Name: ____________________

Abiturprüfung 2014

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Ein Ölfeld wird seit Beginn des Jahres 1990 mit Bohrungen in mehreren Erdöl führenden Schichten erschlossen. Die momentane Förderrate[1] aus diesem Ölfeld im Zeitraum von Anfang 1990 bis Ende 2009 kann im Intervall $[0;20]$ durch die Funktion *f* mit der Gleichung

$$f(t) = (1020 - 40t) \cdot e^{\frac{1}{10}t},\ t \in \mathbb{R},$$

modelliert werden.
Dabei wird *t* als Maßzahl zur Einheit 1 Jahr und $f(t)$ als Maßzahl zur Einheit **1000 Tonnen** pro Jahr aufgefasst. Der Zeitpunkt $t = 0$ entspricht dem Beginn des Jahres 1990.
Der Graph von *f* ist in der *Abbildung 1* in dem für die Modellierung zu betrachtenden Intervall dargestellt.

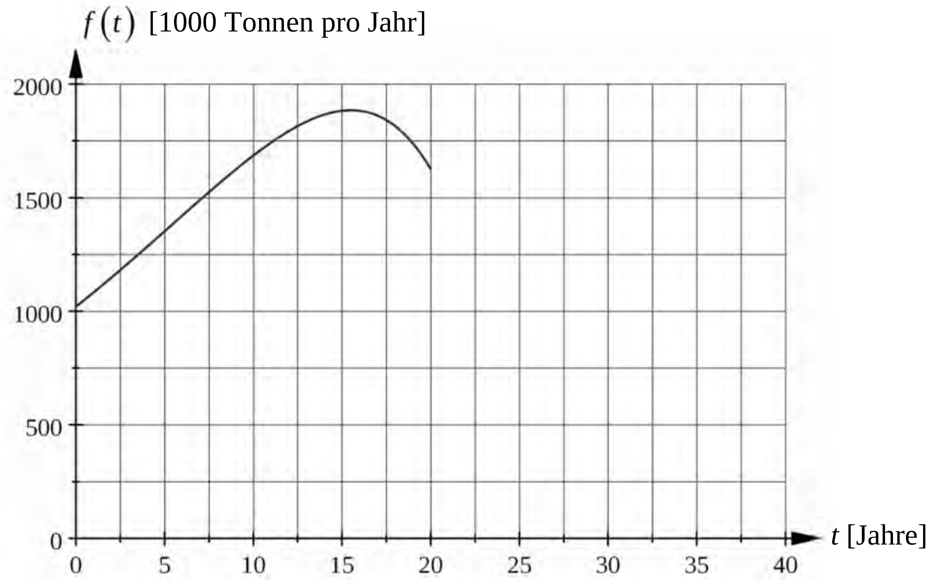


Abbildung 1

[1] Im Folgenden wird vereinfachend nur der Begriff der **Förderrate** verwendet, wobei durchgehend die **momentane Förderrate** gemeint und zu betrachten ist.

Name: ____________________

a) (1) *Berechnen Sie mit Hilfe der Funktion f die Förderraten zu Beginn der Jahre 1990 und 1995 sowie die zugehörige prozentuale Zunahme der Förderrate.*

(2) *Bestimmen Sie den Zeitpunkt im betrachteten Zeitraum von Anfang 1990 bis Ende 2009, zu dem die Förderrate maximal ist, und berechnen Sie den Maximalwert.*

[Zur Kontrolle: $f'(t) = (62 - 4t) \cdot e^{\frac{1}{10}t}$]

(7 + 8 Punkte)

b) Die Menge des Erdöls, das seit dem Beginn der Ölförderung Anfang 1990 bis zu einem beliebigen Zeitpunkt *t* des betrachteten Zeitraums aus dem Ölfeld gefördert wurde, wird durch eine Funktion $M: \; t \mapsto M(t), \; 0 \le t \le 20$, beschrieben.

(1) *Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Funktion M.*

[Zur Kontrolle: $M(t) = (14\,200 - 400t) \cdot e^{\frac{1}{10}t} - 14\,200$]

(2) *Berechnen Sie die gesamte Fördermenge aus dem Ölfeld von Anfang 1990 bis Ende 2009.*

(5 + 3 Punkte)

Die Förderrate seit Anfang des Jahres 2010 soll für $t > 20$ durch eine Funktion g_b mit der Gleichung

$$g_b(t) = (220 \cdot e^4 - b \cdot e^2) \cdot e^{-\frac{1}{10}t} + b, \; b \in \mathbb{R}, \; t \in \mathbb{R},$$

modelliert werden. Dabei wird wieder *t* als Maßzahl zur Einheit 1 Jahr und $g_b(t)$ als Maßzahl zur Einheit 1000 Tonnen pro Jahr aufgefasst. Der Zeitpunkt $t = 20$ entspricht dem Beginn des Jahres 2010.

c) (1) *Zeigen Sie, dass* $P(20 \mid f(20))$ *ein Punkt des Graphen jeder Funktion* g_b *ist.*

(2) *Bestimmen Sie den Wert des Parameters b so, dass die Graphen der beiden Funktionen* g_b *und f an der Stelle* $t = 20$ *die gleiche Steigung haben.*

(5 + 4 Punkte)

Name: ____________________

Für $b = 40 \cdot e^2$ wird die Funktion g_b der Einfachheit halber mit *g* bezeichnet:

$$g(t) = 180 \cdot e^{4 - \frac{1}{10}t} + 40 \cdot e^2,\ t \in \mathbb{R}.$$

Sie modelliert für $20 < t \leq 40$ die Förderrate von Anfang 2010 bis Ende 2029.

Die *Abbildung 2* stellt die Graphen von f und g in den jeweils für die Modellierung zu betrachtenden Intervallen dar.

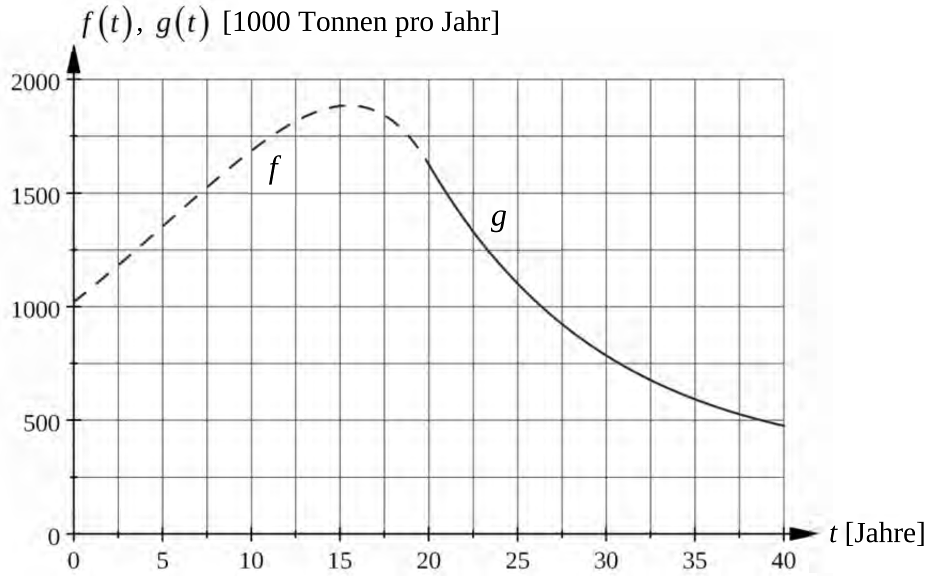


Abbildung 2

d) (1) *Begründen Sie anhand des Funktionsterms von g, warum die Funktion g die Förderrate nicht über einen längeren Zeitraum sinnvoll beschreiben könnte.*

(2) *Weisen Sie nach, dass im Jahr 2013 rund 1,233 Millionen Tonnen Erdöl aus dem Ölfeld gefördert wurden. Berechnen Sie die Einnahmen aus dem Verkauf dieses Erdöls, wenn man von einem Verkaufspreis von 82 Euro pro Barrel ausgeht.*
1 Barrel Erdöl (ca. 159 Liter) wiegt ca. 137 kg.

(3) Der Betreiber kalkuliert, dass die Ölförderung für ihn nur oberhalb einer Förderrate von mindestens 600 000 Tonnen pro Jahr wirtschaftlich ist.

Bestimmen Sie näherungsweise den Zeitpunkt (Jahr und Monat), zu dem die Ölförderung erstmals nicht mehr wirtschaftlich sein wird.

$(4 + 8 + 6$ Punkte$)$

Name: ______________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2014

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2014

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen und Exponentialfunktionen in Sachzusammenhängen, notwendige Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel)
   - Untersuchung von Wirkungen (Integral der Änderungsrate)
   - Flächenberechnung durch Integration
2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

(1) Berechnung der Funktionswerte: $f(0) = 1020$ und $f(5) = 820 \cdot e^{\frac{1}{2}} \approx 1352$.

Zu Beginn des Jahres 1990 betrug die Förderrate 1 020 000 Tonnen pro Jahr, zu Beginn des Jahres 1995 ca. 1 352 000 Tonnen pro Jahr. Die Zunahme der Förderrate beträgt

$\frac{f(5)-f(0)}{f(0)} \approx \frac{1352-1020}{1020} \approx 0{,}325 = 32{,}5\,\%$.

(2) Gesucht ist das globale Maximum der Funktion f auf dem abgeschlossenen Intervall [0;20]. Dieses kann dort nur an einer Nullstelle von f' oder einer Randstelle angenommen werden.

Es gilt $f'(t_m) = 0 \Leftrightarrow t_m = 15{,}5$ sowie $f(0) = 1020$, $f(t_m) \approx 1884{,}6$ und

$f(20) \approx 1625{,}6$.

Folglich ist $f(t_m)$ das gesuchte globale Maximum:

Die Förderrate ist Mitte des Jahres 2005 mit ca. 1,88 Millionen Tonnen pro Jahr maximal.

Teilaufgabe b)

(1) Es gilt: $M(t) = \int_0^t f(u)\,du = (14\,200 - 400t) \cdot e^{\frac{1}{10}t} - 14\,200$.

(2) $M(20) \approx 31\,612$. Von Anfang 1990 bis Ende 2009 wurden rund 31,6 Millionen Tonnen Erdöl aus dem Ölfeld gefördert.

Teilaufgabe c)

(1) Da unabhängig von *b* gilt: $g_b(20) = 220 \cdot e^2 = f(20)$, ist der Punkt $P(20 \mid f(20))$ [des Graphen der Funktion *f* auch] ein Punkt des Graphen jeder Funktion g_b.

(2) $f'(20) = g_b'(20) \underset{\text{CAS}}{\Leftrightarrow} b = 40 \cdot e^2$.

Teilaufgabe d)

(1) Für große *t* streben die Funktionswerte von *g* gegen $40 \cdot e^2 \approx 295{,}6 \neq 0$, die Förderrate nähert sich somit einem konstanten positiven Wert. Das Ölfeld hätte – im Widerspruch zur Realität – unerschöpfliche Ölreserven.

(2) Die im Jahr 2013 geförderte Ölmenge lässt sich durch $\int_{23}^{24} g(t)\,dt$ ermitteln.

Es gilt: $\int_{23}^{24} g(t)\,dt \approx 1233{,}21$.

Im Jahr 2013 wurden rund 1,233 Millionen Tonnen Erdöl aus dem Ölfeld gefördert.

Daraus ergeben sich für das Jahr 2013 Einnahmen von rund

$$\left(1233{,}21 \cdot 10^6 \text{ kg} : 137 \frac{\text{kg}}{\text{Barrel}}\right) \cdot 82 \frac{\text{Euro}}{\text{Barrel}}$$
$$\approx \left(9{,}0015 \cdot 10^6 \text{ Barrel}\right) \cdot 82 \frac{\text{Euro}}{\text{Barrel}}$$
$$\approx 738 \text{ Millionen Euro.}$$

(3) Die Funktion *g* fällt streng monoton, da $g'(t) \left[= -18 \cdot e^{4 - \frac{1}{10}t}\right] < 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Die Gleichung $g(t) = 600$ hat die einzige Lösung $t^* \approx 34{,}7449$; diese liegt im Intervall $[20;\, 40]$ und entspricht wegen $0{,}7449 \cdot 12 \approx 8{,}9$ einem Zeitpunkt Ende September des Jahres 2024.

Von diesem Zeitpunkt an wird die Ölförderung nicht mehr wirtschaftlich sein.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet mit Hilfe der Funktion *f* die Förderraten zu Beginn der Jahre 1990 und 1995.	4			
2	(1) berechnet die zugehörige prozentuale Zunahme der Förderrate.	3			
3	(2) bestimmt den Zeitpunkt im betrachteten Zeitraum, zu dem die Förderrate maximal ist, und berechnet diesen Maximalwert.	8			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (15) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**15**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt eine Gleichung der Funktion *M*.	5			
2	(2) berechnet die gesamte Fördermenge aus dem Ölfeld von Anfang 1990 bis Ende 2009.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (8) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**8**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass $P(20 \mid f(20))$ ein Punkt des Graphen jeder Funktion g_b ist.	5			
2	(2) bestimmt den Wert des Parameters *b* so, dass die Graphen von g_b und *f* an der Stelle $t = 20$ die gleiche Steigung haben.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**9**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet anhand des Funktionsterms von *g*, warum die Funktion *g* die Förderrate nicht über einen längeren Zeitraum sinnvoll beschreiben könnte.	4			
2	(2) weist nach, dass im Jahr 2013 etwa 1,233 Millionen Tonnen Erdöl aus dem Ölfeld gefördert wurden.	4			
3	(2) berechnet die Einnahmen aus dem Verkauf dieses Erdöls.	4			
4	(3) bestimmt näherungsweise den Zeitpunkt (Jahr und Monat), zu dem die Ölförderung erstmals nicht mehr wirtschaftlich sein wird.	6			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (18) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**18**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2014

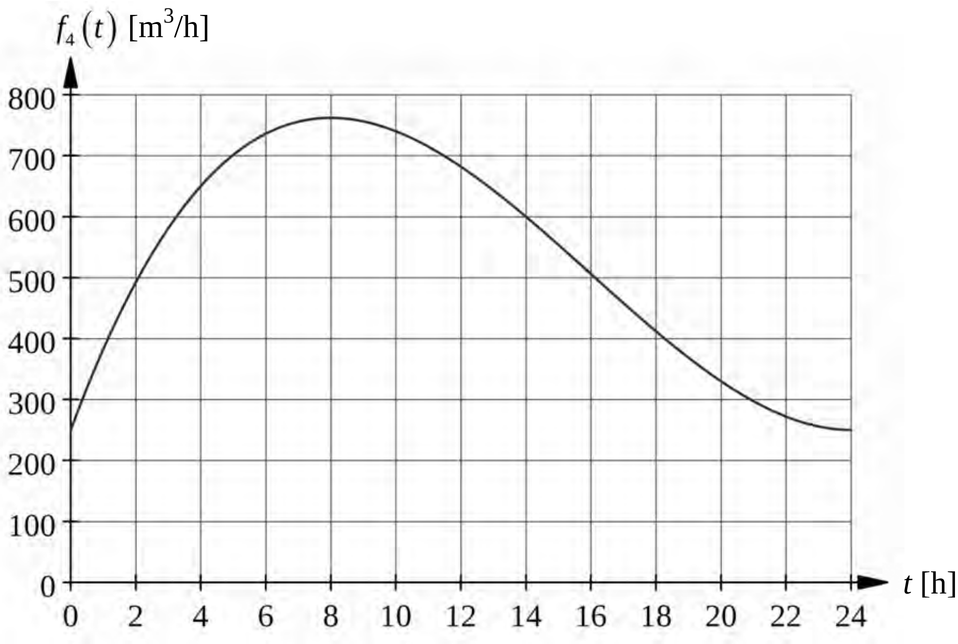
Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

In ein Staubecken oberhalb eines Bergdorfes fließt ein Bach. Nach Regenfällen unterschiedlicher Dauer und Stärke kann die momentane[1] Zuflussrate aus dem Bach jeweils durch eine der Funktionen f_a mit der Gleichung

$$f_a(t) = \frac{1}{4}t^3 - 3a \cdot t^2 + 9a^2 \cdot t + 250\,,\ t \in \mathbb{R}\,,$$

für einen bestimmten Beobachtungszeitraum modelliert werden, wobei *a* eine positive reelle Zahl ist und *t* als Maßzahl zur Einheit 1 h, $f_a(t)$ als Maßzahl zur Einheit 1 m³/h aufgefasst wird. Der Beobachtungszeitraum beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ und endet zum Zeitpunkt $t = 6a$. Der Graph von f_4 ist in der *Abbildung* dargestellt.



Abbildung

[1] Im Folgenden wird zur besseren Lesbarkeit nur der Begriff **Zuflussrate** verwendet; darunter ist stets die **momentane Zuflussrate** zu verstehen.

Name: ____________________

a) (1) *Berechnen Sie die Zuflussrate zu Beginn und am Ende des Beobachtungszeitraums.*

(2) *Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a den Zeitpunkt* $t_m \in [0; 6a]$*, zu dem die Zuflussrate ihr Maximum annimmt.*

(3 + 9 Punkte)

b) (1) *Bestimmen Sie die Wendestelle des Graphen der Funktion* f_a.

(2) *Bestimmen Sie den Zeitpunkt des Beobachtungszeitraums, zu dem sich die Zuflussrate am stärksten ändert.*

(3) *Geben Sie nun die Bedeutung der Wendestelle aus (1) im Sachzusammenhang an.*

(6 + 6 + 3 Punkte)

c) Im Folgenden sei $a = 4$: $f_4(t) = \frac{1}{4}t^3 - 12t^2 + 144t + 250$, $t \in [0; 24]$.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ kann das Staubecken noch 4 500 m³ Wasser aufnehmen.

(1) *Entscheiden Sie, ob das Staubecken das gesamte Wasser aus dem Bach während der 24 Stunden des Beobachtungszeitraums aufnehmen könnte.*

(2) *Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Staubecken voll wäre.*

Um ein Überlaufen des Staubeckens zu verhindern, wird zum Zeitpunkt $t = 6$ ein vorher verschlossener Notablauf geöffnet. Durch diesen fließt Wasser mit einer konstanten Abflussrate von 600 m³/h aus dem Staubecken ab. Der Notablauf bleibt bis zum Ende des Beobachtungszeitraums geöffnet. Ohne Nachweis darf verwendet werden, dass die Zuflussrate für $6 \le t < 14$ größer und für $14 < t \le 24$ kleiner als 600 m³/h ist (vgl. *Abbildung* auf Seite 1).

(3) *Interpretieren Sie den Ausdruck* $\int_0^6 f_4(t)\,dt + \int_6^{14} \left(f_4(t) - 600\right)dt$ *im Sachzusammenhang.*

Geben Sie insbesondere die Bedeutung des Zeitpunkts $t = 14$ *an.*

(4) *Entscheiden Sie nun, ob das Staubecken innerhalb des Beobachtungszeitraums überläuft.*

(5) *Bestimmen Sie den spätest möglichen Zeitpunkt* $t_s \in [0; 24]$*, zu dem der Notablauf geöffnet werden müsste, damit das Staubecken nicht überläuft.*

(4 + 4 + 6 + 4 + 5 Punkte)

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2014

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2014

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen einschließlich Funktionenscharen und Exponentialfunktionen in Sachzusammenhängen, notwendige Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel)
   - Untersuchung von Wirkungen (Integral der Änderungsrate)
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

$a > 0$ wird stets vorausgesetzt.

(1) $f_a(0) = 250$ [m³/h],

$f_a(6a) = 250$ [m³/h].

(2) $f_a'(t_m) = 0 \Leftrightarrow t_m = 2a \vee t_m = 6a$. Es gilt $0 < 2a < 6a$.

Das potenzielle lokale Extremum $f_a(2a) = 8a^3 + 250$, ist aufgrund des Vergleichs mit den Randwerten $f_a(0) = f_a(6a) = 250$ aus (1) globales Maximum der Funktion f_a im Intervall $[0; 6a]$.

Zum Zeitpunkt $t_m = 2a$ des Beobachtungszeitraums nimmt die Zuflussrate ihr Maximum an.

Teilaufgabe b)

$a > 0$ wird stets vorausgesetzt.

(1) Aus $f_a''(t_W) = 0 \Leftrightarrow t_W = 4a$, $0 < 4a < 6a$, und $f_a'''(t_W) = \frac{3}{2} \neq 0$ folgt, dass $t_W = 4a$ die [einzige] Wendestelle der Funktion f_a ist.

(2) Die Zuflussrate ändert sich am stärksten zum Zeitpunkt t_W [$0 < t_W < 6a$] oder an den Randstellen des Intervalls $[0; 6a]$.

Der Vergleich der Werte $f_a'(0) = 9a^2$, $f_a'(t_W) = -3a^2$ und $f_a'(6a) = 0$ ergibt:

Die Zuflussrate ändert sich am stärksten zu Beginn des Beobachtungszeitraums.

(3) Die Wendestelle $t_W = 4a$ der Funktion f_a bezeichnet den Zeitpunkt des Intervalls $[0; 6a]$, zu dem die Gesamtzuflussrate am stärksten abnimmt.

Teilaufgabe c)

(1) $\int_0^{24} f_4(t)\,dt = 12\,912.$

Das Staubecken könnte die 12 912 m^3 Wasser nicht aufnehmen.

(2) Die Gleichung $\int_0^{b} f_4(t)\,dt = 4\,500$ hat die einzige positive Lösung $b \approx 7{,}59$.

Nach ungefähr 7,59 Stunden wäre das Staubecken voll.

(3) Der Ausdruck gibt an, um wie viel m^3 das Wasser [-Volumen] im Staubecken während der ersten 14 Stunden des Beobachtungszeitraums zunimmt. Dabei wird berücksichtigt, dass im Intervall $[6;14]$ die Zulaufrate um den Betrag der Ablaufrate zu vermindern ist.

Wegen $f_4(14) = 600$ sind zum Zeitpunkt $t = 14$ Zulaufrate und Ablaufrate gleich groß.

[Laut Aufgabenstellung ist die Zulaufrate für $6 \le t < 14$ größer und für $14 < t \le 24$ kleiner als 600 m^3/h.] Zum Zeitpunkt $t = 14$ ist [daher] am meisten Wasser im Staubecken.

(4) Wegen

$$\int_0^{6} f_4(t)\,dt + \int_6^{14} \left(f_4(t) - 600\right) dt = 4\,237$$

werden die vorgegebenen 4 500 m^3 nicht erreicht, so dass das Staubecken nicht überläuft.

(5) Für den gesuchten Zeitpunkt t_s gilt:

$$6 \le t \le 14 \text{ und } \int_0^{t_s} f_4(t)\,dt + \int_{t_s}^{14} \left(f_4(t) - 600\right) dt = 4\,500.$$

Die Gleichung hat die Lösung $t_s \approx 6{,}44$.

Spätestens nach ca. 6,44 Stunden müsste der Notablauf geöffnet werden, damit das Staubecken nicht überläuft.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die Zuflussrate zu Beginn und am Ende des Beobachtungszeitraums.	3			
2	(2) bestimmt in Abhängigkeit von a den Zeitpunkt $t_m \in [0; 6a]$, zu dem die Zuflussrate ihr Maximum annimmt.	9			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (12) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**12**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die Wendestelle der Funktion f_a.	6			
2	(2) bestimmt den Zeitpunkt des Beobachtungszeitraums, zu dem sich die Zuflussrate am stärksten ändert.	6			
3	(3) gibt die Bedeutung der Wendestelle aus (1) im Sachzusammenhang an.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (15) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**15**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) entscheidet, ob das Staubecken das gesamte Wasser aus dem Bach während der 24 Stunden des Beobachtungszeitraums aufnehmen könnte.	4			
2	(2) bestimmt den Zeitpunkt, zu dem das Staubecken voll wäre.	4			
3	(3) interpretiert den Ausdruck im Sachzusammenhang.	3			
4	(3) gibt die Bedeutung des Zeitpunkts $t = 14$ an.	3			
5	(4) entscheidet, ob das Staubecken innerhalb des Beobachtungszeitraums überläuft.	4			
6	(5) bestimmt den spätest möglichen Zeitpunkt t_s, zu dem der Notablauf geöffnet werden müsste, damit das Staubecken nicht überläuft.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (23) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**23**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.

Name: ______________________

Abiturprüfung 2014

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Ein Blatt DIN-A4-Papier liegt in der x_1-x_2-Ebene. Gegeben sind seine Eckpunkte $O(0|0|0)$, $A(\sqrt{2}|0|0)$, $B(\sqrt{2}|1|0)$ und $C(0|1|0)$ sowie der Punkt $D(1|1|0)$.[1]
Das Blatt wird jetzt entlang der Strecke $\overline{OD}$ gefaltet. Das Dreieck *ODC* bleibt dabei fest, während das Viereck *OABD* in das Viereck $OA'B'D$ übergeht, das wieder in der x_1-x_2-Ebene liegt. Die Gegebenheiten sind in den folgenden Schrägbildern dargestellt. Zur Veranschaulichung kann das als Seite 3 beigefügte DIN-A4-Blatt entsprechend gefaltet werden.

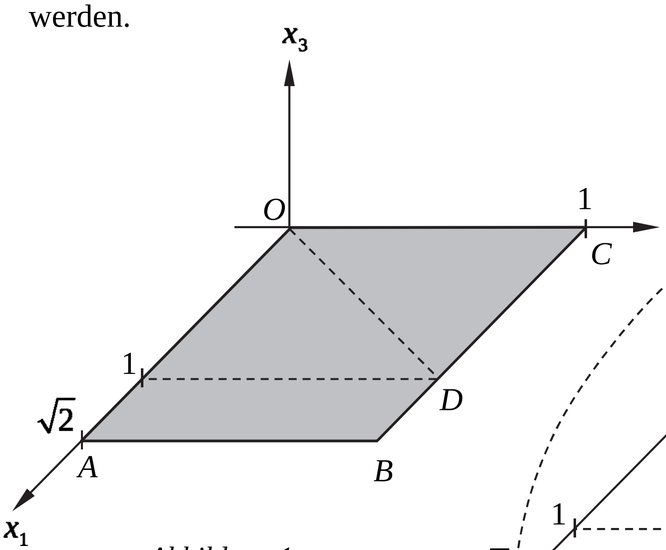


Abbildung 1

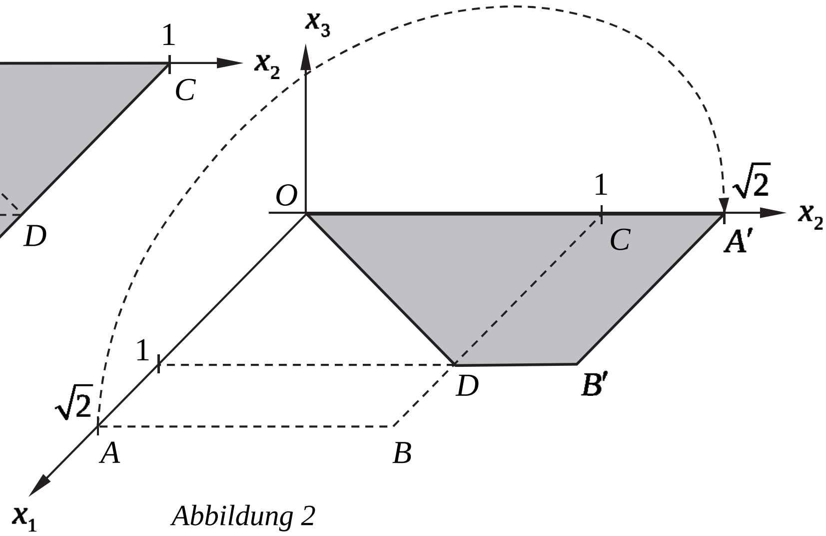


Abbildung 2

a) (1) *Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M der Strecke $\overline{OD}$ an.*

(2) *Zeigen Sie, dass die Gerade CM senkrecht zur Geraden OD ist.*

(3) *Bestimmen Sie den Abstand des Punktes C von der Geraden OD.*

$(3 + 5 + 4$ Punkte$)$

[1] Als Längeneinheit (LE) wird die Länge der kürzeren Seite des DIN-A4-Blattes verwendet.

Name: ________________________

b) Die Ecke des Blattes, die durch das Falten aus der Position *A* in die Position A' gebracht wird, bewegt sich bei dem Faltvorgang auf einem Halbkreis in einer Ebene *E*, die senkrecht zur x_1-x_2-Ebene ist (siehe *Abbildungen 1* bis *3*).

(1) *Leiten Sie je eine Gleichung dieser Ebene E in Parameterform und in Koordinatenform her*. [Zur Kontrolle: $E: x_1 + x_2 = \sqrt{2}$]

(2) *Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Ebene E mit der Geraden OD.* [Zur Kontrolle: $S\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \mid \frac{1}{2}\sqrt{2} \mid 0\right)$] (8 + 6 Punkte)

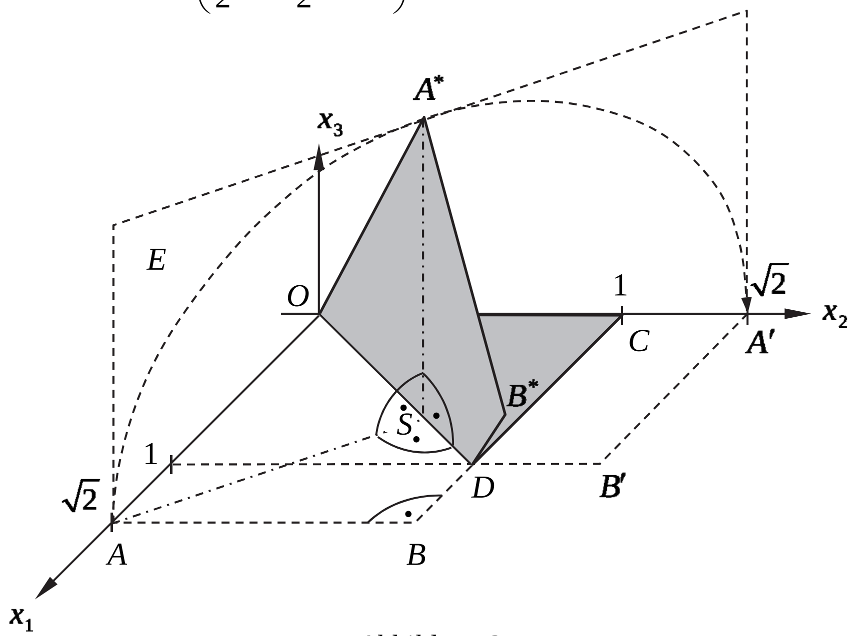


Abbildung 3

Während des Faltvorgangs wird das beim Falten bewegte Papier-Viereck auch in die Position des Vierecks OA^*B^*D gebracht, das in einer sowohl zur x_1-x_2-Ebene als auch zur Ebene *E* aus b) senkrechten Ebene E^* liegt (siehe *Abbildung 3*).

c) (1) *Leiten Sie eine Gleichung der Ebene E^* in Parameterform her.*

(2) *Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes A^*.* (4 + 6 Punkte)

d) (1) *Begründen Sie, dass das Viereck ABDS ein Drachenviereck ist.*

(2) *Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Vierecks ABDS.* (8 + 6 Punkte)

Name: ________________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2014

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Analytische Geometrie
Vektorielle Geometrie

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2014

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   Vektorielle Geometrie
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
   - Geraden- und Ebenengleichungen in Parameterform und Koordinatenform
   - Lagebeziehung von Geraden und Ebenen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität und Länge von Vektoren

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Elementargeometrische Lösungswege sind möglich. Dabei ist auf Vollständigkeit der Argumentation zu achten.

Teilaufgabe a)

(1) Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{OD}$ ist $M\left(\frac{1}{2} \,|\, \frac{1}{2} \,|\, 0\right)$.

(2) $\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wegen $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ ist die Gerade *CM* senkrecht zur Geraden *OD*.

(3) Wegen (2) ist der gesuchte Abstand des Punktes *C* von der Geraden *OD* gleich der Länge der Strecke $\overline{CM}$:

$$|\overrightarrow{CM}| = \left|\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ [LE]}.$$

Teilaufgabe b)

(1) Die Ebene E ist laut Aufgabenstellung senkrecht zur x_1-x_2-Ebene und enthält die Gerade AA'. Daher gilt:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, r, s \in I\!R.$$

Aus $\left| \begin{array}{ccc} \sqrt{2} - \sqrt{2}r & = & x_1 \\ \sqrt{2}r & = & x_2 \\ s & = & x_3 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{ccc} \sqrt{2} & = & x_1 + x_2 \\ \sqrt{2}r & = & x_2 \\ s & = & x_3 \end{array} \right|$ ergibt sich als Koordinatengleichung von E:

$x_1 + x_2 = \sqrt{2}$.

[Alternative: Die Gerade AA' hat offensichtlich die Gleichung $x_1 + x_2 = \sqrt{2}$. Da E senkrecht zu dieser in der x_1-x_2-Ebene verlaufenden Geraden ist, hat E dieselbe Gleichung.]

(2) Es ist $OD: \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, r \in I\!R$ [s. o.]. Durch Einsetzen in die Koordinatengleichung von E erhält man $r_S + r_S = \sqrt{2} \Leftrightarrow r_S = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und daraus $\vec{x}_S = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. den gesuchten Schnittpunkt $S\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \mid \frac{1}{2}\sqrt{2} \mid 0\right)$.

Teilaufgabe c)

(1) Die Ebene E^* ist laut Aufgabenstellung senkrecht zur x_1-x_2-Ebene und enthält die Gerade OD. Daher gilt:

$$E^*: \vec{x} = u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u, v \in I\!R.$$

(2) A^* liegt auf der Schnittgeraden $h: \vec{x} = \vec{x}_S + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$, der Ebenen

E und E^*. Somit sind die erste und zweite Koordinate des Punktes A^* bekannt:

$A^*\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \mid \frac{1}{2}\sqrt{2} \mid x_3^*\right)$. Für die dritte Koordinate von A^* gilt:

$$x_3^* = |A^*S| = |AS| = \left|\frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{2+2+0} = 1\,.$$

Teilaufgabe d)

(1) Für das in der x_1-x_2-Ebene liegende Viereck *ABDS* ist zu zeigen:

$|AS| = |AB| \wedge |DS| = |DB|$.

Aus c) (2) ist bekannt: $|AS| = 1\,[\text{LE}]$. Da laut Aufgabenstellung auch $|AB| = 1\,[\text{LE}]$ gilt, ergibt sich $|AS| = |AB|$.

$$|DB| = \left|\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2} - 1\,[\text{LE}],$$

$$|DS| = \left|\frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - 1\right)^2} = \sqrt{2}\left|\frac{1}{2}\sqrt{2} - 1\right| = \left|1 - \sqrt{2}\right| = \sqrt{2} - 1\,[\text{LE}]\,.$$

Somit gilt auch $|DS| = |DB|$. Das Viereck *ABDS* ist ein Drachenviereck.

[Andere Lösungswege sind denkbar.]

(2) Das Drachenviereck *ABDS* besteht aus den zwei kongruenten rechtwinkligen Dreiecken *ABD* und *ASD*.

Sein Flächeninhalt beträgt daher $2 \cdot \frac{1}{2}|AB| \cdot |BD| = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) = \sqrt{2} - 1\,[\text{FE}]$.

[Andere Lösungswege sind denkbar.]

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:__________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt die Koordinaten des Mittelpunktes der Strecke $\overline{OD}$ an.	3			
2	(2) zeigt, dass die Gerade *CM* senkrecht zur Geraden *OD* ist.	5			
3	(3) bestimmt den Abstand des Punktes *C* von der Geraden *OD*.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (12) ………………………………………………………………………… …………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**12**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) leitet je eine Gleichung der Ebene *E* in Parameterform und Koordinatenform her.	8			
2	(2) bestimmt die Koordinaten des Schnittpunktes *S* der Ebene *E* mit der Geraden *OD*.	6			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (14) ………………………………………………………………………… …………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**14**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) leitet eine Gleichung der Ebene E^* in Parameterform her.	4			
2	(2) ermittelt die Koordinaten des Punktes A^*.	6			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (10) ………………………………………………………………………… …………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**10**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass das Viereck *ABDS* ein Drachenviereck ist.	8			
2	(2) ermittelt den Flächeninhalt des Vierecks *ABDS*.	6			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (14) ………………………………………………………………………… …………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**14**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2014

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Die Entwicklung der Population einer bestimmten Seevogelart in einem festgelegten Beobachtungsgebiet wird durch folgende Modellannahmen beschrieben:

Die Überlebensrate der Vögel in den ersten beiden Lebensjahren wird jeweils mit 0,6 angenommen, in den späteren Lebensjahren mit 0,8. Die erste Brut findet im 3. Lebensjahr statt, der Bruterfolg wird mit 0,5 Jungvögeln pro Elternvogel und Jahr angenommen.
Die Vögel werden in drei Altersgruppen eingeteilt, deren Anzahlen

x_1: Anzahl der Jungvögel im 1. Lebensjahr (Altersgruppe 1)

x_2: Anzahl der Vögel im 2. Lebensjahr (Altersgruppe 2)

x_3: Anzahl der Altvögel, die älter als 2 Jahre sind (Altersgruppe 3)

durch jährliche Zählungen ermittelt und jeweils zu einer Verteilung[1] $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ zusammengefasst werden. Die Matrix $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}$ beschreibt dieses Modell.

a) Die aktuelle Zählung ergibt $x_1 = 2000$, $x_2 = 4000$ und $x_3 = 15000$.

(1) *Berechnen Sie, ausgehend von diesen Zahlen, die Verteilung der Vögel nach einem Jahr, nach 2 Jahren und nach 5 Jahren.*

(2) *Bestimmen Sie die Verteilung der Vögel, die sich aus dem Modell für das Vorjahr ergäbe.*

(3) Fünf Elemente der Matrix L haben den Wert Null.

Erklären Sie für jedes dieser Elemente aus dem Sachzusammenhang heraus, warum es den Wert Null hat.

(5 + 5 + 5 Punkte)

[1] Verteilungsvektoren werden der Einfachheit halber im Folgenden kurz „Verteilung“ genannt.

Name: ____________________

b) (1) *Untersuchen Sie, ob es eine von* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *verschiedene stationäre Verteilung gibt, d. h. eine Verteilung, die sich innerhalb eines Jahres nicht ändert.*

(2) Wenn sich die Population sehr lange nach dem durch die Matrix L beschriebenen Modell entwickelt, wird sie sich pro Jahr näherungsweise um einen festen Prozentsatz p verkleinern.

Berechnen Sie ausgehend von der in Teilaufgabe a) gegebenen Verteilung die Gesamtzahl aller Vögel der Population nach 20 Jahren und nach weiteren 10 Jahren.

Berechnen Sie anhand dieser Zahlen einen Näherungswert für den Prozentsatz p.

(3) Langfristig gilt $p \approx 1{,}462\,\%$.

Ermitteln Sie näherungsweise, in wie viel Jahren sich unter dieser Voraussetzung die Population jeweils halbiert.

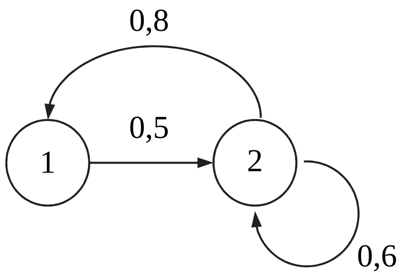
(4) Durch Schutzmaßnahmen soll – bei sonst gleichbleibenden Modellannahmen – der Bruterfolg erhöht werden. Anstelle der bisherigen Quote von 0,5 Jungvögeln pro Elternvogel und Jahr ist ein Wert a gesucht, bei dem sich langfristig eine stationäre Verteilung $\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ einstellt. Die Übergangsmatrix sei $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie a sowie den Anteil jeder der 3 Altersgruppen an der Gesamtzahl der Vögel einer solchen stationären Verteilung.

(4 + 8 + 4 + 7 Punkte)

Name: ____________________

c) Die Entwicklung einer Population einer anderen Vogelart ist durch den folgenden Übergangsgraphen gegeben, wobei sich die Übergangsquoten wieder auf ein Jahr beziehen.



(1) *Geben Sie dazu eine Übergangsmatrix M an.*

(2) *Beschreiben Sie anhand des Übergangsgraphen, nach welchen Modellannahmen die Entwicklung der Population dieser anderen Vogelart im Vergleich zur bisher betrachteten Seevogelart abläuft.*

(3) *Untersuchen Sie, ob bei der Anfangsverteilung* $\begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$ *der Bestand der Population dieser anderen Vogelart im durch den Übergangsgraphen gegebenen Modell gefährdet ist.*

(4 + 5 + 3 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2014

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Analytische Geometrie
Matrizenrechnung

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2014

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   Lineare Algebra/Analytische Geometrie
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

   Matrizenrechnung
   - Übergangsmatrizen
   - Matrizenmultiplikation als Verkettung von Übergängen

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

(1) $L \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 4000 \\ 15000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7500 \\ 1200 \\ 14400 \end{pmatrix}$, $L^2 \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 4000 \\ 15000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7200 \\ 4500 \\ 12240 \end{pmatrix}$,

$L^5 \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 4000 \\ 15000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6292{,}8 \\ 3747{,}6 \\ 12271{,}68 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 6293 \\ 3748 \\ 12272 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 4000 \\ 15000 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6666\frac{2}{3} \\ 19666\frac{2}{3} \\ 4000 \end{pmatrix}$.

Aus dem Modell ergäben sich für das Vorjahr 6667 Jungvögel, 19667 Vögel im zweiten Lebensjahr und 4000 Altvögel.

[Sinnvoll gerundete Ergebnisse werden akzeptiert.]

(3) $l_{11} = 0$: Jungvögel wechseln nach einem Jahr in die nächste Altersgruppe und bekommen noch keinen Nachwuchs.

$l_{22} = 0$: Vögel im zweiten Lebensjahr wechseln nach einem Jahr in die nächste Altersgruppe.

$l_{12} = 0$: Vögel im zweiten Lebensjahr bekommen noch keinen Nachwuchs [und können nicht in die Altersgruppe 1 zurückwechseln].

$l_{23} = 0$: Altvögel der Altersgruppe 3 können nicht in die Altersgruppe 2 zurückwechseln.

$l_{31} = 0$: Die Altersgruppe 2 kann nicht übersprungen werden.

Teilaufgabe b)

(1) Aus $L \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$ ergibt sich $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es gibt somit keine von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ verschiedene stationäre Verteilung.

(2) $L^{20} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 4000 \\ 15000 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4992 \\ 3040 \\ 9838 \end{pmatrix}$, $L^{30} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 4000 \\ 15000 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4308 \\ 2623 \\ 8491 \end{pmatrix}$.

Nach 20 Jahren gibt es noch 17870 Vögel, nach 30 Jahren noch 15422 Vögel.

$$p = 1 - q \approx 1 - \sqrt[10]{\frac{15422}{17870}} \approx 1 - 0,98538 = 0,01462.$$

Ein Näherungswert ist $p \approx 1,462\,\%$.

(3) Sei n die Anzahl der Jahre, in denen sich die Population jeweils halbiert. Dann gilt:

$$(1-p)^n = \frac{1}{2} \Leftrightarrow n = \frac{-\ln 2}{\ln(1-p)}.$$

Für $p \approx 1,462\,\%$ ergibt sich $n \approx 47,1$.

In ca. 47 Jahren halbiert sich die Population.

(4) Es gilt $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$ bzw. $\left| \begin{array}{ccc} a \cdot s_3 & = & s_1 \\ 0,6s_1 & = & s_2 \\ 0,6s_2 + 0,8s_3 & = & s_3 \end{array} \right|$ mit $s_3 > 0$, denn

andernfalls wäre $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Es folgt:

$$\left| \begin{array}{ccc} a & = & s_1 / s_3 \\ 0,6s_1 & = & s_2 \\ 3s_2 & = & s_3 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{ccc} a & = & 5/9 \\ 0,6s_1 & = & s_2 \\ 1,8s_1 & = & s_3 \end{array} \right| \text{ sowie } \frac{s_1}{s_1 + s_2 + s_3} = \frac{s_1}{3,4s_1} = \frac{5}{17} \approx 0,294,$$

$$\frac{s_2}{3,4s_1} = \frac{0,6s_1}{3,4s_1} = \frac{3}{17} \approx 0,176 \text{ und } \frac{s_3}{3,4s_1} = \frac{1,8s_1}{3,4s_1} = \frac{9}{17} \approx 0,529.$$

Bei einer Quote von $a = \frac{5}{9}$ Jungvögeln pro Elternvogel und Jahr stellt sich langfristig eine stationäre Verteilung ein, die aus ca. 29 % Jungvögeln, ca. 18 % Vögeln der Altersgruppe 2 und ca. 53 % Altvögeln besteht.
[Auch die Angabe der Anteile als Bruch wird akzeptiert.]

Teilaufgabe c)

(1) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0,8 \\ 0,5 & 0,6 \end{pmatrix}$.

(2) Bei dieser Vogelart werden nur zwei Altersgruppen unterschieden. Die erste Brut findet schon im 2. Lebensjahr statt. Die Überlebensrate beträgt im 1. Lebensjahr 0,5 und in den folgenden Lebensjahren jeweils 0,6. Auf einen Elternvogel kommen pro Jahr 0,8 Jungvögel.

(3) Durch Probieren erhält man $M^n \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 857 \\ 1071 \end{pmatrix}$ für (alle) $n \geq 8$ und somit offensichtlich eine stationäre Verteilung $\vec{s} \approx \begin{pmatrix} 857 \\ 1071 \end{pmatrix}$. Folglich ist der Bestand nicht gefährdet.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:__________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die Verteilung nach einem Jahr, nach 2 Jahren und nach 5 Jahren.	5			
2	(2) bestimmt die Verteilung des Vorjahres.	5			
3	(3) erklärt für jedes der genannten 5 Elemente der Matrix L aus dem Sachzusammenhang heraus, warum es den Wert Null hat.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (15) ……………………………………………………………… ………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**15**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) untersucht, ob es eine von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ verschiedene Verteilung gibt, die sich innerhalb eines Jahres nicht ändert.	4			
2	(2) berechnet die Gesamtzahl aller Vögel nach 20 Jahren und nach weiteren 10 Jahren.	3			
3	(2) berechnet einen Näherungswert für den Prozentsatz p.	5			
4	(3) ermittelt näherungsweise, in wie viel Jahren sich die Population jeweils halbiert.	4			
5	(4) berechnet a.	3			
6	(4) berechnet den Anteil jeder der 3 Altersgruppen an der Gesamtzahl der Vögel einer solchen stationären Verteilung.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (23) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**23**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) gibt eine Übergangsmatrix M an.	4			
2	(2) beschreibt anhand des Übergangsgraphen, nach welchen Modellannahmen die Entwicklung der Population dieser anderen Vogelart im Vergleich zur bisher betrachteten Seevogelart abläuft.	5			
3	(3) untersucht, ob bei der gegebenen Anfangsverteilung der Bestand der Population dieser anderen Vogelart gefährdet ist.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (12) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**12**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0

Name: ____________________

Abiturprüfung 2014

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Das Produkt „Fußball-Bundesliga“ ist ein Erfolgsmodell. Die Zuschauerzahlen erreichten in der Saison 2011/12 einen Rekord von durchschnittlich mehr als 40 000 pro Spiel. Dabei ist das Publikum mittlerweile zu 25 % weiblich.
Dieser Prozentsatz soll im Folgenden als Wahrscheinlichkeit verwendet werden.

a) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 200 bei einem Bundesliga-Spiel zufällig ausgewählten Zuschauern*[1]

(1) *genau 48 weibliche Zuschauer befinden,*

(2) *mindestens 35 und höchstens 60 weibliche Zuschauer befinden,*

(3) *eine Anzahl von weiblichen Zuschauern befindet, die um mindestens 10 von ihrem Erwartungswert abweicht.*

(2 + 3 + 5 Punkte)

b) *Beschreiben Sie im vorliegenden Sachzusammenhang ein Ereignis E, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term*

$$P(E) = 1 - \sum_{k=0}^{300} \binom{1000}{k} \cdot 0{,}25^k \cdot 0{,}75^{1000-k}$$

berechnet werden kann.

[Hinweis: Der Wert dieses Terms muss nicht berechnet werden.]

(4 Punkte)

[1] Der Begriff „Zuschauer“ soll stets männliche und weibliche Zuschauer umfassen.

Name: ____________________

c) Bei einem Bundesliga-Spiel strömen 20 000 Zuschauer ins Stadion. An weibliche Zuschauer soll ein Flyer verteilt werden, der auf ein spezielles Getränkeangebot hinweist.

(1) *Ermitteln Sie auf der Grundlage der 20 000 Zuschauer das zum Erwartungswert symmetrische Intervall kleinster Länge, in dem die Anzahl der weiblichen Zuschauer mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,9 liegt.*

(2) Vor dem Spiel bildet sich an einem Kassenhäuschen eine Schlange von 50 Zuschauern.

Nennen Sie eine Voraussetzung, unter der die Wahrscheinlichkeit P, dass sich in der Schlange 12 weibliche Zuschauer befinden, folgendermaßen berechnet werden kann:

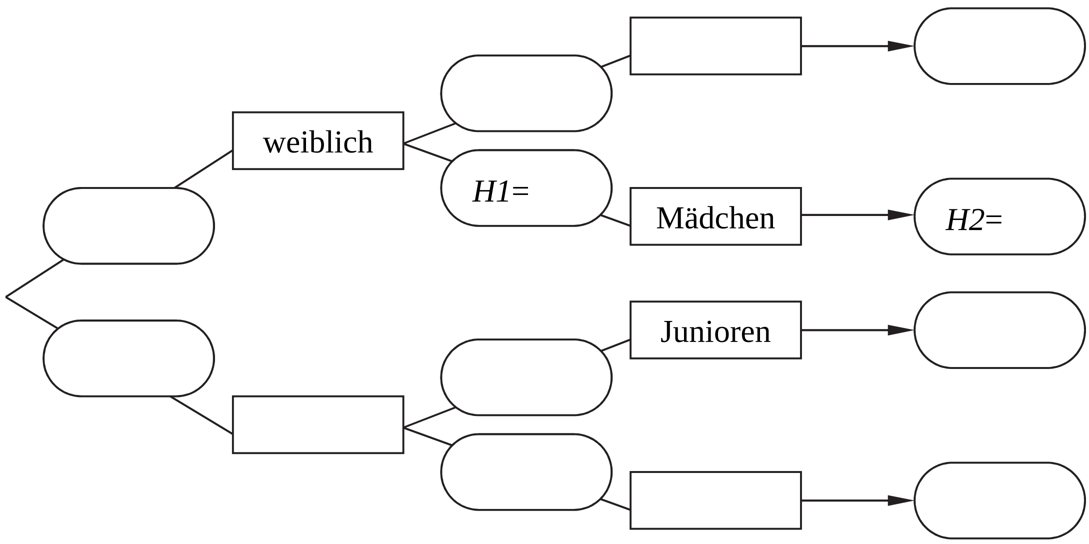
$$P = \binom{50}{12} \cdot 0{,}25^{12} \cdot 0{,}75^{38}.$$

Entscheiden Sie, ob diese Berechnung in der vorliegenden Situation zulässig ist.

(6 + 5 Punkte)

d) Im Deutschen Fußballbund (DFB) sind 1 077 215 weibliche Mitglieder gemeldet[2], was einem Anteil von (ungefähr) 15,84 % entspricht. Von diesen gehören 31,78 % zur Altersklasse „**Mädchen**“, der Rest zur Altersklasse „**Frauen**“. Bei den männlichen Mitgliedern unterscheidet man die Altersklassen „**Junioren**“ und „**Senioren**“. Insgesamt beträgt der Anteil der Jugendlichen („Mädchen“ und „Junioren“) im DFB 33,09 %.

(1) *Stellen Sie die gegebenen Daten in dem folgenden Baumdiagramm dar und notieren Sie alle fehlenden relativen Häufigkeiten.*



[2] Gehen Sie davon aus, dass es sich um aktuelle Daten handelt.

Name: ____________________

(2) *Beschreiben Sie die relativen Häufigkeiten, die im Diagramm als H1 bzw. H2 bezeichnet werden, mit Worten.*

(3) Zwei Mitglieder des DFB werden zufällig ausgewählt.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei den beiden Personen um einen männlichen Jugendlichen (Junior) und ein Mädchen handelt.

(7 + 3 + 4 Punkte)

e) Um den Stadionbesuch für weibliche Zuschauer attraktiver zu gestalten, werden für diese an den Imbissständen des Stadions spezielle Angebote gemacht.
Der Verkaufsleiter vermutet, dass der Anteil weiblicher Zuschauer sogar auf über 25 % gestiegen ist, so dass er zusätzliche Vorräte für die speziellen Angebote bereitstellen müsste. Er möchte aber unbedingt vermeiden, auf größeren Mengen verderblicher Ware sitzen zu bleiben.
Um eine Entscheidung treffen zu können, nutzt er Fotos, die im Rahmen eines Anti-Hooligan-Programms von jedem einzelnen Zuschauer beim Einlass gemacht werden.
Er lässt 1 000 Fotos zufällig auswählen und in dieser Stichprobe die Anzahl der Fotos bestimmen, die weibliche Zuschauer zeigen.

(1) Der Verkaufsleiter testet die Nullhypothese $H_0: p \leq 0{,}25$.

Begründen Sie die Wahl dieser Nullhypothese aus der Sicht des Verkaufsleiters und ermitteln Sie eine Entscheidungsregel für die genannte Stichprobe (Irrtumswahrscheinlichkeit 0,05).

(2) *Beschreiben Sie den Fehler 2. Art im Sachzusammenhang und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit seines Auftretens für den Fall, dass der Anteil der weiblichen Zuschauer tatsächlich 30 % beträgt.*

(7 + 4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Name: ______________________

Tabelle 1: σ-Regeln für Binomialverteilungen

Eine mit den Parametern n und p binomialverteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$.
Wenn die LAPLACE-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist, gelten die σ-Regeln:

$P(\mu - 1{,}64\sigma \le X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}90$	$P(\mu - 1{,}64\sigma \le X) \approx 0{,}95$
	$P(X \le \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}95$
$P(\mu - 1{,}96\sigma \le X \le \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}95$	$P(\mu - 1{,}96\sigma \le X) \approx 0{,}975$
	$P(X \le \mu + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}975$
$P(\mu - 2{,}58\sigma \le X \le \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}99$	$P(\mu - 2{,}58\sigma \le X) \approx 0{,}995$
	$P(X \le \mu + 2{,}58\sigma) \approx 0{,}995$

$P(\mu - 1\sigma \le X \le \mu + 1\sigma) \approx 0{,}683$	$P(\mu - 1\sigma \le X) \approx 0{,}841$
	$P(X \le \mu + 1\sigma) \approx 0{,}841$
$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954$	$P(\mu - 2\sigma \le X) \approx 0{,}977$
	$P(X \le \mu + 2\sigma) \approx 0{,}977$
$P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997$	$P(\mu - 3\sigma \le X) \approx 0{,}999$
	$P(X \le \mu + 3\sigma) \approx 0{,}999$

Name: ______________________

Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 10 und *n* = 20

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	*k*	*p* = 0,02	0,05	0,08	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,5	*k*	*n*
10	0	0,8171	0,5987	0,4344	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010	9	10
	1	0,9838	0,9139	0,8121	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107	8	
	2	0,9991	0,9885	0,9599	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547	7	
	3		0,9990	0,9942	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719	6	
	4		0,9999	0,9994	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770	5	
	5				0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230	4	
	6					0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,8281	3	
	7						0,9999	0,9996	0,9984	0,9453	2	
	8								0,9999	0,9893	1	
	9									0,9990	0	
20	0	0,6676	0,3585	0,1887	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	19	20
	1	0,9401	0,7358	0,5169	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000	18	
	2	0,9929	0,9245	0,7879	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002	17	
	3	0,9994	0,9841	0,9294	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013	16	
	4		0,9974	0,9817	0,9568	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059	15	
	5		0,9997	0,9962	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207	14	
	6			0,9994	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577	13	
	7			0,9999	0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316	12	
	8				0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517	11	
	9					0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,4119	10	
	10						0,9994	0,9961	0,9829	0,5881	9	
	11						0,9999	0,9991	0,9949	0,7483	8	
	12							0,9998	0,9987	0,8684	7	
	13								0,9997	0,9423	6	
	14									0,9793	5	
	15									0,9941	4	
	16									0,9987	3	
	17									0,9998	2	
n		*p* = 0,98	0,95	0,92	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,5	*k*	*n*

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 - \text{abgelesener Wert}$

Name: ____________________

Tabelle 3: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 50

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

						p							
n	*k*	0,02	0,05	0,1	0,125	0,15	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		*n*
	0	0,3642	0,0769	0,0052	0,0013	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	49	
	1	0,7358	0,2794	0,0338	0,0103	0,0029	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	48	
	2	0,9216	0,5405	0,1117	0,0418	0,0142	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	47	
	3	0,9822	0,7604	0,2503	0,1138	0,0460	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	46	
	4	0,9968	0,8964	0,4312	0,2346	0,1121	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	45	
	5	0,9995	0,9622	0,6161	0,3935	0,2194	0,0480	0,0070	0,0007	0,0000	0,0000	44	
	6	0,9999	0,9882	0,7702	0,5637	0,3613	0,1034	0,0194	0,0025	0,0000	0,0000	43	
	7		0,9968	0,8779	0,7165	0,5188	0,1904	0,0453	0,0073	0,0001	0,0000	42	
	8		0,9992	0,9421	0,8339	0,6681	0,3073	0,0916	0,0183	0,0002	0,0000	41	
	9		0,9998	0,9755	0,9121	0,7911	0,4437	0,1637	0,0402	0,0008	0,0000	40	
	10			0,9906	0,9579	0,8801	0,5836	0,2622	0,0789	0,0022	0,0000	39	
	11			0,9968	0,9817	0,9372	0,7107	0,3816	0,1390	0,0057	0,0000	38	
	12			0,9990	0,9928	0,9699	0,8139	0,5110	0,2229	0,0133	0,0002	37	
	13			0,9997	0,9974	0,9868	0,8894	0,6370	0,3279	0,0280	0,0005	36	
	14			0,9999	0,9991	0,9947	0,9393	0,7481	0,4468	0,0540	0,0013	35	
	15				0,9997	0,9981	0,9692	0,8369	0,5692	0,0955	0,0033	34	
	16				0,9999	0,9993	0,9856	0,9017	0,6839	0,1561	0,0077	33	
	17					0,9998	0,9937	0,9449	0,7822	0,2369	0,0164	32	
50	18					0,9999	0,9975	0,9713	0,8594	0,3356	0,0325	31	50
	19						0,9991	0,9861	0,9152	0,4465	0,0595	30	
	20						0,9997	0,9937	0,9522	0,5610	0,1013	29	
	21						0,9999	0,9974	0,9749	0,6701	0,1611	28	
	22							0,9990	0,9877	0,7660	0,2399	27	
	23							0,9996	0,9944	0,8438	0,3359	26	
	24							0,9999	0,9976	0,9022	0,4439	25	
	25								0,9991	0,9427	0,5561	24	
	26								0,9997	0,9686	0,6641	23	
	27								0,9999	0,9840	0,7601	22	
	28									0,9924	0,8389	21	
	29									0,9966	0,8987	20	
	30									0,9986	0,9405	19	
	31									0,9995	0,9675	18	
	32									0,9998	0,9836	17	
	33									0,9999	0,9923	16	
	34										0,9967	15	
	35		Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000								0,9987	14	
	36										0,9995	13	
	37										0,9998	12	
n		0,98	0,95	0,9	0,875	0,85	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	*k*	*n*
						p							

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0{,}5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ______________________

Tabelle 4: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 200

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	k	p = 0,02	0,04	0,05	0,1	0,15	1/6	0,2	0,25		n
	0	0,0176	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	199	
	1	0,0894	0,0027	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	198	
	2	0,2351	0,0125	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	197	
	3	0,4315	0,0395	0,0090	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	196	
	4	0,6288	0,0950	0,0264	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	195	
	5	0,7867	0,1856	0,0623	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	194	
	6	0,8914	0,3084	0,1237	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	193	
	7	0,9507	0,4501	0,2133	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	192	
	8	0,9798	0,5926	0,3270	0,0014	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	191	
	9	0,9925	0,7192	0,4547	0,0035	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	190	
	10	0,9975	0,8200	0,5831	0,0081	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	189	
	11	0,9992	0,8925	0,6998	0,0168	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	188	
	12	0,9998	0,9401	0,7965	0,0320	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	187	
	13	0,9999	0,9688	0,8701	0,0566	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	186	
	14		0,9848	0,9219	0,0929	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	185	
	15		0,9930	0,9556	0,1431	0,0010	0,0001	0,0000	0,0000	184	
	16		0,9970	0,9762	0,2075	0,0021	0,0003	0,0000	0,0000	183	
	17		0,9988	0,9879	0,2849	0,0043	0,0006	0,0000	0,0000	182	
	18		0,9995	0,9942	0,3724	0,0082	0,0013	0,0000	0,0000	181	
	19		0,9998	0,9973	0,4655	0,0149	0,0027	0,0000	0,0000	180	
	20		0,9999	0,9988	0,5592	0,0255	0,0052	0,0001	0,0000	179	
	21			0,9995	0,6484	0,0415	0,0094	0,0002	0,0000	178	
	22			0,9998	0,7290	0,0645	0,0163	0,0005	0,0000	177	
	23			0,9999	0,7983	0,0959	0,0269	0,0010	0,0000	176	
	24				0,8551	0,1368	0,0426	0,0020	0,0000	175	
	25				0,8995	0,1876	0,0648	0,0036	0,0000	174	
	26				0,9328	0,2480	0,0945	0,0064	0,0000	173	
	27				0,9566	0,3166	0,1329	0,0110	0,0000	172	
	28				0,9729	0,3914	0,1803	0,0179	0,0001	171	
	29				0,9837	0,4697	0,2366	0,0283	0,0002	170	
	30				0,9905	0,5485	0,3007	0,0430	0,0004	169	
	31				0,9946	0,6247	0,3711	0,0632	0,0008	168	
	32				0,9971	0,6958	0,4454	0,0899	0,0014	167	
	33				0,9985	0,7596	0,5210	0,1239	0,0026	166	
	34				0,9992	0,8150	0,5953	0,1656	0,0044	165	
	35				0,9996	0,8613	0,6658	0,2151	0,0073	164	
	36				0,9998	0,8987	0,7305	0,2717	0,0117	163	
	37				0,9999	0,9280	0,7877	0,3345	0,0182	162	
200	38					0,9502	0,8369	0,4019	0,0276	161	200
	39					0,9665	0,8777	0,4718	0,0405	160	
	40					0,9780	0,9106	0,5422	0,0578	159	
	41					0,9860	0,9362	0,6108	0,0804	158	
	42					0,9913	0,9556	0,6758	0,1089	157	
	43					0,9947	0,9699	0,7355	0,1438	156	
	44					0,9969	0,9801	0,7887	0,1852	155	
	45					0,9982	0,9872	0,8349	0,2332	154	
	46					0,9990	0,9919	0,8738	0,2870	153	
	47					0,9995	0,9950	0,9056	0,3458	152	
	48					0,9997	0,9970	0,9310	0,4083	151	
	49					0,9998	0,9983	0,9506	0,4729	150	
	50					0,9999	0,9990	0,9655	0,5379	149	
	51						0,9995	0,9764	0,6017	148	
	52						0,9997	0,9843	0,6626	147	
	53						0,9998	0,9897	0,7192	146	
	54						0,9999	0,9934	0,7707	145	
	55							0,9959	0,8162	144	
	56							0,9975	0,8555	143	
	57							0,9985	0,8885	142	
	58							0,9991	0,9157	141	
	59							0,9995	0,9375	140	
	60							0,9997	0,9546	139	
	61							0,9998	0,9677	138	
	62							0,9999	0,9774	137	
	63								0,9846	136	
	64								0,9897	135	
	65								0,9932	134	
	66								0,9956	133	
	67								0,9972	132	
	68								0,9983	131	
	69								0,9990	130	
	70								0,9994	129	
	71								0,9996	128	
	72								0,9998	127	
	73								0,9999	126	
	74								0,9999	125	
n		0,98	0,96	0,95	0,9	0,85	5/6	0,8	0,75	k	n
		p									

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ____________________

Tabelle 5: Kumulierte Binomialverteilung für *n* = 1000

$$F(n;p;k) = B(n;p;0) + \ldots + B(n;p;k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \ldots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	*k*	*p* = 0,2	0,25	0,3	0,35		*n*
	250	0,9999	0,5170	0,0003	0,0000	749	
	251	1,0000	0,5460	0,0003	0,0000	748	
	252	1,0000	0,5747	0,0004	0,0000	747	
	253	1,0000	0,6031	0,0006	0,0000	746	
	254	1,0000	0,6308	0,0007	0,0000	745	
	255	1,0000	0,6579	0,0009	0,0000	744	
	256	1,0000	0,6842	0,0012	0,0000	743	
	257	1,0000	0,7095	0,0015	0,0000	742	
	258	1,0000	0,7338	0,0019	0,0000	741	
	259	1,0000	0,7571	0,0023	0,0000	740	
	260	1,0000	0,7791	0,0029	0,0000	739	
	261	1,0000	0,8000	0,0036	0,0000	738	
	262	1,0000	0,8196	0,0044	0,0000	737	
	263	1,0000	0,8380	0,0055	0,0000	736	
	264	1,0000	0,8550	0,0067	0,0000	735	
	265	1,0000	0,8708	0,0081	0,0000	734	
	266	1,0000	0,8854	0,0098	0,0000	733	
	267	1,0000	0,8987	0,0118	0,0000	732	
	268	1,0000	0,9109	0,0142	0,0000	731	
	269	1,0000	0,9219	0,0169	0,0000	730	
	270	1,0000	0,9319	0,0201	0,0000	729	
	271	1,0000	0,9408	0,0238	0,0000	728	
	272	1,0000	0,9488	0,0280	0,0000	727	
	273	1,0000	0,9559	0,0329	0,0000	726	
	274	1,0000	0,9622	0,0384	0,0000	725	
	275	1,0000	0,9677	0,0446	0,0000	724	
	276	1,0000	0,9725	0,0516	0,0000	723	
	277	1,0000	0,9768	0,0594	0,0000	722	
	278	1,0000	0,9804	0,0682	0,0000	721	
	279	1,0000	0,9836	0,0779	0,0000	720	
	280	1,0000	0,9863	0,0886	0,0000	719	
	281	1,0000	0,9886	0,1003	0,0000	718	
1000	282	1,0000	0,9905	0,1132	0,0000	717	1000
	283	1,0000	0,9922	0,1271	0,0000	716	
	284	1,0000	0,9936	0,1422	0,0000	715	
	285	1,0000	0,9948	0,1585	0,0000	714	
	286	1,0000	0,9957	0,1759	0,0000	713	
	287	1,0000	0,9966	0,1945	0,0000	712	
	288	1,0000	0,9972	0,2142	0,0000	711	
	289	1,0000	0,9978	0,2350	0,0000	710	
	290	1,0000	0,9982	0,2569	0,0000	709	
	291	1,0000	0,9986	0,2798	0,0000	708	
	292	1,0000	0,9989	0,3036	0,0001	707	
	293	1,0000	0,9991	0,3282	0,0001	706	
	294	1,0000	0,9993	0,3536	0,0001	705	
	295	1,0000	0,9995	0,3797	0,0001	704	
	296	1,0000	0,9996	0,4063	0,0002	703	
	297	1,0000	0,9997	0,4333	0,0002	702	
	298	1,0000	0,9997	0,4606	0,0003	701	
	299	1,0000	0,9998	0,4881	0,0004	700	
	300	1,0000	0,9999	0,5156	0,0005	699	
	301	1,0000	0,9999	0,5430	0,0006	698	
	302	1,0000	0,9999	0,5702	0,0007	697	
	303	1,0000	0,9999	0,5971	0,0009	696	
	304	1,0000	1,0000	0,6235	0,0012	695	
	305	1,0000	1,0000	0,6493	0,0014	694	
	306	1,0000	1,0000	0,6744	0,0018	693	
	307	1,0000	1,0000	0,6988	0,0022	692	
	308	1,0000	1,0000	0,7223	0,0028	691	
	309	1,0000	1,0000	0,7448	0,0034	690	
	310	1,0000	1,0000	0,7663	0,0041	339	
	311	1,0000	1,0000	0,7868	0,0050	338	
	312	1,0000	1,0000	0,8061	0,0061	337	
	313	1,0000	1,0000	0,8244	0,0074	686	
	314	1,0000	1,0000	0,8415	0,0089	685	
n		0,8	0,75	0,7	0,65 = *p*	*k*	*n*

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$ gilt: $F(n;p;k) = 1 -$ abgelesener Wert

Name: ______________________

Tabelle 6: Normalverteilung

$\phi(z) = 0,...$

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$\phi(2,32) = 0,9898$

$\phi(-0,9) = 1 - \phi(0,9) = 0,1841$

$\phi(z) = 0,994 \Rightarrow z = 2,51$

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2014

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Stochastik

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2014

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
   - Binomialverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung
   - Ein- und zweiseitiger Hypothesentest

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

Die Zufallsgröße *X: Anzahl der weiblichen Zuschauer* kann als binomialverteilt angenommen werden mit $p = 0,25$ und $n = 200$.

(1) $P(X = 48) = P(X \le 48) - P(X \le 47) \overset{Tabelle}{\approx} 0,4083 - 0,3458 = 0,0625$

(2) $P(35 \le X \le 60) = P(X \le 60) - P(X \le 34) \overset{Tabelle}{\approx} 0,9546 - 0,0044 = 0,9502$

(3) Der Erwartungswert beträgt $\mu = 200 \cdot 0,25 = 50$.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist somit:

$P(X \le 40) + P(X \ge 60) = P(X \le 40) + \left(1 - P(X \le 59)\right) \overset{Tabelle}{\approx} 0,0578 + \left(1 - 0,9375\right) = 0,1203.$

Teilaufgabe b)

Im vorliegenden Sachzusammenhang kann das Ereignis E z. B. folgendermaßen lauten: „Unter 1 000 zufällig ausgewählten Zuschauern eines Fußballspiels sind mehr als 300 weiblich".

Teilaufgabe c)

(1) Die Zufallsgröße *X: Anzahl der weiblichen Zuschauer* kann als binomialverteilt angenommen werden mit $p = 0,25$ und $n = 20\,000$.

Es ist $\mu = p \cdot n = 5000$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{20\,000 \cdot 0,25 \cdot 0,75} \approx 61,24 > 3$.

Damit ist die Laplace-Bedingung erfüllt und es gilt
$P(\mu - 1,64\sigma \le X \le \mu + 1,64\sigma) \approx 0,90$.

Wegen $4\,899 \le \mu - 1,64\sigma \le 4\,900$ und $5100 \le \mu + 1,64\sigma \le 5101$ ist das gesuchte Intervall [unter Verwendung der üblichen Näherungswerte ebenso wie bei genauer Rechnung] das Intervall $[4\,899; 5101]$.

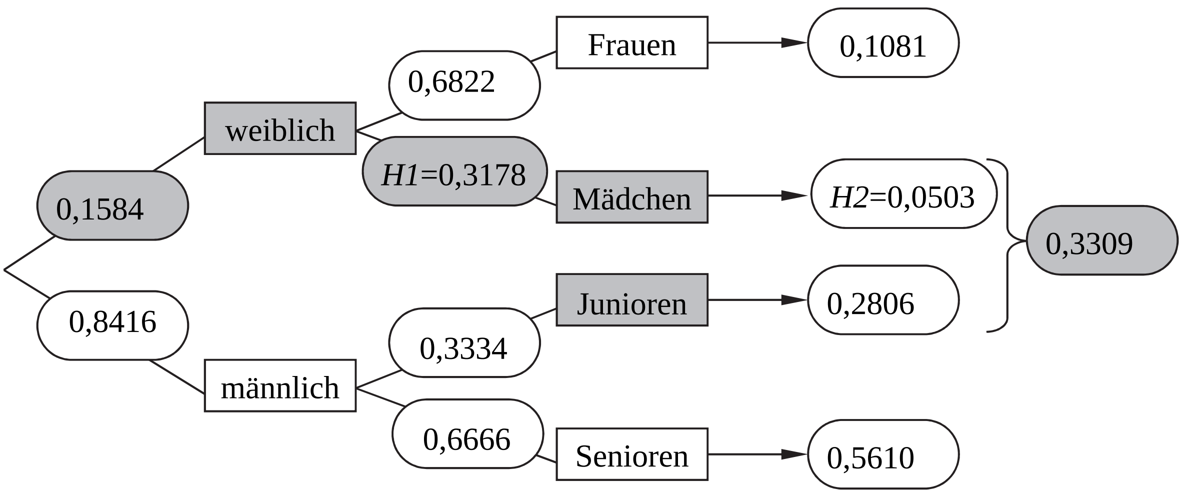
(2) Die Verwendung der Formel setzt voraus, dass die Zufallsgröße *X: Anzahl der weiblichen Zuschauer in der Schlange* binomialverteilt ist mit $p = 0,25$ und $n = 50$.

Das bedeutet z. B.: Jede Person in der Schlange ist unabhängig von den anderen Personen mit gleichbleibender Wahrscheinlichkeit von $p = 0,25$ weiblich.

Dies kann jedoch nicht vorausgesetzt werden, da sich in einer Warteschlange von 50 Personen z. B. auch Gruppen von Personen (Familien-, Vereins-, Fanclubmitglieder …) befinden können.

Teilaufgabe d)

(1) Die gegebenen Daten sind hier grau unterlegt. Mit den Daten ergibt sich folgendes Baumdiagramm:



(2) *H1* ist der Anteil der Mädchen an den weiblichen Mitgliedern des DFB,
H2 ist der Anteil der Mädchen an der Gesamtheit aller DFB-Mitglieder.

(3) [Da zufällig ausgewählt wurde, können die relativen Häufigkeiten des Baumdiagramms als Wahrscheinlichkeiten verwendet werden.]
Die Wahrscheinlichkeit, zufällig einen männlichen Jugendlichen auszuwählen, beträgt ca. 0,2806. Die Wahrscheinlichkeit, zufällig ein Mädchen auszuwählen, beträgt ca. 0,0503.
[Wegen der großen Anzahl der DFB-Mitglieder ändert sich die jeweilige Wahrscheinlichkeit bei der Auswahl der zweiten Person im Rahmen der vorgegebenen Genauigkeit nicht.]
Das betrachtete Ereignis umfasst zwei Ergebnisse, die sich in der Reihenfolge unterscheiden. Daher beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit ca. $2 \cdot 0,2806 \cdot 0,0503 \approx 0,0282$.

Teilaufgabe e)

(1) Mit der Wahl von $H_0: p \le 0{,}25$ als Nullhypothese beschränkt der Verkaufsleiter die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers 1. Art, in dessen Folge er auf größeren Mengen verderblicher Ware sitzen bleiben könnte, durch die [gegebene] Irrtumswahrscheinlichkeit auf höchstens 0,05.

Die Zufallsgröße *X: Anzahl weiblicher Zuschauer* kann als binomialverteilt angenommen werden. Es handelt sich um einen rechtsseitigen Test mit $n = 1000$, $z = 1{,}64$, $\mu = 250$ und $\sigma = \sqrt{1000 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75} \approx 13{,}69 > 3$.

Da die Laplace-Bedingung erfüllt ist, gilt $P(X > \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}05$.

Mit $\mu + 1{,}64\sigma \approx 272{,}5$ ergibt sich als Entscheidungsregel:

Verwirf die Nullhypothese, falls 273 oder mehr weibliche Zuschauer gezählt werden.

[Alternative: Bei Verwendung der Tabelle oder eines geeigneten Taschenrechners erhält man: $P_{p=0{,}25}\left(X \ge 273\right) \approx 0{,}0512 > 0{,}05$ und $P_{p=0{,}25}\left(X \ge 274\right) \approx 0{,}0441 < 0{,}05$.

Als Entscheidungsregel ergibt sich in diesem Fall:

Verwirf die Nullhypothese, falls 274 oder mehr weibliche Zuschauer gezählt werden.]

(2) Der Fehler 2. Art besteht darin, dass die Nullhypothese [entsprechend der Entscheidungsregel bei einem Stichprobenergebnis kleiner als 273 [bzw. 274]] irrtümlich nicht verworfen wird, obwohl mehr als 25 % der Zuschauer im Stadion weiblich sind.

Die Wahrscheinlichkeit seines Auftretens beträgt $\beta = P_{p=0{,}3}(X \le 272) \overset{Tabelle}{\approx} 0{,}0280$.

[Zur Alternative aus (1) gehört $\beta = P_{p=0{,}3}(X \le 273) \overset{Tabelle}{\approx} 0{,}0329$.]

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:__________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	2			
2	(2) berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3			
3	(3) berechnet die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (10) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**10**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	beschreibt ein passendes Ereignis *E*.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**4**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt das gesuchte Intervall.	6			
2	(2) nennt eine Voraussetzung für die Verwendung des Terms.	3			
3	(2) entscheidet, ob die Verwendung des Terms zulässig ist.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**11**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) stellt die gegebenen Daten in dem Baumdiagramm dar und notiert alle fehlenden relativen Häufigkeiten.	7			
2	(2) beschreibt die relativen Häufigkeiten *H1* und *H2* mit Worten.	3			
3	(3) ermittelt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (14) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**14**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet die Wahl der Nullhypothese.	2			
2	(1) ermittelt eine Entscheidungsregel.	5			
3	(2) beschreibt den Fehler 2. Art im Sachzusammenhang und berechnet die Wahrscheinlichkeit seines Auftretens.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**11**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0