HMF 1 - Analysis (Pool 1)

Für jeden Wert von a ($a \in \mathbb{R}, a \neq 0$) ist eine Funktion f_a durch $f_a(x) = a \cdot x^6 - x^4$ ($x \in \mathbb{R}$) gegeben.

1.1 Bestimmen Sie diejenigen Werte von a, für die f_a mehr als eine Nullstelle hat.

(3 P)

1.2 Für genau einen Wert von a hat f_a an der Stelle $x = 1$ ein Minimum. Bestimmen Sie diesen Wert von a.

(2 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 1 - Analysis (Pool 1)
1.1	$$\begin{array}{rcl} f_a(x) & = & 0 \\ \Leftrightarrow \quad (a\,x^2 - 1) \cdot x^4 & = & 0 \\ \Leftrightarrow \quad x = 0 & \text{oder} & x^2 = \dfrac{1}{a} \end{array}$$ f_a hat genau dann mehr als eine Nullstelle, wenn gilt $a > 0$. 3 P
1.2	$f_a'(x) = 6\,a\,x^5 - 4\,x^3$ Mit der notwendigen Bedingung für ein Minimum an der Stelle $x = 1$ gilt $f_a'(1) = 6\,a - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; a = \frac{2}{3}$. 2 P

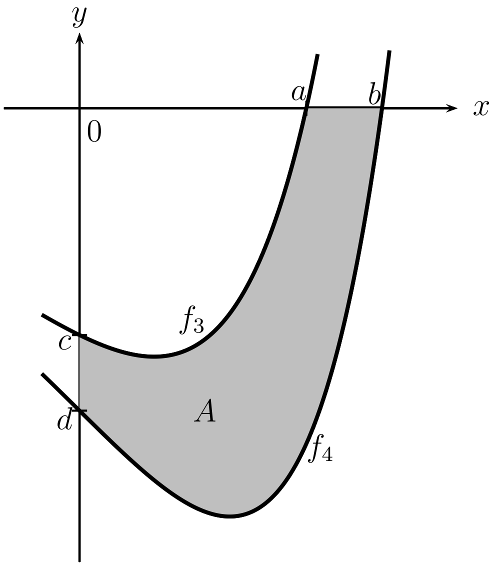
HMF 2 - Analysis (Pool 1)

Gegeben ist die Funktionenschar f_k mit $f_k(x) = (x-k) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ für $k > 0$ und $x \in \mathbb{R}$.

2.1 Berechnen Sie den Schnittpunkt des Graphen von f_k mit der x-Achse.

(2 P)

2.2 Die Skizze zeigt die Graphen der Funktionen f_3 und f_4.
Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle an, welche der Terme den Inhalt des markierten Flächenstücks A richtig angeben und welche nicht.



Term	richtig	falsch
$\left\lvert \int\limits_d^b f_4(x)\,dx - \int\limits_c^a f_3(x)\,dx \right\rvert$		
$\left\lvert \int\limits_0^a f_4(x)\,dx - \int\limits_0^b f_3(x)\,dx \right\rvert$		
$\left\lvert \int\limits_0^a f_3(x)\,dx - \int\limits_0^b f_4(x)\,dx \right\rvert$		
$\int\limits_0^b f_4(x)\,dx - \int\limits_0^a f_3(x)\,dx$		
$\int\limits_0^a f_3(x)\,dx - \int\limits_0^b f_4(x)\,dx$		
$\int\limits_0^b \lvert f_3(x) - f_4(x)\rvert\,dx$		

(3 P)

<table>
<tr><th></th><th>Vorgaben für die Bewertung von HMF 2 - Analysis (Pool 1)</th></tr>
<tr><td>2.1</td><td>$f_k(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; (x-k)\cdot e^{\frac{1}{2}x} = 0 \Leftrightarrow x-k=0 \;\Leftrightarrow\; x=k$
Der Schnittpunkt ist $N(k\,|\,0)$.
2 P</td></tr>
<tr><td>2.2</td><td>
<table>
<tr><th>Term</th><th>richtig</th><th>falsch</th></tr>
<tr><td>$\left|\int\limits_d^b f_4(x)\,dx - \int\limits_c^a f_3(x)\,dx\right|$</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>$\left|\int\limits_0^a f_4(x)\,dx - \int\limits_0^b f_3(x)\,dx\right|$</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>$\left|\int\limits_0^a f_3(x)\,dx - \int\limits_0^b f_4(x)\,dx\right|$</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>$\int\limits_0^b f_4(x)\,dx - \int\limits_0^a f_3(x)\,dx$</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>$\int\limits_0^a f_3(x)\,dx - \int\limits_0^b f_4(x)\,dx$</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>$\int\limits_0^b \lvert f_3(x) - f_4(x)\rvert\,dx$</td><td></td><td>X</td></tr>
</table>

Für jeden richtig beurteilten Term soll ein halber Punkt vergeben werden.
3 P</td></tr>
</table>

HMF 3 - Analysis (Pool 2)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 6 \quad (x \in \mathbb{R})$.

3.1 Weisen Sie nach, dass der Wendepunkt des Graphen von f auf der Geraden mit der Gleichung $y = x - 2$ liegt.

(3 P)

3.2 Der Graph von f wird verschoben. Der Punkt $(2\,|\,0)$ des Graphen der Funktion f besitzt nach der Verschiebung die Koordinaten $(3\,|\,2)$. Der verschobene Graph gehört zu einer Funktion h.
Geben Sie eine Gleichung von h an.

(2 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 3 - Analysis (Pool 2)
3.1	$f'(x) = 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 11$; $f''(x) = 6 \cdot x - 12$ Aus $0 = 6 \cdot x - 12$ folgt $x = 2$. $f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 11 \cdot 2 - 6 = 0$ Also ist $W(2\,|\,0)$ der Wendepunkt. Wegen $0 = 2 - 2$ liegt W auf der Geraden. 3 P
3.2	Mögliche Funktionsgleichungen für h sind beispielsweise $h(x) = f(x-1) + 2$ oder $h(x) = (x-1)^3 - 6 \cdot (x-1)^2 + 11 \cdot (x-1) - 4$. 2 P

HMF 4 - Analytische Geometrie (Pool 1)

4.1 Gegeben seien die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ und die reellen Zahlen r und t. Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle an, ob es sich bei dem Ausdruck um einen Vektor oder um eine Zahl handelt, oder ob der Ausdruck nicht definiert ist.

Ausdruck	Vektor	Zahl	nicht definiert
$(\vec{u} \circ \vec{v}) + \vec{w}$			
$\lvert\vec{u}\rvert^2 - \lvert\vec{w}\rvert^2$			
$(\vec{u} \times \vec{v}) - (r \cdot t) \cdot \vec{w}$			
$(\vec{u} \circ \vec{u}) + (r - t)^2$			
$(r \cdot \vec{u}) \circ (t \times \vec{u} \times \vec{v})$			
$\vec{u} \times ((\vec{w} - \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}))$			

(3 P)

4.2 Gegeben seien die Punkte A, B und C, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Geben Sie eine Gleichung der Ebene E, die die Punkte A, B und C enthält, in allgemeiner Form an.
Geben Sie einen Vektor, der orthogonal zu dieser Ebene ist und die Länge 1 hat, in allgemeiner Form an.

(2 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 4 - Analytische Geometrie (Pool 1)
4.1	*(Tabelle unten)* 3 P

Ausdruck	Vektor	Zahl	nicht definiert
$(\vec{u} \circ \vec{v}) + \vec{w}$			×
$\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{w}\|^2$		×	
$(\vec{u} \times \vec{v}) - (r \cdot t) \cdot \vec{w}$	×		
$(\vec{u} \circ \vec{u}) + (r - t)^2$		×	
$(r \cdot \vec{u}) \circ (t \times \vec{u} \times \vec{v})$			×
$\vec{u} \times ((\vec{w} - \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}))$	×		

3 P

4.2 $E : \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$

1 P

Ein Vektor $\vec{n}_0$, der orthogonal zu E ist und die Länge 1 hat, hat zum Beispiel die Form

$$\vec{n}_0 = \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}.$$

1 P

HMF 5 - Analytische Geometrie (Pool 1)

Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(0\,|\,1\,|\,2)$ und $B(2\,|\,5\,|\,6)$.

5.1 Zeigen Sie, dass die Punkte A und B den Abstand 6 haben.
Die Punkte C und D liegen auf g und haben von A jeweils den Abstand 12.
Bestimmen Sie die Koordinaten von C und D.

(3 P)

5.2 Die Punkte A, B und $E(1\,|\,2\,|\,5)$ sollen mit einem weiteren Punkt die Eckpunkte eines Parallelogramms bilden. Für die Lage des vierten Eckpunktes gibt es mehrere Möglichkeiten.
Geben Sie für zwei dieser Möglichkeiten die Koordinaten des vierten Eckpunktes an.

(2 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 5 - Analytische Geometrie (Pool 1)
5.1	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{2^2+4^2+4^2} = \sqrt{36} = 6$ $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\9\\10\end{pmatrix} \Rightarrow C(4\,|\,9\,|\,10)$ $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} - 2\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-7\\-6\end{pmatrix} \Rightarrow D(-4\,|\,-7\,|\,-6)$ 3 P
5.2	Anzugeben sind zwei der folgenden drei Punkte. $(3\,|\,6\,|\,9), (-1\,|\,-2\,|\,1)$, $(1\,|\,4\,|\,3)$ 2 P

HMF 6 - Analytische Geometrie (Pool 2)

Gegeben sind eine Kugel K um den Ursprung durch $K : \vec{x}^{\,2} = 144$, eine Gerade g mit $g : \vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und eine Ebene E mit $E : 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$.

6.1 Berechnen Sie die Schnittpunkte der Kugel K und der Geraden g.

(3 P)

6.2 Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Schnittkreises der Kugel K mit der Ebene E.

(2 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 6 - Analytische Geometrie (Pool 2)
6.1	Setzt man die Koordinaten der Punkte der Geraden in die Kugelgleichung ein, erhält man $(2s)^2 + (-2s)^2 + s^2 = 144 \Leftrightarrow 9s^2 = 144 \Leftrightarrow s^2 = 16 \Leftrightarrow s = -4 \vee s = 4$. Daraus erhält man die Schnittpunkte $S_1(-8 \mid 8 \mid -4)$ und $S_2(8 \mid -8 \mid 4)$. 3 P
6.2	Der Ursprung ist der Mittelpunkt der Kugel K und liegt in der Ebene E, daher ist der Ursprung auch der Mittelpunkt des Schnittkreises. Der Radius r^* des Schnittkreises ist damit der Kugelradius, also $r^* = 12$. 2 P

HMF 7 - Stochastik (Pool 1)

$50\,\%$ der Studierenden, die sich zu einer Klausur anmelden, sind Wiederholer. Kurz vor der Prüfung treten $28\,\%$ der Wiederholer und $12\,\%$ der anderen Prüflinge von der Klausur zurück. Es wird ein angemeldeter Studierender zufällig ausgewählt. Verwenden Sie folgende Bezeichnungen:

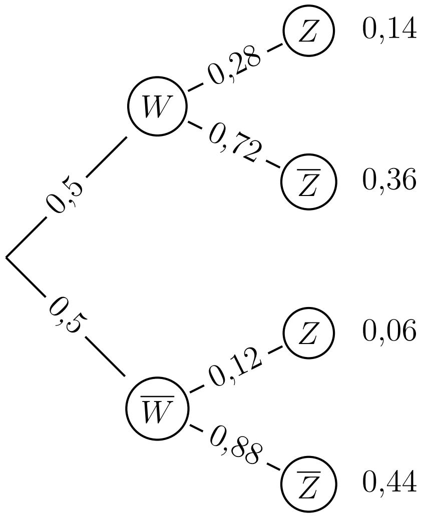
W: Der Prüfling ist Wiederholer.
Z: Der Prüfling tritt von der Klausur zurück.

7.1 Erstellen Sie zu diesem Sachverhalt ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm mit allen Pfadwahrscheinlichkeiten.

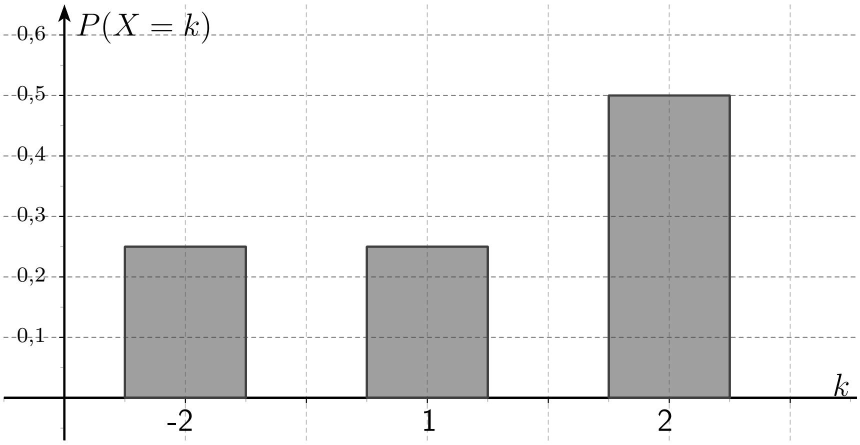
(3 P)

7.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig auszuwählender Prüfling Wiederholer ist, unter der Bedingung, dass er an der Prüfung teilgenommen hat.

(2 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 7 - Stochastik (Pool 1)
7.1	 3 P
7.2	$P_{\overline{Z}}(W) = \dfrac{P(W \cap \overline{Z})}{P(\overline{Z})} = \dfrac{0{,}36}{0{,}36 + 0{,}44} = \dfrac{0{,}36}{0{,}8} = \dfrac{36}{80} = \dfrac{9}{20}$ 2 P

HMF 8 - Stochastik (Pool 1)



Für ein Zufallsexperiment wird eine Zufallsvariable X festgelegt, welche die drei Werte -2, 1 und 2 annehmen kann. In der Abbildung ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.

8.1 Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung den Erwartungswert der Zufallsvariablen X.

(2 P)

8.2 Das Zufallsexperiment wird zweimal durchgeführt. Dabei wird jeweils der Wert der Zufallsvariablen X notiert.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe dieser beiden Werte negativ ist.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 8 - Stochastik (Pool 1)
8.1	$E(X) = (-2) \cdot 0{,}25 + 1 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}5 = 0{,}75$ 2 P
8.2	$P(\text{„Die Summe ist negativ.“}) = P(-2;-2)+P(-2;1)+P(1;-2) = \frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16} = \frac{3}{16}$ 3 P

HMF-Bewertungsbogen für: ______________________________

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 1 - Analysis (Pool 1)
1.1	$$\begin{aligned} f_a(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow\ (a\,x^2-1)\cdot x^4 &= 0 \\ \Leftrightarrow\ x=0 \ \text{ oder } \ x^2 &= \frac{1}{a} \end{aligned}$$ f_a hat genau dann mehr als eine Nullstelle, wenn gilt $a > 0$. 3 P
1.2	$f_a'(x) = 6\,a\,x^5 - 4\,x^3$ Mit der notwendigen Bedingung für ein Minimum an der Stelle $x = 1$ gilt $f_a'(1) = 6\,a - 4 = 0 \ \Leftrightarrow\ a = \frac{2}{3}$. 2 P

Vorgaben für die Bewertung von HMF 2 - Analysis (Pool 1)

2.1 $f_k(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; (x-k)\cdot e^{\frac{1}{2}x} = 0 \Leftrightarrow x - k = 0 \;\Leftrightarrow\; x = k$

Der Schnittpunkt ist $N(k\,|\,0)$.

2 P

2.2

Term	richtig	falsch
$\left\lvert\int\limits_d^b f_4(x)\,dx - \int\limits_c^a f_3(x)\,dx\right\rvert$		X
$\left\lvert\int\limits_0^a f_4(x)\,dx - \int\limits_0^b f_3(x)\,dx\right\rvert$		X
$\left\lvert\int\limits_0^a f_3(x)\,dx - \int\limits_0^b f_4(x)\,dx\right\rvert$	X	
$\int\limits_0^b f_4(x)\,dx - \int\limits_0^a f_3(x)\,dx$		X
$\int\limits_0^a f_3(x)\,dx - \int\limits_0^b f_4(x)\,dx$	X	
$\int\limits_0^b \lvert f_3(x) - f_4(x)\rvert\,dx$		X

Für jeden richtig beurteilten Term soll ein halber Punkt vergeben werden.

3 P

Vorgaben für die Bewertung von HMF 3 - Analysis (Pool 2)

3.1 $f'(x) = 3\cdot x^2 - 12\cdot x + 11;\; f''(x) = 6\cdot x - 12$

Aus $0 = 6\cdot x - 12$ folgt $x = 2$.

$f(2) = 2^3 - 6\cdot 2^2 + 11\cdot 2 - 6 = 0$

Also ist $W(2\,|\,0)$ der Wendepunkt.

Wegen $0 = 2 - 2$ liegt W auf der Geraden.

3 P

3.2 Mögliche Funktionsgleichungen für h sind beispielsweise

$h(x) = f(x-1) + 2$ oder

$h(x) = (x-1)^3 - 6\cdot(x-1)^2 + 11\cdot(x-1) - 4$.

2 P

Vorgaben für die Bewertung von HMF 4 - Analytische Geometrie (Pool 1)

4.1

Ausdruck	Vektor	Zahl	nicht definiert
$(\vec{u} \circ \vec{v}) + \vec{w}$			×
$\lvert\vec{u}\rvert^2 - \lvert\vec{w}\rvert^2$		×	
$(\vec{u} \times \vec{v}) - (r \cdot t) \cdot \vec{w}$	×		
$(\vec{u} \circ \vec{u}) + (r - t)^2$		×	
$(r \cdot \vec{u}) \circ (t \times \vec{u} \times \vec{v})$			×
$\vec{u} \times ((\vec{w} - \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}))$	×		

3 P

4.2 $E : \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$

1 P

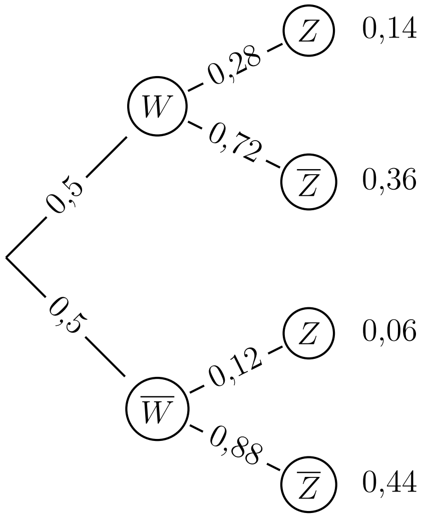
Ein Vektor $\vec{n}_0$, der orthogonal zu E ist und die Länge 1 hat, hat zum Beispiel die Form

$$\vec{n}_0 = \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}.$$

1 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 5 - Analytische Geometrie (Pool 1)
5.1	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{2^2+4^2+4^2} = \sqrt{36} = 6$ $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\9\\10\end{pmatrix} \Rightarrow C(4\,\vert\,9\,\vert\,10)$ $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} - 2\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-7\\-6\end{pmatrix} \Rightarrow D(-4\,\vert-7\,\vert-6)$ 3 P
5.2	Anzugeben sind zwei der folgenden drei Punkte. $(3\,\vert\,6\,\vert\,9), (-1\,\vert-2\,\vert\,1), (1\,\vert\,4\,\vert\,3)$ 2 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 6 - Analytische Geometrie (Pool 2)
6.1	Setzt man die Koordinaten der Punkte der Geraden in die Kugelgleichung ein, erhält man $(2s)^2 + (-2s)^2 + s^2 = 144 \Leftrightarrow 9s^2 = 144 \Leftrightarrow s^2 = 16 \Leftrightarrow s = -4 \vee s = 4.$ Daraus erhält man die Schnittpunkte $S_1(-8\,\vert\,8\,\vert-4)$ und $S_2(8\,\vert-8\,\vert\,4)$. 3 P
6.2	Der Ursprung ist der Mittelpunkt der Kugel K und liegt in der Ebene E, daher ist der Ursprung auch der Mittelpunkt des Schnittkreises. Der Radius r^* des Schnittkreises ist damit der Kugelradius, also $r^* = 12$. 2 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 7 - Stochastik (Pool 1)
7.1	 3 P
7.2	$P_{\overline{Z}}(W) = \frac{P(W \cap \overline{Z})}{P(\overline{Z})} = \frac{0{,}36}{0{,}36 + 0{,}44} = \frac{0{,}36}{0{,}8} = \frac{36}{80} = \frac{9}{20}$ 2 P

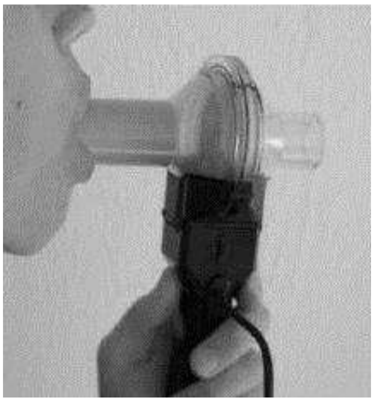
	Vorgaben für die Bewertung von HMF 8 - Stochastik (Pool 1)
8.1	$E(X) = (-2) \cdot 0{,}25 + 1 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}5 = 0{,}75$ 2 P
8.2	$P(\text{„Die Summe ist negativ.“}) = P(-2;-2) + P(-2;1) + P(1;-2) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$ 3 P

Erstkorrektor: Von 40 Punkten wurden erreicht: ________

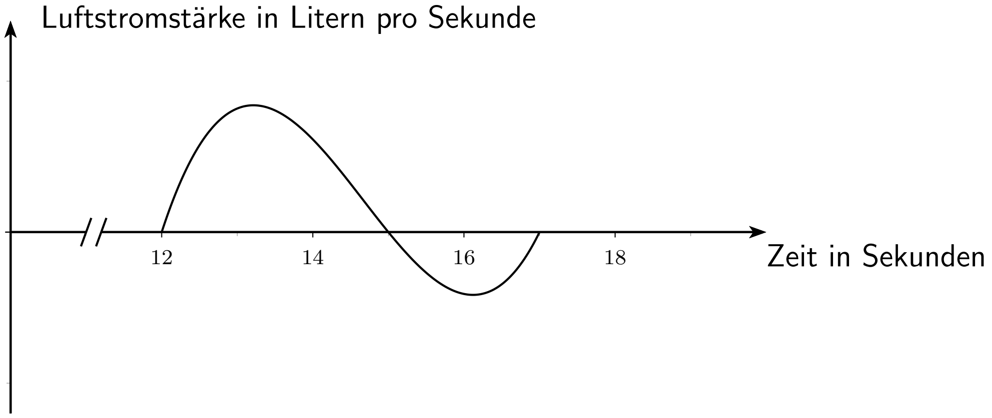
Zweitkorrektor: Von 40 Punkten wurden erreicht: ________

Aufgabe 1: Analysis-CAS

Bei jedem Atemzug tauscht der Mensch ein gewisses Luftvolumen mit der Umgebung aus. Mit einem Spirometer (siehe Abbildung) kann die momentane Luftstromstärke in Litern pro Sekunde während des Ein- und des Ausatmens gemessen werden. Die Werte der Luftstromstärke sind in dieser Aufgabe beim Einatmen positiv, beim Ausatmen negativ.



a) Die folgende Abbildung zeigt den Teil des Graphen einer ganzrationalen Funktion g dritten Grades, der zur Beschreibung der Luftstromstärke während eines bestimmten Atemzuges verwendet werden soll.



Die Messung beginnt mit dem Einatmen bei 12 Sekunden. Bei 13,2 Sekunden beträgt die Luftstromstärke 4,2 Liter pro Sekunde. Das Ausatmen beginnt bei 15 Sekunden und endet bei 17 Sekunden.

Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion g aus den genannten Bedingungen. Runden Sie die Koeffizienten auf 4 Nachkommastellen.

(5 P)

b) Für einen anderen Atemzug wird die Luftstromstärke beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t) = 0{,}671t^3 - 30t^2 + 443t - 2160.$$

Dabei ist t die Zeit in Sekunden und $f(t)$ die Luftstromstärke in Litern pro Sekunde.

- Berechnen Sie jeweils die Zeitpunkte des Beginns und des Endes des Ein- bzw. Ausatmens.
- Berechnen Sie die minimalen und die maximalen Luftstromstärken während des Atemzugs.
- Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f im Intervall $[12\,;\,18]$.
- Berechnen Sie für diesen Atemzug sowohl das ein- als auch das ausgeatmete Luftvolumen. Bestimmen Sie außerdem den Zeitpunkt in der Einatmungsphase, bis zu dem 5 Liter eingeatmet wurden.

(18 P)

c) Die sogenannte Einsekundenkapazität ist das Luftvolumen, das in der ersten Sekunde schnellstmöglich ausgeatmet wird. Die Luftstromstärken für entsprechende Ausatemvorgänge lassen sich durch die Kurvenschar h_d mit

$$h_d(t) = -7 \cdot \frac{t}{d^2} \cdot e^{-\frac{t}{d}}$$

für $t \in [0\,;\,5]$ und $d \in [0{,}2\,;\,0{,}6]$ modellieren. Der Ausatemvorgang wird dabei nach 5 Sekunden als beendet angesehen.

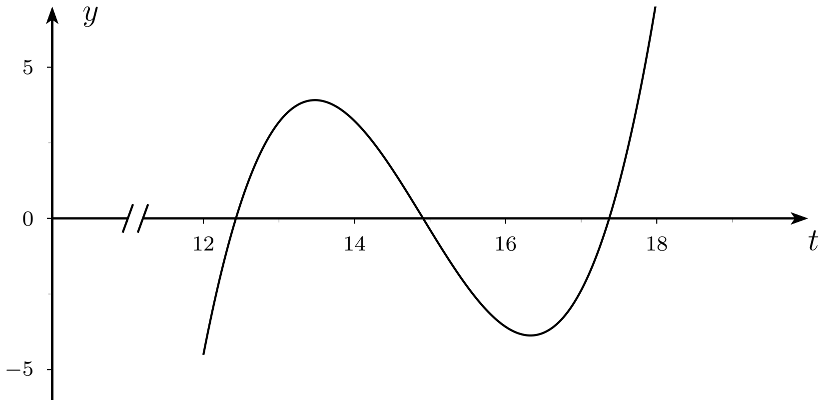
- Skizzieren Sie für die ersten fünf Sekunden die Funktionsgraphen von zwei verschiedenen Ausatemvorgängen und veranschaulichen Sie die Einsekundenkapazität an einem Graphen in der Skizze. Beschreiben und vergleichen Sie die beiden Ausatemvorgänge.
- Die Einsekundenkapazität sollte bei gesunden Menschen 75 % des insgesamt ausgeatmeten Luftvolumens betragen. Formulieren Sie einen Ansatz, aus dem der Wert für den Parameter d so bestimmt werden kann, dass diese Bedingung erfüllt ist.
- Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an dem die momentane Änderungsrate der Luftstromstärke den Wert null annimmt.
- Zeigen Sie, dass für alle $d \in [0{,}2\,;\,0{,}6]$ das in den ersten 5 Sekunden ausgeatmete Luftvolumen zwischen 6,95 und 7 Litern liegt.

(17 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe a) Die allgemeine Gleichung einer ganzrationalen Funktion 3. Grades lautet $g(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$.	1		
Aus den an die Funktion zu stellenden Bedingungen $g(12) = 0\,;\ g(15) = 0\,;\ g(17) = 0\,;\ g(13{,}2) = 4{,}2$	2		
folgt $g(t) \approx 0{,}5117t^3 - 22{,}5146t^2 + 326{,}9737t - 1565{,}7895$.	2		
Teilaufgabe b) Die zu bestimmenden Zeitpunkte sind die Nullstellen von f. $f(t) = 0$ liefert $t \approx 12{,}4305 \vee t \approx 14{,}9083 \vee t \approx 17{,}3706$. Das Einatmen beginnt bei ca. 12,4 Sekunden und endet bei ca. 14,9 Sekunden, das Ausatmen beginnt bei ca. 14,9 Sekunden und endet bei ca. 17,4 Sekunden.	2		
Notwendig für das Vorliegen einer Extremstelle t von f ist $f'(t) = 0$. $f'(t) = 0$ liefert $t \approx 13{,}4770 \vee t \approx 16{,}3292$.	2		
Weil zusätzlich $f''(13{,}4770) \approx -5{,}7 < 0$ gilt, liegt an der Stelle 13,4770 ein lokales Maximum vor. Weil zusätzlich $f''(16{,}3292) \approx 5{,}7 > 0$ gilt, liegt an der Stelle 16,3292 ein lokales Minimum vor.	2		
Wegen $f(12{,}4305) = f(17{,}3706) = 0$ sind dieses auch die globalen Extrema von f im betrachteten Intervall.	1		
$f(13{,}4770) \approx 3{,}91\,;\ f(16{,}3292) \approx -3{,}87$ Die maximalen Luftstromstärken betragen beim Ein- bzw. Ausatmen jeweils ca. 3,9 Liter pro Sekunde.	2		

<table>
<tr><th rowspan="2">Erwartete Schülerleistung</th><th colspan="3">Bewertung
Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>

Skizze:



</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>

Das ein- bzw. ausgeatmete Luftvolumen entspricht dem Betrag des Wertes des Integrals von f zwischen den jeweiligen Nullstellen.
Es ist

$$\left|\int\limits_{12{,}4305}^{14{,}9083} f(t)\,dt\right| \approx 6{,}30 \quad \text{sowie} \quad \left|\int\limits_{14{,}9083}^{17{,}3706} f(t)\,dt\right| \approx 6{,}19.$$

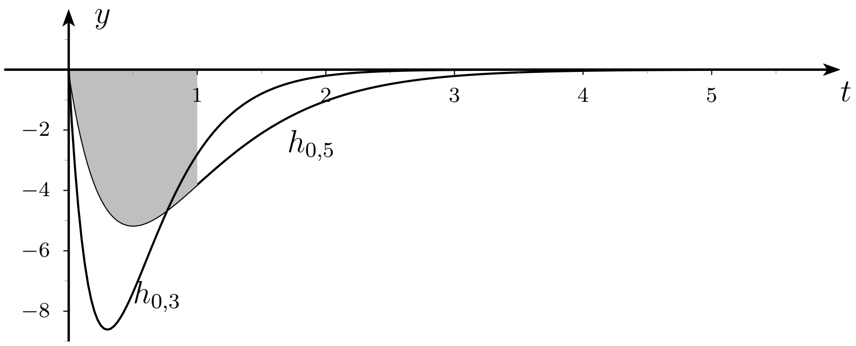
Es werden also ca 6,3 Liter ein- und ca. 6,2 Liter ausgeatmet.

Der Zeitpunkt, bis zu dem genau 5 Liter eingeatmet wurden, ergibt sich aus

$$\int\limits_{12{,}4305}^{b} f(t)\,dt = 5.$$

Daraus ergibt sich $b \approx 11{,}5 \vee b \approx 14{,}1 \vee b \approx 15{,}7 \vee b \approx 18{,}3$.
Da $b \in [12{,}4305\ ;\ 14{,}9083]$ ist, wurden bei 14,1 Sekunden genau 5 Liter eingeatmet.

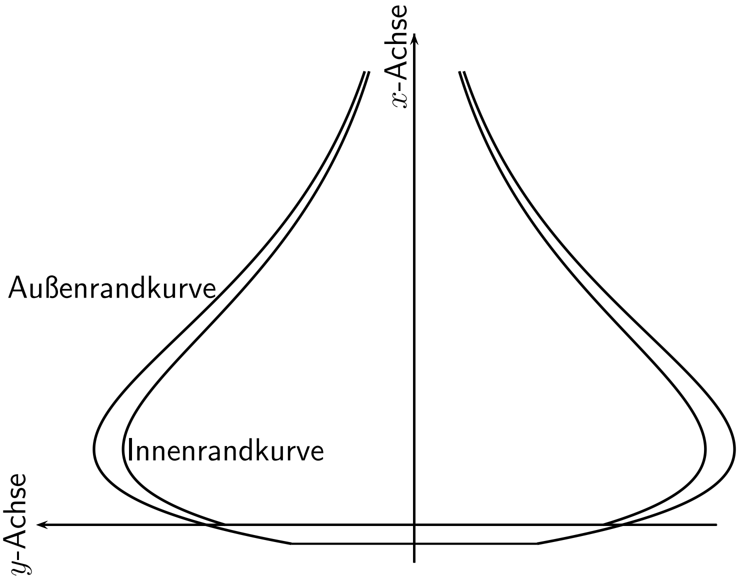
</td><td></td><td>4
3</td><td></td></tr>
</table>

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe c) 		3	
Beschreibung: Die Luftstromstärke nimmt von null ausgehend zunächst betragsmäßig zu, erreicht betragsmäßig ihr Maximum und strebt dann gegen null.		2	
Vergleich: Bei dem kleineren Wert von d wird eine betragsmäßig größere extremale Luftstromstärke erreicht. Bei dem kleineren Wert von d wird die extremale Luftstromstärke zu einem früheren Zeitpunkt erreicht.		2	
Aus dem Ansatz $\left\lvert \int\limits_0^1 h_d(t)\,dt \right\rvert = 0{,}75 \cdot \left\lvert \int\limits_0^5 h_d(t)\,dt \right\rvert$ lässt sich der Wert für d berechnen, für den die Einsekundenkapazität 75% der insgesamt ausgeatmeten Luftmenge beträgt.		2	
Wegen $h'_d(t) = 0 \Leftrightarrow t = d$ ist an dem Zeitpunkt d die momentane Änderungsrate der Luftstromstärke null.		2	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Es gilt $\left\lvert \int\limits_0^5 h_{0,2}(t)\,dt \right\rvert \approx 7$ und $\left\lvert \int\limits_0^5 h_{0,6}(t)\,dt \right\rvert \approx 6{,}9843$		2	
Die Funktion v mit $v(d) = \left\lvert \int\limits_0^5 h_d(t)\,dt \right\rvert = 7 - 7 \cdot \left(\frac{5}{d} + 1\right) \cdot e^{-\frac{5}{d}}$ beschreibt das in den ersten 5 Sekunden ausgeatmete Luftvolumen in Abhängigkeit von d.			2
Für die Ableitungsfunktion von v gilt $v'(d) = \frac{-175}{d^3} e^{\frac{-5}{d}}$. v' hat keine Nullstellen. Daher ist v im Intervall $[0{,}2\,;\,0{,}6]$ streng monoton, und alle Funktionswerte von v über diesem Intervall liegen wegen $v(0{,}2) < 7$ und $v(0{,}6) > 6{,}95$ zwischen 6,95 und 7.			2
Punktsummen	16	20	4

Aufgabe 2: Analysis-CAS

Ein Designer möchte Glaskaraffen der folgenden Form entwerfen.



Der Innenraum der Karaffe wird durch den Rotationskörper modelliert, der durch Rotation des Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = 5 \cdot (x+1) \cdot e^{-\frac{1}{3} \cdot x}$$

über dem Intervall $[0; 12]$ um die x-Achse entsteht.
Eine Längeneinheit entspricht einem Zentimeter.

a)
- Berechnen Sie sowohl den maximalen als auch den minimalen Innendurchmesser der Karaffe.
- Bestimmen Sie das Fassungsvermögen der Karaffe und berechnen Sie die Höhe, in der der Eichstrich für 0,7 Liter angebracht werden muss.
- Ermitteln Sie die Stelle $x \in [0; 12]$, an der der Graph von f die betragsmäßig größte Steigung hat.

(17 P)

b) Zur Modellierung der Außenfläche der Karaffe wird der Graph der Funktion g mit $g(x) = 5{,}5 \cdot (x+1) \cdot e^{-\frac{1}{3} \cdot x}$ im Intervall $[-0{,}5; 12]$ verwendet. Die Karaffe steht auf einem ebenen Tisch.

- Bestimmen Sie den Inhalt der Berührfläche von Karaffe und Tisch.
- Berechnen Sie den Winkel, den die Außenrandkurve mit der Tischoberfläche einschließt.
- 1 cm^3 Glas hat die Masse 2,5 g. Berechnen Sie die Masse der Glaskaraffe.

(11 P)

c) Der Designer variiert die Formen der Karaffen. Er verwendet nun zur Modellierung möglicher Innenrandkurven die Funktionen $h_{a;b}$ mit

$$h_{a;b}(x) = a(x+1)e^{-bx} \quad a > 0\ ;\ 0 < b < 1.$$

Jeder der zugehörigen Graphen hat genau einen Hochpunkt und genau einen Wendepunkt.

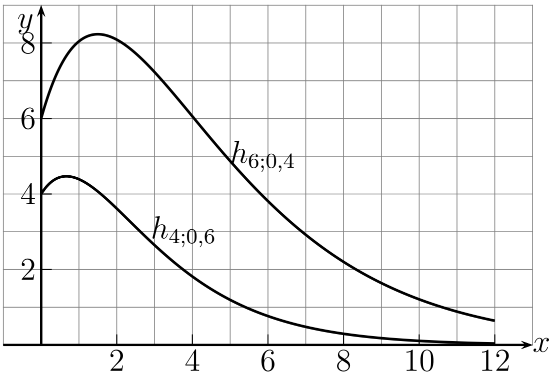
- Skizzieren Sie die Graphen der Funktion $h_{6\,;\,0{,}4}$ und $h_{4\,;\,0{,}6}$ im Intervall $[0\ ;\ 12]$.
- Der Designer möchte, dass Maximalstelle und Wendestelle von $h_{a;b}$ genau 5 cm auseinanderliegen und der maximale Innendurchmesser der zugehörigen Karaffe 14 cm beträgt. Berechnen Sie die zugehörigen Parameterwerte für a und b.

(8 P)

d) $P(x\,|\,g(x))$ ist ein Punkt auf dem Graphen von g aus Aufgabenteil b). Sei $d(x)$ der Abstand dieses Punktes P vom Punkt $S(0 \mid 5)$.
Bestimmen Sie x so, dass dieser Abstand minimal wird.

(4 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) Der maximale Innendurchmesser entspricht dem doppelten globalem Maximum der Funktion f im Intervall $[0;12]$. Notwendig für ein lokales Extremum von f an der Stelle x ist $f'(x)=0$. $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$	2		
Wegen $f(0)=5$, $f(2)\approx 7{,}70$ und $f(12)\approx 1{,}19$ liegt an der Stelle $x=2$ sowohl das lokale als auch das globale Maximum von f im Intervall $[0;12]$ und der maximale Innendurchmesser beträgt ca. 2 · 7,70 cm = 15,4 cm.	3		
Da kein weiteres Extremum vorliegt, ist der minimale Innendurchmesser ca. 2 ·1,19 cm = 2,38 cm.	2		
Mit $V=\pi\cdot\int\limits_0^{12}(f(x))^2\,dx\approx 992{,}984$ beträgt das Fassungsvermögen der Karaffe ca. 0,993 Liter.	3		
Aus $\pi\cdot\int\limits_0^{a}(f(x))^2\,dx=700$ ergibt sich $a\approx 4{,}49$. Daher muss der Eichstrich in einer Höhe von ca. 4,5 cm über dem inneren Glasboden markiert werden.		3	
Die betragsmäßig größte Steigung des Graphen von f kann an einer Wendestelle des Graphen oder an einer Randstelle des Intervalls $[0\,;\,12]$ vorliegen. Notwendig für einen Wendepunkt des Graphen von f an der Stelle x ist $f''(x)=0$. $f''(x)=0\Leftrightarrow x=5$		2	
Wegen $\lvert f'(0)\rvert=\left\lvert\frac{10}{3}\right\rvert\approx 3{,}3334$, $\lvert f'(5)\rvert=\left\lvert -5\cdot e^{-\frac{5}{3}}\right\rvert\approx 0{,}9444$ und $\lvert f'(12)\rvert=\left\lvert -\frac{50}{3}\cdot e^{-4}\right\rvert\approx 0{,}3053$ ist die Steigung an der Stelle $x=0$ betragsmäßig am größten.		2	
Teilaufgabe b) Die Berührfläche ist ein Kreis mit dem Radius $g(-0{,}5)$. Es gilt $A=\pi\cdot(g(-0{,}5))^2\approx\pi\cdot 3{,}25^2\approx 33{,}16$. Der Inhalt der Berührfläche beträgt ca. 33,16 cm^2.	3		

<table>
<tr><th rowspan="2">Erwartete Schülerleistung</th><th colspan="3">Bewertung Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>Die Steigung des Graphen der Funktion g an der Stelle $-0{,}5$ beträgt $g'(-0{,}5) = \frac{55}{12}\, e^{\frac{1}{6}} \approx 5{,}4146$.
Damit gilt für den Winkel α zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse $g'(-0{,}5) = \tan(\alpha)$ und damit $\alpha \approx 79{,}54°$.
Der Winkel β, den die Außenrandkurve mit der Tischoberfläche einschließt, ist der Winkel zwischen dem Funktionsgraphen und der Geraden $x = -0{,}5$. Für den Winkel β gilt $\beta = 90° - \alpha \approx 90° - 79{,}54° = 10{,}46°$.</td><td></td><td>2
2</td><td></td></tr>
<tr><td>Es gilt
$$\begin{aligned} V_{\text{Glas}} &= V_{\text{außen}} - V_{\text{innen}} \\ &= \pi \cdot \int\limits_{-0{,}5}^{12} (g(x))^2\, dx - \pi \cdot \int\limits_{0}^{12} (f(x))^2\, dx \\ &\approx 1233{,}24 - 992{,}98 = 240{,}26. \end{aligned}$$
Damit hat die Karaffe eine Masse von ca. 601 g.</td><td></td><td>3
1</td><td></td></tr>
<tr><td>Teilaufgabe c)
 </td><td>3</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Notwendig für eine lokale Maximalstelle x von $h_{a;b}$ ist $h'_{a;b}(x) = 0$. $h'_{a;b}(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1-b}{b}$		1	
Notwendig für eine Wendestelle x von $h_{a;b}$ ist $h''_{a;b}(x) = 0$. $h''_{a;b}(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2-b}{b}$		1	
Da Maximalstelle und Wendestelle 5 cm voneinander entfernt liegen sollen, ergibt sich $5 = \dfrac{2-b}{b} - \dfrac{1-b}{b} \;\Leftrightarrow\; b = \dfrac{1}{5}.$ Da der maximale Innendurchmesser 14 cm betragen soll und für die Extremstelle $x = \frac{1-\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}} = 4$ gilt, folgt $7 = h_{a;\frac{1}{5}}(4) = 5\,a\,e^{-\frac{4}{5}} \;\Leftrightarrow a = \frac{7}{5}\,e^{\frac{4}{5}} \approx 3{,}1158.$		3	
Teilaufgabe d) Nach dem Satz des Pythagoras gilt für den Abstand $d(x)$ eines Punktes $P(x\|g(x))$ auf der Außenrandkurve zum Punkt $S(0 \mid 5)$ $d(x) = \sqrt{(x-0)^2 + (g(x)-5)^2}$. $d'(x) = 0$ liefert $x \approx -0{,}1218$. Wegen $d''(-0{,}1218) > 0$ ist an der Stelle $-0{,}1218$ ein lokales Minimum. Weil es keine weiteren lokalen Extrema gibt, ist dieses auch das globale Minimum.			4
Punktsummen	16	20	4

Kernfach Mathematik

Bei der Bearbeitung der Aufgabe dürfen alle Funktionen des Taschenrechners genutzt werden.

Aufgabe 1: Analysis

Die Funktion h mit

$$h(x) = 2x^3 - 18x^2 + 30x\ ; \quad x\ \in [0;7]$$

beschreibt näherungsweise das Höhenprofil eines Straßenradrennens. Dabei gibt x die in horizontaler Richtung zurückgelegte Strecke in Kilometern und $h(x)$ die Höhe in Metern an.

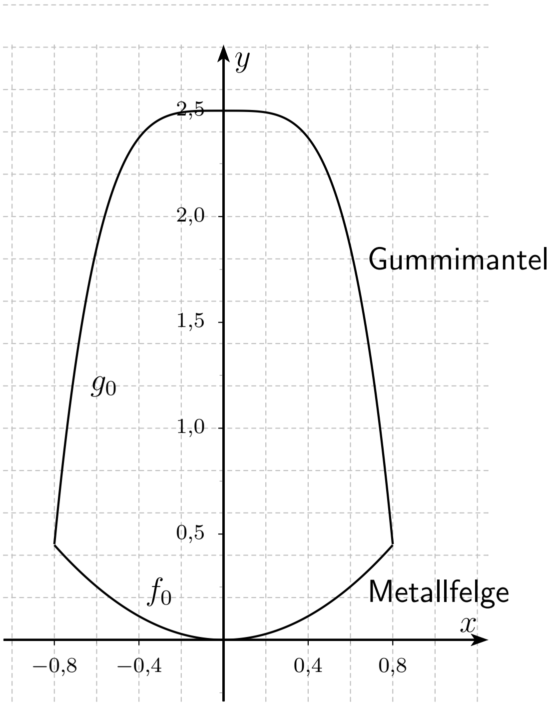
a)
- Ermitteln Sie diejenigen Stellen des Profils, an denen dieselbe Höhe wie zu Beginn des Rennens erreicht wird.
- Berechnen Sie den maximalen Höhenunterschied des Profils.
- Bestimmen Sie die größte Steigung der Straße und geben Sie diese in Prozent an.
- Skizzieren Sie den Graphen von h in einem geeigneten Koordinatensystem.

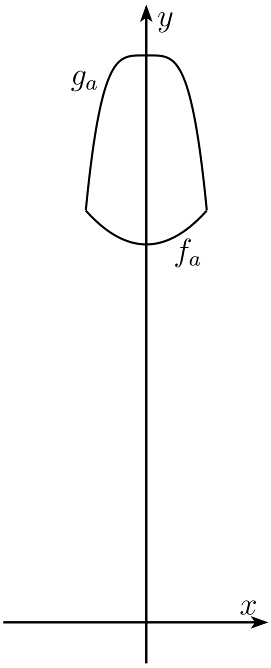
(18 P)

Für jedes $a \geq 0$ werde die Querschnittsfläche Q_a eines Fahrradreifens R_a durch die Funktionen f_a und g_a beschrieben. Dabei beschreibt f_a die Metallfelge und g_a den Gummimantel. Eine Längeneinheit entspricht einem Zentimeter.

$$\begin{aligned} f_a(x) &= 0{,}7x^2 + a \\ g_a(x) &= -5x^4 + a + 2{,}496 \end{aligned}$$

Die folgenden Abbildungen zeigen die Graphen von f_0 und g_0 sowie von f_a und g_a zwischen ihren jeweiligen Schnittstellen.





b)
- Berechnen Sie die maximale Breite des Reifens R_0.
- Bestimmen Sie den Winkel, unter dem Metallfelge und Gummimantel beim Reifen R_0 aufeinander treffen.
- Bestimmen Sie den Flächeninhalt von Q_0. Begründen Sie, warum der Flächeninhalt von Q_a unabhängig von a ist.

(13 P)

c) Ein Modell des Reifens R_{30} entsteht durch Rotation von Q_{30} um die x-Achse.

- Berechnen Sie das Volumen des Reifens R_{30}.
- Der Inhalt der Querschnittsfläche Q_a ist unabhängig von a. Erklären Sie, warum das Volumen des Reifens R_a dennoch von a abhängig ist.

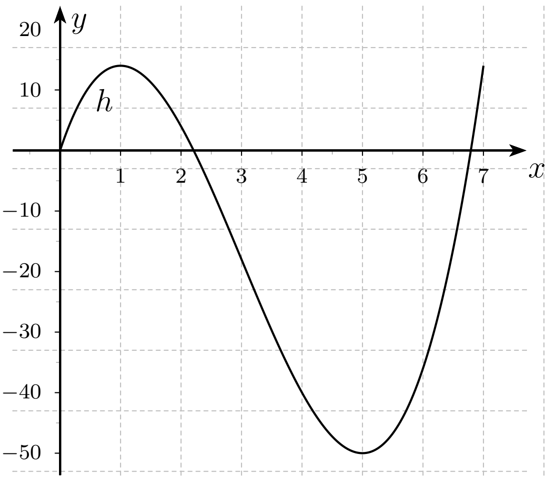
(5 P)

d) Gegeben ist der Punkt $A(0{,}4 \mid 2{,}368)$ auf dem Graphen von g_0. Es soll derjenige Punkt $B(x \mid f_0(x))$ auf dem Graphen von f_0 im Intervall $[-0{,}8\,;\,0{,}8]$ bestimmt werden, für den die Länge der Strecke $\overline{AB}$ maximal ist.

Geben Sie einen Ansatz an und beschreiben Sie das weitere Vorgehen.

(4 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) Es ist $h(0) = 0$. Die Starthöhe beträgt also 0 Meter. $h(x) = 0$ $\Leftrightarrow \; 2x^3 - 18x^2 + 30x = 0$ $\Leftrightarrow \; x = 0 \vee x = \frac{9+\sqrt{21}}{2} \vee x = \frac{9-\sqrt{21}}{2}$ Die Starthöhe wird außerdem an den Stellen $\frac{9-\sqrt{21}}{2} \approx 2{,}21$ und $\frac{9+\sqrt{21}}{2} \approx 6{,}79$ erreicht.	3		
$h'(x) = 6x^2 - 36x + 30$ $h''(x) = 12x - 36$	1		
Eine notwendige Bedingung für eine Extremstelle x von h ist $h'(x) = 0$. $h'(x) = 0$ $\Leftrightarrow \; 6x^2 - 36x + 30 = 0$ $\Leftrightarrow \; x = 1 \vee x = 5$	2		
Da zusätzlich $h''(1) = -24 < 0$ und $h''(5) = 24 > 0$ gelten, liegt an der Stelle $x = 1$ ein lokales Maximum und an der Stelle $x = 5$ ein lokales Minimum vor.	2		
Es ist $h(0) = 0$, $h(1) = 14$, $h(5) = -50$ und $h(7) = 14$. Wegen $14-(-50) = 64$ beträgt der maximale Höhenunterschied des Profils 64 Meter.	2		
Die größte Steigung der Straße liegt an der Wendestelle oder an den Rändern des Intervalls $[0; 7]$ vor.	1		
Eine notwendige Bedingung für eine Wendestelle x von h ist $h''(x) = 0$. $h''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x - 36 = 0 \Leftrightarrow x = 3$	2		
Es gilt $h'(0) = 30$, $h'(7) = 72$ und $h'(3) = -24$. Die größte Steigung liegt an der Stelle 7 vor. Diese beträgt $\frac{72\text{ m}}{1000\text{ m}} = 7{,}2\%$.		2	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
	3		
Teilaufgabe b) $f_0(x) = g_0(x)$ $\Leftrightarrow \quad 0{,}7x^2 = -5x^4 + 2{,}496$ $\Leftrightarrow \quad 5x^4 + 0{,}7x^2 - 2{,}496 = 0$ $\Leftrightarrow \quad x^4 + 0{,}14x^2 - 0{,}4992 = 0$ Mit der Substitution $u = x^2$ ergibt sich $u^2 + 0{,}14u - 0{,}4992 = 0$ $\Leftrightarrow \quad u = 0{,}64 \vee u = -0{,}78.$ Die Resubstitution ergibt $x = 0{,}8 \vee x = -0{,}8.$ Die Schnittstellen von f_0 und g_0 sind $0{,}8$ und $-0{,}8$. Somit beträgt die maximale Reifenbreite $1{,}6$ cm.		2 2 1	
$f_0'(x) = 1{,}4x$ $g_0'(x) = -20x^3$ Seien α bzw. β die Steigungswinkel von f_0 bzw. g_0 an der Stelle $0{,}8$. Dann ist $f_0'(0{,}8) = 1{,}12 = \tan(\alpha)$ und damit $\alpha \approx 48{,}24°$ sowie $g_0'(0{,}8) = -10{,}24 = \tan(\beta)$ und damit $\beta \approx -84{,}42°$. Somit ist $\gamma = \alpha - \beta = 132{,}66°$ der Winkel, unter dem Metallfelge und Gummimantel aufeinander treffen.		1 3	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
$\int\limits_{-0,8}^{0,8} g_0(x) - f_0(x)\,dx = \int\limits_{-0,8}^{0,8} -5x^4 + 2{,}496 - 0{,}7x^2\,dx \approx 3{,}10$ Der Inhalt der Querschnittsfläche Q_0 beträgt ca. $3{,}10$ cm^2.		2	
Die Graphen der Funktionen f_a und g_a gehen aus den Graphen von f_0 und g_0 durch Verschiebung um a in Richtung der positiven $y-$Achse hervor, so dass der Reifenquerschnitt Q_a immer kongruent zum Reifenquerschnitt Q_0 ist. Also ist der Flächeninhalt des Querschnitts unabhängig von a.		2	
Teilaufgabe c) $V = \pi \int\limits_{-0,8}^{0,8} (g_{30}(x))^2\,dx - \pi \int\limits_{-0,8}^{0,8} (f_{30}(x))^2\,dx$ $= \pi \int\limits_{-0,8}^{0,8} (g_{30}(x))^2 - (f_{30}(x))^2\,dx$ $= \pi \int\limits_{-0,8}^{0,8} (-5x^4 + 30 + 2{,}496)^2 - (0{,}7x^2 + 30)^2\,dx \approx 607{,}38$ Das Volumen des Reifens R_{30} beträgt ca. $607{,}38$ cm^3.		3	
Wenn sich der Parameter a vergrößert, werden die Graphen von f_a und g_a in Richtung der positiven y-Achse verschoben. Dabei vergrößert sich der Radius des zugehörigen Reifens und damit bei gleichem Inhalt der Querschnittsfläche auch das Volumen des um die x-Achse rotierenden Reifens.		2	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe d) Die Länge $l(x)$ der Strecke $\overline{AB}$ lässt sich durch den folgenden Ausdruck $$l(x) = \sqrt{(0{,}4 - x)^2 + (2{,}368 - f_0(x))^2}\ ,\ x \in [-0{,}8\ ;\ 0{,}8]$$ angeben. Um die maximale Länge dieser Strecke zu ermitteln, kann man die lokalen Extremstellen der Funktion l mit Hilfe der ersten Ableitung l' bestimmen. Man berechnet die Funktionswerte von l an den Extremstellen und an den Stellen $-0{,}8$ und $0{,}8$. Diejenige dieser Stellen, an der der Funktionswert der Funktion l am größten ist, ist die x- Koordinate des Punktes B.			4
Punktsummen	16	20	4

Bei der Bearbeitung der Aufgabe dürfen alle Funktionen des Taschenrechners genutzt werden.

Aufgabe 2: Analysis

Die Pegelhöhe eines Kanals wurde während eines Hochwasserereignisses an einem Ort für einen Zeitraum von 14 Tagen beobachtet. Der zeitliche Verlauf der Pegelhöhe kann näherungsweise durch die Funktion h mit

$$h(t) = \tfrac{3}{2} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{18}(t-8)^2} + 4 \quad ; \, t \in [\,0\,;\,14]$$

beschrieben werden. Diese hat die Ableitungen

$$h'(t) \;=\; -\tfrac{1}{6} \cdot (t-8) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{18}(t-8)^2} \qquad \text{und}$$

$$h''(t) \;=\; \left(\tfrac{1}{54}\,(t-8)^2 - \tfrac{1}{6}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{18}(t-8)^2}.$$

Die Pegelhöhe h wird vom tiefsten Punkt des Kanalbetts bis zur Wasseroberfläche gemessen, t steht für die Zeit nach Beobachtungsbeginn in Tagen und $h(t)$ für die Pegelhöhe in Metern.

a)
- Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate der Pegelhöhe im Intervall $[\,0\,;\,3]$.
- Leiten Sie aus der ersten Ableitung der Funktion h deren zweite Ableitung her.
- Berechnen Sie die höchsten und die niedrigsten Pegelhöhen im Beobachtungszeitraum.
- Berechnen Sie die beiden Wendestellen der Funktion h und erläutern Sie deren Bedeutung im Sachzusammenhang. Eine hinreichende Bedingung für die Existenz von Wendestellen muss nicht betrachtet werden.
- Skizzieren Sie den Graphen der Funktion h.

(19 P)

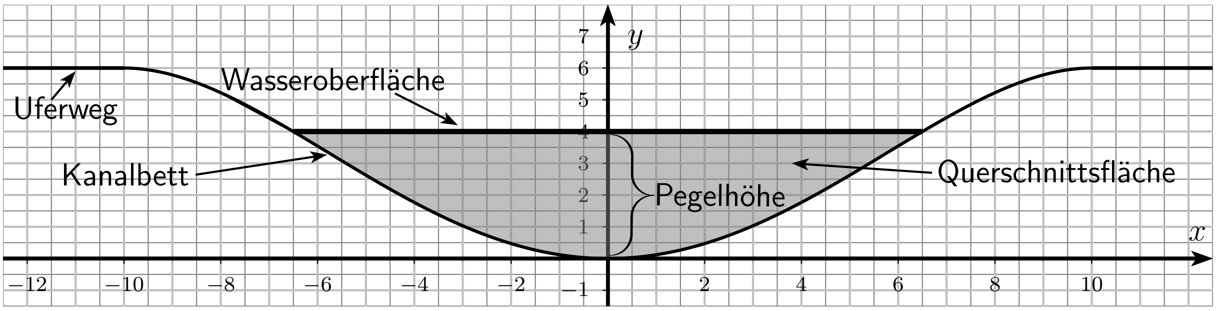
b) Berechnen Sie mit Hilfe des Taschenrechners den Ausdruck

$$\frac{1}{14}\int_0^{14} h(t)\,\mathrm{d}t$$

und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

(3 P)

Das achsensymmetrische Kanalbett kann über dem Intervall $[-10; 10]$ näherungsweise durch eine ganzrationale Funktion f modelliert werden. In jedem der Punkte $(-10|6)$ und $(10|6)$ schließt sich jeweils ein horizontaler Uferweg knickfrei an. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt dabei in der Mitte des Kanals im tiefsten Punkt des Kanalbettes.



c) • Entscheiden Sie, welche Werte für den Grad k der Funktion f gewählt werden können. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Verwenden Sie im Folgenden die Funktion f mit $f(x) = -0{,}0006 \cdot x^4 + 0{,}12 \cdot x^2$.
Die normale Pegelhöhe des Kanals beträgt $4\,\mathrm{m}$.

- Zeigen Sie, dass die Breite der Wasseroberfläche des Kanals bei normaler Pegelhöhe ca. $13\,\mathrm{m}$ beträgt.
- Bei normaler Pegelhöhe hat die wassergefüllte (in der Abbildung grau hinterlegte) Querschnittsfläche des Kanals einen Flächeninhalt von ca. $32{,}81\,\mathrm{m}^2$. Bei einer Pegelhöhe von $5{,}5\,\mathrm{m}$ ist die Wasseroberfläche des Kanals ca. $16{,}87\,\mathrm{m}$ breit.
  Ermitteln Sie, um wie viel Prozent sich der Flächeninhalt der wassergefüllten Querschnittsfläche des Kanals vergrößert, wenn der Pegel von normaler Pegelhöhe bis auf die Pegelhöhe von $5{,}5\,\mathrm{m}$ ansteigt.

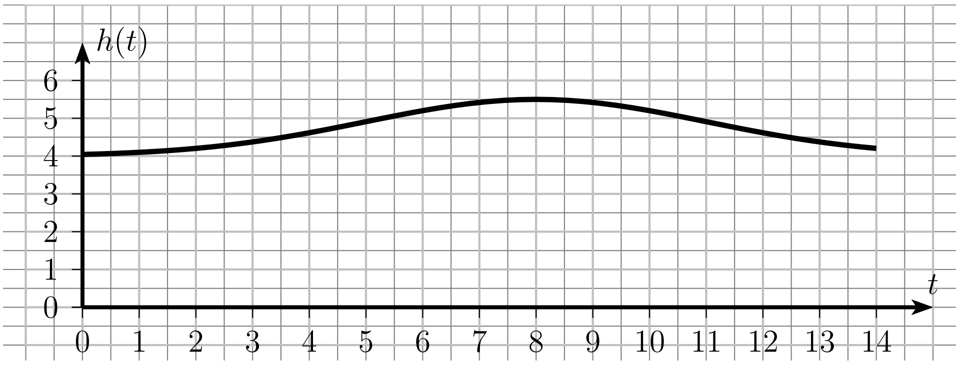
(14 P)

d) Es gibt eine Funktion b, die jedem Zeitpunkt t des Beobachtungszeitraums eine Breite der Wasseroberfläche des Kanals zuordnet. Dabei wird die Breite in Metern betrachtet.
Zeigen Sie, dass

$$b(t) = 2 \cdot \sqrt{100 - \sqrt{10000 - \frac{h(t)}{0{,}0006}}}$$

ein Funktionsterm dieser Funktion b ist.

(4 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) $m = \frac{h(3)-h(0)}{3} = \frac{\frac{3}{2}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{(3-8)^2}{18}} - \frac{3}{2}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{(0-8)^2}{18}}}{3} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\frac{25}{18}}-\mathrm{e}^{-\frac{64}{18}}}{3} \approx 0{,}1104$ Die mittlere Änderungsrate m der Pegelhöhe beträgt also ca. $11\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{d}}$.	3		
$h''(t) = -\frac{1}{6}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{18}(t-8)^2} + \left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(-\frac{2}{18}\right)(t-8)^2\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{18}(t-8)^2}$ $= \left(\frac{1}{54}(t-8)^2-\frac{1}{6}\right)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{18}(t-8)^2}$		2	
Notwendig für ein lokales Extremum an der Stelle t ist $h'(t)=0$. $h'(t)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{6}\cdot(t-8)\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{18}(t-8)^2}=0 \Leftrightarrow t-8=0 \Leftrightarrow t=8$ Wegen $h(0)=\frac{3}{2}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{18}\cdot 8^2}+4\approx 4{,}04$, $h(14)=\frac{3}{2}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{18}\cdot 6^2}+4\approx 4{,}20$ und $h(8)=\frac{3}{2}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{18}(8-8)^2}+4=5{,}5$ liegt an der Stelle 8 das globale Maximum der Funktion f im Intervall $[0;14]$ vor. Die maximale Pegelhöhe beträgt während des Beobachtungszeitraums $5{,}5\,\mathrm{m}$. Die geringste Pegelhöhe wird mit ca. $4{,}04\,\mathrm{m}$ zu Beginn des betrachteten Zeitraums beobachtet.	2 3 2		
Notwendig für eine Wendestelle t von h ist $h''(t)=0$. $h''(t)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{54}(t-8)^2-\frac{1}{6}=0 \Leftrightarrow t=5 \vee t=11$ Am fünften Tag ist die Anstiegsgeschwindigkeit der Pegelhöhe maximal, am elften Tag ist die Sinkgeschwindigkeit der Pegelhöhe maximal.	3	2	
	2		

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe b)			
$\frac{1}{14}\cdot\int\limits_{0}^{14} h(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{14}\cdot\int\limits_{0}^{14} \frac{3}{2}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{(t-8)^2}{18}} + 4\,\mathrm{d}t \approx 4{,}78$	1		
Der gegebene Ausdruck entspricht der mittleren Pegelhöhe des Kanals während des Beobachtungszeitraums. Diese beträgt also ca. $4{,}78\,\mathrm{m}$.		2	
Teilaufgabe c)			
Der Grad k der Funktion f kann nur einer der Werte $4, 6, 8, \ldots$ sein.		1	
Begründung: Das Kanalbett wird durch eine achsensymmetrische ganzrationale Funktion f modelliert, also ist der Grad k der Funktion f gerade.		1	
Da die Steigung des Graphen von f sowohl an der Stelle 0 als auch in den Stellen -10 und 10, an denen der knickfreie Übergang in den horizontalen Uferweg gewährleistet werden muss, null ist, muss die Ableitungsfunktion f' mindestens vom Grad 3 und f somit mindestens vom Grad 4 sein.		2	
Bei einer Pegelhöhe von $4\,\mathrm{m}$ müssen die Begrenzungsstellen der Wasseroberfläche die Bedingung $f(x) = 4$ erfüllen. $f(x) = 4 \Leftrightarrow -0{,}0006x^4 + 0{,}12x^2 = 4$ Mit $u = x^2$ ergibt sich $u \approx 42{,}26$ bzw. $u \approx 157{,}74$.		2	
Damit ist $x \approx 6{,}50$ oder $x \approx -6{,}50$ oder $x \approx 12{,}56$ oder $x \approx -12{,}56$.		2	
Nur die ersten beiden Näherungswerte für x liegen im Intervall $[-10; 10]$. Die Breite der Wasseroberfläche des Kanals beträgt bei normaler Pegelhöhe also ca. $2\cdot 6{,}50\,\mathrm{m} = 13{,}00\,\mathrm{m}$.		2	
$A_{5{,}5} \approx 2\cdot\int\limits_{0}^{8{,}435} 5{,}5 - f(x)\,\mathrm{d}x$ $= 2\cdot\int\limits_{0}^{8{,}435} 5{,}5 + 0{,}0006x^4 - 0{,}12x^2\,\mathrm{d}x \approx 55{,}02$		3	
$\frac{55{,}02}{32{,}81} \approx 1{,}677$ Die Querschnittsfläche vergrößert sich um ca. $67{,}7\%$, wenn die Pegelhöhe von $4\,\mathrm{m}$ auf $5{,}5\,\mathrm{m}$ ansteigt.		1	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe d) Zu jedem Zeitpunkt t gibt $h(t)$ die Pegelhöhe des Kanals an. Es gibt genau ein $x \in [\,0\,;\,10\,]$, für das $f(x) = h(t)$ gilt. Die Breite ist dann genau $2x$. $-0{,}0006x^4 + 0{,}12x^2 = h(t)$ Mit der Substitution $u = x^2$ folgt $-0{,}0006u^2 + 0{,}12u = h(t)$, also $u^2 - 200u + \dfrac{h(t)}{0{,}0006} = 0$. Es ist $u = 100 + \sqrt{10000 - \dfrac{h(t)}{0{,}0006}}$ oder $u = 100 - \sqrt{10000 - \dfrac{h(t)}{0{,}0006}}$ bzw. $x^2 = 100 + \sqrt{10000 - \dfrac{h(t)}{0{,}0006}}$ oder $x^2 = 100 - \sqrt{10000 - \dfrac{h(t)}{0{,}0006}}$. Da sowohl $x \geq 0$ als auch $x \leq 10$ sein muss, ist $x = \sqrt{100 - \sqrt{10000 - \dfrac{h(t)}{0{,}0006}}}\ .$ Die Funktion $b(t) = 2 \cdot \sqrt{100 - \sqrt{10000 - \dfrac{h(t)}{0{,}0006}}}$ beschreibt also die Kanalbreite.			4
Punktsummen	16	20	4

Bei der Bearbeitung der Aufgabe dürfen alle Funktionen des Taschenrechners genutzt werden.

Aufgabe 3: Analytische Geometrie

Das Modell einer Gartenlaterne kann als Stumpf einer regelmäßigen quadratischen Pyramide mit einem aufgesetzten Zylinder und einer darüber angebrachten, ebenfalls regelmäßigen quadratischen Pyramide aufgefasst werden.

Die Eckpunkte der Grundfläche des Pyramidenstumpfes sind $A(4 \mid 4 \mid 0)$, $B(-4 \mid 4 \mid 0)$, $C(-4 \mid -4 \mid 0)$ und $D(4 \mid -4 \mid 0)$.
Die Eckpunkte der Deckfläche des Pyramidenstumpfes sind $E(1 \mid 1 \mid 12)$, $F(-1 \mid 1 \mid 12)$, $G(-1 \mid -1 \mid 12)$ und $H(1 \mid -1 \mid 12)$.
Materialstärken sind bei der Modellierung nicht zu berücksichtigen.

a)
- Berechnen Sie den Schnittpunkt S der Geraden g durch die Punkte A und E mit der Geraden h durch die Punkte B und F.
- Erstellen Sie eine Koordinatenform der Ebene E_1, in der die Punkte A, B und E liegen. [Zur Kontrolle: $E_1 : 4\,x_2 + x_3 = 16$]
- Die Ebene E_2, in der die Punkte A, D und E liegen, ist gegeben durch $E_2 : 4\,x_1 + x_3 = 16$. Ermitteln Sie die Größe des Schnittwinkels φ zwischen der Ebene E_1 und der Ebene E_2.

(11 P)

b)
- Der Materialbedarf an Glas soll abgeschätzt werden. Berechnen Sie die Mantelfläche des Pyramidenstumpfes.
- Die aufgesetzte regelmäßige quadratische Pyramide schützt das Innere der Laterne vor Regenwasser. Die Grundfläche $E'F'G'H'$ dieser Pyramide ist gegeben durch die um 1 LE senkrecht nach oben verschobenen Eckpunkte der Deckfläche des Pyramidenstumpfes. Die Spitze dieser Aufsatzpyramide ist der Punkt $S'(0\,|\,0\,|\,15)$. Berechnen Sie den Oberflächeninhalt dieser Aufsatzpyramide.

(12 P)

c)
- Die Gerade k verläuft durch den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{CD}$ und schneidet die Ebene E_1 orthogonal. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes K von k mit E_1. [Zur Kontrolle: $K(0\,|\frac{60}{17}\,|\,\frac{32}{17})$]
- Betrachtet werden nun alle Geraden, die durch den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{CD}$ verlaufen und die Ebene E_1 unter einem Winkel von 85° schneiden. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Ebene E_1 liegen auf einem Kreis. Bestimmen Sie den Radius dieses Kreises.

(8 P)

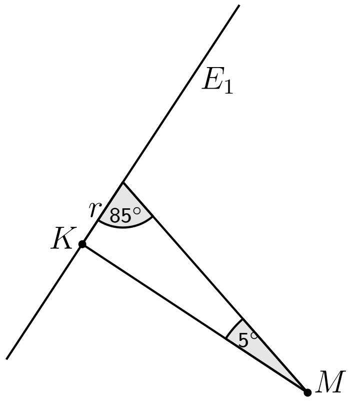
d) Eine kugelförmige Kerze soll so im Innenraum der Gartenlaterne positioniert werden, dass sie die Grundfläche des Pyramidenstumpfes berührt.

- Untersuchen Sie, ob eine Kerze mit dem Radius 3 LE in den Innenraum passt.
- Bestimmen Sie, wie groß der Radius einer Kugelkerze höchstens sein darf, damit diese innerhalb des Pyramidenstumpfes positioniert werden kann.

(9 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) Es ist $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-3\\-3\\12\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}3\\-3\\12\end{pmatrix}$.	2		
Gleichsetzen führt zu $\left\vert\begin{array}{rcl}8 & = & 3\,r+3\,s\\ 0 & = & 3\,r-3\,s\\ 0 & = & -12\,r+12\,s\end{array}\right\vert \Leftrightarrow \left\vert\begin{array}{rcl} r & = & \frac{4}{3}\\ & & \\ s & = & \frac{4}{3}\end{array}\right\vert.$ Einsetzen von r (bzw. s) ergibt $S(0\mid 0\mid 16)$.	3		
Man erhält einen Normalenvektor der Ebene E_1, in der die Punkte A, B und E liegen, durch $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix}-8\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\-3\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\96\\24\end{pmatrix} = 24\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}$, also kann $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}$ als Normalenvektor genutzt werden.	2		
Eine Koordinatenform ergibt sich durch $E_1: 4\,x_2 + x_3 = 4\cdot 4 = 16$.	2		
Mit Hilfe der Normalenvektoren der Ebenen ergibt sich $\cos(\varphi) = \frac{\lvert\vec{n}_1\circ\vec{n}_2\rvert}{\lvert\vec{n}_1\rvert\cdot\lvert\vec{n}_2\rvert} = \frac{\left\lvert\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}\right\rvert}{\left\lvert\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}\right\rvert\cdot\left\lvert\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}\right\rvert} = \frac{1}{17}.$ Damit ist der Winkel $\varphi \approx 86{,}63°$.	2		

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe b) Die Seitenfläche $ABFE$ ist offensichtlich ein achsensymmetrisches Trapez.		1	
Für den Mittelpunkt M_1 der Strecke $\overline{AB}$ gilt $\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left[\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}.$		1	
Für den Mittelpunkt M_2 der Strecke $\overline{EF}$ gilt $\overrightarrow{OM_2} = \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left[\begin{pmatrix}1\\1\\12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\12\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0\\1\\12\end{pmatrix}.$		1	
Für die Höhe h des Seitentrapezes gilt damit $h = \left\lvert\overrightarrow{M_1M_2}\right\rvert = \left\lvert\begin{pmatrix}0\\-3\\12\end{pmatrix}\right\rvert = \sqrt{153}.$		1	
Für die Mantelfläche ergibt sich $A_{\text{Mantel}} = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot(\lvert\overrightarrow{AB}\rvert+\lvert\overrightarrow{EF}\rvert)\cdot h = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot(8+2)\cdot\sqrt{153}\approx 247{,}39.$ Der Gesamtflächeninhalt der Seitenscheiben beträgt ca. 247,39 FE.		2	
Aus $\overrightarrow{E'F'} = \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{E'S'} = \begin{pmatrix}0\\0\\15\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\13\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ folgt		2	
$O = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left\lvert\overrightarrow{E'F'}\times\overrightarrow{E'S'}\right\rvert + \left\lvert\overrightarrow{E'F'}\right\rvert^2$		2	
$= 2\cdot\left\lvert\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\rvert + \left\lvert\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}\right\rvert^2 = 2\cdot\left\lvert\begin{pmatrix}0\\4\\2\end{pmatrix}\right\rvert + 4 \approx 12{,}94.$			
Der Oberflächeninhalt der Pyramide beträgt ca. 12,94 FE.		2	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe c) Für den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{CD}$ gilt $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$	1		
Die Gerade k verläuft orthogonal zu E_1, daher ist $\vec{n}_1$ ein Richtungsvektor von k. Es ergibt sich $k : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$	1		
Für den zum Schnittpunkt von k mit E_1 gehörenden Parameter t gilt $4 \cdot (-4 + 4\,t) + t = 16 \Leftrightarrow -16 + 16\,t + t = 16 \Leftrightarrow t = \frac{32}{17}.$	2		
Damit ergibt sich $K(0 \mid \frac{60}{17} \mid \frac{32}{17})$.	1		
Der Mittelpunkt des Kreises ist K.  *Die Skizze wird für die Dokumentation des Lösungsweges nicht verlangt.* Aus $\tan(85^\circ) = \frac{\lvert\overrightarrow{MK}\rvert}{r}$ folgt $r = \frac{\lvert\overrightarrow{MK}\rvert}{\tan(85^\circ)} = \frac{\left\lvert \frac{32}{17} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rvert}{\tan(85^\circ)} \approx 0{,}68.$ Der Radius ist ca. 0,68 LE.		3	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe d) Aus Symmetriegründen wählt man als Berührpunkt der kugelförmigen Kerze mit der quadratischen Grundfläche der Laterne den Schnittpunkt der Diagonalen, also den Ursprung. Dann ist der Kugelmittelpunkt $T(0 \,\vert\, 0 \,\vert\, 3)$.		2	
Daher ist der Abstand von T zu jeder der vier Seitenflächenebenen gleich groß und beträgt $d(T;E_1) = \left\vert \frac{\vec{n}_1}{\vert\vec{n}_1\vert} \circ \overrightarrow{AT} \right\vert = \left\vert \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\vert$ $= \frac{1}{\sqrt{17}} \vert 0 - 16 + 3 \vert \approx 3{,}15.$		2	
Da der Abstand größer als 3 LE ist, passt die Kerze in den Innenraum der Gartenlaterne.		1	
Sei r der Radius der größtmöglichen Kugel. Dann ist $T'(0 \,\vert\, 0 \,\vert\, r)$ mit $r > 0$ ihr Mittelpunkt.			1
Diese Kugel muss die Ebene E_1 berühren, daher ist r der Abstand des Punktes T' von der Ebene E_1.			1
Zu bestimmen ist daher die Lösung der Gleichung $r = \left\vert \frac{\vec{n}_1}{\vert\vec{n}_1\vert} \circ \overrightarrow{AT'} \right\vert = \left\vert \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ r \end{pmatrix} \right\vert = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \vert r - 16 \vert.$ Diese lautet $r = \frac{16}{\sqrt{17}+1} = \sqrt{17} - 1 \approx 3{,}12.$ Der maximale Radius ist ca. 3,12 LE.			2
Punktsummen	16	20	4

Bei der Bearbeitung der Aufgabe dürfen alle Funktionen des Taschenrechners genutzt werden.

Aufgabe 4: Stochastik

Vorbemerkung: Führen Sie stets geeignete Zufallsvariablen und Namen für Ereignisse ein. Machen Sie auch Angaben über die Verteilung der jeweiligen Zufallsvariablen.

a) Im Rahmen einer Werbekampagne werden 500 zufällig ausgewählte Besucher eines Fußball-Bundesligaspiels zu ihren Ess- und Trinkgewohnheiten im Stadion befragt.
12 % der Befragten wollen sich sowohl Getränke (G) als auch Snacks (S) kaufen. 63 % der Befragten wollen sich Getränke kaufen, aber keine Snacks. 30 % der Befragten wollen sich Snacks kaufen.

- Stellen Sie den Sachverhalt durch eine geeignete Vierfeldertafel mit relativen Häufigkeiten dar.
- Berechnen Sie, wie viele Personen unter den Befragten sich weder Getränke noch Snacks kaufen wollen.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig auszuwählender Befragter, der keine Snacks kaufen will, auch keine Getränke kaufen will.
- Unter den 500 befragten Besuchern werden 20 zufällig ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter diesen 20 Personen 3 oder 4 Personen befinden, die sowohl Getränke als auch Snacks kaufen möchten. Gehen Sie von einer Binomialverteilung aus.
- Erklären Sie, warum bei der vorangehenden Teilaufgabe streng genommen von einer hypergeometrischen Verteilung ausgegangen werden sollte.

(15 P)

b) Auch an den Fernsehbildschirmen wird das Fußballspiel verfolgt.
In einer Wohnanlage wird in 6 von insgesamt 50 Wohnungen das Spiel angesehen.
Aus den 50 Wohnungen sollen 10 zufällig ausgewählt werden.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Spiel in genau 6 von den 10 Wohnungen gesehen wird.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Spiel in höchstens 2 von den 10 Wohnungen gesehen wird.

(7 P)

c) Die Einschaltquote beträgt laut Angaben des Fernsehsenders mindestens 14 %. Ein konkurrierender Medienkonzern glaubt, dass dieser Anteil zu hoch angegeben ist.
Erstellen Sie einen Hypothesentest mit 300 Fernsehhaushalten, der geeignet ist, die Vermutung des Medienkonzerns auf einem Signifikanzniveau von 0,5 % zu stützen.

(14 P)

d) Gegeben sei eine binomialverteilte Zufallsvariable X mit den Parametern n und p. Die Standardabweichung sei σ. Beweisen Sie folgende Aussage:
Aus $n = (2\sigma)^2$ folgt $P(X = 2) = \dfrac{n \cdot (n-1)}{2^{n+1}}$.

(Hinweis: Zeigen Sie zuerst: $n = (2\sigma)^2 \Rightarrow p = 0{,}5$.)

(4 P)

Tabelle zur Normalverteilung, Werte der Gaußschen Integralfunktion Φ

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$		z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$		z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$
0,01	0,4960	0,5040		0,51	0,3050	0,6950		1,01	0,1562	0,8438
0,02	0,4920	0,5080		0,52	0,3015	0,6985		1,02	0,1539	0,8461
0,03	0,4880	0,5120		0,53	0,2981	0,7019		1,03	0,1515	0,8485
0,04	0,4840	0,5160		0,54	0,2946	0,7054		1,04	0,1492	0,8508
0,05	0,4801	0,5199		0,55	0,2912	0,7088		1,05	0,1469	0,8531
0,06	0,4761	0,5239		0,56	0,2877	0,7123		1,06	0,1446	0,8554
0,07	0,4721	0,5279		0,57	0,2843	0,7157		1,07	0,1423	0,8577
0,08	0,4681	0,5319		0,58	0,2810	0,7190		1,08	0,1401	0,8599
0,09	0,4641	0,5359		0,59	0,2776	0,7224		1,09	0,1379	0,8621
0,10	0,4602	0,5398		0,60	0,2743	0,7257		1,10	0,1357	0,8643
0,11	0,4562	0,5438		0,61	0,2709	0,7291		1,11	0,1335	0,8665
0,12	0,4522	0,5478		0,62	0,2676	0,7324		1,12	0,1314	0,8686
0,13	0,4483	0,5517		0,63	0,2643	0,7357		1,13	0,1292	0,8708
0,14	0,4443	0,5557		0,64	0,2611	0,7389		1,14	0,1271	0,8729
0,15	0,4404	0,5596		0,65	0,2578	0,7422		1,15	0,1251	0,8749
0,16	0,4364	0,5636		0,66	0,2546	0,7454		1,16	0,1230	0,8770
0,17	0,4325	0,5675		0,67	0,2514	0,7486		1,17	0,1210	0,8790
0,18	0,4286	0,5714		0,68	0,2483	0,7517		1,18	0,1190	0,8810
0,19	0,4247	0,5753		0,69	0,2451	0,7549		1,19	0,1170	0,8830
0,20	0,4207	0,5793		0,70	0,2420	0,7580		1,20	0,1151	0,8849
0,21	0,4168	0,5832		0,71	0,2389	0,7611		1,21	0,1131	0,8869
0,22	0,4129	0,5871		0,72	0,2358	0,7642		1,22	0,1112	0,8888
0,23	0,4090	0,5910		0,73	0,2327	0,7673		1,23	0,1093	0,8907
0,24	0,4052	0,5948		0,74	0,2296	0,7704		1,24	0,1075	0,8925
0,25	0,4013	0,5987		0,75	0,2266	0,7734		1,25	0,1056	0,8944
0,26	0,3974	0,6026		0,76	0,2236	0,7764		1,26	0,1038	0,8962
0,27	0,3936	0,6064		0,77	0,2206	0,7794		1,27	0,1020	0,8980
0,28	0,3897	0,6103		0,78	0,2177	0,7823		1,28	0,1003	0,8997
0,29	0,3859	0,6141		0,79	0,2148	0,7852		1,29	0,0985	0,9015
0,30	0,3821	0,6179		0,80	0,2119	0,7881		1,30	0,0968	0,9032
0,31	0,3783	0,6217		0,81	0,2090	0,7910		1,31	0,0951	0,9049
0,32	0,3745	0,6255		0,82	0,2061	0,7939		1,32	0,0934	0,9066
0,33	0,3707	0,6293		0,83	0,2033	0,7967		1,33	0,0918	0,9082
0,34	0,3669	0,6331		0,84	0,2005	0,7995		1,34	0,0901	0,9099
0,35	0,3632	0,6368		0,85	0,1977	0,8023		1,35	0,0885	0,9115
0,36	0,3594	0,6406		0,86	0,1949	0,8051		1,36	0,0869	0,9131
0,37	0,3557	0,6443		0,87	0,1922	0,8078		1,37	0,0853	0,9147
0,38	0,3520	0,6480		0,88	0,1894	0,8106		1,38	0,0838	0,9162
0,39	0,3483	0,6517		0,89	0,1867	0,8133		1,39	0,0823	0,9177
0,40	0,3446	0,6554		0,90	0,1841	0,8159		1,40	0,0808	0,9192
0,41	0,3409	0,6591		0,91	0,1814	0,8186		1,41	0,0793	0,9207
0,42	0,3372	0,6628		0,92	0,1788	0,8212		1,42	0,0778	0,9222
0,43	0,3336	0,6664		0,93	0,1762	0,8238		1,43	0,0764	0,9236
0,44	0,3300	0,6700		0,94	0,1736	0,8264		1,44	0,0749	0,9251
0,45	0,3264	0,6736		0,95	0,1711	0,8289		1,45	0,0735	0,9265
0,46	0,3228	0,6772		0,96	0,1685	0,8315		1,46	0,0721	0,9279
0,47	0,3192	0,6808		0,97	0,1660	0,8340		1,47	0,0708	0,9292
0,48	0,3156	0,6844		0,98	0,1635	0,8365		1,48	0,0694	0,9306
0,49	0,3121	0,6879		0,99	0,1611	0,8389		1,49	0,0681	0,9319
0,50	0,3085	0,6915		1,00	0,1587	0,8413		1,50	0,0668	0,9332

Tabelle zur Normalverteilung, Werte der Gaußschen Integralfunktion Φ

z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$		z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$		z	$\Phi(-z)$	$\Phi(z)$
1,51	0,0655	0,9345		2,01	0,0222	0,9778		2,51	0,0060	0,9940
1,52	0,0643	0,9357		2,02	0,0217	0,9783		2,52	0,0059	0,9941
1,53	0,0630	0,9370		2,03	0,0212	0,9788		2,53	0,0057	0,9943
1,54	0,0618	0,9382		2,04	0,0207	0,9793		2,54	0,0055	0,9945
1,55	0,0606	0,9394		2,05	0,0202	0,9798		2,55	0,0054	0,9946
1,56	0,0594	0,9406		2,06	0,0197	0,9803		2,56	0,0052	0,9948
1,57	0,0582	0,9418		2,07	0,0192	0,9808		2,57	0,0051	0,9949
1,58	0,0571	0,9429		2,08	0,0188	0,9812		2,58	0,0049	0,9951
1,59	0,0559	0,9441		2,09	0,0183	0,9817		2,59	0,0048	0,9952
1,60	0,0548	0,9452		2,10	0,0179	0,9821		2,60	0,0047	0,9953
1,61	0,0537	0,9463		2,11	0,0174	0,9826		2,61	0,0045	0,9955
1,62	0,0526	0,9474		2,12	0,0170	0,9830		2,62	0,0044	0,9956
1,63	0,0516	0,9484		2,13	0,0166	0,9834		2,63	0,0043	0,9957
1,64	0,0505	0,9495		2,14	0,0162	0,9838		2,64	0,0041	0,9959
1,65	0,0495	0,9505		2,15	0,0158	0,9842		2,65	0,0040	0,9960
1,66	0,0485	0,9515		2,16	0,0154	0,9846		2,66	0,0039	0,9961
1,67	0,0475	0,9525		2,17	0,0150	0,9850		2,67	0,0038	0,9962
1,68	0,0465	0,9535		2,18	0,0146	0,9854		2,68	0,0037	0,9963
1,69	0,0455	0,9545		2,19	0,0143	0,9857		2,69	0,0036	0,9964
1,70	0,0446	0,9554		2,20	0,0139	0,9861		2,70	0,0035	0,9965
1,71	0,0436	0,9564		2,21	0,0136	0,9864		2,71	0,0034	0,9966
1,72	0,0427	0,9573		2,22	0,0132	0,9868		2,72	0,0033	0,9967
1,73	0,0418	0,9582		2,23	0,0129	0,9871		2,73	0,0032	0,9968
1,74	0,0409	0,9591		2,24	0,0125	0,9875		2,74	0,0031	0,9969
1,75	0,0401	0,9599		2,25	0,0122	0,9878		2,75	0,0030	0,9970
1,76	0,0392	0,9608		2,26	0,0119	0,9881		2,76	0,0029	0,9971
1,77	0,0384	0,9616		2,27	0,0116	0,9884		2,77	0,0028	0,9972
1,78	0,0375	0,9625		2,28	0,0113	0,9887		2,78	0,0027	0,9973
1,79	0,0367	0,9633		2,29	0,0110	0,9890		2,79	0,0026	0,9974
1,80	0,0359	0,9641		2,30	0,0107	0,9893		2,80	0,0026	0,9974
1,81	0,0351	0,9649		2,31	0,0104	0,9896		2,81	0,0025	0,9975
1,82	0,0344	0,9656		2,32	0,0102	0,9898		2,82	0,0024	0,9976
1,83	0,0336	0,9664		2,33	0,0099	0,9901		2,83	0,0023	0,9977
1,84	0,0329	0,9671		2,34	0,0096	0,9904		2,84	0,0023	0,9977
1,85	0,0322	0,9678		2,35	0,0094	0,9906		2,85	0,0022	0,9978
1,86	0,0314	0,9686		2,36	0,0091	0,9909		2,86	0,0021	0,9979
1,87	0,0307	0,9693		2,37	0,0089	0,9911		2,87	0,0021	0,9979
1,88	0,0301	0,9699		2,38	0,0087	0,9913		2,88	0,0020	0,9980
1,89	0,0294	0,9706		2,39	0,0084	0,9916		2,89	0,0019	0,9981
1,90	0,0287	0,9713		2,40	0,0082	0,9918		2,90	0,0019	0,9981
1,91	0,0281	0,9719		2,41	0,0080	0,9920		2,91	0,0018	0,9982
1,92	0,0274	0,9726		2,42	0,0078	0,9922		2,92	0,0018	0,9982
1,93	0,0268	0,9732		2,43	0,0075	0,9925		2,93	0,0017	0,9983
1,94	0,0262	0,9738		2,44	0,0073	0,9927		2,94	0,0016	0,9984
1,95	0,0256	0,9744		2,45	0,0071	0,9929		2,95	0,0016	0,9984
1,96	0,0250	0,9750		2,46	0,0069	0,9931		2,96	0,0015	0,9985
1,97	0,0244	0,9756		2,47	0,0068	0,9932		2,97	0,0015	0,9985
1,98	0,0239	0,9761		2,48	0,0066	0,9934		2,98	0,0014	0,9986
1,99	0,0233	0,9767		2,49	0,0064	0,9936		2,99	0,0014	0,9986
2,00	0,0228	0,9772		2,50	0,0062	0,9938		3,00	0,0013	0,9987

<table>
<tr><th rowspan="2">Erwartete Schülerleistung</th><th colspan="3">Bewertung Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>Teilaufgabe a)
G: Der Besucher will ein Getränk kaufen.
S: Der Besucher will einen Snack kaufen.
<table>
<tr><td></td><td>S</td><td>$\overline{S}$</td><td></td></tr>
<tr><td>G</td><td>$0{,}12$</td><td>$0{,}63$</td><td>$0{,}75$</td></tr>
<tr><td>$\overline{G}$</td><td>$0{,}18$</td><td>$0{,}07$</td><td>$0{,}25$</td></tr>
<tr><td></td><td>$0{,}30$</td><td>$0{,}70$</td><td>1</td></tr>
</table></td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$0{,}07 \cdot 500 = 35$
Unter den Befragten sind 35 Personen, die sich weder Getränke noch Snacks kaufen wollen.</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$P_{\overline{S}}(\overline{G}) = \frac{P(\overline{G} \cap \overline{S})}{P(\overline{S})} = \frac{0{,}07}{0{,}7} = 0{,}1$
Die zu berechnende Wahrscheinlichkeit beträgt 10 %.</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Es sei X die Zufallsvariable, die die Anzahl der Besucher unter den 20 beschreibt, die sowohl Getränke als auch Snacks kaufen wollen.
Die binomialverteilte Zufallsvariable X hat die Parameter $n = 20$ und $p = 0{,}12$.
$P(X = 3) + P(X = 4) \approx 0{,}2242 + 0{,}1299 = 0{,}3541$</td><td>1
1
2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Es werden 20 Personen zufällig ausgewählt und es wird kein Besucher doppelt befragt. Es handelt sich also im Urnenmodell um ein Experiment ohne Zurücklegen.</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe b) Sei X die Zufallsvariable, die die Anzahl der Wohneinheiten unter den 10 auszuwählenden angibt, in denen das Spiel gesehen wird.	1		
X ist hypergeometrisch verteilt.		1	
$N = 50$ (Gesamtzahl der Wohneinheiten) $M = 6$ (Anzahl der Wohneinheiten, in denen das Spiel gesehen wird) $n = 10$ (Stichprobenumfang) $P(X = 6) = \frac{\binom{6}{6} \cdot \binom{44}{4}}{\binom{50}{10}} \approx 0{,}0013\,\%$		2	
$P(X \leq 2) = \sum\limits_{k=0}^{2} \frac{\binom{6}{k} \cdot \binom{44}{10-k}}{\binom{50}{10}} \approx 91{,}44\,\%$ *Diese Summe kann mithilfe der Summenfunktion des Taschenrechners berechnet werden.*		3	
Teilaufgabe c) Das Ziel des Signifikanztests ist die Ablehnung der Behauptung des Fernsehsenders. Es soll also bestätigt werden, dass die Einschaltquote weniger als 14 % beträgt. Als Nullhypothese wird daher das Gegenteil angenommen: $H_0 : p \geq 0{,}14$.		1	
Die Nullhypothese wird verworfen, wenn unter den 300 Fernsehhaushalten relativ wenige das Fußballspiel gesehen haben. Als Verwerfungsbereich wird daher die Menge $V = \{0; 1; \ldots; k\}$ gewählt (linksseitiger Test).		2	
Es sei $p \in [0{,}14\ ;\ 1]$ und X_p die mit den Parametern p und $n = 300$ binomialverteilte Zufallsvariable. X_p gibt die Anzahl der Haushalte an, in denen das Fußballspiel gesehen wurde. Für den Verwerfungsbereich ist nun die größte natürliche Zahl k mit $k \in \{0; 1; \ldots; 300\}$ zu bestimmen, so dass für alle $p \geq 0{,}14$ die Ungleichung $P(X_p \leq k) \leq 0{,}005$ erfüllt ist.		3	
Wegen $P(X_p \leq k) \leq P(X_{0{,}14} \leq k)$ für $p \geq 0{,}14$ ist dies gleichbedeutend mit der Aufgabe, das größte natürliche $k \in \{0; 1; \ldots; 300\}$ so zu bestimmen, dass die Ungleichung $P(X_{0{,}14} \leq k) \leq 0{,}005$ erfüllt ist.		1	
Wird hier weniger präzise argumentiert, aber prinzipiell begründet, warum es ausreicht, im Weiteren die Ungleichung $P(X_{0{,}14} \leq k) \leq 0{,}005$ zu untersuchen, so soll der Punkt trotzdem vergeben werden. Für $X_{0{,}14}$ gilt $\mu = 300 \cdot 0{,}14 = 42$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{300 \cdot 0{,}14 \cdot 0{,}86} = \sqrt{36{,}12} > 3$. Daher kann $X_{0{,}14}$ in guter Näherung als normalverteilt angenommen werden.		2*	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
$P(X_{0,14} \le k) \approx \Phi\left(\frac{k+0{,}5-\mu}{\sigma}\right) \le 0{,}005$ $\frac{k-41{,}5}{\sqrt{36{,}12}} \le -2{,}58$ (der Tabelle entnommen) $k \le 41{,}5 - 2{,}58 \cdot \sqrt{36{,}12} \approx 25{,}99$		3*	
Der Verwerfungsbereich ist daher $\{0; 1; \ldots; 25\}$.		1*	
Findet man bei der Befragung höchstens 25 Haushalte, in denen das Fußballspiel gesehen wurde, so kann man die Nullhypothese auf dem 0,5 %-Signifikanzniveau verwerfen und damit die Hypothese des konkurrierenden Medienunternehmers stützen.		1	
Die Grenze k des Verwerfungsbereichs kann, ausgehend von der Ungleichung $P(X_{0,14} \le k) \le 0{,}005$, auch anders bestimmt werden. *Bei den folgenden drei Varianten sollen ebenfalls die sechs mit * versehenen Punkte vergeben werden.* *1. Variante (Nutzung der inversen standardisierten Normalverteilungsfunktion $\Phi^{-1} := \Phi_{0;1}^{-1}$ des Taschenrechners):* $P(X_{0,14} \le k) \approx \Phi\left(\frac{k+0{,}5-\mu}{\sigma}\right) \le 0{,}005$ $\frac{k-41{,}5}{\sqrt{36{,}12}} \le \Phi^{-1}(0{,}005) \approx -2{,}575829$ $k \le 41{,}5 - 2{,}575829 \cdot \sqrt{36{,}12} \approx 26{,}02$ *Der Verwerfungsbereich ist dann $\{0; 1; \ldots; 26\}$.* *2. Variante (Nutzung der inversen Normalverteilungsfunktion $\Phi_{\mu;\sigma}^{-1}$ des Taschenrechners):* $P(X_{0,14} \le k) \approx \Phi_{\mu;\sigma}(k+0{,}5) \le 0{,}005$ $k + 0{,}5 \le \Phi_{42;\sqrt{36{,}12}}^{-1}(0{,}005) \approx 26{,}519287$ $k \le 26{,}519287 - 0{,}5 \approx 26{,}02.$ *Der Verwerfungsbereich ist dann $\{0; 1; \ldots; 26\}$.* *3. Variante ($X_{0,14}$ wird nicht durch die Normalverteilung genähert, direkte Bestimmung von k mit der kumulierten Binomialverteilung des Taschenrechners):* *Wegen $P(X_{0,14} \le 26) \approx 0{,}00329$, $P(X_{0,14} \le 27) \approx 0{,}00572$ und $P(X_{0,14} \le a) < P(X_{0,14} \le b)$ für alle $a < b$; $a{,}b \in \{0; 1; \ldots, 300]$, ist das größte k, das die Ungleichung erfüllt, die Zahl 26. Der Verwerfungsbereich ist dann $\{0; 1; \ldots; 26\}$.*			

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe d) Für $p > 0$ gilt $n = (2\sigma)^2 \Leftrightarrow n = 4 \cdot \sigma^2 \Leftrightarrow n = 4 \cdot n \cdot p \cdot (1-p)$ $\Leftrightarrow p(1-p) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow p^2 - p + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}.$			2
Damit ergibt sich $P(X=2) = \binom{n}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-2}$ $= \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n \cdot (n-1)}{2^{n+1}}.$			2
Punktsummen	16	20	4