le 40$ die Förderrate von Anfang 2010 bis Ende 2029.

Die *Abbildung 2* stellt die Graphen von f und g in den jeweils für die Modellierung zu betrachtenden Intervallen dar.

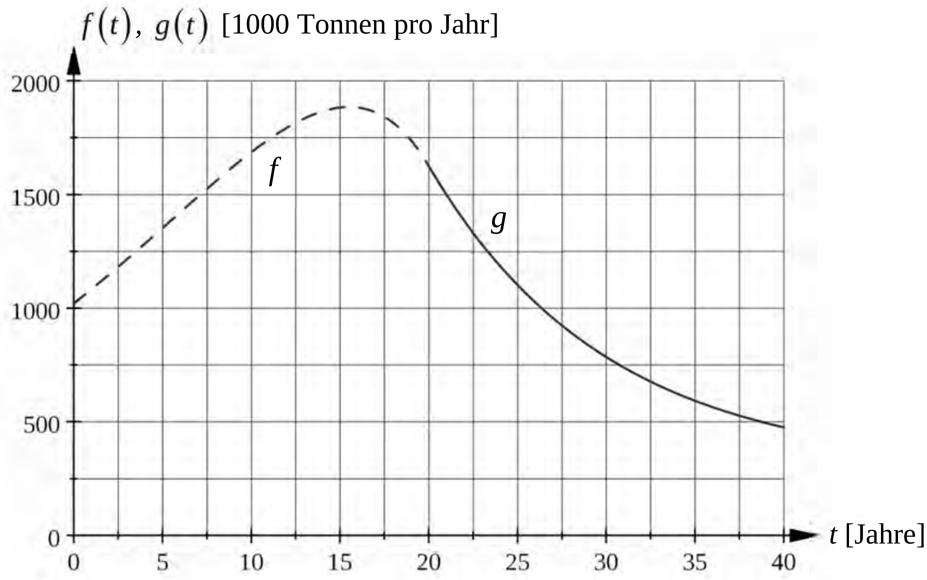


Abbildung 2

d) (1) *Begründen Sie anhand des Funktionsterms von g, warum die Funktion g die Förderrate nicht über einen längeren Zeitraum sinnvoll beschreiben könnte.*

(2) *Ermitteln Sie die im Jahr 2013 geförderte Erdölmenge und berechnen Sie die Einnahmen aus dem Verkauf dieses Erdöls, wenn man von einem Verkaufspreis von 82 Euro pro Barrel im Jahr 2013 ausgeht.*
1 Barrel Erdöl (ca. 159 Liter) wiegt ca. 137 kg.

(3) Der Betreiber kalkuliert, dass die Ölförderung für ihn nur wirtschaftlich ist, wenn innerhalb eines Kalenderjahres mindestens 600 000 Tonnen Öl gefördert werden.
Bestimmen Sie das letzte Kalenderjahr, für das die Ölförderung wirtschaftlich sein wird.

(4 + 5 + 6 Punkte)

Name: ______________________

e) *Begründen Sie, dass die Funktion h mit der Gleichung* $h(t)=\begin{cases} f(t), & 0\le t\le 20 \\ g(t), & 20<t\le 40 \end{cases}$ *an der Stelle* $t=20$ *differenzierbar ist, und entscheiden Sie, ob h dort zweimal differenzierbar ist.*

(6 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2014

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2014

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
    - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich Funktionenscharen sowie Logarithmusfunktionen in Sachzusammenhängen, notwendige Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel)
    - Untersuchung von Wirkungen (Integral der Änderungsrate)
    - Integrationsregeln (partielle Integration, Substitution)
    - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
    - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Gesucht ist das globale Maximum der Funktion f auf dem abgeschlossenen Intervall [0;20]. Dieses kann dort nur an einer Nullstelle von f' oder einer Randstelle angenommen werden.

Es gilt $f'(t_m) = 0 \Leftrightarrow t_m = 15{,}5$ sowie $f(0) = 1020$, $f(t_m) \approx 1884{,}6$ und $f(20) \approx 1625{,}6$.

Folglich ist $f(t_m)$ das gesuchte globale Maximum:

Die Förderrate ist Mitte des Jahres 2005 mit ca. 1,88 Millionen Tonnen pro Jahr maximal.

(2) Dem Zeitraum von Mitte 2005 bis Ende 2009 entspricht das Intervall $I = [15{,}5; 20]$.

Wegen $f'(t) < 0 \Leftrightarrow t > 15{,}5$ und $f''(t) < 0 \Leftrightarrow t > 5{,}5$ folgt für alle $t \in I$:

$f'(t) < 0$ und $f''(t) < 0$. Das bedeutet, die Funktionen f und f' sind beide im Intervall I streng monoton fallend.

Damit ist die Aussage aus der Aufgabenstellung gezeigt.

Teilaufgabe b)

(1) Es gilt: $M(t) = \int_0^t f(u)\,du = 200 \cdot (71 - 2t) \cdot e^{\frac{1}{10}t} - 14\,200$.

(2) $M(20) \approx 31\,612$.

Von Anfang 1990 bis Ende 2009 wurden rund 31,6 Millionen Tonnen Erdöl aus dem Ölfeld gefördert.

Teilaufgabe c)

(1) Es gilt $k > 0 \Leftrightarrow g'_{k,b}(t) < 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Folglich ist die Funktion $g_{k,b}$ bzw. die Förderrate streng monoton fallend.

(2) Es gilt: $g_{k,b}(20) = f(20) \wedge g'_{k,b}(20) = f'(20) \Leftrightarrow k = 180 \cdot e^4 \wedge b = 40 \cdot e^2$.

Teilaufgabe d)

(1) Für große t streben die Funktionswerte von g gegen $\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = 40 \cdot e^2 \approx 295{,}6 \neq 0$, die Förderrate nähert sich somit einem konstanten positiven Wert. Das Ölfeld hätte – im Widerspruch zur Realität – unerschöpfliche Ölreserven.

(2) Die im Jahr 2013 geförderte Ölmenge lässt sich durch $\int_{23}^{24} g(t)\,dt$ ermitteln. Es gilt:

$$\int_{23}^{24} g(t)\,dt \approx 1233{,}21.$$

Im Jahr 2013 wurden rund 1,233 Millionen Tonnen Erdöl aus dem Ölfeld gefördert.

Daraus ergeben sich für das Jahr 2013 Einnahmen von rund

$$\left(1233{,}21 \cdot 10^6 \text{ kg} : 137 \frac{\text{kg}}{\text{Barrel}}\right) \cdot 82 \frac{\text{Euro}}{\text{Barrel}}$$
$$\approx \left(9{,}0015 \cdot 10^6 \text{ Barrel}\right) \cdot 82 \frac{\text{Euro}}{\text{Barrel}}$$
$$\approx 738 \text{ Millionen Euro.}$$

(3) Die Fördermenge eines Jahres lässt sich durch $J(T) = \int_{T}^{T+1} g(t)\,dt$, $20 < T \leq 39$, ermitteln.

Die Gleichung $J(T_0) = 600$ zur Berechnung des Zeitpunktes T_0, für den die im Zeitraum $[T_0; T_0 + 1]$ geförderte Menge Erdöl 600 000 Tonnen beträgt, hat die Lösung $T_0 \approx 34{,}249$.

Die Funktion g ist wegen $g'(t) = -18 \cdot e^{4-0{,}1\cdot t} < 0$ streng monoton fallend.

[Wegen $J'(T) = g(T+1) - g(T) < 0$ ist auch die Funktion $T \mapsto J(T)$, $20 < T \leq 39$, streng monoton fallend.]

Daher wird die Förderung letztmals im Kalenderjahr 2024 wirtschaftlich sein.

Teilaufgabe e)

Die Funktionen f' und g' sind auf $\mathbb{R}$ definiert. Wegen $f(20) = g(20)$ [$= 220e^2$] und $f'(20) = g'(20)$ [$= -18e^2$] ist h an der Stelle $t = 20$ differenzierbar.

Wäre h' an der Stelle $t = 20$ diffenzierbar, so müsste $f''(20) = g''(20)$ gelten. Wegen $f''(20) \neq g''(20)$ [$f''(20) = -5{,}8e^2$, $g''(20) = 1{,}8e^2$] ist die Funktion h an der Stelle $t = 20$ nicht zweimal differenzierbar.

[Konventionen aus dem Unterricht über zusammengesetzte Funktionen können berücksichtigt werden.]

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt den Zeitpunkt im betrachteten Zeitraum, zu dem die Förderrate maximal ist, und berechnet den Maximalwert.	8			
2	(2) zeigt, dass die Förderrate im Zeitraum von Mitte 2005 bis Ende 2009 ständig zurückgeht und der Rückgang dabei immer stärker wird.	7			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (15) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**15**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt eine Gleichung der Funktion M.	4			
2	(2) berechnet die gesamte Fördermenge aus dem Ölfeld von Anfang 1990 bis Ende 2009.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**6**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass aus der Voraussetzung $k > 0$ der streng monotone Rückgang der Förderrate folgt.	4			
2	(2) bestimmt die Werte der Parameter k und b so, dass der Graph der Funktion $g_{k,b}$ im Punkt $P\left(20 \mid f\left(20\right)\right)$ ohne Knick an den Graphen von f anschließt.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (8) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**8**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet anhand des Funktionsterms von g, warum die Funktion g die Förderrate nicht über einen längeren Zeitraum sinnvoll beschreiben könnte.	4			
2	(2) ermittelt die geförderte Erdölmenge im Jahr 2013.	2			
3	(2) berechnet die Einnahmen aus dem Verkauf dieses Erdöls.	3			
4	(3) bestimmt das letzte Kalenderjahr, für das die Förderung wirtschaftlich sein wird.	6			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (15) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**15**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	begründet, dass die Funktion *h* an der Stelle $t = 20$ differenzierbar ist, und entscheidet, ob *h* an der Stelle $t = 20$ zweimal differenzierbar ist.	6			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**6**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2014

Mathematik, Leistungskurs

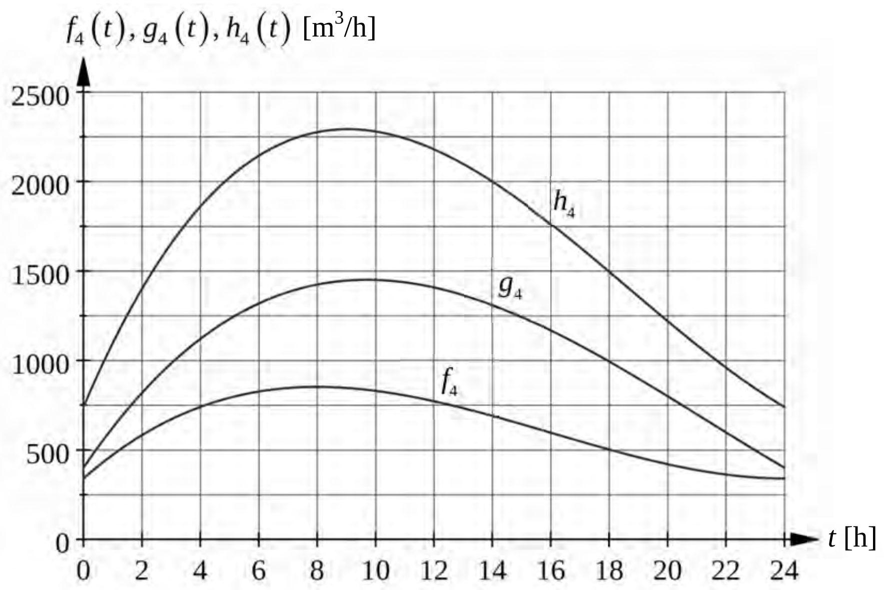
Aufgabenstellung:

In ein Staubecken oberhalb eines Bergdorfes fließen zwei Bäche. Nach Regenfällen unterschiedlicher Dauer und Stärke können die momentanen[1] Zuflussraten aus den beiden Bächen durch Funktionen f_a für den Bach 1 und g_a für den Bach 2 und die Gesamtzuflussrate aus den beiden Bächen durch eine Funktion h_a für einen bestimmten Beobachtungszeitraum modelliert werden. Gegeben sind für $a > 0$ zunächst die Funktionsgleichungen

$$f_a(t) = \frac{1}{4}t^3 - 3a \cdot t^2 + 9a^2 \cdot t + 340\,,\ t \in \mathbb{R}\text{, und}$$

$$h_a(t) = \frac{1}{2}t^3 - 7a \cdot t^2 + 24a^2 \cdot t + 740\,,\ t \in \mathbb{R}\,.$$

Dabei fasst man t als Maßzahl zur Einheit 1 h und $f_a(t)$, $g_a(t)$ sowie $h_a(t)$ als Maßzahlen zur Einheit 1 m³/h auf. Der Beobachtungszeitraum beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ und endet zum Zeitpunkt $t = 6a$. Die Graphen von f_4, g_4 und h_4 sind in der *Abbildung* dargestellt.



Abbildung

[1] Im Folgenden wird zur besseren Lesbarkeit nur der Begriff **Zuflussrate** verwendet; darunter ist stets die **momentane Zuflussrate** zu verstehen.

Name: ____________________

a) (1) *Berechnen Sie die Gesamtzuflussrate aus den beiden Bächen zu Beginn und am Ende des Beobachtungszeitraums.*

(2) *Zeigen Sie, dass für die Funktion* g_a*, die die Zuflussrate aus Bach 2 beschreibt, gilt:*

$$g_a(t) = \frac{1}{4}t^3 - 4a \cdot t^2 + 15a^2 \cdot t + 400 .$$

(3) *Begründen Sie, dass unabhängig vom Parameter a* $(a > 0)$ *die Zuflussrate aus Bach 2 für alle* $t \in [0; 6a]$ *größer ist als die Zuflussrate aus Bach 1.*

(4) *Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a den Zeitpunkt* $t_m \in [0; 6a]$*, zu dem die Gesamtzuflussrate ihr Maximum annimmt.*

[Zur Kontrolle: $t_m \approx 2{,}3a$]

(5) In der Vergangenheit betrug die Gesamtzuflussrate im Beobachtungszeitraum $[0; 6a]$ maximal 3 800 m^3/h.

Ermitteln Sie näherungsweise den zugehörigen Wert des Parameters a.

(3 + 2 + 7 + 7 + 4 Punkte)

b) (1) *Bestimmen Sie die Wendestelle der Funktion* h_a.

(2) *Bestimmen Sie den Zeitpunkt des Beobachtungszeitraums, zu dem sich die Gesamtzulaufrate am stärksten ändert.*

(3) *Geben Sie nun die Bedeutung der Wendestelle aus (1) im Sachzusammenhang an.*

(5 + 6 + 3 Punkte)

Name: ____________________

c) Im Folgenden sei $a = 4$: $h_4(t) = \frac{1}{2}t^3 - 28t^2 + 384t + 740$, $t \in [0; 24]$.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ kann das Staubecken noch 20 000 m^3 Wasser aufnehmen.

(1) *Entscheiden Sie, ob das Staubecken das gesamte Wasser aus den beiden Bächen während der 24 Stunden des Beobachtungszeitraums aufnehmen könnte.*

(2) *Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Staubecken voll wäre.*

(3) Um ein Überlaufen des Staubeckens zu verhindern, wird zum Zeitpunkt $t = 10$ ein vorher verschlossener Notablauf geöffnet. Durch diesen fließt Wasser mit einer konstanten Abflussrate von 2 000 m^3/h aus dem Staubecken ab. Der Notablauf bleibt bis zum Ende des Beobachtungszeitraums geöffnet. Ohne Nachweis darf verwendet werden, dass die Gesamtzuflussrate für $10 \le t < 14$ größer und für $14 < t \le 24$ kleiner als 2 000 m^3/h ist (vgl. *Abbildung* auf Seite 1).

Untersuchen Sie, ob das Staubecken innerhalb des Beobachtungszeitraums überläuft.

(3 + 3 + 7 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2014

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2014

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich Funktionenscharen sowie Logarithmusfunktionen in Sachzusammenhängen, notwendige Ableitungsregeln (Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel)
   - Untersuchung von Wirkungen (Integral der Änderungsrate)
   - Integrationsregeln (partielle Integration, Substitution)
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

$a > 0$ wird stets vorausgesetzt.

(1) $h_a(0) = 740$ [m³/h],

$h_a(6a) = 740$ [m³/h].

(2) $g_a(t) = h_a(t) - f_a(t) = \frac{1}{4}t^3 - 4a \cdot t^2 + 15a^2 \cdot t + 400$

(3) $d_a(t) = g_a(t) - f_a(t) = -a \cdot t^2 + 6a^2 \cdot t + 60$.

Die Gleichung $d_a(t) = 0$ hat die Lösungen $t_1 = 3a - \sqrt{9a^2 + \frac{60}{a}} < 3a - \sqrt{9a^2} = 0$ und

$t_2 = 3a + \sqrt{9a^2 + \frac{60}{a}} > 3a + \sqrt{9a^2} = 6a$.

Für alle $t \in [0; 6a]$ gilt $t_1 < t < t_2$.

Da der Graph der Funktion d_a eine nach unten geöffnete Parabel ist, gilt $d_a(t) > 0$ bzw. $g_a(t) > f_a(t)$ für alle $t \in [0; 6a]$.

(4) Die Gleichung $h_a'(t_m) = 0$ hat im Intervall $[0; 6a]$ die einzige Lösung

$t_m = \frac{14}{3}a - \frac{\sqrt{52}}{3}a \approx 2{,}26a$.

Wegen $h_a''(t_m) = 3t_m - 14a \approx 6{,}8a - 14a < 0$ ist t_m lokale Maximalstelle und als einzige lokale Extremstelle der differenzierbaren Funktion h_a auch globale Maximalstelle im Intervall $[0; 6a]$.

(5) Die Gleichung $h_a(t_m) = 3\,800$ hat die Lösung $a \approx 5{,}0$.

Der zum Maximum der Zuflussrate von 3 800 m³/h gehörige Parameterwert ist $a \approx 5{,}0$.

Teilaufgabe b)

$a > 0$ wird stets vorausgesetzt.

(1) Aus $h_a''(t_W) = 0 \Leftrightarrow t_W = \frac{14}{3}a$ und $h_a'''(t_W) = 3$ folgt, dass $t_W = \frac{14}{3}a$ die [einzige] Wendestelle der Funktion h_a ist.

(2) Die Gesamtzuflussrate ändert sich am stärksten zum Zeitpunkt t_W $[0 < t_W < 6a]$ oder an den Randstellen des Intervalls $[0; 6a]$.

Der Vergleich der Werte $h_a'(0) = 24a^2$, $h_a'(t_W) = -\frac{26}{3}a^2$ und $h_a'(6a) = -6a^2$ ergibt:

Die Gesamtzuflussrate ändert sich am stärksten zu Beginn des Beobachtungszeitraums.

(3) Die Wendestelle $t_W = \frac{14}{3}a$ der Funktion h_a bezeichnet den Zeitpunkt des Intervalls $[0; 6a]$, zu dem die Gesamtzuflussrate am stärksten abnimmt.

Teilaufgabe c)

(1) $\int_0^{24} h_4(t)\,dt = 40\,800.$

Das Staubecken könnte die 40 800 m^3 Wasser nicht aufnehmen.

(2) Die Gleichung $\int_0^{b} h_4(t)\,dt = 20\,000$ hat die einzige positive Lösung $b \approx 10{,}65$.

Nach ungefähr 10,65 Stunden wäre das Staubecken voll.

(3) Für $0 \le t < 10$ ist der Notablauf verschlossen, so dass die Ablaufrate 0 m^3/h beträgt. Unter Berücksichtigung der Angaben aus der Aufgabenstellung ist somit die Gesamtzuflussrate nur für $0 \le t < 14$ größer als die Ablaufrate. Folglich ist zum Zeitpunkt $t = 14$ am meisten Wasser im Staubecken:

$$\int_0^{10} h_4(t)\,dt + \int_{10}^{14} \left(h_4(t) - 2\,000\right)dt = 19183\tfrac{1}{3}.$$

Die vorgegebenen 20000 m^3 werden nicht erreicht, so dass das Staubecken nicht überläuft.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die Gesamtzuflussrate aus den beiden Bächen zu Beginn und am Ende des Beobachtungszeitraums.	3			
2	(2) zeigt, dass die Funktion g_a die angegebene Funktionsgleichung hat.	2			
3	(3) begründet, dass unabhängig vom Parameter a $(a > 0)$ die Zuflussrate aus Bach 2 für alle $t \in [0; 6a]$ größer ist als die Zuflussrate aus Bach 1.	7			
4	(4) bestimmt in Abhängigkeit von a den Zeitpunkt $t_m \in [0; 6a]$, zu dem die Gesamtzuflussrate ihr Maximum annimmt.	7			
5	(5) ermittelt näherungsweise den zugehörigen Parameterwert a.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (23) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**23**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die Wendestelle der Funktion h_a.	5			
2	(2) bestimmt den Zeitpunkt des Beobachtungszeitraums, zu dem sich die Gesamtzuflussrate am stärksten ändert.	6			
3	(3) gibt die Bedeutung der Wendestelle aus (1) im Sachzusammenhang an.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (14) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**14**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) entscheidet, ob das Staubecken das gesamte Wasser aus den beiden Bächen während der 24 Stunden des Beobachtungszeitraums aufnehmen könnte.	3			
2	(2) bestimmt den Zeitpunkt, zu dem das Staubecken voll wäre.	3			
3	(3) untersucht, ob das Staubecken innerhalb des Beobachtungszeitraums überläuft.	7			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (13) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**13**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ______________________

Abiturprüfung 2014

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Ein Blatt DIN-A4-Papier liegt in der x_1-x_2-Ebene. Gegeben sind seine Eckpunkte $O(0\,|\,0\,|\,0)$, $A(\sqrt{2}\,|\,0\,|\,0)$, $B(\sqrt{2}\,|\,1\,|\,0)$ und $C(0\,|\,1\,|\,0)$ sowie der Punkt $D(1\,|\,1\,|\,0)$.[1]

Das Blatt wird jetzt entlang der Strecke $\overline{OD}$ gefaltet. Das Dreieck ODC bleibt dabei fest, während das Viereck $OABD$ in das Viereck $OA'B'D$ übergeht, das wieder in der x_1-x_2-Ebene liegt. Die Gegebenheiten sind in den folgenden Schrägbildern dargestellt. Zur Veranschaulichung kann das als Seite 4 beigefügte DIN-A4-Blatt entsprechend gefaltet werden.

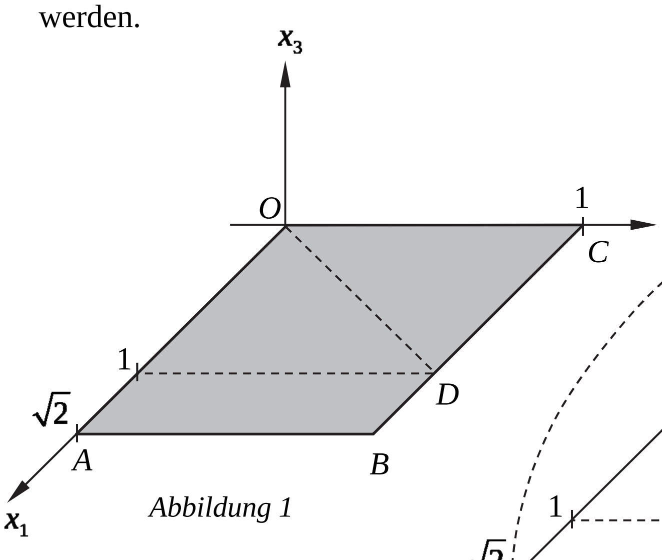


Abbildung 1

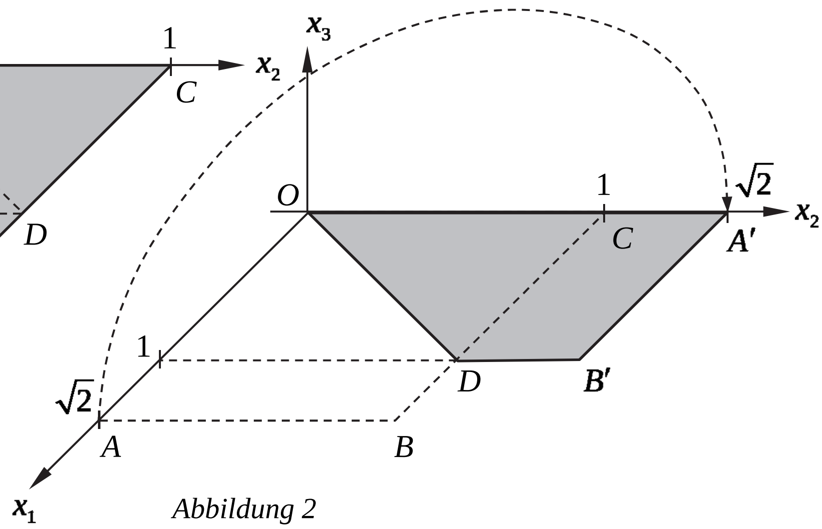


Abbildung 2

a) *Bestimmen Sie den Abstand des Punktes B von der Geraden OD.*

(8 Punkte)

[1] Als Längeneinheit (LE) wird die Länge der kürzeren Seite des DIN-A4-Blattes verwendet.

Name: ______________________

b) Die Ecke des Blattes, die durch das Falten aus der Position A in die Position A' gebracht wird, bewegt sich bei dem Faltvorgang auf einem Halbkreis in einer Ebene E (siehe *Abbildungen 1* bis *4*).

(1) *Leiten Sie je eine Gleichung dieser Ebene E in Parameterform und in Normalenform her*. [Zur Kontrolle eine Koordinatengleichung: $E: x_1 + x_2 = \sqrt{2}$]

(2) *Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Ebene E mit der Geraden OD.* [Zur Kontrolle: $S\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \mid \frac{1}{2}\sqrt{2} \mid 0\right)$] (7 + 4 Punkte)

Während des Faltvorgangs liegt das beim Falten bewegte Papier-Viereck stets in einer Ebene E_k der durch $E_k: x_1 - x_2 + k \cdot x_3 = 0$, $k \in \mathbb{R}$, gegebenen Ebenenschar. Vorher und nachher liegt es jeweils in der x_1-x_2-Ebene (siehe *Abbildungen 1* bis *4*).

c) (1) *Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Gerade OD in jeder Ebene* E_k *der Ebenenschar liegt.*

(2) *Begründen Sie, dass die Ebene E aus b) senkrecht zu jeder Ebene* E_k, $k \in \mathbb{R}$, *ist.*

Während des Faltvorgangs wird das beim Falten bewegte Papier-Viereck auch in die Position des Vierecks OA^*B^*D gebracht, das in einer sowohl zur x_1-x_2-Ebene als auch zur Ebene E senkrechten Ebene E^* liegt (siehe *Abbildung 3*).

(3) *Berechnen Sie den Wert des Parameters k, für den* $E_k = E^*$ *ist.*

(4) *Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes* A^*. (4 + 5 + 3 + 6 Punkte)

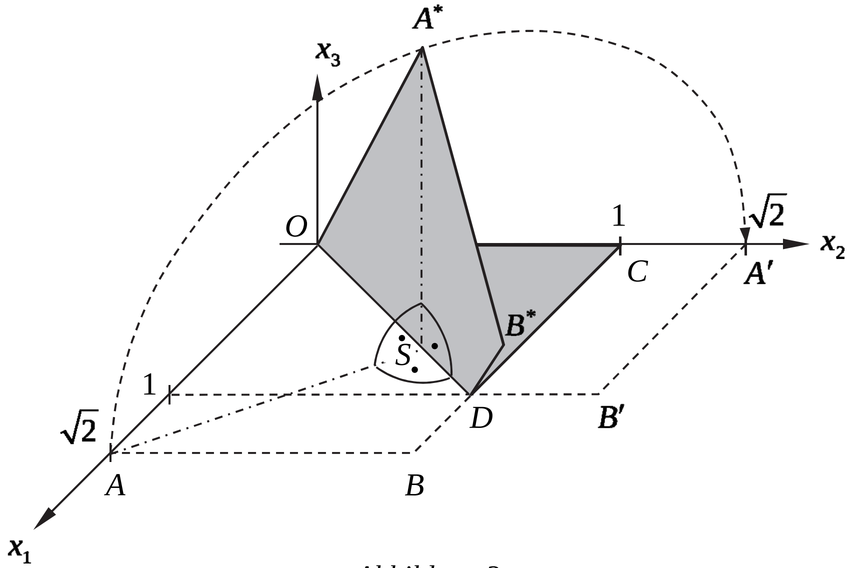


Abbildung 3

Name: ________________________

d) Während des Faltvorgangs kommt das beim Falten bewegte Papier-Viereck auch in die Position des Vierecks $OA''B''D$, dessen Punkt A'' in der Ebene $x_2 = 1$ liegt .

(1) *Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes* A''.

[Zur Kontrolle: $A''\left(\sqrt{2}-1 \mid 1 \mid \sqrt{2\sqrt{2}-2}\right)$]

(2) *Zeigen Sie, dass das Dreieck* OCA'' *gleichschenklig rechtwinklig ist.*

(7 + 6 Punkte)

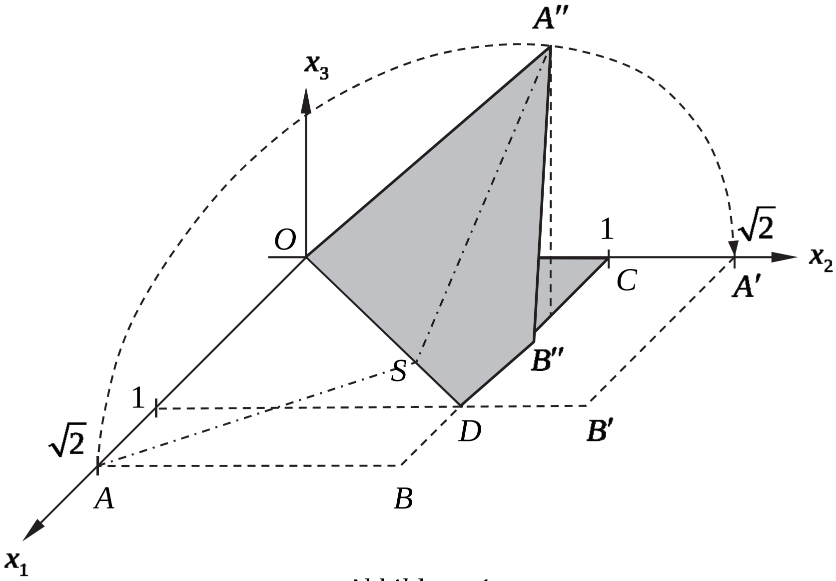


Abbildung 4

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Name: ________________________

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2014

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Analytische Geometrie
Vektorielle Geometrie

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2014

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   Vektorielle Geometrie
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
   - Lineare Abhängigkeit von Vektoren, Parameterformen von Geraden- und Ebenengleichungen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität, Winkel und Länge von Vektoren
   - Normalenformen von Ebenengleichungen
   - Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen
   - Abstandsprobleme

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Elementargeometrische Lösungswege sind möglich. Dabei ist auf Vollständigkeit der Argumentation zu achten.

Teilaufgabe a)

Das Lot wird vom Punkt B auf die Gerade OD gefällt.

$OD: \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$; Lotgerade $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$.

Wegen $r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} r = \sqrt{2} - s \\ r = 1 + s \end{array} \right| \Rightarrow r = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$ trifft das Lot die Gerade OD

im Punkt $P\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+1\right) \mid \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+1\right) \mid 0\right)$.

Der gesuchte Abstand des Punktes B von der Geraden OD beträgt:

$$|BP| = \left| \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ \sqrt{2}+1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(\sqrt{2}-1\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0{,}2929\,[\text{LE}].$$

Teilaufgabe b)

(1) Die Ebene E ist senkrecht zur x_1 - x_2 -Ebene und enthält die Gerade AA'. Daher gilt:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r, s \in \mathbb{R}.$$

Der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist offenbar orthogonal zu den beiden Richtungsvektoren in der Parametergleichung von E. Eine Normalengleichung der Ebene E ist daher gegeben durch: $E: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2}$.

(2) Es ist $OD: \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$ [s. o.]. Durch Einsetzen z. B. in die gegebene Koordinatengleichung von E erhält man $r_S + r_S = \sqrt{2} \Leftrightarrow r_S = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und daraus $\vec{x}_S = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. den gesuchten Schnittpunkt $S\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \mid \frac{1}{2}\sqrt{2} \mid 0\right)$.

Teilaufgabe c)

(1) $OD: \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$; $E_k: \ x_1 - x_2 + k \cdot x_3 = 0, \ k \in \mathbb{R}$.

Einsetzen in die Gleichung von E_k ergibt: $r - r + k \cdot 0 = 0$.

Da dies eine für alle $r \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{R}$ wahre Aussage ist, liegt die Gerade OD in jeder Ebene E_k.

(2) Ein Normalenvektor der Ebene E ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ein Normalenvektor der Ebene E_k ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ k \end{pmatrix}$.

Für alle $k \in \mathbb{R}$ gilt: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ k \end{pmatrix} = 0$. Daher sind die beiden Normalenvektoren orthogonal und mit ihnen die Ebenen E und E_k.

(3) Wegen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ k \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow k = 0$ ist die einzige zur x_1-x_2-Ebene senkrechte Ebene E_k der Ebenenschar die Ebene $E_0: \ x_1 - x_2 = 0$. Der gesuchte Wert des Parameters ist $k = 0$.

(4) A^* liegt auf der Schnittgeraden $h: \vec{x} = \vec{x}_S + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$, der Ebenen E und E^*. Somit sind die erste und zweite Koordinate des Punktes A^* bekannt: $A^*\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \mid \frac{1}{2}\sqrt{2} \mid x_3^*\right)$. Für die dritte Koordinate von A^* gilt:

$$x_3^* = |A^*S| = |AS| = \left| \frac{1}{2}\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{1}{2}\sqrt{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}\sqrt{2+2+0} = 1.$$

Teilaufgabe d)

(1) Der Punkt $A''(a_1 \mid a_2 \mid a_3)$, dessen Koordinaten sämtlich positiv sind, liegt auf der Schnittgeraden der Ebene E mit der Ebene $x_2 = 1$:

$a_1 + a_2 = \sqrt{2} \wedge a_2 = 1 \Leftrightarrow a_1 = \sqrt{2} - 1$.

Das bedeutet: $A''\left(\sqrt{2} - 1 \mid 1 \mid a_3\right)$.

Weiterhin hat A'' vom Ursprung den Abstand $|OA''| = |OA| = \sqrt{2}$ [LE]:

$$\left|\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 1 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}-1\right)^2 + 1 + a_3^2 = 2 \Leftrightarrow a_3 = \sqrt{1 - \left(\sqrt{2}-1\right)^2} \Leftrightarrow a_3 = \sqrt{2\sqrt{2} - 2}\,.$$

Es ergibt sich $A''\left(\sqrt{2} - 1 \mid 1 \mid \sqrt{2\sqrt{2}-2}\right)$ [$\approx A''(0{,}414 \mid 1 \mid 0{,}910)$].

(2) Da A'' und C in der zur x_2-Achse senkrechten Ebene $x_2 = 1$ liegen, sind die Seiten $\overline{OC}$ und $\overline{CA''}$ des Dreiecks OCA'' orthogonal.

Die Kathete $\overline{OC}$ des rechtwinkligen Dreiecks OCA'' hat die Länge 1 [LE], die Hypotenuse $\overline{OA''}$ die Länge $|OA''| = |OA| = \sqrt{2}$ [LE].

Nach dem Satz des Pythagoras ergibt sich für die Länge der anderen Kathete $\overline{CA''}$:

$|\overline{CA''}| = \sqrt{\sqrt{2}^2 - 1^2} = 1$ [LE].

Somit ist das Dreieck OCA'' gleichschenklig rechtwinklig.

[Andere Lösungswege sind denkbar.]

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:___________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	bestimmt den Abstand des Punktes *B* von der Geraden *OD*.	8			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (8) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**8**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) leitet je eine Gleichung der Ebene *E* in Parameterform und Normalenform her.	7			
2	(2) bestimmt die Koordinaten des Schnittpunktes *S* der Ebene *E* mit der Geraden *OD*.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**11**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) weist rechnerisch nach, dass die Gerade *OD* in jeder Ebene E_k der Ebenenschar liegt.	4			
2	(2) begründet, dass die Ebene *E* senkrecht zu jeder Ebene E_k ist.	5			
3	(3) gibt den Wert des Parameters *k* an, für den $E_k = E^*$ ist.	3			
4	(4) ermittelt die Koordinaten des Punktes A^*.	6			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (18) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**18**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) bestimmt die Koordinaten des Punktes A''.	7			
2	(2) zeigt, dass das Dreieck OCA'' gleichschenklig recht-winklig ist.	6			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (13) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**13**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**150**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2014

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Die Entwicklung der Population einer bestimmten Seevogelart in einem festgelegten Beobachtungsgebiet wird durch folgende Modellannahmen beschrieben:

Die Überlebensrate der Vögel in den ersten beiden Lebensjahren wird jeweils mit 0,6 angenommen, in den späteren Lebensjahren mit 0,8. Die erste Brut findet im 3. Lebensjahr statt, der Bruterfolg wird mit 0,5 Jungvögeln pro Elternvogel und Jahr angenommen.
Die Vögel werden in drei Altersgruppen eingeteilt, deren Anzahlen

x_1: Anzahl der Jungvögel im 1. Lebensjahr (Altersgruppe 1)

x_2: Anzahl der Vögel im 2. Lebensjahr (Altersgruppe 2)

x_3: Anzahl der Altvögel, die älter als 2 Jahre sind (Altersgruppe 3)

durch jährliche Zählungen ermittelt und jeweils zu einer Verteilung[1] $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ zusammengefasst werden. Die Matrix $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ beschreibt dieses Modell.

a) Die aktuelle Zählung ergibt $x_1 = 2000$, $x_2 = 4000$ und $x_3 = 15000$.

(1) *Berechnen Sie, ausgehend von diesen Zahlen, die Verteilung der Vögel nach einem Jahr, nach 2 Jahren und nach 5 Jahren.*

(2) *Bestimmen Sie die Verteilung der Vögel, die sich aus dem Modell für das Vorjahr ergäbe.*

(3) Fünf Elemente der Matrix L haben den Wert Null.

Erklären Sie für jedes dieser Elemente aus dem Sachzusammenhang heraus, warum es den Wert Null hat.

(5 + 3 + 5 Punkte)

[1] Verteilungsvektoren werden der Einfachheit halber im Folgenden kurz „Verteilung“ genannt.

Name: ______________________

b) (1) Sei $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ die Verteilung in einem beliebigen Jahr und $L^2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = L \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix}$

die Verteilung zwei Jahre danach.

Zeigen Sie: $x_1'' \geq x_2''$.

Begründen Sie nun: Schon ab dem 1. Jahr nach der aktuellen Zählung aus a) ist die Anzahl der Vögel der Altersgruppe 1 stets größer oder gleich der Anzahl der Vögel der Altersgruppe 2.

(2) *Untersuchen Sie, ob es eine von* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *verschiedene stationäre Verteilung gibt.*

(3) Wenn sich die Population sehr lange nach dem durch die Matrix L beschriebenen Modell entwickelt, wird sie sich pro Jahr näherungsweise um einen festen Prozentsatz p verkleinern. Nach 20 Jahren wird sie noch aus insgesamt 17870 Vögeln, nach weiteren 10 Jahren aus 15422 Vögeln bestehen.

Berechnen Sie anhand dieser Angaben einen Näherungswert für den Prozentsatz p.

(4) Durch Schutzmaßnahmen könnte – bei sonst gleichbleibenden Entwicklungsbedingungen – der Bruterfolg gegenüber der bisherigen Quote von 0,5 Jungvögeln pro Elternvogel und Jahr erhöht werden.

Ermitteln Sie, wie groß der Bruterfolg sein müsste, damit sich langfristig eine stationäre Verteilung $\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *einstellen würde, und berechnen Sie den Anteil jeder der 3 Altersgruppen an der Gesamtzahl der Vögel einer solchen stationären Verteilung.*

($7 + 3 + 4 + 6$ Punkte)

Name: ______________________

c) Es wird vorgeschlagen, bei der Entwicklung der gegebenen Population von Seevögeln bei sonst identischen Modellannahmen vier Altersgruppen zu unterscheiden, deren Anzahlen ebenfalls bei jährlichen Zählungen ermittelt werden:

v_1: Anzahl der Jungvögel im 1. Lebensjahr (Altersgruppe 1)

v_2: Anzahl der Vögel im 2. Lebensjahr (Altersgruppe 2)

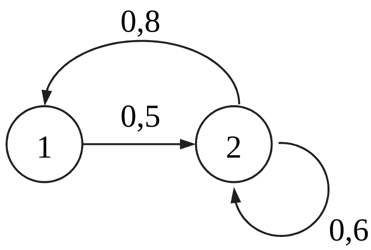
v_3: Anzahl der Vögel im 3. Lebensjahr (Altersgruppe 3)

v_4: Anzahl der Altvögel, die älter als 3 Jahre sind (Altersgruppe 4).

Geben Sie eine 4×4 *-Matrix* L^* *an, die diesem Modellierungsansatz entspricht.*

(5 Punkte)

d) Die Entwicklung einer Population einer anderen Vogelart ist durch den folgenden Übergangsgraphen gegeben, wobei sich die Übergangsquoten wieder auf ein Jahr beziehen.



(1) *Geben Sie dazu eine Übergangsmatrix M an.*

(2) *Beschreiben Sie anhand des Übergangsgraphen, nach welchen Modellannahmen die Entwicklung der Population dieser anderen Vogelart im Vergleich zur bisher betrachteten Seevogelart abläuft.*

(3) *Untersuchen Sie, ob der Bestand der Population dieser anderen Vogelart im durch den Übergangsgraphen gegebenen Modell gefährdet ist.*

($3+4+5$ Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2014

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Analytische Geometrie
Matrizenrechnung

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2014

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   Lineare Algebra/Analytische Geometrie
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

   Matrizenrechnung
   - Übergangsmatrizen
   - Matrizenmultiplikation als Verkettung von Übergängen
   - Fixvektoren

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) $L \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 4000 \\ 15000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7500 \\ 1200 \\ 14400 \end{pmatrix}$, $L^2 \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 4000 \\ 15000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7200 \\ 4500 \\ 12240 \end{pmatrix}$, $L^5 \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 4000 \\ 15000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6292{,}8 \\ 3747{,}6 \\ 12271{,}68 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 6293 \\ 3748 \\ 12272 \end{pmatrix}$.

(2) $L^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 4000 \\ 15000 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 6667 \\ 19667 \\ 4000 \end{pmatrix}$.

[Sinnvoll gerundete Ergebnisse werden akzeptiert.]

(3) $l_{11} = 0$: Jungvögel wechseln nach einem Jahr in die nächste Altersgruppe und bekommen noch keinen Nachwuchs.

$l_{22} = 0$: Vögel im zweiten Lebensjahr wechseln nach einem Jahr in die nächste Altersgruppe.

$l_{12} = 0$: Vögel im zweiten Lebensjahr bekommen noch keinen Nachwuchs [und können nicht in die Altersgruppe 1 zurückwechseln].

$l_{23} = 0$: Altvögel der Altersgruppe 3 können nicht in die Altersgruppe 2 zurückwechseln.

$l_{31} = 0$: Die Altersgruppe 2 kann nicht übersprungen werden.

Teilaufgabe b)

(1) Es gilt

$$x_1'' = 0{,}5x_3' = 0{,}5 \cdot \left(0{,}6x_2 + 0{,}8x_3\right) = 0{,}3x_2 + 0{,}4x_3$$

und

$$x_2'' = 0{,}6x_1' = 0{,}6 \cdot 0{,}5x_3 = 0{,}3x_3 .$$

Daraus folgt $x_1'' \geq x_2''$.

Folglich ist ab dem 2. Jahr nach der aktuellen Zählung aus a) die Anzahl der Vögel der Altersgruppe 1 stets größer oder gleich der Anzahl der Vögel der Altersgruppe 2. Aufgrund der Ergebnisse von a) (1) gilt dies auch schon im 1. Jahr nach der aktuellen Zählung.

(2) Aus $L \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$ ergibt sich $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es gibt somit keine von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ verschiedene stationäre Verteilung.

(3) $p = 1 - q \approx 1 - \sqrt[10]{\frac{15422}{17870}} \approx 1 - 0{,}98538 = 0{,}01462$.

Ein Näherungswert ist $p \approx 1{,}462\,\%$.

(4) Sei a die Quote von Jungvögeln pro Elternvogel und Jahr, bei der sich langfristig eine stationäre Verteilung $\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ einstellen würde.

Dann gilt $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$ bzw. $\left| \begin{matrix} a \cdot s_3 & = & s_1 \\ 0,6 s_1 & = & s_2 \\ 0,6 s_2 + 0,8 s_3 & = & s_3 \end{matrix} \right|$ mit $s_3 > 0$, denn

andernfalls wäre $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Es folgt:

$\left| \begin{matrix} a & = & s_1 / s_3 \\ 0,6 s_1 & = & s_2 \\ 3 s_2 & = & s_3 \end{matrix} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{matrix} a & = & 5/9 \\ 0,6 s_1 & = & s_2 \\ 1,8 s_1 & = & s_3 \end{matrix} \right|$ sowie $\frac{s_1}{s_1 + s_2 + s_3} = \frac{s_1}{3,4 s_1} = \frac{5}{17} \approx 0,294$,

$\frac{s_2}{3,4 s_1} = \frac{0,6 s_1}{3,4 s_1} = \frac{3}{17} \approx 0,176$ und $\frac{s_3}{3,4 s_1} = \frac{1,8 s_1}{3,4 s_1} = \frac{9}{17} \approx 0,529$.

Bei einer Quote von $a = \frac{5}{9}$ Jungvögeln pro Elternvogel und Jahr würde sich langfristig eine stationäre Verteilung einstellen, die aus ca. 29 % Jungvögeln, ca. 18 % Vögeln der Altersgruppe 2 und ca. 53 % Altvögeln bestünde.

[Auch die Angabe der Anteile als Bruch wird akzeptiert.]

Teilaufgabe c)

Es ergibt sich $L^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix}$.

Teilaufgabe d)

(1) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

(2) Bei dieser Vogelart werden nur zwei Altersgruppen unterschieden. Die erste Brut findet schon im 2. Lebensjahr statt. Die Überlebensrate beträgt im 1. Lebensjahr 0,5 und in den folgenden Lebensjahren jeweils 0,6. Auf einen Elternvogel kommen pro Jahr 0,8 Jungvögel.

(3) Die Potenzen M^n der Matrix M konvergieren gegen eine Grenzmatrix

$$G \approx \begin{pmatrix} 0{,}2857 & 0{,}5714 \\ 0{,}3571 & 0{,}7143 \end{pmatrix} \text{ [bzw. } G = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}\text{]}.$$

Für eine beliebige Anfangsverteilung $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\left[\neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$ gilt

$$G \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}2857x_1 + & 0{,}5714x_2 \\ 0{,}3571x_1 + & 0{,}7143x_2 \end{pmatrix}.$$

Die Population wird langfristig aus einer konstanten Anzahl von

ca. $0{,}6428x_1 + 1{,}2857x_2$ $\left[\text{bzw. } \frac{9}{14}x_1 + \frac{9}{7}x_2\right]$ Vögeln bestehen.

Der Bestand ist daher nicht gefährdet.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:___________________________________ Kursbezeichnung:__________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die Verteilung nach einem Jahr, nach 2 Jahren und nach 5 Jahren.	5			
2	(2) bestimmt die Verteilung des Vorjahres.	3			
3	(3) erklärt für jedes der genannten 5 Elemente der Matrix *L* aus dem Sachzusammenhang heraus, warum es den Wert Null hat.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (13) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**13**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt: $x_1'' \geq x_2''$.	5			
2	(1) begründet, dass schon ab dem 1. Jahr nach der aktuellen Zählung aus a) die Anzahl der Vögel der Altersgruppe 1 größer oder gleich der Anzahl der Vögel der Altersgruppe 2 ist.	2			
3	(2) untersucht, ob es eine von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ verschiedene stationäre Verteilung gibt.	3			
4	(3) berechnet einen Näherungswert für den Prozentsatz p.	4			
5	(4) ermittelt, wie groß der Bruterfolg sein müsste, damit sich langfristig eine stationäre Verteilung $\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ einstellen würde.	3			
6	(4) berechnet den Anteil jeder der 3 Altersgruppen an der Gesamtzahl der Vögel einer solchen stationären Verteilung.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (20) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**20**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	gibt eine 4×4 -Matrix L^* an, die diesem Modellierungsansatz entspricht.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**5**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) gibt eine Übergangsmatrix *M* an.	3			
2	(2) beschreibt anhand des Übergangsgraphen, nach welchen Modellannahmen die Entwicklung der Population dieser anderen Vogelart im Vergleich zur bisher betrachteten Seevogelart abläuft.	4			
3	(3) untersucht, ob der Bestand der Population dieser Vogelart gefährdet ist.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (12) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**12**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**150**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ____________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: ______________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2014

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung:

Das Produkt „Fußball-Bundesliga“ ist ein Erfolgsmodell. Die Zuschauerzahlen erreichten in der Saison 2011/12 einen Rekord von durchschnittlich mehr als 40 000 pro Spiel. Dabei ist das Publikum mittlerweile zu 25 % weiblich.
Dieser Prozentsatz soll im Folgenden als Wahrscheinlichkeit verwendet werden.

a) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 200 bei einem Bundesliga-Spiel zufällig ausgewählten Zuschauern* [1]

(1) *genau 48 weibliche Zuschauer befinden,*

(2) *mindestens 35 und höchstens 60 weibliche Zuschauer befinden,*

(3) *eine Anzahl von weiblichen Zuschauern befindet, die um mindestens 10 von ihrem Erwartungswert abweicht.*

(2 + 3 + 4 Punkte)

[1] Der Begriff „Zuschauer“ soll stets männliche und weibliche Zuschauer umfassen.

Name: ____________________

b) Bei einem Bundesliga-Spiel strömen 20 000 Zuschauer ins Stadion. An weibliche Zuschauer soll ein Flyer verteilt werden, der auf ein spezielles Getränkeangebot hinweist.

(1) *Ermitteln Sie auf der Grundlage der 20 000 Zuschauer das zum Erwartungswert symmetrische Intervall kleinster Länge, in dem die Anzahl der weiblichen Zuschauer mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,9 liegt.*

(2) Vor dem Spiel bildet sich an einem Kassenhäuschen eine Schlange von 50 Zuschauern.

Nennen Sie eine Voraussetzung, unter der die Wahrscheinlichkeit P, dass sich in der Schlange 12 weibliche Zuschauer befinden, folgendermaßen berechnet werden kann:

$$P = \binom{50}{12} \cdot 0{,}25^{12} \cdot 0{,}75^{38}.$$

Entscheiden Sie, ob diese Berechnung in der vorliegenden Situation zulässig ist.

(6 + 5 Punkte)

c) Im Deutschen Fußballbund (DFB) sind 1 077 215 weibliche Mitglieder gemeldet[2], was einem Anteil von (ungefähr) 15,84 % entspricht. Von diesen gehören 31,78 % zur Altersklasse **„Mädchen“**, der Rest zur Altersklasse **„Frauen“**. Bei den männlichen Mitgliedern unterscheidet man die Altersklassen „**Junioren**“ und „**Senioren**“. Insgesamt beträgt der Anteil der Jugendlichen („Mädchen“ und „Junioren“) im DFB 33,09 %.

(1) *Berechnen Sie den Anteil der „Mädchen“ im DFB.*

(2) *Ermitteln Sie den Anteil der „Senioren“ im DFB.*

[Kontrollergebnis: 56,10 %]

Berechnen Sie näherungsweise die Anzahl der „Senioren“ im DFB.

(3) Zwei Mitglieder des DFB werden zufällig ausgewählt.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei den beiden Personen um einen „Junior“ und einen „Senior“ handelt.

(2 + 7 + 4 Punkte)

---

[2] Gehen Sie davon aus, dass es sich um aktuelle Daten handelt.

Name: ____________________

d) Um den Stadionbesuch für weibliche Zuschauer attraktiver zu gestalten, werden für diese an den Imbissständen des Stadions spezielle Angebote gemacht.
Der Verkaufsleiter vermutet, dass der Anteil weiblicher Zuschauer sogar auf über 25 % gestiegen ist, so dass er zusätzliche Vorräte für die speziellen Angebote bereitstellen müsste. Er möchte aber unbedingt vermeiden, auf größeren Mengen verderblicher Ware sitzen zu bleiben.
Um eine Entscheidung treffen zu können, nutzt er Fotos, die im Rahmen eines Anti-Hooligan-Programms von jedem einzelnen Zuschauer beim Einlass gemacht werden.
Er lässt 1 000 Fotos zufällig auswählen und in dieser Stichprobe die Anzahl der Fotos bestimmen, die weibliche Zuschauer zeigen.

(1) *Ermitteln Sie aus der Sicht des Verkaufsleiters einen passenden Hypothesentest für die genannte Stichprobe und begründen Sie die Wahl der Nullhypothese (Irrtumswahrscheinlichkeit 0,05).*

(2) *Beschreiben Sie den Fehler 2. Art im Sachzusammenhang und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit seines Auftretens für den Fall, dass der Anteil der weiblichen Zuschauer tatsächlich 30 % beträgt.*

(3) Die acht Helfer, die die Fotos auswerten, haben jeweils 125 Fotos zufällig ausgewählt. Sie haben folgende Regel aufgestellt: Zählen mindestens fünf der acht Helfer unter den 125 Fotos mehr als 33 Fotos weiblicher Zuschauer, so halten sie die Vermutung des Verkaufsleiters für bestätigt.

Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem sich die maximale Wahrscheinlichkeit ermitteln lässt, mit der diese Regel zu einer falschen Entscheidung führt, und begründen Sie die einzelnen Schritte. (Sie brauchen die Rechnungen nicht durchzuführen.) Gehen Sie dabei von der Voraussetzung aus, dass höchstens 25 % weibliche Zuschauer ins Stadion kommen.

(8 + 3 + 6 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Name: ______________________

Tabelle 1: σ-Regeln für Binomialverteilungen

Eine mit den Parametern n und p binomialverteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.
Wenn die LAPLACE-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist, gelten die σ-Regeln:

$P(\mu - 1{,}64\sigma \le X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}90$	$P(\mu - 1{,}64\sigma \le X) \approx 0{,}95$
	$P(X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}95$
$P(\mu - 1{,}96\sigma \le X \le \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}95$	$P(\mu - 1{,}96\sigma \le X) \approx 0{,}975$
	$P(X \le \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}975$
$P(\mu - 2{,}58\sigma \le X \le \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}99$	$P(\mu - 2{,}58\sigma \le X) \approx 0{,}995$
	$P(X \le \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}995$

$P(\mu - 1\sigma \le X \le \mu + 1\sigma) \approx 0{,}683$	$P(\mu - 1\sigma \le X) \approx 0{,}841$
	$P(X \le \mu + 1\sigma) \approx 0{,}841$
$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$	$P(\mu - 2\sigma \le X) \approx 0{,}977$
	$P(X \le \mu + 2\sigma) \approx 0{,}977$
$P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$	$P(\mu - 3\sigma \le X) \approx 0{,}999$
	$P(X \le \mu + 3\sigma) \approx 0{,}999$

Name: ______________________

Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 10 und *n* = 20

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) \;=\; \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	*k*	*p* = 0,02	0,05	0,08	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,5		*n*
10	0	0,8171	0,5987	0,4344	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010	9	10
	1	0,9838	0,9139	0,8121	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107	8	
	2	0,9991	0,9885	0,9599	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547	7	
	3		0,9990	0,9942	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719	6	
	4		0,9999	0,9994	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770	5	
	5				0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230	4	
	6					0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,8281	3	
	7						0,9999	0,9996	0,9984	0,9453	2	
	8	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000							0,9999	0,9893	1	
	9									0,9990	0	
20	0	0,6676	0,3585	0,1887	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	19	20
	1	0,9401	0,7358	0,5169	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000	18	
	2	0,9929	0,9245	0,7879	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002	17	
	3	0,9994	0,9841	0,9294	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013	16	
	4		0,9974	0,9817	0,9568	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059	15	
	5		0,9997	0,9962	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207	14	
	6			0,9994	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577	13	
	7			0,9999	0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316	12	
	8				0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517	11	
	9					0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,4119	10	
	10						0,9994	0,9961	0,9829	0,5881	9	
	11						0,9999	0,9991	0,9949	0,7483	8	
	12							0,9998	0,9987	0,8684	7	
	13								0,9997	0,9423	6	
	14									0,9793	5	
	15	Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000								0,9941	4	
	16									0,9987	3	
	17									0,9998	2	
n		0,98	0,95	0,92	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,5 = *p*	*k*	*n*

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 - \text{abgelesener Wert}$

Name: ____________________

Tabelle 3: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 50

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

		p											
n	*k*	0,02	0,05	0,1	0,125	0,15	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		*n*
	0	0,3642	0,0769	0,0052	0,0013	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	49	
	1	0,7358	0,2794	0,0338	0,0103	0,0029	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	48	
	2	0,9216	0,5405	0,1117	0,0418	0,0142	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	47	
	3	0,9822	0,7604	0,2503	0,1138	0,0460	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	46	
	4	0,9968	0,8964	0,4312	0,2346	0,1121	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	45	
	5	0,9995	0,9622	0,6161	0,3935	0,2194	0,0480	0,0070	0,0007	0,0000	0,0000	44	
	6	0,9999	0,9882	0,7702	0,5637	0,3613	0,1034	0,0194	0,0025	0,0000	0,0000	43	
	7		0,9968	0,8779	0,7165	0,5188	0,1904	0,0453	0,0073	0,0001	0,0000	42	
	8		0,9992	0,9421	0,8339	0,6681	0,3073	0,0916	0,0183	0,0002	0,0000	41	
	9		0,9998	0,9755	0,9121	0,7911	0,4437	0,1637	0,0402	0,0008	0,0000	40	
	10			0,9906	0,9579	0,8801	0,5836	0,2622	0,0789	0,0022	0,0000	39	
	11			0,9968	0,9817	0,9372	0,7107	0,3816	0,1390	0,0057	0,0000	38	
	12			0,9990	0,9928	0,9699	0,8139	0,5110	0,2229	0,0133	0,0002	37	
	13			0,9997	0,9974	0,9868	0,8894	0,6370	0,3279	0,0280	0,0005	36	
	14			0,9999	0,9991	0,9947	0,9393	0,7481	0,4468	0,0540	0,0013	35	
	15				0,9997	0,9981	0,9692	0,8369	0,5692	0,0955	0,0033	34	
	16				0,9999	0,9993	0,9856	0,9017	0,6839	0,1561	0,0077	33	
	17					0,9998	0,9937	0,9449	0,7822	0,2369	0,0164	32	
50	18					0,9999	0,9975	0,9713	0,8594	0,3356	0,0325	31	50
	19						0,9991	0,9861	0,9152	0,4465	0,0595	30	
	20						0,9997	0,9937	0,9522	0,5610	0,1013	29	
	21						0,9999	0,9974	0,9749	0,6701	0,1611	28	
	22							0,9990	0,9877	0,7660	0,2399	27	
	23							0,9996	0,9944	0,8438	0,3359	26	
	24							0,9999	0,9976	0,9022	0,4439	25	
	25								0,9991	0,9427	0,5561	24	
	26								0,9997	0,9686	0,6641	23	
	27								0,9999	0,9840	0,7601	22	
	28									0,9924	0,8389	21	
	29									0,9966	0,8987	20	
	30									0,9986	0,9405	19	
	31									0,9995	0,9675	18	
	32									0,9998	0,9836	17	
	33									0,9999	0,9923	16	
	34										0,9967	15	
	35										0,9987	14	
	36										0,9995	13	
	37										0,9998	12	
n		0,98	0,95	0,9	0,875	0,85	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	*k*	*n*
		p											

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ______________________

Tabelle 4: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 200

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	k	p: 0,02	0,04	0,05	0,1	0,15	1/6	0,2	0,25		n
	0	0,0176	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	199	
	1	0,0894	0,0027	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	198	
	2	0,2351	0,0125	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	197	
	3	0,4315	0,0395	0,0090	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	196	
	4	0,6288	0,0950	0,0264	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	195	
	5	0,7867	0,1856	0,0623	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	194	
	6	0,8914	0,3084	0,1237	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	193	
	7	0,9507	0,4501	0,2133	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	192	
	8	0,9798	0,5926	0,3270	0,0014	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	191	
	9	0,9925	0,7192	0,4547	0,0035	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	190	
	10	0,9975	0,8200	0,5831	0,0081	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	189	
	11	0,9992	0,8925	0,6998	0,0168	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	188	
	12	0,9998	0,9401	0,7965	0,0320	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	187	
	13	0,9999	0,9688	0,8701	0,0566	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	186	
	14		0,9848	0,9219	0,0929	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	185	
	15		0,9930	0,9556	0,1431	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000	184	
	16		0,9970	0,9762	0,2075	0,0021	0,0003	0,0000	0,0000	183	
	17		0,9988	0,9879	0,2849	0,0043	0,0006	0,0000	0,0000	182	
	18		0,9995	0,9942	0,3724	0,0082	0,0013	0,0000	0,0000	181	
	19		0,9998	0,9973	0,4655	0,0149	0,0027	0,0000	0,0000	180	
	20		0,9999	0,9988	0,5592	0,0255	0,0052	0,0001	0,0000	179	
	21			0,9995	0,6484	0,0415	0,0094	0,0002	0,0000	178	
	22			0,9998	0,7290	0,0645	0,0163	0,0005	0,0000	177	
	23			0,9999	0,7983	0,0959	0,0269	0,0010	0,0000	176	
	24				0,8551	0,1368	0,0426	0,0020	0,0000	175	
	25				0,8995	0,1876	0,0648	0,0036	0,0000	174	
	26				0,9328	0,2480	0,0945	0,0064	0,0000	173	
	27				0,9566	0,3166	0,1329	0,0110	0,0000	172	
	28				0,9729	0,3914	0,1803	0,0179	0,0001	171	
	29				0,9837	0,4697	0,2366	0,0283	0,0002	170	
	30				0,9905	0,5485	0,3007	0,0430	0,0004	169	
	31				0,9946	0,6247	0,3711	0,0632	0,0008	168	
	32				0,9971	0,6958	0,4454	0,0899	0,0014	167	
	33				0,9985	0,7596	0,5210	0,1239	0,0026	166	
	34				0,9992	0,8150	0,5953	0,1656	0,0044	165	
	35				0,9996	0,8613	0,6658	0,2151	0,0073	164	
	36				0,9998	0,8987	0,7305	0,2717	0,0117	163	
	37				0,9999	0,9280	0,7877	0,3345	0,0182	162	
200	38					0,9502	0,8369	0,4019	0,0276	161	200
	39					0,9665	0,8777	0,4718	0,0405	160	
	40					0,9780	0,9106	0,5422	0,0578	159	
	41					0,9860	0,9362	0,6108	0,0804	158	
	42					0,9913	0,9556	0,6758	0,1089	157	
	43					0,9947	0,9699	0,7355	0,1438	156	
	44					0,9969	0,9801	0,7887	0,1852	155	
	45					0,9982	0,9872	0,8349	0,2332	154	
	46					0,9990	0,9919	0,8738	0,2870	153	
	47					0,9995	0,9950	0,9056	0,3458	152	
	48					0,9997	0,9970	0,9310	0,4083	151	
	49					0,9998	0,9983	0,9506	0,4729	150	
	50					0,9999	0,9990	0,9655	0,5379	149	
	51						0,9995	0,9764	0,6017	148	
	52						0,9997	0,9843	0,6626	147	
	53						0,9998	0,9897	0,7192	146	
	54						0,9999	0,9934	0,7707	145	
	55							0,9959	0,8162	144	
	56							0,9975	0,8555	143	
	57							0,9985	0,8885	142	
	58							0,9991	0,9157	141	
	59							0,9995	0,9375	140	
	60							0,9997	0,9546	139	
	61							0,9998	0,9677	138	
	62							0,9999	0,9774	137	
	63								0,9846	136	
	64								0,9897	135	
	65								0,9932	134	
	66								0,9956	133	
	67								0,9972	132	
	68								0,9983	131	
	69								0,9990	130	
	70								0,9994	129	
	71								0,9996	128	
	72								0,9998	127	
	73								0,9999	126	
	74								0,9999	125	
n		0,98	0,96	0,95	0,9	0,85	5/6	0,8	0,75	k	n
		p									

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 5: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 1000

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

			p				
n	*k*	0,2	0,25	0,3	0,35		*n*
	250	0,9999	0,5170	0,0003	0,0000	749	
	251	1,0000	0,5460	0,0003	0,0000	748	
	252	1,0000	0,5747	0,0004	0,0000	747	
	253	1,0000	0,6031	0,0006	0,0000	746	
	254	1,0000	0,6308	0,0007	0,0000	745	
	255	1,0000	0,6579	0,0009	0,0000	744	
	256	1,0000	0,6842	0,0012	0,0000	743	
	257	1,0000	0,7095	0,0015	0,0000	742	
	258	1,0000	0,7338	0,0019	0,0000	741	
	259	1,0000	0,7571	0,0023	0,0000	740	
	260	1,0000	0,7791	0,0029	0,0000	739	
	261	1,0000	0,8000	0,0036	0,0000	738	
	262	1,0000	0,8196	0,0044	0,0000	737	
	263	1,0000	0,8380	0,0055	0,0000	736	
	264	1,0000	0,8550	0,0067	0,0000	735	
	265	1,0000	0,8708	0,0081	0,0000	734	
	266	1,0000	0,8854	0,0098	0,0000	733	
	267	1,0000	0,8987	0,0118	0,0000	732	
	268	1,0000	0,9109	0,0142	0,0000	731	
	269	1,0000	0,9219	0,0169	0,0000	730	
	270	1,0000	0,9319	0,0201	0,0000	729	
	271	1,0000	0,9408	0,0238	0,0000	728	
	272	1,0000	0,9488	0,0280	0,0000	727	
	273	1,0000	0,9559	0,0329	0,0000	726	
	274	1,0000	0,9622	0,0384	0,0000	725	
	275	1,0000	0,9677	0,0446	0,0000	724	
	276	1,0000	0,9725	0,0516	0,0000	723	
	277	1,0000	0,9768	0,0594	0,0000	722	
	278	1,0000	0,9804	0,0682	0,0000	721	
	279	1,0000	0,9836	0,0779	0,0000	720	
	280	1,0000	0,9863	0,0886	0,0000	719	
	281	1,0000	0,9886	0,1003	0,0000	718	
1000	282	1,0000	0,9905	0,1132	0,0000	717	1000
	283	1,0000	0,9922	0,1271	0,0000	716	
	284	1,0000	0,9936	0,1422	0,0000	715	
	285	1,0000	0,9948	0,1585	0,0000	714	
	286	1,0000	0,9957	0,1759	0,0000	713	
	287	1,0000	0,9966	0,1945	0,0000	712	
	288	1,0000	0,9972	0,2142	0,0000	711	
	289	1,0000	0,9978	0,2350	0,0000	710	
	290	1,0000	0,9982	0,2569	0,0000	709	
	291	1,0000	0,9986	0,2798	0,0000	708	
	292	1,0000	0,9989	0,3036	0,0001	707	
	293	1,0000	0,9991	0,3282	0,0001	706	
	294	1,0000	0,9993	0,3536	0,0001	705	
	295	1,0000	0,9995	0,3797	0,0001	704	
	296	1,0000	0,9996	0,4063	0,0002	703	
	297	1,0000	0,9997	0,4333	0,0002	702	
	298	1,0000	0,9997	0,4606	0,0003	701	
	299	1,0000	0,9998	0,4881	0,0004	700	
	300	1,0000	0,9999	0,5156	0,0005	699	
	301	1,0000	0,9999	0,5430	0,0006	698	
	302	1,0000	0,9999	0,5702	0,0007	697	
	303	1,0000	0,9999	0,5971	0,0009	696	
	304	1,0000	1,0000	0,6235	0,0012	695	
	305	1,0000	1,0000	0,6493	0,0014	694	
	306	1,0000	1,0000	0,6744	0,0018	693	
	307	1,0000	1,0000	0,6988	0,0022	692	
	308	1,0000	1,0000	0,7223	0,0028	691	
	309	1,0000	1,0000	0,7448	0,0034	690	
	310	1,0000	1,0000	0,7663	0,0041	339	
	311	1,0000	1,0000	0,7868	0,0050	338	
	312	1,0000	1,0000	0,8061	0,0061	337	
	313	1,0000	1,0000	0,8244	0,0074	686	
	314	1,0000	1,0000	0,8415	0,0089	685	
n		0,8	0,75	0,7	0,65	*k*	*n*
			p				

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$ gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ______________________

Tabelle 6: Normalverteilung

$\phi(z) = 0,...$

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$\phi(2,32) = 0,9898$

$\phi(-0,9) = 1 - \phi(0,9) = 0,1841$

$\phi(z) = 0,994 \Rightarrow z = 2,51$

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2014

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Stochastik

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2014

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
   - Binomialverteilung und Normalverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung
   - Ein- und zweiseitiger Hypothesentest

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

Die Zufallsgröße *X: Anzahl der weiblichen Zuschauer* kann als binomialverteilt angenommen werden mit $p = 0,25$ und $n = 200$.

(1) $P(X = 48) = P(X \le 48) - P(X \le 47) \overset{Tabelle}{\approx} 0,4083 - 0,3458 = 0,0625$

(2) $P(35 \le X \le 60) = P(X \le 60) - P(X \le 34) \overset{Tabelle}{\approx} 0,9546 - 0,0044 = 0,9502$

(3) Der Erwartungswert beträgt $\mu = 200 \cdot 0,25 = 50$.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist somit:

$$P(X \le 40) + P(X \ge 60) = P(X \le 40) + \left(1 - P(X \le 59)\right) \overset{Tabelle}{\approx} 0,0578 + \left(1 - 0,9375\right) = 0,1203$$

Teilaufgabe b)

(1) Die Zufallsgröße *X: Anzahl der weiblichen Zuschauer* kann als binomialverteilt angenommen werden mit $p = 0,25$ und $n = 20\,000$.

Es ist $\mu = p \cdot n = 5000$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{20\,000 \cdot 0,25 \cdot 0,75} \approx 61,24 > 3$.

Damit ist die Laplace-Bedingung erfüllt und es gilt
$P(\mu - 1,64\sigma \le X \le \mu + 1,64\sigma) \approx 0,90$.

Wegen $4\,899 \le \mu - 1,64\sigma \le 4\,900$ und $5100 \le \mu + 1,64\sigma \le 5101$ ist das gesuchte Intervall [unter Verwendung der üblichen Näherungswerte ebenso wie bei genauer Rechnung] das Intervall $[4\,899; 5101]$.

(2) Die Verwendung der Formel setzt voraus, dass die Zufallsgröße *X: Anzahl der weiblichen Zuschauer in der Schlange* binomialverteilt ist mit $p = 0,25$ und $n = 50$.

Das bedeutet z. B.: Jede Person in der Schlange ist unabhängig von den anderen Personen mit gleichbleibender Wahrscheinlichkeit von $p = 0,25$ weiblich.

Dies kann jedoch nicht vorausgesetzt werden, da sich in einer Warteschlange von 50 Personen z. B. auch Gruppen von Personen (Familien-, Vereins-, Fanclubmitglieder …) befinden können.

Teilaufgabe c)

Die folgende Tabelle ist nicht notwendig Teil der Lösung; sie dient nur der Orientierung, gegebene Anteile sind grau hinterlegt.

	jugendlich	erwachsen	Summe
weiblich	0,0503	0,1081	0,1584
männlich	0,2806	0,5610	0,8416
Summe	0,3309	0,6691	1

(1) Der Anteil der „Mädchen" im DFB beträgt ca. $0{,}1584 \cdot 0{,}3178 \approx 0{,}0503$.

(2) Der Anteil der männlichen Mitglieder des DFB beträgt ca. $1 - 0{,}1584 \approx 0{,}8416$.

Der Anteil der „Junioren" im DFB beträgt ca. $0{,}3309 - 0{,}0503 \approx 0{,}2806$.

Der Anteil der „Senioren" im DFB beträgt somit ca. $0{,}8416 - 0{,}2806 \approx 0{,}5610$.

Die Anzahl der „Senioren" im DFB beträgt ca. $\frac{1\,077\,215}{0{,}1584} \cdot 0{,}5610 \approx 3\,815\,000$.

(3) [Da zufällig ausgewählt wurde, können die relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten verwendet werden.]
Die Wahrscheinlichkeit, zufällig einen „Senior" auszuwählen, beträgt ca. 0,5610.
Die Wahrscheinlichkeit, zufällig einen „Junior" auszuwählen, beträgt ca. $1 - 0{,}1584 - 0{,}5610 = 0{,}2806$.
[Wegen der großen Anzahl der DFB-Mitglieder ändert sich die jeweilige Wahrscheinlichkeit bei der Auswahl der zweiten Person im Rahmen der vorgegebenen Genauigkeit nicht.]
Das betrachtete Ereignis umfasst zwei Ergebnisse, die sich in der Reihenfolge unterscheiden. Daher beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit ca. $2 \cdot 0{,}5610 \cdot 0{,}2806 \approx 0{,}3148$.

Teilaufgabe d)

(1) Der Verkaufsleiter möchte das Risiko eines Fehlers, in dessen Folge er auf größeren Mengen verderblicher Ware sitzen bleiben könnte, auf höchstens 0,05 beschränken. Da es sich bei diesem Fehler um den Fehler 1. Art handeln muss, wählt er als Nullhypothese $H_0: p \le 0{,}25$.

Die Zufallsgröße *X: Anzahl weiblicher Zuschauer* kann als binomialverteilt angenommen werden. Es handelt sich um einen rechtsseitigen Test mit $n = 1000$, $z = 1{,}64$, $\mu = 250$ und $\sigma = \sqrt{1000 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75} \approx 13{,}69 > 3$.

Da die Laplace-Bedingung erfüllt ist, gilt $P(X > \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}05$.

Mit $\mu + 1{,}64\sigma \approx 272{,}5$ ergibt sich als Entscheidungsregel:

Verwirf die Nullhypothese, falls 273 oder mehr weibliche Zuschauer gezählt werden.

[Alternative: Bei Verwendung der Tabelle oder eines geeigneten Taschenrechners erhält man $P_{p=0,25}\left(X \ge 273\right) \approx 0{,}0512 > 0{,}05$ und $P_{p=0,25}\left(X \ge 274\right) \approx 0{,}0441 < 0{,}05$.

Als Entscheidungsregel ergibt sich in diesem Fall:

Verwirf die Nullhypothese, falls 274 oder mehr weibliche Zuschauer gezählt werden.]

(2) Der Fehler 2. Art besteht darin, dass die Nullhypothese [entsprechend der Entscheidungsregel bei einem Stichprobenergebnis kleiner als 273 [bzw. 274]] irrtümlich nicht verworfen wird, obwohl mehr als 25 % der Zuschauer im Stadion weiblich sind.

Die Wahrscheinlichkeit seines Auftretens beträgt $\beta = P_{p=0,3}(X \le 272) \overset{Tabelle}{\approx} 0{,}0280$.

[Zur Alternative aus (1) gehört $\beta = P_{p=0,3}(X \le 273) \overset{Tabelle}{\approx} 0{,}0329$.]

(3) Die Zufallsgröße *X: Anzahl der weiblichen Zuschauer* kann als binomialverteilt angenommen werden. Es sei p die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zuschauer weiblich ist.
Es wird genau dann eine falsche Entscheidung getroffen, wenn $p \leq 0,25$ ist, unter $n = 125$ zufällig ausgewählten Fotos mindestens 34 Fotos weiblicher Zuschauer sind und diese Situation bei mindestens 5 der 8 Helfer eintritt.
Zuerst ist die maximale Wahrscheinlichkeit p^* zu bestimmen, dass sich für $p \leq 0,25$ unter 125 Fotos mindestens 34 Fotos weiblicher Zuschauer befinden. Diese berechnet sich als $p^* = P_{p=0,25}(X \geq 34)$. [Die entsprechende Gütefunktion ist streng monoton steigend.]
Die Zufallsgröße *Y: Anzahl der Helfer, die mindestens 34 Fotos weiblicher Zuschauer zählen*, kann als binomialverteilt angenommen werden mit $n = 8$ und der oben bestimmten Wahrscheinlichkeit p^*.
Die maximale Wahrscheinlichkeit, mit der die in der Aufgabenstellung genannte Regel zu einer falschen Entscheidung führt, beträgt also $P_{p=p^*}(Y \geq 5)$. [Hier ist auch vorausgesetzt, dass eine entsprechende Gütefunktion streng monoton steigend ist.]

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:___________________________________ Kursbezeichnung:__________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	2			
2	(2) berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3			
3	(3) berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9) ………………………………………………………………………… …………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**9**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt das gesuchte Intervall.	6			
2	(2) nennt eine Voraussetzung für die Verwendung des Terms.	3			
3	(2) entscheidet, ob die Verwendung des Terms zulässig ist.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11) ………………………………………………………………………… …………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**11**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet den Anteil der „Mädchen“ im DFB.	2			
2	(2) ermittelt den Anteil der „Senioren“ im DFB.	5			
3	(2) berechnet näherungsweise die Anzahl der „Senioren“ im DFB.	2			
4	(3) ermittelt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (13) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**13**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt aus der Sicht des Verkaufsleiters einen passenden Hypothesentest und begründet die Wahl der Nullhypothese.	8			
2	(2) beschreibt den Fehler 2. Art im Sachzusammenhang und berechnet die Wahrscheinlichkeit seines Auftretens.	3			
3	(3) beschreibt ein Verfahren, mit dem sich die maximale Wahrscheinlichkeit berechnen lässt.	6			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (17) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**17**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**150**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0