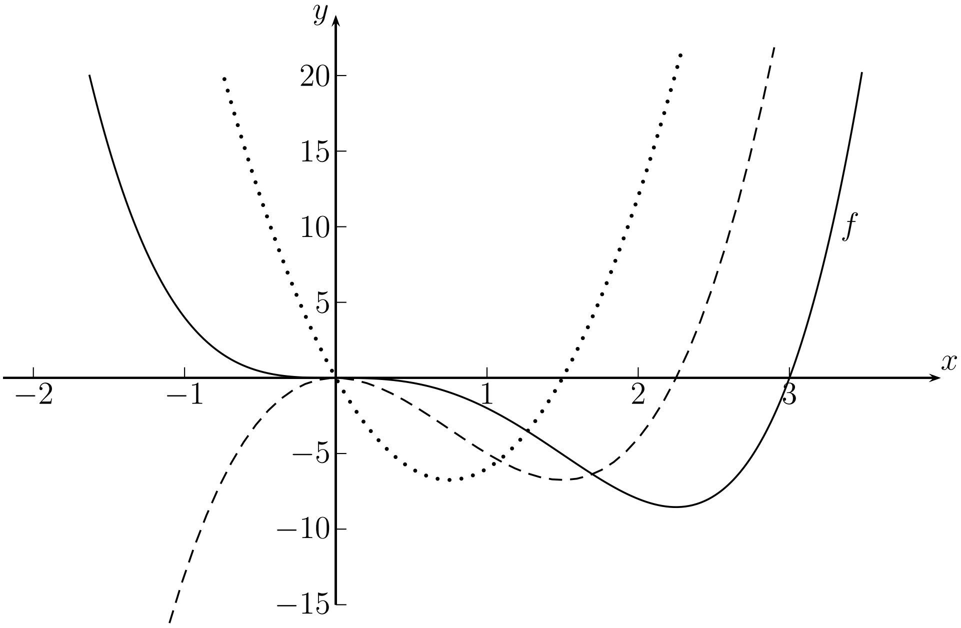
Name: ____

HMF 1 - Analysis (Pool 1)

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^4 - 3\,x^3$ und die Graphen ihrer ersten und zweiten Ableitung.



1.1 Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion f und ordnen Sie die Ableitungsfunktionen den abgebildeten Graphen zu.

(2 P)

1.2 Zeigen Sie rechnerisch, dass der Ursprung $(0 \mid 0)$ ein Sattelpunkt (also ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente) des Graphen der Funktion f ist.

(3 P)

Name: ____

HMF 2 - Analysis (Pool 1)

Eine Funktion f ist durch $f(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 1$ gegeben.

2.1 Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f.

(2 P)

2.2 Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $S(0 \mid 1)$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck.
Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

(3 P)

Name: ________________________________

HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 1)

3.1 Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und die reellen Zahlen r und t. Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle an, ob es sich bei dem Ausdruck um einen Vektor oder um eine Zahl handelt, oder ob der Ausdruck nicht definiert ist.

Ausdruck	Vektor	Zahl	nicht definiert
$\vec{a} \circ (\vec{b} + r \cdot \vec{c})$			
$\lvert\vec{a}\rvert \times \vec{b}$			
$(r \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c}$			
$(\vec{a} \circ \vec{a}) + (r \cdot \lvert\vec{c}\rvert)^2$			
$\vec{c} \times (t \cdot \vec{a} - r \cdot \vec{b})^2$			
$\vec{b} \times (\vec{c} \circ (r \cdot \vec{a}))$			

(3 P)

3.2 Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$.
Geben Sie einen Term an, dessen Wert die Zahl Null ist und der nur aus den Symbolen $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\times$, $\circ$ sowie Klammern besteht. Jedes der Symbole $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\times$, $\circ$ muss dabei in dem Term mindestens einmal verwendet werden.

(2 P)

Name: ______________________________

HMF 4 - Analytische Geometrie (Pool 1)

Gegeben sind die Kugel K mit $K:(x_1-1)^2+x_2^2+(x_3-4)^2=100$ und die Gerade g mit

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}12\\0\\4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

4.1 Untersuchen Sie, ob die Gerade g die Kugel K schneidet.

(2 P)

4.2 Ermitteln Sie eine Parameterform einer Geraden h, die eine Tangente an die Kugel K mit dem Berührpunkt $B(11\,|\,0\,|\,4)$ ist.

(3 P)

Name: ____

HMF 5 - Analytische Geometrie (Pool 2)

Gegeben ist die Ebene $E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$.

5.1 Der Schnittpunkt von E mit der x_1-Achse, der Schnittpunkt von E mit der x_2-Achse und der Koordinatenursprung sind die Eckpunkte eines Dreiecks.
Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

(2 P)

5.2 Ermitteln Sie die Koordinaten des Vektors, der sowohl ein Normalenvektor von E als auch der Ortsvektor eines Punktes der Ebene E ist.

(3 P)

Name: ____________________________________

HMF 6 - Stochastik (Pool 1)

Auf einem Schiff kann man Süßigkeiten am Kiosk kaufen. Von den an einer Schiffsrundfahrt teilnehmenden Personen sind 60 % Frauen.
80 % der reisenden Frauen und 40 % der reisenden Männer kaufen Süßigkeiten am Kiosk.

6.1 Stellen Sie den Sachzusammenhang durch eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel dar. (3 P)

6.2 Ein Passagier hat Süßigkeiten am Kiosk gekauft.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich dabei um eine Frau handelt. (2 P)

Name: ____

HMF 7 - Stochastik (Pool 1)

Jedes Überraschungsei eines Herstellers enthält entweder eine Figur oder keine Figur, wobei der Anteil der Überraschungseier mit einer Figur 25 % beträgt.

7.1 Zehn Überraschungseier werden nacheinander zufällig ausgewählt.
Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür an, dass nur in den letzten beiden Überraschungseiern jeweils eine Figur enthalten ist.

(2 P)

7.2 Sechs Überraschungseier werden zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X gibt an, wie viele dieser Überraschungseier eine Figur enthalten. Eine der folgenden Abbildungen stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsgröße X dar:

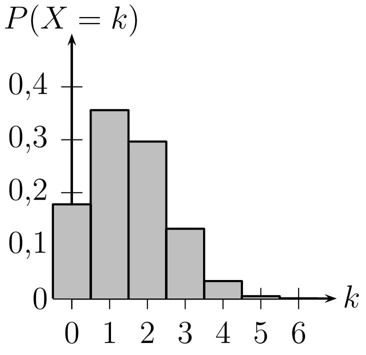


Abb. 1

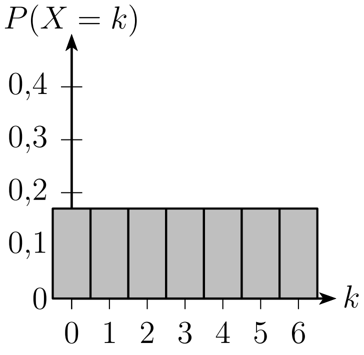


Abb. 2

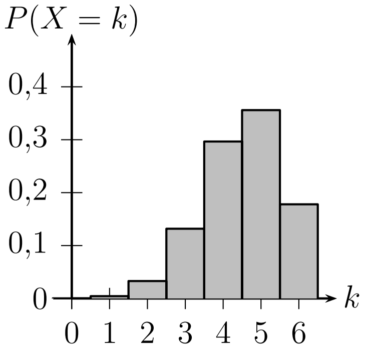


Abb. 3

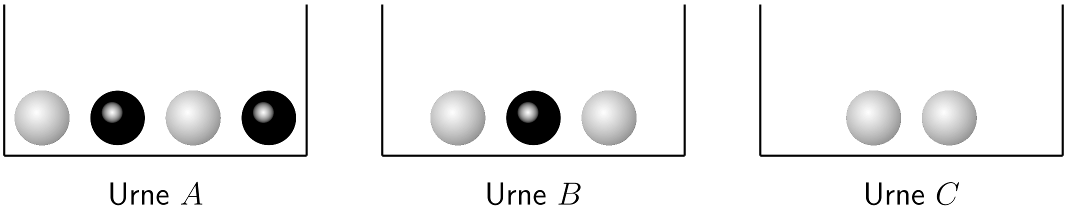
Geben Sie an, welche Abbildung dies ist. Begründen Sie, dass die beiden anderen Abbildungen dies nicht sind.

(3 P)

Name: ____

HMF 8 - Stochastik (Pool 2)

Schwarze und weiße Kugeln sind wie folgt auf drei Urnen verteilt:



8.1 Aus Urne A wird zunächst eine Kugel zufällig entnommen und in Urne B gelegt. Anschließend wird aus Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in Urne C gelegt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich danach in Urne C zwei weiße Kugeln und eine schwarze Kugel befinden.

(2 P)

8.2 Die drei Urnen mit den in der Abbildung dargestellten Inhalten bilden den Ausgangspunkt für folgendes Spiel:

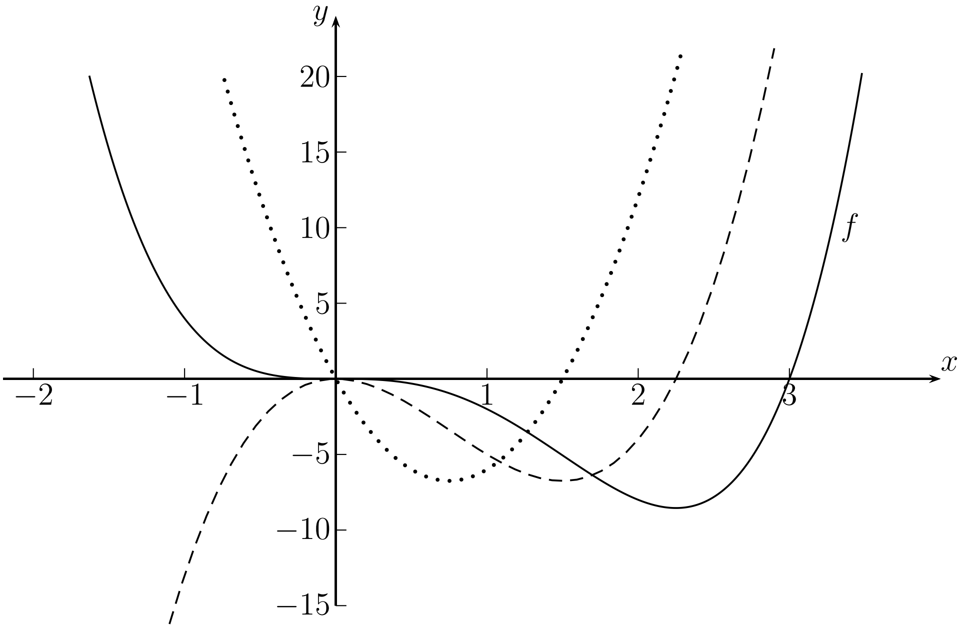
> *Es wird zunächst ein Einsatz von 1 Euro eingezahlt. Anschließend wird eine der drei Urnen zufällig ausgewählt und danach aus dieser Urne eine Kugel zufällig gezogen. Nur dann, wenn diese Kugel schwarz ist, wird ein bestimmter Geldbetrag ausgezahlt.*

Ermitteln Sie, wie groß dieser Geldbetrag sein muss, damit bei diesem Spiel auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgeglichen sind.

(3 P)

HMF 1 - Analysis (Pool 1)

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^4 - 3\,x^3$ und die Graphen ihrer ersten und zweiten Ableitung.



1.1 Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung der Funktion f und ordnen Sie die Ableitungsfunktionen den abgebildeten Graphen zu.

(2 P)

1.2 Zeigen Sie rechnerisch, dass der Ursprung $(0\,|\,0)$ ein Sattelpunkt (also ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente) des Graphen der Funktion f ist.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 1 - Analysis (Pool 1)
1.1	$f'(x) = 4\,x^3 - 9\,x^2, \quad f''(x) = 12\,x^2 - 18\,x$ Der gestrichelte Graph gehört zu f' und der gepunktete zu f''. 2 P
1.2	$f'''(x) = 24\,x - 18$ Wegen $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$ und $f'''(0) = -18 \neq 0$ ist eine hinreichende Bedingung für einen Sattelpunkt im Ursprung erfüllt. 3 P

HMF 2 - Analysis (Pool 1)

Eine Funktion f ist durch $f(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 1$ gegeben.

2.1 Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f.

(2 P)

2.2 Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $S(0 \mid 1)$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck.
Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 2 - Analysis (Pool 1)
2.1	$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln(\frac{1}{2}) \Leftrightarrow x = 2 \cdot \ln(\frac{1}{2})$ 2 P
2.2	$f'(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$ Die Steigung der Tangente im Punkt $S(0 \mid 1)$ beträgt $m = f'(0) = 1$. Damit sind zwei Winkel des Dreiecks 45° groß und das Dreieck ist gleichschenklig. 3 P

HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 1)

3.1 Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und die reellen Zahlen r und t. Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle an, ob es sich bei dem Ausdruck um einen Vektor oder um eine Zahl handelt, oder ob der Ausdruck nicht definiert ist.

Ausdruck	Vektor	Zahl	nicht definiert
$\vec{a} \circ (\vec{b} + r \cdot \vec{c})$			
$\lvert\vec{a}\rvert \times \vec{b}$			
$(r \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c}$			
$(\vec{a} \circ \vec{a}) + (r \cdot \lvert\vec{c}\rvert)^2$			
$\vec{c} \times (t \cdot \vec{a} - r \cdot \vec{b})^2$			
$\vec{b} \times (\vec{c} \circ (r \cdot \vec{a}))$			

(3 P)

3.2 Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$.
Geben Sie einen Term an, dessen Wert die Zahl Null ist und der nur aus den Symbolen $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\times$, $\circ$ sowie Klammern besteht. Jedes der Symbole $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\times$, $\circ$ muss dabei in dem Term mindestens einmal verwendet werden.

(2 P)

<table>
<tr><th></th><th>Vorgaben für die Bewertung von HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 1)</th></tr>
<tr><td>3.1</td><td>
<table>
<tr><th>Ausdruck</th><th>Vektor</th><th>Zahl</th><th>nicht definiert</th></tr>
<tr><td>$\vec{a} \circ (\vec{b} + r \cdot \vec{c})$</td><td></td><td>×</td><td></td></tr>
<tr><td>$|\vec{a}| \times \vec{b}$</td><td></td><td></td><td>×</td></tr>
<tr><td>$(r \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c}$</td><td>×</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$(\vec{a} \circ \vec{a}) + (r \cdot |\vec{c}|)^2$</td><td></td><td>×</td><td></td></tr>
<tr><td>$\vec{c} \times (t \cdot \vec{a} - r \cdot \vec{b})^2$</td><td></td><td></td><td>×</td></tr>
<tr><td>$\vec{b} \times (\vec{c} \circ (r \cdot \vec{a}))$</td><td></td><td></td><td>×</td></tr>
</table>

Jede richtige Zeile soll mit einem halben Punkt bewertet werden.
3 P</td></tr>
<tr><td>3.2</td><td>*zum Beispiel* $(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{a}$
2 P</td></tr>
</table>

HMF 4 - Analytische Geometrie (Pool 1)

Gegeben sind die Kugel K mit $K : (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + (x_3 - 4)^2 = 100$ und die Gerade g mit

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4.1 Untersuchen Sie, ob die Gerade g die Kugel K schneidet.

(2 P)

4.2 Ermitteln Sie eine Parameterform einer Geraden h, die eine Tangente an die Kugel K mit dem Berührpunkt $B(11 \mid 0 \mid 4)$ ist.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 4 - Analytische Geometrie (Pool 1)
4.1	Setzt man die Koordinaten der Punkte der Geraden in die Kugelgleichung ein, ergibt sich $11^2 + s^2 + s^2 = 100 \Leftrightarrow 2 \cdot s^2 = -21$. Da diese Gleichung keine reellen Lösungen hat, schneidet die Gerade g die Kugel K nicht. 2 P
4.2	Der Mittelpunkt der Kugel K ist $M(1 \mid 0 \mid 4)$. Ein zum Vektor $\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ orthogonaler Vektor ist z.B. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Daher ist die Gerade h mit $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Tangente an die Kugel K. 3 P

HMF 5 - Analytische Geometrie (Pool 2)

Gegeben ist die Ebene $E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -18$.

5.1 Der Schnittpunkt von E mit der x_1-Achse, der Schnittpunkt von E mit der x_2-Achse und der Koordinatenursprung sind die Eckpunkte eines Dreiecks.
Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

(2 P)

5.2 Ermitteln Sie die Koordinaten des Vektors, der sowohl ein Normalenvektor von E als auch der Ortsvektor eines Punktes der Ebene E ist.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 5 - Analytische Geometrie (Pool 2)
5.1	Die Schnittpunkte von E mit der x_1- bzw. mit der x_2-Achse sind $(-9 \vert\, 0 \,\vert\, 0)$ bzw. $(0 \,\vert -18 \vert\, 0)$. Damit gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks $A = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 18 = 81$. 2 P
5.2	Jeder Normalenvektor von E hat die Form $\begin{pmatrix} 2r \\ r \\ -2r \end{pmatrix}$ mit $r \neq 0$. Mit $2 \cdot 2r + r - 2 \cdot (-2r) = -18 \Leftrightarrow r = -2$ ist $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ein Vektor, der sowohl ein Normalenvektor von E als auch der Ortsvektor eines Punktes der Ebene E ist. 3 P

HMF 6 - Stochastik (Pool 1)

Auf einem Schiff kann man Süßigkeiten am Kiosk kaufen. Von den an einer Schiffsrundfahrt teilnehmenden Personen sind 60 % Frauen.
80 % der reisenden Frauen und 40 % der reisenden Männer kaufen Süßigkeiten am Kiosk.

6.1 Stellen Sie den Sachzusammenhang durch eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel dar. (3 P)

6.2 Ein Passagier hat Süßigkeiten am Kiosk gekauft.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich dabei um eine Frau handelt. (2 P)

<table>
<tr><td></td><td>Vorgaben für die Bewertung von HMF 6 - Stochastik (Pool 1)</td></tr>
<tr><td>6.1</td><td>W: Die Person ist weiblich.
S: Die Person kauft Süßigkeiten.
<table><tr><td></td><td>W</td><td>$\overline{W}$</td><td></td></tr><tr><td>S</td><td>0,48</td><td>0,16</td><td>0,64</td></tr><tr><td>$\overline{S}$</td><td>0,12</td><td>0,24</td><td>0,36</td></tr><tr><td></td><td>0,6</td><td>0,4</td><td>1</td></tr></table>
3 P</td></tr>
<tr><td>6.2</td><td>$P_S(W) = \frac{P(S \cap W)}{P(S)} = \frac{0{,}48}{0{,}64} = \frac{3}{4} = 0{,}75$
2 P</td></tr>
</table>

HMF 7 - Stochastik (Pool 1)

Jedes Überraschungsei eines Herstellers enthält entweder eine Figur oder keine Figur, wobei der Anteil der Überraschungseier mit einer Figur 25 % beträgt.

7.1 Zehn Überraschungseier werden nacheinander zufällig ausgewählt.
Geben Sie einen Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit dafür an, dass nur in den letzten beiden Überraschungseiern jeweils eine Figur enthalten ist.

(2 P)

7.2 Sechs Überraschungseier werden zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X gibt an, wie viele dieser Überraschungseier eine Figur enthalten. Eine der folgenden Abbildungen stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung dieser Zufallsgröße X dar:

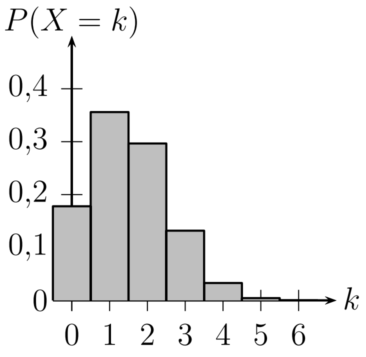


Abb. 1

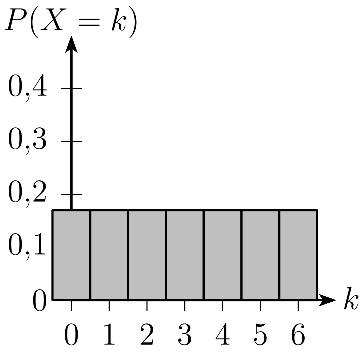


Abb. 2

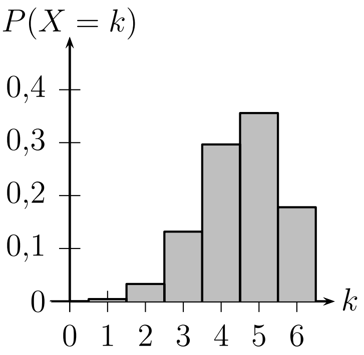


Abb. 3

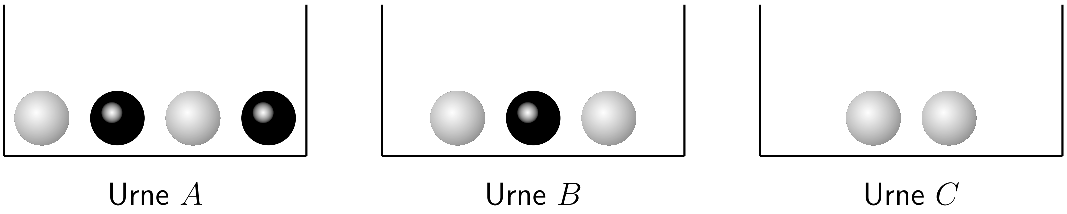
Geben Sie an, welche Abbildung dies ist. Begründen Sie, dass die beiden anderen Abbildungen dies nicht sind.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 7 - Stochastik (Pool 1)
7.1	$P($„Nur die letzten beiden Überraschungseier enthalten eine Figur.“$) = 0{,}75^8 \cdot 0{,}25^2$ 2 P
7.2	Die Abbildung 1 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X. X ist binomialverteilt, für den Erwartungswert von X gilt $E(X) = 6 \cdot 0{,}25 = 1{,}5$. Abbildung 2 zeigt eine Gleichverteilung. Abbildung 3 gehört zu einer Zufallsgröße, deren Erwartungswert größer als 1,5 ist. 3 P

HMF 8 - Stochastik (Pool 2)

Schwarze und weiße Kugeln sind wie folgt auf drei Urnen verteilt:



8.1 Aus Urne A wird zunächst eine Kugel zufällig entnommen und in Urne B gelegt. Anschließend wird aus Urne B eine Kugel zufällig entnommen und in Urne C gelegt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich danach in Urne C zwei weiße Kugeln und eine schwarze Kugel befinden.

(2 P)

8.2 Die drei Urnen mit den in der Abbildung dargestellten Inhalten bilden den Ausgangspunkt für folgendes Spiel:

> *Es wird zunächst ein Einsatz von 1 Euro eingezahlt. Anschließend wird eine der drei Urnen zufällig ausgewählt und danach aus dieser Urne eine Kugel zufällig gezogen. Nur dann, wenn diese Kugel schwarz ist, wird ein bestimmter Geldbetrag ausgezahlt.*

Ermitteln Sie, wie groß dieser Geldbetrag sein muss, damit bei diesem Spiel auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgeglichen sind.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 8 - Stochastik (Pool 2)
8.1	P(„In Urne C befinden sich zwei weiße Kugeln und eine schwarze Kugel.“) $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$ 2 P
8.2	P(„Die Kugel ist schwarz“) $= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{18}$ Sei x der auszuzahlende Geldbetrag in Euro. Dann gilt $\frac{5}{18} \cdot (x-1) + \frac{13}{18} \cdot (-1) = 0 \Leftrightarrow x = 3{,}6$. Der Geldbetrag muss 3,60 Euro betragen. 3 P

HMF-Bewertungsbogen für: ________________________________

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 1 - Analysis (Pool 1)
1.1	$f'(x) = 4\,x^3 - 9\,x^2, \quad f''(x) = 12\,x^2 - 18\,x$ Der gestrichelte Graph gehört zu f' und der gepunktete zu f''. 2 P
1.2	$f'''(x) = 24\,x - 18$ Wegen $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$ und $f'''(0) = -18 \neq 0$ ist eine hinreichende Bedingung für einen Sattelpunkt im Ursprung erfüllt. 3 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 2 - Analysis (Pool 1)
2.1	$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln(\frac{1}{2}) \Leftrightarrow x = 2 \cdot \ln(\frac{1}{2})$ 2 P
2.2	$f'(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$ Die Steigung der Tangente im Punkt $S(0 \mid 1)$ beträgt $m = f'(0) = 1$. Damit sind zwei Winkel des Dreiecks 45° groß und das Dreieck ist gleichschenklig. 3 P

<table>
<tr><th></th><th>Vorgaben für die Bewertung von HMF 3 - Analytische Geometrie (Pool 1)</th></tr>
<tr><td>3.1</td><td>
<table>
<tr><th>Ausdruck</th><th>Vektor</th><th>Zahl</th><th>nicht definiert</th></tr>
<tr><td>$\vec{a} \circ (\vec{b} + r \cdot \vec{c})$</td><td></td><td>×</td><td></td></tr>
<tr><td>$|\vec{a}| \times \vec{b}$</td><td></td><td></td><td>×</td></tr>
<tr><td>$(r \cdot \vec{c}) - (\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c}$</td><td>×</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$(\vec{a} \circ \vec{a}) + (r \cdot |\vec{c}|)^2$</td><td></td><td>×</td><td></td></tr>
<tr><td>$\vec{c} \times (t \cdot \vec{a} - r \cdot \vec{b})^2$</td><td></td><td></td><td>×</td></tr>
<tr><td>$\vec{b} \times (\vec{c} \circ (r \cdot \vec{a}))$</td><td></td><td></td><td>×</td></tr>
</table>

Jede richtige Zeile soll mit einem halben Punkt bewertet werden.
3 P</td></tr>
<tr><td>3.2</td><td>*zum Beispiel* $(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{a}$
2 P</td></tr>
</table>

Vorgaben für die Bewertung von HMF 4 - Analytische Geometrie (Pool 1)

4.1 Setzt man die Koordinaten der Punkte der Geraden in die Kugelgleichung ein, ergibt sich $11^2 + s^2 + s^2 = 100 \Leftrightarrow 2 \cdot s^2 = -21$. Da diese Gleichung keine reellen Lösungen hat, schneidet die Gerade g die Kugel K nicht.

2 P

4.2 Der Mittelpunkt der Kugel K ist $M(1\,|\,0\,|\,4)$.

Ein zum Vektor $\overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ orthogonaler Vektor ist z.B. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Daher ist die Gerade h mit $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Tangente an die Kugel K.

3 P

Vorgaben für die Bewertung von HMF 5 - Analytische Geometrie (Pool 2)

5.1 Die Schnittpunkte von E mit der x_1- bzw. mit der x_2-Achse sind $(-9|\,0\,|\,0)$ bzw. $(0\,|-18|\,0)$.
Damit gilt für den Flächeninhalt A des Dreiecks $A = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 18 = 81$.

2 P

5.2 Jeder Normalenvektor von E hat die Form $\begin{pmatrix} 2r \\ r \\ -2r \end{pmatrix}$ mit $r \neq 0$.

Mit $2 \cdot 2r + r - 2 \cdot (-2r) = -18 \Leftrightarrow r = -2$ ist $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ein Vektor, der sowohl ein Normalenvektor von E als auch der Ortsvektor eines Punktes der Ebene E ist.

3 P

Vorgaben für die Bewertung von HMF 6 - Stochastik (Pool 1)

6.1 W: Die Person ist weiblich.
S: Die Person kauft Süßigkeiten.

	W	$\overline{W}$	
S	0,48	0,16	0,64
$\overline{S}$	0,12	0,24	0,36
	0,6	0,4	1

3 P

6.2 $P_S(W) = \dfrac{P(S \cap W)}{P(S)} = \dfrac{0{,}48}{0{,}64} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$

2 P

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 7 - Stochastik (Pool 1)
7.1	P(„Nur die letzten beiden Überraschungseier enthalten eine Figur.“) $= 0{,}75^8 \cdot 0{,}25^2$ 2 P
7.2	Die Abbildung 1 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X. X ist binomialverteilt, für den Erwartungswert von X gilt $E(X) = 6 \cdot 0{,}25 = 1{,}5$. Abbildung 2 zeigt eine Gleichverteilung. Abbildung 3 gehört zu einer Zufallsgröße, deren Erwartungswert größer als 1,5 ist. 3 P

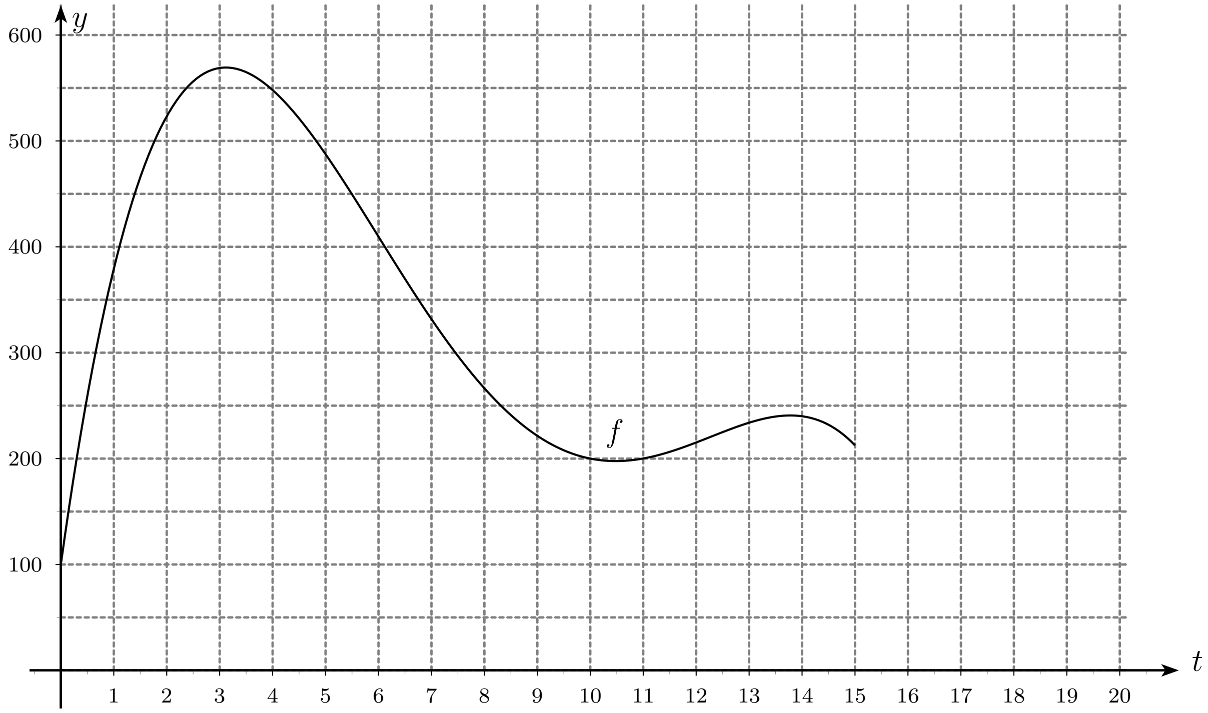
	Vorgaben für die Bewertung von HMF 8 - Stochastik (Pool 2)
8.1	P(„In Urne C befinden sich zwei weiße Kugeln und eine schwarze Kugel.“) $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$ 2 P
8.2	P(„Die Kugel ist schwarz“) $= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{18}$ Sei x der auszuzahlende Geldbetrag in Euro. Dann gilt $\frac{5}{18} \cdot (x-1) + \frac{13}{18} \cdot (-1) = 0 \Leftrightarrow x = 3{,}6$. Der Geldbetrag muss 3,60 Euro betragen. 3 P

Erstkorrektor: Von 40 Punkten wurden erreicht: _________

Zweitkorrektor: Von 40 Punkten wurden erreicht: _________

Aufgabe 1: Analysis

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f, die für $0 \leq t \leq 15$ das Volumen des Wassers in einem Becken in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $f(t)$ das Volumen in Kubikmetern.



a) a1) Geben Sie mit Hilfe der Grafik das Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn an sowie den Zeitraum, in dem das Volumen mindestens 350 Kubikmeter beträgt.

a2) Bestimmen Sie mit Hilfe der Grafik die momentane Änderungsrate des Wasservolumens zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn.

a3) Die fünfzehn Stunden nach Beobachtungsbeginn vorliegende momentane Änderungsrate des Wasservolumens bleibt bis zu dem Zeitpunkt erhalten, zu dem das Becken kein Wasser mehr enthält.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man diesen Zeitpunkt grafisch bestimmen kann. Geben Sie den Zeitpunkt an.

a4) Interpretieren Sie die Gleichung $f(t+6) = f(t) - 350$ im Sachzusammenhang.

a5) Begründen Sie, dass die Funktionsgleichung von f weder die Form I noch die Form II hat:

$$I: \quad y = -8{,}5\,t^3 + 3{,}7\,t^2 + a\,t + 100 \quad ; \quad a \in \mathbb{R}$$

$$II: \quad y = -0{,}3\,t^4 + b\,t^2 + 100 \quad ; \quad b \in \mathbb{R}$$

(16 P)

b) Für ein anderes Becken wird die momentane Änderungsrate des Volumens des enthaltenen Wassers für $0 \leq t \leq 15$ durch die Funktion g mit

$$g(t) = 0{,}4 \cdot (2\,t^3 - 39\,t^2 + 180\,t)$$

beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $g(t)$ die momentane Änderungsrate in $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$. Die Funktion G mit

$$G(t) = 0{,}2 \cdot (t^4 - 26\,t^3 + 180\,t^2)$$

ist eine Stammfunktion von g.

b1) Berechnen Sie für den beschriebenen Zeitraum denjenigen Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate des Wasservolumens maximal ist.

b2) Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitraum, in dem das Volumen des Wassers abnimmt.

b3) Drei Stunden nach Beobachtungsbeginn sind im Becken 350 Kubikmeter Wasser enthalten. Bestimmen Sie das Volumen des Wassers zu Beobachtungsbeginn.

b4) Untersuchen Sie rechnerisch, ob es nach Beobachtungsbeginn einen Zeitpunkt gibt, zu dem das Wasservolumen ebenso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.

(17 P)

c) Bei einem dritten Becken kann die momentane Änderungsrate des Wasservolumens durch ein Ventil reguliert werden. Die Änderungsrate wird je nach Einstellung des Ventils durch eine Funktion h_k mit

$$h_k(t) = 10 \cdot k \cdot e^{-kt} \qquad ; \qquad k > 0$$

beschrieben. Zur Zeit $t = 0$ befinden sich $3\,\mathrm{m}^3$ Wasser in dem Becken.

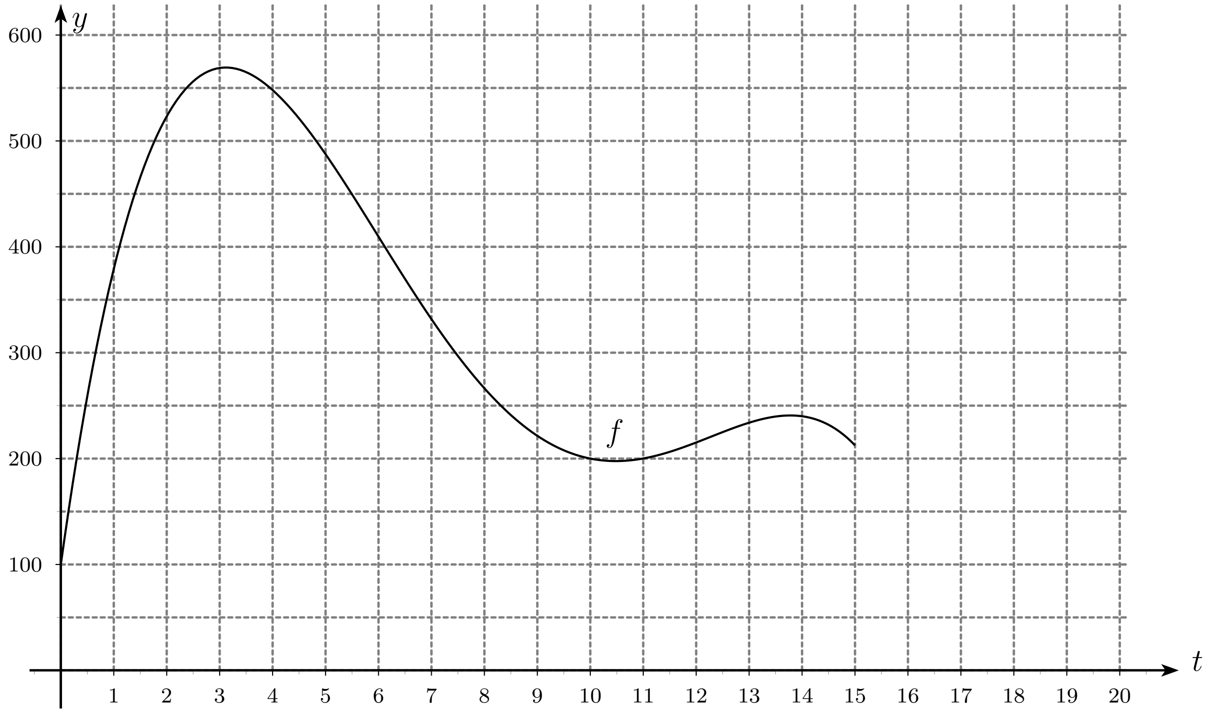
c1) Ermitteln Sie, für welchen Parameter k sich nach 2 Stunden genau $8\,\mathrm{m}^3$ Wasser in dem Becken befinden.

c2) Geben Sie einen Term der 103. Ableitung von h_k an.

(7 P)

Aufgabe 1: Analysis

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f, die für $0 \leq t \leq 15$ das Volumen des Wassers in einem Becken in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $f(t)$ das Volumen in Kubikmetern.



a) a1) Geben Sie mit Hilfe der Grafik das Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn an sowie den Zeitraum, in dem das Volumen mindestens 350 Kubikmeter beträgt.

a2) Bestimmen Sie mit Hilfe der Grafik die momentane Änderungsrate des Wasservolumens zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn.

a3) Die fünfzehn Stunden nach Beobachtungsbeginn vorliegende momentane Änderungsrate des Wasservolumens bleibt bis zu dem Zeitpunkt erhalten, zu dem das Becken kein Wasser mehr enthält.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man diesen Zeitpunkt grafisch bestimmen kann. Geben Sie den Zeitpunkt an.

a4) Interpretieren Sie die Gleichung $f(t+6) = f(t) - 350$ im Sachzusammenhang.

a5) Begründen Sie, dass die Funktionsgleichung von f weder die Form I noch die Form II hat:

$$I: \quad y = -8{,}5\,t^3 + 3{,}7\,t^2 + a\,t + 100 \quad ; \quad a \in \mathbb{R}$$

$$II: \quad y = -0{,}3\,t^4 + b\,t^2 + 100 \quad ; \quad b \in \mathbb{R}$$

(16 P)

b) Für ein anderes Becken wird die momentane Änderungsrate des Volumens des enthaltenen Wassers für $0 \leq t \leq 15$ durch die Funktion g mit

$$g(t) = 0{,}4 \cdot (2\,t^3 - 39\,t^2 + 180\,t)$$

beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $g(t)$ die momentane Änderungsrate in $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$. Die Funktion G mit

$$G(t) = 0{,}2 \cdot (t^4 - 26\,t^3 + 180\,t^2)$$

ist eine Stammfunktion von g.

b1) Berechnen Sie für den beschriebenen Zeitraum denjenigen Zeitpunkt, zu dem die momentane Änderungsrate des Wasservolumens maximal ist.

b2) Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitraum, in dem das Volumen des Wassers abnimmt.

b3) Drei Stunden nach Beobachtungsbeginn sind im Becken 350 Kubikmeter Wasser enthalten. Bestimmen Sie das Volumen des Wassers zu Beobachtungsbeginn.

b4) Untersuchen Sie rechnerisch, ob es nach Beobachtungsbeginn einen Zeitpunkt gibt, zu dem das Wasservolumen ebenso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.

(17 P)

c) Bei einem dritten Becken kann die momentane Änderungsrate des Wasservolumens durch ein Ventil reguliert werden. Die Änderungsrate wird je nach Einstellung des Ventils durch eine Funktion h_k mit

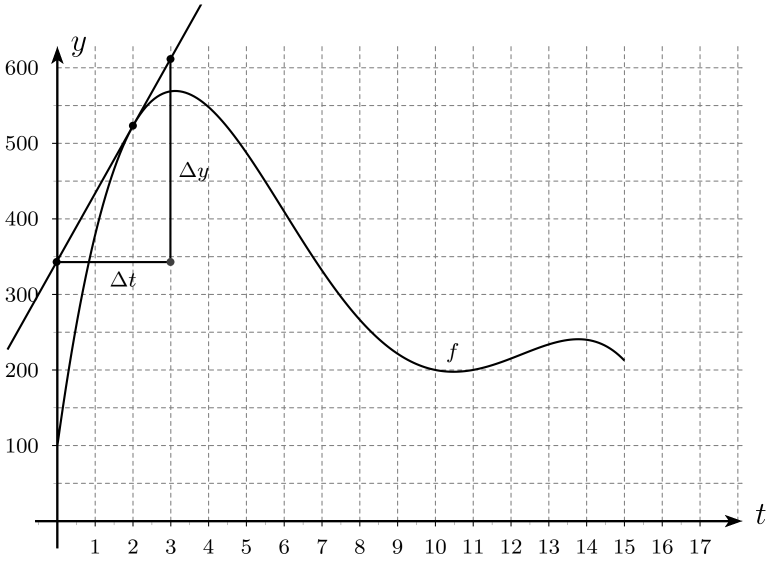
$$h_k(t) = 10 \cdot k \cdot e^{-kt} \qquad ; \qquad k > 0$$

beschrieben. Zur Zeit $t = 0$ befinden sich $3\,\mathrm{m}^3$ Wasser in dem Becken.

c1) Ermitteln Sie, für welchen Parameter k sich nach 2 Stunden genau $8\,\mathrm{m}^3$ Wasser in dem Becken befinden.

c2) Geben Sie einen Term der 103. Ableitung von h_k an.

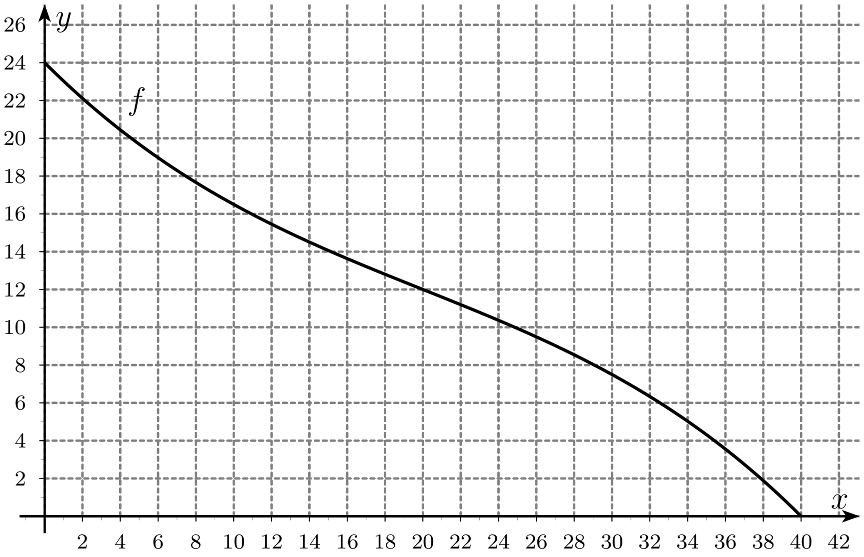
(7 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) Das Volumen des Wassers fünf Stunden nach Beobachtungsbeginn beträgt etwa 490 Kubikmeter. Der Zeitraum, in dem das Volumen mindestens 350 Kubikmeter beträgt, beginnt etwa 0,9 Stunden und endet etwa 6,8 Stunden nach Beobachtungsbeginn.	3		
 Mit Hilfe der Tangente im Punkt $(2\,\vert\,f(2))$ und eines geeigneten Steigungsdreiecks ergibt sich ungefähr der Wert $\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{270}{3}=90$. Die momentane Änderungsrate beträgt etwa $90\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$.	4		
Zeichnet man die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(15\,\vert\,f(15))$ in die Abbildung ein, so liefert die t-Koordinate des Schnittpunkts dieser Tangente mit der t-Achse den gesuchten Zeitpunkt. Das Becken enthält etwa 19 Stunden nach Beobachtungsbeginn kein Wasser mehr.		3	
Die Lösungen der Gleichung sind diejenigen Zeitpunkte, an denen das Volumen des Wassers 350 Kubikmeter größer ist als sechs Stunden später.		2	
Der Graph einer Funktionsgleichung der Form I hätte höchstens zwei Punkte, an denen eine waagerechte Tangente vorliegt. Der Graph der Funktion f hat drei solcher Punkte.		2	
Der Graph einer Funktionsgleichung der Form II wäre symmetrisch zur y-Achse und hätte dann an der Stelle 0 eine waagerechte Tangente. Der Graph der Funktion f hat an der Stelle 0 keine waagerechte Tangente.		2	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe b) $g'(t) = 0{,}4 \cdot (6t^2 - 78t + 180)$ Notwendig für eine lokale Extremstelle t von g ist $g'(t) = 0$. $g'(t) = 0$ $\Leftrightarrow\ 0{,}4 \cdot (6t^2 - 78t + 180) = 0$ $\Leftrightarrow\ t = 3 \vee t = 10$ Weil zusätzlich $g(0) = 0$, $g(3) \approx 97{,}2$, $g(10) = -40$ und $g(15) = 270$ gilt, ist die momentane Änderungsrate 15 Stunden nach Beobachtungsbeginn maximal.	1 2 2		
$g(t) = 0$ $\Leftrightarrow\ 0{,}4 \cdot (2t^3 - 39t^2 + 180t) = 0$ $\Leftrightarrow\ t = 0 \vee t = 7{,}5 \vee t = 12$ Da z.B. $g(5) > 0$, $g(10) < 0$ und $g(15) > 0$ gilt, liegt der Zeitraum zwischen 7,5 und 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn.		2 2	
$350 - \int\limits_0^3 g(t)\,dt = 350 - (G(3) - G(0)) = 350 - 199{,}8 = 150{,}2$ Zu Beobachtungsbeginn enthält das Becken etwa 150 Kubikmeter Wasser.		4	
$G(x) = G(0)$ $\Leftrightarrow\ G(x) = 0$ $\Leftrightarrow\ 0{,}2 \cdot (x^4 - 26x^3 + 180x^2) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 26x^3 + 180x^2 = 0$ $\Leftrightarrow\ x^2 \cdot (x^2 - 26x + 180) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ Es gibt nach Beobachtungsbeginn keinen Zeitpunkt, zu dem das Wasservolumen ebenso groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.		1	3
Teilaufgabe c) $3 + \int\limits_0^2 h_k(t)\,dt = 8 \Leftrightarrow \int\limits_0^2 10 \cdot k \cdot e^{-kt}\,dt = 5$ $\Leftrightarrow\ [-10 \cdot e^{-kt}]_0^2 = 5 \Leftrightarrow -10 \cdot e^{-2k} + 10 = 5$ $\Leftrightarrow\ k = \frac{\ln(2)}{2} \approx 0{,}347$			4
$-10 \cdot k^{104} \cdot e^{-kt}$			3
Punktsummen	12	18	10

Aufgabe 2: Analysis

Für die „Deichtherme“ wird eine neue Wasserrutsche geplant. Der Graph in der Abbildung modelliert die Rutschbahn. Der Graph beginnt im Punkt $A(0 \mid 24)$ mit einer Steigung von $-100\,\%$ und endet im Punkt $B(40 \mid 0)$. Ferner verläuft er durch den Punkt $C(20 \mid 12)$. Die x-Achse stellt den ebenen Boden der Schwimmhalle bzw. die auf gleicher Höhe liegende Wasseroberfläche dar.
Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.



a) a1) Berechnen Sie die durchschnittliche Steigung zwischen Start- und Endpunkt der Rutschbahn und ermitteln Sie mit Hilfe der Grafik näherungsweise die Steigung im Punkt C.

a2) Der abgebildete Graph gehört zu einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f.

(8 P)

b) Verwenden Sie im Folgenden die Funktion f mit

$$f(x) = -0{,}0005 \cdot x^3 + 0{,}03 \cdot x^2 - x + 24 \text{ mit } 0 \leq x \leq 40.$$

b1) Die Rutsche soll durch zwei vertikale Pfeiler abgestützt werden. Der Architekt plant einen 10 Meter und einen 15 Meter hohen Pfeiler.
Berechnen Sie, wie weit die Pfeiler voneinander entfernt stehen.

b2) Zeigen Sie rechnerisch, dass $f'(x) < 0$ für alle $x \in [0; 40]$ gilt, und interpretieren Sie dies im Sachzusammenhang.

b3) Zeigen Sie, dass der Punkt C ein Wendepunkt des Graphen von f ist.

(11 P)

c) Die Rutschen eines anderen Planungsbüros werden für $0 \leq x \leq 40$ durch die Graphen der Funktionenschar g_a mit

$$g_a(x) = 24 \cdot e^{-0{,}05 \cdot a \cdot x} \quad , \; a > 0$$

beschrieben.

c1) Skizzieren Sie den Graphen von $g_{1,5}$ und bestimmen Sie die Höhe, aus der ein Badegast am Ende dieser Rutsche ins Wasser fällt.

c2) Zwei neue Sicherheitsbestimmungen lauten:

i. Die Höhe, aus der ein Badegast am Ende der Rutsche ins Wasser fällt, darf höchstens 1,5 Meter betragen.

ii. Der Neigungswinkel darf im Startpunkt nicht größer als 55° sein.

Untersuchen Sie, ob es Parameter a gibt, für die beide Bedingungen erfüllt sind.

c3) Gegeben ist der folgende Term

$$\sum_{i=0}^{3} \sqrt{10^2 + (g_{1,5}(10(i+1)) - g_{1,5}(10i))^2} \; .$$

Veranschaulichen Sie den zweiten Summanden dieses Terms in Ihrer Skizze aus Teilaufgabe c1).
Interpretieren Sie den gesamten Term im Sachzusammenhang.

(15 P)

d) Die Funktion G ist gegeben durch

$$G(a) = \int_0^{40} g_a(x)\, dx \quad \text{mit} \quad a > 0.$$

d1) Berechnen Sie $G(5)$.

d2) Zeigen Sie, dass für jedes $a > 0$ gilt:

$$G(a) < \frac{480}{a}$$

(6 P)

Aufgabe 2: Analysis

Für die „Deichtherme“ wird eine neue Wasserrutsche geplant. Der Graph in der Abbildung modelliert die Rutschbahn. Der Graph beginnt im Punkt $A(0 \mid 24)$ mit einer Steigung von $-100\,\%$ und endet im Punkt $B(40 \mid 0)$. Ferner verläuft er durch den Punkt $C(20 \mid 12)$. Die x-Achse stellt den ebenen Boden der Schwimmhalle bzw. die auf gleicher Höhe liegende Wasseroberfläche dar.
Eine Längeneinheit entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

a) a1) Berechnen Sie die durchschnittliche Steigung zwischen Start- und Endpunkt der Rutschbahn und ermitteln Sie mit Hilfe der Grafik näherungsweise die Steigung im Punkt C.

a2) Der abgebildete Graph gehört zu einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f.

(8 P)

b) Verwenden Sie im Folgenden die Funktion f mit

$$f(x) = -0{,}0005 \cdot x^3 + 0{,}03 \cdot x^2 - x + 24 \text{ mit } 0 \leq x \leq 40.$$

b1) Die Rutsche soll durch zwei vertikale Pfeiler abgestützt werden. Der Architekt plant einen 10 Meter und einen 15 Meter hohen Pfeiler.
Berechnen Sie, wie weit die Pfeiler voneinander entfernt stehen.

b2) Zeigen Sie rechnerisch, dass $f'(x) < 0$ für alle $x \in [0; 40]$ gilt, und interpretieren Sie dies im Sachzusammenhang.

b3) Zeigen Sie, dass der Punkt C ein Wendepunkt des Graphen von f ist.

(11 P)

c) Die Rutschen eines anderen Planungsbüros werden für $0 \leq x \leq 40$ durch die Graphen der Funktionenschar g_a mit

$$g_a(x) = 24 \cdot e^{-0{,}05 \cdot a \cdot x} \quad , \; a > 0$$

beschrieben.

c1) Skizzieren Sie den Graphen von $g_{1,5}$ und bestimmen Sie die Höhe, aus der ein Badegast am Ende dieser Rutsche ins Wasser fällt.

c2) Zwei neue Sicherheitsbestimmungen lauten:

i. Die Höhe, aus der ein Badegast am Ende der Rutsche ins Wasser fällt, darf höchstens 1,5 Meter betragen.

ii. Der Neigungswinkel darf im Startpunkt nicht größer als 55° sein.

Untersuchen Sie, ob es Parameter a gibt, für die beide Bedingungen erfüllt sind.

c3) Gegeben ist der folgende Term

$$\sum_{i=0}^{3} \sqrt{10^2 + (g_{1,5}(10(i+1)) - g_{1,5}(10i))^2} \; .$$

Veranschaulichen Sie den zweiten Summanden dieses Terms in Ihrer Skizze aus Teilaufgabe c1).
Interpretieren Sie den gesamten Term im Sachzusammenhang.

(15 P)

d) Die Funktion G ist gegeben durch

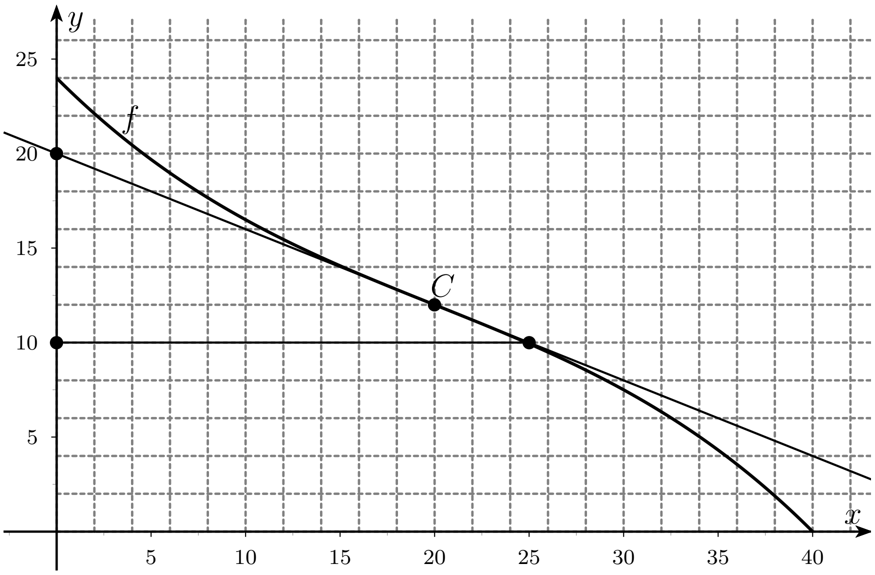
$$G(a) = \int_0^{40} g_a(x)\, dx \quad \text{mit} \quad a > 0.$$

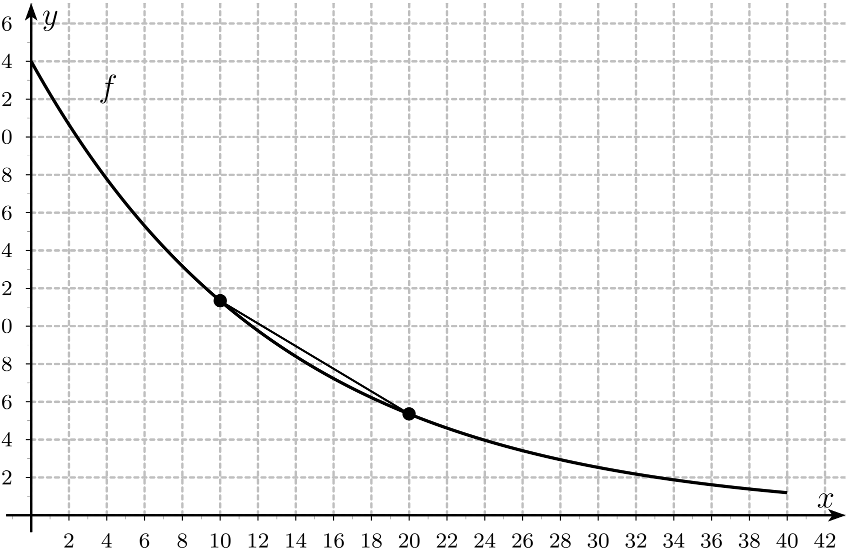
d1) Berechnen Sie $G(5)$.

d2) Zeigen Sie, dass für jedes $a > 0$ gilt:

$$G(a) < \frac{480}{a}$$

(6 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe a)  Die durchschnittliche Steigung ergibt sich zu $\overline{m} = \frac{f(40)-f(0)}{40-0} = \frac{0-24}{40} = -\frac{3}{5}$.	1		
$m \approx \frac{10-20}{25-0} = -\frac{2}{5}$	2		
Die Gleichung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades hat die allgemeine Form $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Es gilt $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Die gegebenen Punkte A, B und C sowie die gegebene Steigung im Startpunkt führen zu den folgenden Bedingungen: $\left\vert \begin{array}{c} f(0) = 24 \\ f'(0) = -1 \\ f(40) = 0 \\ f(20) = 12 \end{array} \right\vert \Leftrightarrow \left\vert \begin{array}{ccc} d & = & 24 \\ c & = & -1 \\ 64000a + 1600b - 40 + 24 & = & 0 \\ 8000a + 400b - 20 + 24 & = & 12 \end{array} \right\vert$ Hieraus ergibt sich $a = -0{,}0005$, $b = 0{,}03$, $c = -1$ und $d = 24$.		4	
Folglich ist $f(x) = -0{,}0005 \cdot x^3 + 0{,}03 \cdot x^2 - x + 24$ eine Funktionsgleichung von f.		1	
Teilaufgabe b) Aus den Bedingungen $f(x_1) = -0{,}0005 \cdot x_1^3 + 0{,}03 \cdot x_1^2 - x_1 + 24 = 15$ und $f(x_2) = -0{,}0005 \cdot x_2^3 + 0{,}03 \cdot x_2^2 - x_2 + 24 = 10$ folgt $x_1 \approx 12{,}94$ und $x_2 \approx 24{,}86$. Wegen $x_2 - x_1 \approx 11{,}92$ beträgt der Abstand etwa 11,92 Meter.		3	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Die Gleichung $f'(x) = -0{,}0015\,x^2 + 0{,}06\,x - 1 = 0$ hat keine Lösung. Da außerdem $f'(0) = -1$ gilt, folgt $f'(x) < 0$ für alle $x \in [0; 40]$.		3	
Im Sachzusammenhang bedeutet dies, dass die Rutsche an jeder Stelle ein Gefälle aufweist.	1		
Es gilt $f''(x) = -0{,}003 \cdot x + 0{,}06$ und $f'''(x) = -0{,}003$. Wegen $f''(20) = 0$ und $f'''(20) = -0{,}003 \neq 0$ ist $C(20 \mid 12)$ ein Wendepunkt des Graphen von f.	4		
Teilaufgabe c) 	3		
Es ist $g_{1,5}(40) \approx 1{,}195$. Ein Badegast fällt am Ende der Rutsche aus einer Höhe von etwa 1,20 Meter ins Wasser.	1		
Bedingung i) liefert $g_a(40) \leq 1{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad 24 \cdot e^{-0{,}05 \cdot a \cdot 40} \leq 1{,}5$ $\Leftrightarrow \quad e^{-2 \cdot a} \leq \frac{1{,}5}{24} \quad \Leftrightarrow \quad a \geq -\frac{\ln\left(\frac{1}{16}\right)}{2} \approx 1{,}3863.$		3	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Bedingung ii) liefert $g_a'(0) \geq \tan(-55°) \quad \Leftrightarrow \quad -1{,}2 \cdot a \cdot e^{-0{,}05a\cdot 0} \geq \tan(-55°)$ $\Leftrightarrow \quad -1{,}2 \cdot a \geq \tan(-55°) \quad \Leftrightarrow \quad 1{,}2 \cdot a \leq -\tan(-55°)$ $\Leftrightarrow \quad a \leq \frac{-\tan(-55°)}{1{,}2} \approx 1{,}190.$			3
Es gibt also keinen Parameter a, für den beide Sicherheitsbestimmungen gleichzeitig erfüllt sind.			1
Einzeichnen der zum zweiten Summanden passenden Strecke in die Skizze			2
Der Term stellt einen Näherungswert für die Länge des Graphen von $g_{1,5}$ über dem Intervall $[0; 40]$ dar und damit für die Länge der Rutschbahn, die zu der Funktion $g_{1,5}$ gehört.			2
Teilaufgabe d) Es ist $G(5) = \int\limits_0^{40} g_5(x)\,dx = \int\limits_0^{40} 24 \cdot e^{-0{,}05\cdot 5\cdot x}\,dx \approx 96{,}00.$		2	
$G(a) = \int\limits_0^{40} g_a(x)\,dx = \int\limits_0^{40} 24 \cdot e^{-0{,}05\cdot a\cdot x}\,dx$ $= \left[-\frac{480}{a}\,e^{-0{,}05\cdot a\cdot x}\right]_0^{40} = -\frac{480}{a}\,e^{-2\cdot a} + \frac{480}{a}$		2	
Es ist $G(a) = -\frac{480}{a}\,e^{-2\cdot a} + \frac{480}{a} = \frac{480}{a} \cdot (1 - e^{-2\cdot a}) < \frac{480}{a}$, da $(1 - e^{-2\cdot a}) < 1$ und wegen $a > 0$ auch $\frac{480}{a} > 0$ gilt.			2
Punktsummen	12	18	10

Aufgabe 1: Analysis-CAS

Gegeben ist die Schar der Funktionen f_a mit $f_a(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot x},\ a > 0$.
Die Graphen von f_a werden mit G_a bezeichnet.

a) a1) Skizzieren Sie $G_{0,2}$ für $0 \leq x \leq 40$.

a2) Berechnen Sie denjenigen Wert von a, für den der Punkt $(1 \,|\, \frac{1}{2})$ auf G_a liegt.

a3) Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art der Extrempunkte von G_a in Abhängigkeit von a.
[zur Kontrolle: Die Extremstellen von f_a sind 0 und $\frac{2}{a}$.]

a4) Zeigen Sie, dass die Extrempunkte von G_a für alle Werte von a auf dem Graphen der Funktion mit der Gleichung $y = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^2}$ liegen.

(12 P)

b) Für jeden Wert von b mit $b > 0$ sind die Punkte $A(0 \,|\, 0)$ und $B(b \,|\, 0)$ sowie der Punkt $C(b|f_{0,2}(b))$ gegeben.

b1) Skizzieren Sie ein mögliches Dreieck ABC in Ihre Skizze aus Teilaufgabe a).

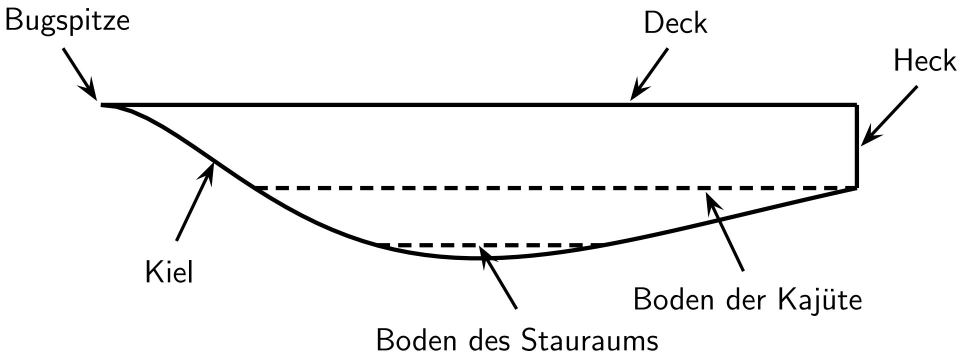
b2) Bestimmen Sie denjenigen Wert von b, für den der Flächeninhalt des Dreiecks ABC maximal ist, und geben Sie den zugehörigen Flächeninhalt an.

Der Graph $G_{0,2}$, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = p$ mit $p > 0$ schließen im ersten Quadranten ein Flächenstück ein.

b3) Zeigen Sie, dass der Inhalt dieses Flächenstücks für alle Werte von p kleiner als 250 ist.

(11 P)

Die Abbildung zeigt schematisch den Längsschnitt eines Schiffs, dessen Deck horizontal liegt.



Bei Verwendung eines Koordinatensystems, dessen Ursprung an der Bugspitze liegt und dessen x-Achse entlang der Decklinie verläuft, beschreibt die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion k mit

$$k(x) = -0{,}3 \cdot x^2 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}2 \cdot x}$$

für $0 \leq x \leq 20$ modellhaft die Kiellinie. Dabei entspricht eine Längeneinheit einem Meter in der Wirklichkeit.

c) c1) Es gilt $k(x) = -0{,}3 \cdot f_{0,2}(x)$. Beschreiben Sie, wie der Graph von k aus dem Graphen von $f_{0,2}$ hervorgeht.

c2) Der Kiel hat in einem Punkt seinen größten Neigungswinkel gegen die Horizontale. Bestimmen Sie die Größe dieses Neigungswinkels.

Der horizontal liegende Boden der Kajüte liegt $2{,}20\,\mathrm{m}$ unterhalb des Decks. Der parallel dazu verlaufende Boden des Stauraums unterhalb der Kajüte hat in Längsrichtung des Schiffs eine Länge von $6\,\mathrm{m}$.

c3) Berechnen Sie die Länge des Bodens der Kajüte in Längsrichtung des Schiffs.

c4) Ermitteln Sie rechnerisch, wie weit der Boden des Stauraums unterhalb des Bodens der Kajüte liegt.

(17 P)

Aufgabe 1: Analysis-CAS

Gegeben ist die Schar der Funktionen f_a mit $f_a(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot x},\ a > 0$.
Die Graphen von f_a werden mit G_a bezeichnet.

a) a1) Skizzieren Sie $G_{0,2}$ für $0 \leq x \leq 40$.

a2) Berechnen Sie denjenigen Wert von a, für den der Punkt $(1 \,|\, \frac{1}{2})$ auf G_a liegt.

a3) Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art der Extrempunkte von G_a in Abhängigkeit von a.
[zur Kontrolle: Die Extremstellen von f_a sind 0 und $\frac{2}{a}$.]

a4) Zeigen Sie, dass die Extrempunkte von G_a für alle Werte von a auf dem Graphen der Funktion mit der Gleichung $y = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^2}$ liegen.

(12 P)

b) Für jeden Wert von b mit $b > 0$ sind die Punkte $A(0 \,|\, 0)$ und $B(b \,|\, 0)$ sowie der Punkt $C(b|f_{0,2}(b))$ gegeben.

b1) Skizzieren Sie ein mögliches Dreieck ABC in Ihre Skizze aus Teilaufgabe a).

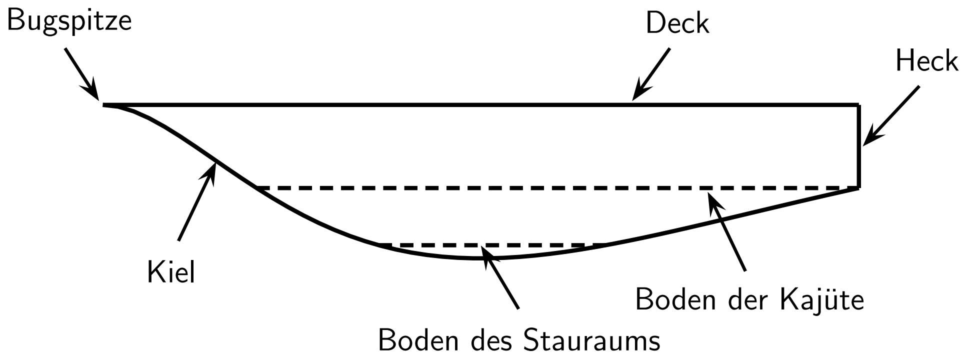
b2) Bestimmen Sie denjenigen Wert von b, für den der Flächeninhalt des Dreiecks ABC maximal ist, und geben Sie den zugehörigen Flächeninhalt an.

Der Graph $G_{0,2}$, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = p$ mit $p > 0$ schließen im ersten Quadranten ein Flächenstück ein.

b3) Zeigen Sie, dass der Inhalt dieses Flächenstücks für alle Werte von p kleiner als 250 ist.

(11 P)

Die Abbildung zeigt schematisch den Längsschnitt eines Schiffs, dessen Deck horizontal liegt.



Bei Verwendung eines Koordinatensystems, dessen Ursprung an der Bugspitze liegt und dessen x-Achse entlang der Decklinie verläuft, beschreibt die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion k mit

$$k(x) = -0{,}3 \cdot x^2 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}2 \cdot x}$$

für $0 \leq x \leq 20$ modellhaft die Kiellinie. Dabei entspricht eine Längeneinheit einem Meter in der Wirklichkeit.

c) c1) Es gilt $k(x) = -0{,}3 \cdot f_{0,2}(x)$. Beschreiben Sie, wie der Graph von k aus dem Graphen von $f_{0,2}$ hervorgeht.

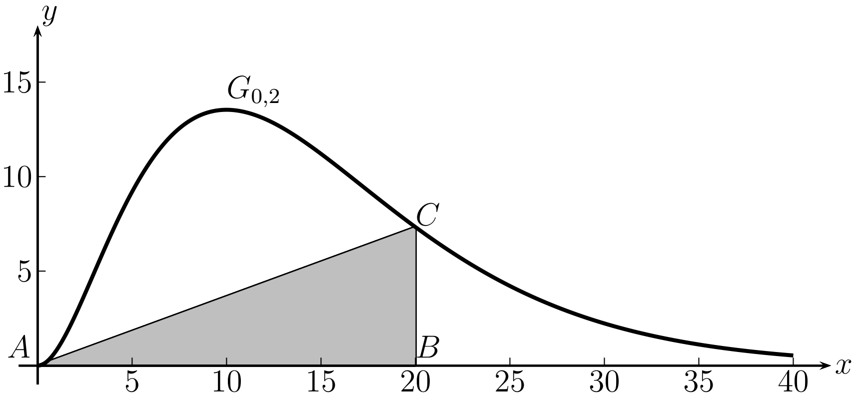
c2) Der Kiel hat in einem Punkt seinen größten Neigungswinkel gegen die Horizontale. Bestimmen Sie die Größe dieses Neigungswinkels.

Der horizontal liegende Boden der Kajüte liegt $2{,}20\,\mathrm{m}$ unterhalb des Decks. Der parallel dazu verlaufende Boden des Stauraums unterhalb der Kajüte hat in Längsrichtung des Schiffs eine Länge von $6\,\mathrm{m}$.

c3) Berechnen Sie die Länge des Bodens der Kajüte in Längsrichtung des Schiffs.

c4) Ermitteln Sie rechnerisch, wie weit der Boden des Stauraums unterhalb des Bodens der Kajüte liegt.

(17 P)

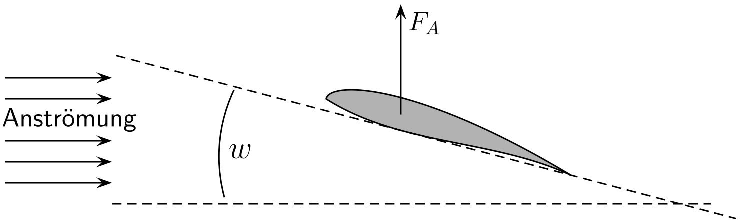
Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a)  	2		
Es gilt $f_a(1)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow a=\ln(2)$.	2		
Notwendig für eine Extremstelle x von f_a ist $f_a'(x)=0$. $f_a'(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{2}{a}$ Weil zusätzlich $f_a''(0)=2>0$ und $f_a''(\frac{2}{a})=-2\mathrm{e}^{-2}<0$ gilt, ist wegen $f_a(0)=0$ und $f_a(\frac{2}{a})=4\mathrm{e}^{-2}a^{-2}$ der Punkt $T(0\mid 0)$ Tiefpunkt von G_a und der Punkt $H_a(\frac{2}{a}\mid\frac{4}{\mathrm{e}^2a^2})$ Hochpunkt von G_a.	2 3		
Mit $\frac{0^2}{\mathrm{e}^2}=0=f_a(0)$ und $\frac{(\frac{2}{a})^2}{\mathrm{e}^2}=\frac{4}{\mathrm{e}^2a^2}=f_a(\frac{2}{a})$ liegen der den Graphen G_a gemeinsame Tiefpunkt $T(0\mid 0)$ und alle Hochpunkte $H_a(\frac{2}{a}\mid\frac{4}{\mathrm{e}^2a^2})$ auf dem durch $y=\frac{x^2}{\mathrm{e}^2}$ gegebenen Graphen.		3	
Teilaufgabe b) *Skizze eines Dreiecks ABC (siehe oben)*	1		
Der Flächeninhalt A_Δ des Dreiecks ABC lässt sich in Abhängigkeit von b durch eine Funktion A_Δ mit $A_\Delta(b)=\frac{1}{2}b\cdot f_{0,2}(b)$ beschreiben. Notwendig für eine Extremstelle b von A_Δ ist $A_\Delta'(b)=0$. $A_\Delta'(b)=0 \Leftrightarrow b=15$ Weil zusätzlich $A_\Delta''(15)=\frac{-45}{2\mathrm{e}^3}\approx -1{,}12<0$ gilt, liegt an der Stelle 15 ein lokales Maximum von A_Δ. Da A_Δ keine weitere Extremstelle hat, liegt an der Stelle 15 auch das globale Maximum von A_Δ vor. $A_\Delta(15)=\frac{3375}{2\mathrm{e}^3}\approx 84{,}02$ Der größte Wert, den der Flächeninhalt des Dreiecks ABC annimmt, beträgt ungefähr 84.		1 2 1 1	1

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Wegen $f_{0,2}(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$ und $p > 0$ ergibt sich für den Flächeninhalt A_p der von der x-Achse, $G_{0,2}$ und der durch $x = p$ gegebenen Geraden eingeschlossenen Fläche $A_p = \int\limits_0^p f_{0,2}(x)\,\mathrm{d}x = 250 - 5(p^2 + 10p + 50) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}2 \cdot p}$. Für alle $p > 0$ gilt $p^2 + 10p + 50 > 0$ und $\mathrm{e}^{-0{,}2 \cdot p} > 0$. Daraus folgt $A_p < 250$ für alle $p > 0$.			4
Teilaufgabe c) Der Graph von k geht aus dem Graphen von $f_{0,2}$ durch eine Stauchung mit dem Faktor $0{,}3$ in y-Richtung und eine Spiegelung an der x-Achse hervor.	2		
Die Stelle, an der der größte Neigungswinkel gegen die Horizontale vorliegt, entspricht einer Wendestelle x der Funktion k oder einer Randstelle des Intervalls $[0\,;\,20]$. Notwendig für eine Wendestelle x von k ist $k''(x) = 0$. $k''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -5\sqrt{2} + 10 \approx 2{,}93 \vee x = 5\sqrt{2} + 10 \approx 17{,}07$ Wegen $k'(0) = 0$, $k'(-5\sqrt{2} + 10) = (3 - 3\sqrt{2}) \cdot \mathrm{e}^{\sqrt{2}-2} \approx -0{,}69$, $k'(5\sqrt{2} + 10) = (3 + 3\sqrt{2}) \cdot \mathrm{e}^{-\sqrt{2}-2} \approx 0{,}24$ und $k'(20) = 12 \cdot \mathrm{e}^{-4} \approx 0{,}22$ ist die Neigung an der Stelle $-5\sqrt{2} + 10$ am größten. Der größte Neigungswinkel α beträgt also $\alpha = \left\lvert \arctan(k'(-5\sqrt{2} + 10)) \right\rvert \approx 34{,}7°$.		1 2 2 1	
Der Boden der Kajüte stößt $2{,}20\,\mathrm{m}$ unterhalb des Decks auf den Kiel. $k(x) = -2{,}2 \Leftrightarrow x \approx -2{,}1780 \vee x \approx 4{,}0671 \vee x \approx 19{,}9903$ Im Rahmen der vorgenommenen Modellierung sind nur die Stellen $4{,}0671$ und $19{,}9903$ relevant. $19{,}9903 - 4{,}0671 = 15{,}9232$ Der Boden ist etwa $15{,}92\,\mathrm{m}$ lang.		2 2	
Die Stellen, an denen der Boden des Stauraums auf die Kiellinie stößt, sind $6\,\mathrm{m}$ voneinander entfernt. Für $0 \leq x \leq 20$ gilt $k(x) = k(x + 6) \Leftrightarrow x \approx 7{,}2982$. $k(7{,}2982) \approx -3{,}7123$ $-2{,}2 - (-3{,}7123) = 1{,}5123$ Der Boden des Stauraums liegt also etwa $1{,}51\,\mathrm{m}$ unterhalb des Bodens der Kajüte.			3 2
Punktsummen	12	18	10

Aufgabe 2: Analysis-CAS

In einem Forschungsinstitut werden Flugzeugtragflächen untersucht.

a) Im Windkanal wird bei konstanter Anströmung die Auftriebskraft F_A in Abhängigkeit vom Anstellwinkel w untersucht.



Es werden die folgenden Messergebnisse aufgenommen:

Anstellwinkel w in Grad	0	5	10	15	20
Auftriebskraft F_A in Kilonewton (kN)	5	10	13	15	12

Die Abhängigkeit der Auftriebskraft F_A vom Anstellwinkel w soll mit Hilfe einer ganzrationalen Funktion f vierten Grades modelliert werden.

a1) Bestimmen Sie einen Funktionsterm der Funktion f.

Verwenden Sie für die folgenden Rechnungen die Funktion f mit

$$f(w) = -\frac{1}{3000}w^4 + \frac{17}{1500}w^3 - \frac{91}{600}w^2 + \frac{91}{60}w + 5 \quad \text{und} \quad 0 \leq w \leq 20.$$

a2) Bestimmen Sie die maximale Auftriebskraft im Rahmen der Modellierung.

(9 P)

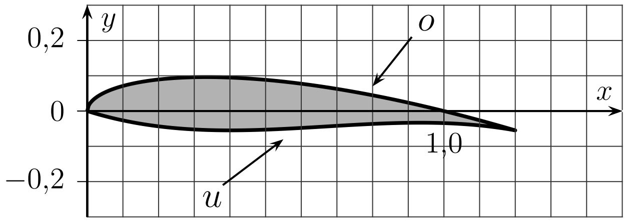
Der abgebildete Querschnitt einer Tragfläche (das sogenannte Profil) lässt sich mit Hilfe zweier Funktionen modellieren. Die Funktion o mit

$$o(x) = -0{,}25 \cdot \sqrt{x} \cdot (x-1) \quad \text{und} \quad 0 \leq x \leq 1{,}2$$

beschreibt die obere Begrenzungslinie des Profils.
Die Funktion u mit

$$u(x) = -\frac{\sqrt{30}}{480} \cdot (25x^3 - 50x^2 + 28x) \quad \text{und} \quad 0 \leq x \leq 1{,}2$$

beschreibt die untere Begrenzungslinie des Profils.



Eine Längeneinheit entspricht dabei einem Meter in der Realität.

b) b1) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Graphen von o und u.

b2) Weisen Sie nach, dass der Graph von o an jeder Stelle x mit $0 < x < 1{,}2$ rechtsgekrümmt ist.

b3) Berechnen Sie den Winkel, unter dem sich die Graphen von o und u an der Stelle $1{,}2$ schneiden.

(9 P)

c) An jeder Stelle x mit $0 \leq x \leq 1{,}2$ wird die Dicke des Profils durch die Differenz der Funktionswerte $o(x)$ und $u(x)$ beschrieben.

c1) Bestimmen Sie die maximale Dicke des Profils.

c2) Berechnen Sie die durchschnittliche Dicke des Profils.

(9 P)

d) Für $0 \leq x \leq 1{,}2$ und $k \geq 0{,}4$ wird die Schar der Funktionen u_k mit

$$u_k(x) = -\frac{\sqrt{30}}{600k^2}\Big(5\,x^3 - (10k+6)\cdot x^2 + (5k^2+12k)\cdot x\Big)$$

verwendet, um die untere Begrenzungslinie des Profils zu variieren.

d1) Zeigen Sie, dass die Funktion u zur Schar der Funktionen u_k gehört.

d2) Bestimmen Sie diejenigen Werte von k, für die der Graph von u_k einen Wendepunkt besitzt.

d3) Sei k nun eine reelle Zahl mit $0{,}4 \leq k < 1{,}2$.
Die Graphen von u_k und o schneiden sich an den Stellen 0 und $1{,}2$.
Die sogenannte Profiltangente p_k ist die Gerade, die durch den Punkt $(1{,}2 \,|\, u_k(1{,}2))$ verläuft und den Graphen von u_k an einer Stelle x mit $0 \leq x < 1{,}2$ berührt.
Die Gerade g_k hat mit dem Graphen von u_k genau die Punkte $(k \,|\, u_k(k))$ und $(1{,}2 \,|\, u_k(1{,}2))$ gemeinsam.

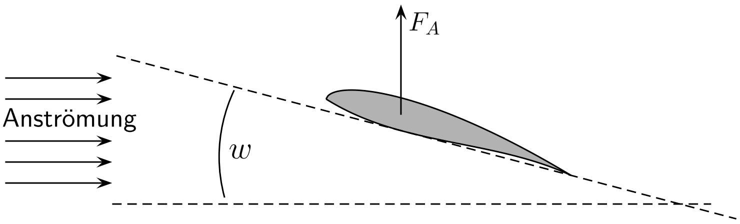
Zeigen Sie, dass die Gerade g_k die Profiltangente p_k ist.

(13 P)

Aufgabe 2: Analysis-CAS

In einem Forschungsinstitut werden Flugzeugtragflächen untersucht.

a) Im Windkanal wird bei konstanter Anströmung die Auftriebskraft F_A in Abhängigkeit vom Anstellwinkel w untersucht.



Es werden die folgenden Messergebnisse aufgenommen:

Anstellwinkel w in Grad	0	5	10	15	20
Auftriebskraft F_A in Kilonewton (kN)	5	10	13	15	12

Die Abhängigkeit der Auftriebskraft F_A vom Anstellwinkel w soll mit Hilfe einer ganzrationalen Funktion f vierten Grades modelliert werden.

a1) Bestimmen Sie einen Funktionsterm der Funktion f.

Verwenden Sie für die folgenden Rechnungen die Funktion f mit

$$f(w) = -\frac{1}{3000}w^4 + \frac{17}{1500}w^3 - \frac{91}{600}w^2 + \frac{91}{60}w + 5 \quad \text{und} \quad 0 \le w \le 20.$$

a2) Bestimmen Sie die maximale Auftriebskraft im Rahmen der Modellierung.

(9 P)

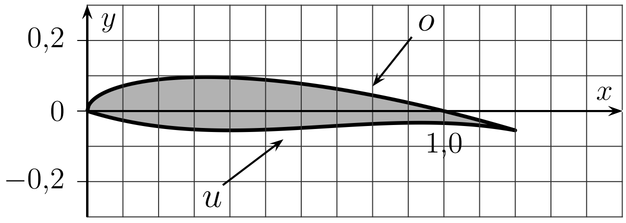
Der abgebildete Querschnitt einer Tragfläche (das sogenannte Profil) lässt sich mit Hilfe zweier Funktionen modellieren. Die Funktion o mit

$$o(x) = -0{,}25 \cdot \sqrt{x} \cdot (x-1) \quad \text{und} \quad 0 \le x \le 1{,}2$$

beschreibt die obere Begrenzungslinie des Profils.
Die Funktion u mit

$$u(x) = -\frac{\sqrt{30}}{480} \cdot (25x^3 - 50x^2 + 28x) \quad \text{und} \quad 0 \le x \le 1{,}2$$

beschreibt die untere Begrenzungslinie des Profils.



Eine Längeneinheit entspricht dabei einem Meter in der Realität.

b) b1) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Graphen von o und u.

b2) Weisen Sie nach, dass der Graph von o an jeder Stelle x mit $0 < x < 1{,}2$ rechtsgekrümmt ist.

b3) Berechnen Sie den Winkel, unter dem sich die Graphen von o und u an der Stelle $1{,}2$ schneiden.

(9 P)

c) An jeder Stelle x mit $0 \leq x \leq 1{,}2$ wird die Dicke des Profils durch die Differenz der Funktionswerte $o(x)$ und $u(x)$ beschrieben.

c1) Bestimmen Sie die maximale Dicke des Profils.

c2) Berechnen Sie die durchschnittliche Dicke des Profils.

(9 P)

d) Für $0 \leq x \leq 1{,}2$ und $k \geq 0{,}4$ wird die Schar der Funktionen u_k mit

$$u_k(x) = -\frac{\sqrt{30}}{600k^2}\Big(5\,x^3 - (10k+6)\cdot x^2 + (5k^2+12k)\cdot x\Big)$$

verwendet, um die untere Begrenzungslinie des Profils zu variieren.

d1) Zeigen Sie, dass die Funktion u zur Schar der Funktionen u_k gehört.

d2) Bestimmen Sie diejenigen Werte von k, für die der Graph von u_k einen Wendepunkt besitzt.

d3) Sei k nun eine reelle Zahl mit $0{,}4 \leq k < 1{,}2$.
Die Graphen von u_k und o schneiden sich an den Stellen 0 und $1{,}2$.
Die sogenannte Profiltangente p_k ist die Gerade, die durch den Punkt $(1{,}2 \,|\, u_k(1{,}2))$ verläuft und den Graphen von u_k an einer Stelle x mit $0 \leq x < 1{,}2$ berührt.
Die Gerade g_k hat mit dem Graphen von u_k genau die Punkte $(k \,|\, u_k(k))$ und $(1{,}2 \,|\, u_k(1{,}2))$ gemeinsam.

Zeigen Sie, dass die Gerade g_k die Profiltangente p_k ist.

(13 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) Mit $f(w) = a \cdot w^4 + b \cdot w^3 + c \cdot w^2 + d \cdot w + 5$, $f(5) = 10, f(10) = 13, f(15) = 15$ und $f(20) = 12$ ist $a = -\frac{1}{3000}$, $b = \frac{17}{1500}$, $c = -\frac{91}{600}$ und $d = \frac{91}{60}$ und somit $f(w) = -\frac{1}{3000}w^4 + \frac{17}{1500}w^3 - \frac{91}{600}w^2 + \frac{91}{60}w + 5.$	2 2		
Notwendig für ein lokales Extremum von f an der Stelle w ist $f'(w) = 0$. $f'(w) = 0 \Leftrightarrow w \approx 15{,}5862$ Weil zusätzlich $f(15{,}5862) \approx 15{,}0351$, $f(0) = 5$ und $f(20) = 12$ gilt, liegt ungefähr an der Stelle $15{,}5862$ das globale Maximum von f im Intervall $[0\,;\,20]$. Die maximale Auftriebskraft beträgt dem Modell zufolge ca. $15{,}04\,\mathrm{kN}$.	2 2 1		
Teilaufgabe b) Die Gleichung $o(x) = u(x)$ hat innerhalb des Intervalls $[0\,;\,1{,}2]$ die Lösungen 0 und $1{,}2$. Es ist $o(0) = 0$ und $o(1{,}2) = -\frac{\sqrt{30}}{100} \approx -0{,}055$. Damit sind $S_1(0\mid 0)$ und $S_2(1{,}2\mid -\frac{\sqrt{30}}{100})$ die Schnittpunkte der Graphen von o und u.	3		
Es ist $o''(x) = -\frac{3}{16} \cdot \frac{x+\frac{1}{3}}{x^{\frac{3}{2}}}$. Für alle $0 < x < 1{,}2$ ist $o''(x) < 0$, da $-\frac{3}{16} < 0$ und $\frac{x+\frac{1}{3}}{x^{\frac{3}{2}}} > 0$ gilt. Daher ist der Graph der Funktion o an allen Stellen x mit $0 < x < 1{,}2$ rechtsgekrümmt.		3	
$u'(1{,}2) = \tan(\alpha_1)$, $o'(1{,}2) = \tan(\alpha_2)$ $\alpha_2 - \alpha_1 = \arctan(u'(1{,}2)) - \arctan(o'(1{,}2)) \approx 6{,}18°$ Die Graphen von o und u schneiden sich an der Stelle $1{,}2$ unter einem Winkel von ca. $6{,}2°$.		3	
Teilaufgabe c) $d(x) = o(x) - u(x)$ mit $0 \leq x \leq 1{,}2$ beschreibt die Dicke des Profils an der Stelle x. Notwendig für ein lokales Maximum von d an der Stelle x ist $d'(x) = 0$. $d'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 0{,}3626$ Weil zusätzlich $d(0{,}3626) \approx 0{,}1504$ und $d(0) = d(1{,}2) = 0$ gilt, liegt das globale Maximum der Funktion d ungefähr an der Stelle $0{,}3626$. Die maximale Dicke des Profils beträgt ca. $15{,}0\,\mathrm{cm}$.		2 3 1	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
$\frac{1}{1{,}2}\int\limits_0^{1{,}2} d(x)\,\mathrm{d}x \approx 0{,}0922$ Die durchschnittliche Dicke des Profils beträgt ca. $9{,}2\,\mathrm{cm}$.		3	
Teilaufgabe d) Falls u Element der Schar der Funktionen u_k ist, muss es einen Wert k geben, so dass $u_k(x) = u(x)$ für alle x mit $0 \leq x \leq 1{,}2$ ist. Dann muss beispielsweise $u_k(1) = u(1)$ sein. Aus $k \geq 0{,}4$ und $u_k(1) = u(1)$ folgt $k = 0{,}4$. Es ist $u_{0,4}(x) = \dfrac{-\sqrt{30} \cdot x \cdot (25x^2 - 50x + 28)}{480} = u(x)$ für alle x mit $0 \leq x \leq 1{,}2$. Die Funktion u ist also identisch mit der Funktion $u_{0,4}$ und somit ein Element der gegebenen Schar.			2 1 1
Zu untersuchen ist, für welche k die Funktion u_k mindestens eine Wendestelle x mit $0 < x < 1{,}2$ hat. Notwendig für eine Wendestelle x von u_k ist $u_k''(x) = 0$. $u_k''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\cdot(5k+3)}{15}$ Da für alle $k \geq 0{,}4$ zusätzlich $u_k'''(\frac{2\cdot(5k+3)}{15}) = -\frac{\sqrt{30}}{20k^2} \neq 0$ gilt, ist $x = \frac{2\cdot(5k+3)}{15}$ eine Wendestelle von u_k. Mit $k \geq 0{,}4$ und $0 < \frac{2\cdot(5k+3)}{15} < 1{,}2 \Leftrightarrow -0{,}6 < k < 1{,}2$ ist $0{,}4 \leq k < 1{,}2$. Also gibt es nur für k mit $0{,}4 \leq k < 1{,}2$ einen Wendepunkt auf dem Graphen von u_k für $0 < x < 1{,}2$. *Sollte der Prüfling untersuchen, für welche* k *Wendestellen im Intervall* $[0; 1{,}2]$ *existieren, sollen ebenfalls die entsprechenden Punkte vergeben werden. Die Lösung lautet dann* $0{,}4 \leq k \leq 1{,}2$.		2 1	2
Für die Steigung m_k der Geraden g_k gilt $m_k = \dfrac{u_k(1{,}2) - u_k(k)}{1{,}2 - k} = 0$. Ferner gilt $u_k'(k) = 0$. Für jedes k mit $0{,}4 \leq k < 1{,}2$ hat die Gerade g_k dieselbe Steigung wie die Profiltangente p_k. Da g_k und p_k durch den Punkt $(1{,}2 \vert u_k(1{,}2))$ verlaufen, sind sie identisch.			4
Punktsummen	12	18	10

Aufgabe 3: Analytische Geometrie

In einer Stadt befindet sich ein quaderförmiges, $65\,\mathrm{m}$ hohes Haus. In der Modellierung entspricht die x_1x_2-Ebene dem Erdboden. Die Grundfläche des Hauses ist das Rechteck $RSTU$. Die jeweils entsprechenden Eckpunkte der Dachfläche heißen R', S', T' und U'.

Die Eckpunkte R, S und T haben die Koordinaten
$R(80\,|\,200\,|\,0)$,
$S(120\,|\,180\,|\,0)$ und
$T(135\,|\,210\,|\,0)$.

Eine Einheit entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

Die Flugbahn einer Drohne wird beschrieben durch eine Gerade g mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Dabei beschreibt $\vec{x}$ die Position der Drohne zur Zeit t, wobei t in Sekunden gemessen wird. Zur Zeit $t = 0$ durchfliegt die Drohne also den Punkt $P(0\,|\,0\,|\,5)$.

a) a1) Bestimmen Sie die Koordinaten des vierten Eckpunktes U der Grundfläche.

a2) Ermitteln Sie die Entfernung der Drohne zum Punkt P nach 15 Sekunden.

a3) Berechnen Sie den Steigungswinkel α der Flugbahn.

(7 P)

b) b1) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Seitenfläche $RSS'R'$ des Hauses.

b2) Untersuchen Sie, ob die Drohne diese Fläche treffen wird.

b3) Berechnen Sie den Abstand, den die Flugbahn der Drohne zur Geraden h durch die Punkte R' und S' hat.

(15 P)

c) Auf einem anderen Flug fliegt die Drohne entlang der Geraden k mit

$$k : \vec{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ -220 \\ 80 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei gibt s die Zeit in Sekunden nach dem Durchfliegen des Punktes $Q(40|-220|80)$ an.

Die Drohne kann Signale von einer Sendeanlage S_1 mit den Koordinaten $S_1(40 \mid -260 \mid 10)$ und der Reichweite $250\,\mathrm{m}$ oder von einer Sendeanlage S_2 mit den Koordinaten $S_2(40 \mid 300 \mid 10)$ und der Reichweite $390\,\mathrm{m}$ empfangen.

c1) Bestimmen Sie den Punkt D, an dem die Drohne den Sendebereich von S_1 verlässt, und prüfen Sie, ob sie dort bereits im Sendebereich von S_2 ist.

c2) Die Drohne fliegt auf einen gesperrten Teil des Luftraums zu. Die Grenze zu diesem Bereich wird durch die Ebene F mit

$$F : 3\,x_1 - 4\,x_2 = -400$$

modelliert.

Berechnen Sie, zu welcher Zeit die Drohne nur noch einen Abstand von $200\,\mathrm{m}$ zu der Luftraumgrenze hat.

(12 P)

d) Gegeben ist die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \times \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right] = \vec{0}.$$

d1) Untersuchen Sie, ob der Vektor $\begin{pmatrix} 45 \\ 90 \\ 35 \end{pmatrix}$ eine Lösung dieser Gleichung ist.

d2) Interpretieren Sie die Lösungsmenge geometrisch.

(6 P)

Aufgabe 3: Analytische Geometrie

In einer Stadt befindet sich ein quaderförmiges, $65\,\mathrm{m}$ hohes Haus. In der Modellierung entspricht die x_1x_2-Ebene dem Erdboden. Die Grundfläche des Hauses ist das Rechteck $RSTU$. Die jeweils entsprechenden Eckpunkte der Dachfläche heißen R', S', T' und U'.

Die Eckpunkte R, S und T haben die Koordinaten
$R(80\,|\,200\,|\,0)$,
$S(120\,|\,180\,|\,0)$ und
$T(135\,|\,210\,|\,0)$.

Eine Einheit entspricht einem Meter in der Wirklichkeit.

Die Flugbahn einer Drohne wird beschrieben durch eine Gerade g mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}$.

Dabei beschreibt $\vec{x}$ die Position der Drohne zur Zeit t, wobei t in Sekunden gemessen wird. Zur Zeit $t = 0$ durchfliegt die Drohne also den Punkt $P(0\,|\,0\,|\,5)$.

a) a1) Bestimmen Sie die Koordinaten des vierten Eckpunktes U der Grundfläche.

a2) Ermitteln Sie die Entfernung der Drohne zum Punkt P nach 15 Sekunden.

a3) Berechnen Sie den Steigungswinkel α der Flugbahn.

(7 P)

b) b1) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Seitenfläche $RSS'R'$ des Hauses.

b2) Untersuchen Sie, ob die Drohne diese Fläche treffen wird.

b3) Berechnen Sie den Abstand, den die Flugbahn der Drohne zur Geraden h durch die Punkte R' und S' hat.

(15 P)

c) Auf einem anderen Flug fliegt die Drohne entlang der Geraden k mit

$$k : \vec{x} = \begin{pmatrix} 40 \\ -220 \\ 80 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei gibt s die Zeit in Sekunden nach dem Durchfliegen des Punktes $Q(40|-220|80)$ an.

Die Drohne kann Signale von einer Sendeanlage S_1 mit den Koordinaten $S_1(40 \mid -260 \mid 10)$ und der Reichweite $250\,\mathrm{m}$ oder von einer Sendeanlage S_2 mit den Koordinaten $S_2(40 \mid 300 \mid 10)$ und der Reichweite $390\,\mathrm{m}$ empfangen.

c1) Bestimmen Sie den Punkt D, an dem die Drohne den Sendebereich von S_1 verlässt, und prüfen Sie, ob sie dort bereits im Sendebereich von S_2 ist.

c2) Die Drohne fliegt auf einen gesperrten Teil des Luftraums zu. Die Grenze zu diesem Bereich wird durch die Ebene F mit

$$F : 3\,x_1 - 4\,x_2 = -400$$

modelliert.

Berechnen Sie, zu welcher Zeit die Drohne nur noch einen Abstand von $200\,\mathrm{m}$ zu der Luftraumgrenze hat.

(12 P)

d) Gegeben ist die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \times \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right] = \vec{0}.$$

d1) Untersuchen Sie, ob der Vektor $\begin{pmatrix} 45 \\ 90 \\ 35 \end{pmatrix}$ eine Lösung dieser Gleichung ist.

d2) Interpretieren Sie die Lösungsmenge geometrisch.

(6 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) Da die Grundfläche rechteckig ist, gilt für den vierten Punkt $\overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{ST} = \begin{pmatrix} 80 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 95 \\ 230 \\ 0 \end{pmatrix}.$ Die Koordinaten des Eckpunktes U lauten $U(95 \mid 230 \mid 0)$.	2		
$15 \cdot \left\lvert \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rvert = 15 \cdot \sqrt{49} = 105$ Nach 15 Sekunden ist die Drohne 105 Meter vom Punkt P entfernt.	2		
Der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der x_1x_2-Ebene. Es gilt $\sin(\alpha) = \dfrac{\left\lvert \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rvert}{\left\lvert \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rvert \cdot \left\lvert \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rvert} = \dfrac{2}{7}$. Daraus folgt $\alpha \approx 16{,}6°$.	3		
Teilaufgabe b) Es gilt $A = 65 \cdot \lvert\overrightarrow{RS}\rvert = 65 \cdot \sqrt{40^2 + 20^2} \approx 2906{,}89$. Der Flächeninhalt A beträgt ca. $2907\,\mathrm{m}^2$.	2		
Das Rechteck $RSS'R'$ liegt in einer Ebene E mit dem Normalenvektor $\overrightarrow{RS} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -40 \\ 0 \end{pmatrix} = -20 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$ Also liegt das Rechteck $RSS'R'$ in einer Ebene E mit $E: x_1 + 2\,x_2 = 80 + 2 \cdot 200 = 480.$ $g \cap E:$ $3t + 2 \cdot 6t = 480$ $\Leftrightarrow \quad t = 32$ Damit ergibt sich der Schnittpunkt $P'(96 \mid 192 \mid 69)$. Da alle Punkte des Rechtecks $RSS'R'$ eine x_3-Koordinate haben, die kleiner oder gleich 65 ist, liegt P' nicht innerhalb des Rechtecks. Die Drohne wird die Fläche also nicht treffen.		3 2 2	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Eine Gleichung der Geraden h ist $h : \vec{x} = \begin{pmatrix}80\\200\\65\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$.	1		
Wegen $\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\-15\end{pmatrix}$ ist $\begin{pmatrix}2\\4\\-15\end{pmatrix}$ ein Normalenvektor einer zu g parallelen Ebene E_1, die auch h enthält.		2	
Damit folgt $d(E_1,g) = \left\lvert \left(\begin{pmatrix}80\\200\\65\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} \right) \circ \frac{1}{\sqrt{245}} \begin{pmatrix}2\\4\\-15\end{pmatrix} \right\rvert = \frac{60}{\sqrt{245}} \approx 3{,}83.$ Die Flugbahn hat einen Abstand von ca. $3{,}83\,\mathrm{m}$ zur Geraden h.		3	
Teilaufgabe c) Es ist der Punkt D auf der Flugbahn zu bestimmen, der einen Abstand von $250\,\mathrm{m}$ zum Punkt S_1 hat. $\left\lvert \begin{pmatrix}40\\-220+10s\\80\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}40\\-260\\10\end{pmatrix} \right\rvert = 250$ $\Leftrightarrow \quad \sqrt{(40-40)^2+(10s+40)^2+(80-10)^2} = 250$ $\Leftrightarrow \quad 100s^2+800s-56000=0$ $\Leftrightarrow \quad s=20 \vee s=-28$ $s=20$ ist der Zeitpunkt des Austritts aus dem Sendebereich von S_1.		3	
Also ergibt sich $D(40 \mid -20 \mid 80)$.		1	
Da $\lvert\overrightarrow{DS_2}\rvert = \left\lvert \begin{pmatrix}0\\320\\-70\end{pmatrix} \right\rvert = \sqrt{107300} \approx 327{,}57 < 390$ ist, befindet sich die Drohne bereits in dem Sendebereich von S_2.		2	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Der Abstand der Drohne zur Zeit s zu der Ebene F, die den Punkt $(0\|100\|0)$ enthält, ist gegeben durch $\left\|\left(\left(\begin{pmatrix}40\\-220\\80\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\10\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\100\\0\end{pmatrix}\right)\right)\circ\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix}\right\|.$			2
$200=\left\|\left(\left(\begin{pmatrix}40\\-220\\80\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\10\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\100\\0\end{pmatrix}\right)\right)\circ\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix}\right\|$ $\Leftrightarrow\quad 200=\left\|40\cdot\frac{3}{5}+320\cdot\frac{4}{5}-\frac{40}{5}s\right\|$ $\Leftrightarrow\quad 200=\|280-8s\|$ $\Leftrightarrow\quad 200=280-8s\vee-200=280-8s$ $\Leftrightarrow\quad s=10\vee s=60$			3
10 Sekunden nach dem Durchfliegen des Punktes Q hat die Drohne einen Abstand von $200\,\mathrm{m}$ zur Ebene.			1
Teilaufgabe d) Es gilt $\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}\times\left[\begin{pmatrix}45\\90\\35\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}45\\90\\30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\vec{0}.$ Damit ist der gegebene Vektor eine Lösung der Gleichung.	2		
Das Vektorprodukt zweier Vektoren ist genau dann gleich dem Nullvektor, wenn die beiden Vektoren linear abhängig sind. $\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}\times\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}\right]=\vec{0}$ $\Leftrightarrow$ Es gibt eine Zahl t, so dass $\vec{x}-\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}$ gilt. $\Leftrightarrow$ Es gibt eine Zahl t, so dass $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}$ gilt. Die Lösungsmenge lässt sich geometrisch als Gerade interpretieren.			4
Punktsummen	12	18	10

Aufgabe 4: Stochastik

Alle in Ihren Lösungen verwendeten Zufallsgrößen müssen explizit eingeführt werden. Machen Sie auch Angaben über die Verteilung der jeweiligen Zufallsgrößen.

a) Ein Großhändler bietet Samenkörner für Salatgurken in zwei Qualitätsstufen an. Ein Samenkorn der höheren Qualitätsstufe A keimt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 %, eines der Qualitätsstufe B mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 %. Ein Gemüseanbaubetrieb kauft Samenkörner beider Qualitätsstufen, davon 65 % der Qualitätsstufe A.

a1) Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.

a2) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich bei einem zufällig ausgewählten keimenden Samenkorn um ein Samenkorn der Qualitätsstufe B handelt.

Der Anbaubetrieb sät 200 Samenkörner der Qualitätsstufe B.

a3) Bestimmen Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
E: „Von den gesäten Samenkörnern keimen genau 140."
F: „Von den gesäten Samenkörnern keimen mehr als 130 und weniger als 150."

a4) Beschreiben Sie die Bedeutung des folgenden Terms im Sachzusammenhang:

$$1-\left(\sum_{i=0}^{120}\binom{200}{i}\cdot 0{,}7^{i}\cdot 0{,}3^{200-i}+\sum_{i=160}^{200}\binom{200}{i}\cdot 0{,}7^{i}\cdot 0{,}3^{200-i}\right)$$

(14 P)

b) Keimt ein Samenkorn, so wächst daraus eine Gurkenpflanze heran. Pro Pflanze der Qualitätsstufe B kann im Mittel die gleiche Anzahl von Gurken geerntet werden wie bei Pflanzen der Qualitätsstufe A. Es besteht das Risiko, dass ein Samenkorn zwar keimt, durch Wettereinflüsse oder Schädlinge aber keine erntereife Pflanze heranwächst. Dieses Risiko beträgt für alle gekeimten Samenkörner der Qualitätsstufe A 15 % und für alle gekeimten Samenkörner der Qualitätsstufe B 25 %.
Der Preis pro Samenkorn beträgt für die Qualitätsstufe A 17 Cent und für die Qualitätsstufe B 12 Cent. Der Anbaubetrieb verkauft alle geernteten Gurken zum gleichen Preis.
Prüfen Sie, ob es für den Anbaubetrieb finanziell sinnvoll wäre, sich auf Samenkörner der Qualitätsstufe B zu beschränken, indem Sie die Samenkosten pro erntereifer Gurkenpflanze bestimmen.

(6 P)

c) Der Großhändler behauptet, dass sich die Wahrscheinlichkeit für das Keimen eines Samenkorns der Qualitätsstufe B durch eine Weiterentwicklung auf mehr als 70 % erhöht habe. Dazu werden nach der Weiterentwicklung 100 Samenkörner der Qualitätsstufe B zufällig ausgewählt und gesät.

c1) Ermitteln Sie die Entscheidungsregel für einen Hypothesentest, der das Ziel hat, die Behauptung des Großhändlers auf einem Signifikanzniveau von 5 % zu stützen.

c2) Bestimmen Sie für den oben konzipierten Test die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art unter der Voraussetzung, dass die Keimwahrscheinlichkeit auf 80 % gestiegen ist.

(12 P)

d) Von einer dritten Qualitätsstufe C werden 50 Samenkörner gesät. Von diesen keimen 27. Aus diesem Stichprobenergebnis soll nun die Keimwahrscheinlichkeit eines Samenkorns der Qualitätsstufe C abgeschätzt werden.

d1) Prüfen Sie, ob eine Keimwahrscheinlichkeit von 60 % ($p = 0{,}6$) mit dem Stichprobenergebnis 27 auf einem Signifikanzniveau von 5 % verträglich ist. Das ist genau dann der Fall, wenn das Stichprobenergebnis im 95 %-Annahmebereich der Hypothese $H : p = 0{,}6$ liegt.

d2) Bestimmen Sie zu dem Stichprobenergebnis die obere Grenze des zugehörigen 95 %-Konfidenzintervalls für die Keimwahrscheinlichkeit auf 3 Dezimalen genau.

(8 P)

Aufgabe 4: Stochastik

Alle in Ihren Lösungen verwendeten Zufallsgrößen müssen explizit eingeführt werden. Machen Sie auch Angaben über die Verteilung der jeweiligen Zufallsgrößen.

a) Ein Großhändler bietet Samenkörner für Salatgurken in zwei Qualitätsstufen an. Ein Samenkorn der höheren Qualitätsstufe A keimt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 %, eines der Qualitätsstufe B mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 %. Ein Gemüseanbaubetrieb kauft Samenkörner beider Qualitätsstufen, davon 65 % der Qualitätsstufe A.

a1) Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.

a2) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es sich bei einem zufällig ausgewählten keimenden Samenkorn um ein Samenkorn der Qualitätsstufe B handelt.

Der Anbaubetrieb sät 200 Samenkörner der Qualitätsstufe B.

a3) Bestimmen Sie für folgende Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:
E: „Von den gesäten Samenkörnern keimen genau 140."
F: „Von den gesäten Samenkörnern keimen mehr als 130 und weniger als 150."

a4) Beschreiben Sie die Bedeutung des folgenden Terms im Sachzusammenhang:

$$1-\left(\sum_{i=0}^{120}\binom{200}{i}\cdot 0{,}7^{i}\cdot 0{,}3^{200-i}+\sum_{i=160}^{200}\binom{200}{i}\cdot 0{,}7^{i}\cdot 0{,}3^{200-i}\right)$$

(14 P)

b) Keimt ein Samenkorn, so wächst daraus eine Gurkenpflanze heran. Pro Pflanze der Qualitätsstufe B kann im Mittel die gleiche Anzahl von Gurken geerntet werden wie bei Pflanzen der Qualitätsstufe A. Es besteht das Risiko, dass ein Samenkorn zwar keimt, durch Wettereinflüsse oder Schädlinge aber keine erntereife Pflanze heranwächst. Dieses Risiko beträgt für alle gekeimten Samenkörner der Qualitätsstufe A 15 % und für alle gekeimten Samenkörner der Qualitätsstufe B 25 %.
Der Preis pro Samenkorn beträgt für die Qualitätsstufe A 17 Cent und für die Qualitätsstufe B 12 Cent. Der Anbaubetrieb verkauft alle geernteten Gurken zum gleichen Preis.
Prüfen Sie, ob es für den Anbaubetrieb finanziell sinnvoll wäre, sich auf Samenkörner der Qualitätsstufe B zu beschränken, indem Sie die Samenkosten pro erntereifer Gurkenpflanze bestimmen.

(6 P)

c) Der Großhändler behauptet, dass sich die Wahrscheinlichkeit für das Keimen eines Samenkorns der Qualitätsstufe B durch eine Weiterentwicklung auf mehr als 70 % erhöht habe. Dazu werden nach der Weiterentwicklung 100 Samenkörner der Qualitätsstufe B zufällig ausgewählt und gesät.

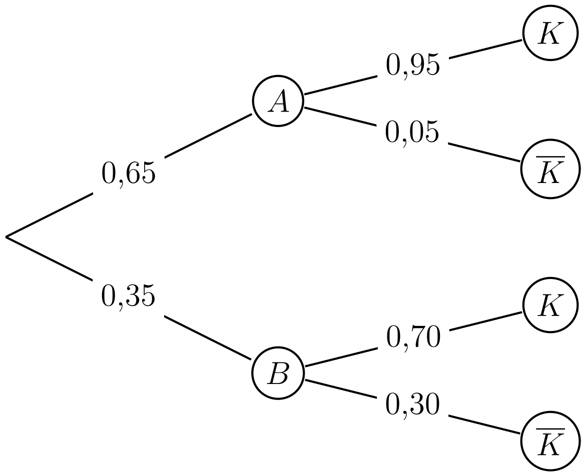
- c1) Ermitteln Sie die Entscheidungsregel für einen Hypothesentest, der das Ziel hat, die Behauptung des Großhändlers auf einem Signifikanzniveau von 5 % zu stützen.
- c2) Bestimmen Sie für den oben konzipierten Test die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art unter der Voraussetzung, dass die Keimwahrscheinlichkeit auf 80 % gestiegen ist.

(12 P)

d) Von einer dritten Qualitätsstufe C werden 50 Samenkörner gesät. Von diesen keimen 27. Aus diesem Stichprobenergebnis soll nun die Keimwahrscheinlichkeit eines Samenkorns der Qualitätsstufe C abgeschätzt werden.

- d1) Prüfen Sie, ob eine Keimwahrscheinlichkeit von 60 % ($p = 0{,}6$) mit dem Stichprobenergebnis 27 auf einem Signifikanzniveau von 5 % verträglich ist. Das ist genau dann der Fall, wenn das Stichprobenergebnis im 95 %-Annahmebereich der Hypothese $H : p = 0{,}6$ liegt.
- d2) Bestimmen Sie zu dem Stichprobenergebnis die obere Grenze des zugehörigen 95 %-Konfidenzintervalls für die Keimwahrscheinlichkeit auf 3 Dezimalen genau.

(8 P)

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe a) A: „Ein zufällig ausgewähltes Samenkorn gehört zur Qualitätsstufe A.“ B: „Ein zufällig ausgewähltes Samenkorn gehört zur Qualitätsstufe B.“ K: „Ein zufällig ausgewähltes Samenkorn keimt.“ 	4		
$P_K(B) = \frac{P(B \cap K)}{P(K)} = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}7}{0{,}65 \cdot 0{,}95 + 0{,}35 \cdot 0{,}7} = \frac{98}{345} \approx 0{,}284 = 28{,}4\,\%$		3	
Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der keimenden unter den 200 ausgesäten Samenkörnern an. X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 200$ und $p = 0{,}7$. $P(E) = P(X = 140) \approx 0{,}061 = 6{,}1\%$ $P(F) = P(130 < X < 150)$ $= P(X \leq 149) - P(X \leq 130) \approx 0{,}9305 - 0{,}0728$ $= 0{,}8577 \approx 85{,}8\,\%$	2 1 2		
Der Wert des Terms ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den gesäten Samenkörnern der Sorte B mindestens 121 und höchstens 159 keimen.			2

<table>
<tr><th rowspan="2">Erwartete Schülerleistung</th><th colspan="3">Bewertung Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>Teilaufgabe b)
Sei x die Anzahl der gesäten Samenkörner der Qualitätsstufe A. Dann keimen von diesen Samenkörnern erwartungsgemäß $x \cdot 0{,}95$. Zu erntereifen Pflanzen werden erwartungsgemäß $x \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}85$. An Samenkosten waren $x \cdot 0{,}17$ (Euro) aufzuwenden.
Daraus ergeben sich Samenkosten pro erntereifer Gurkenpflanze für die Qualitätsstufe A von $\frac{x \cdot 0{,}17}{x \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}85} = \frac{0{,}17}{0{,}95 \cdot 0{,}85} = \frac{4}{19} \approx 0{,}21$.
Entsprechend betragen die Samenkosten pro erntereifer Gurkenpflanze für die Qualitätsstufe B $\frac{y \cdot 0{,}12}{y \cdot 0{,}70 \cdot 0{,}75} = \frac{0{,}12}{0{,}70 \cdot 0{,}75} = \frac{8}{35} \approx 0{,}23$.
Damit sind die Samenkosten pro erntereifer Pflanze bei der Qualitätsstufe B mit ca. 23 Cent höher als die der Stufe A (ca. 21 Cent). Es lohnt sich für den Betrieb nicht, sich auf Samenkörner der Qualitätsstufe B zu beschränken.</td><td></td><td>2
2
2</td><td></td></tr>
<tr><td>Teilaufgabe c)
X_p sei eine mit den Parametern p und $n = 100$ binomialverteilte Zufallsgröße. X_p gebe die Anzahl der keimenden Samenkörner bei 100 ausgesäten Samenkörnern an.
Weil die Hypothese $H_1 : p > 0{,}7$ gestützt werden soll, wird $H_0 : p \leq 0{,}7$ als Nullhypothese gewählt.
Wenn relativ viele Samenkörner keimen, wird H_0 verworfen. Es wird also ein rechtsseitiger Test durchgeführt. Der Verwerfungsbereich ist $\{k; k+1; \cdots ; 100\}$ mit einer geeigneten Zahl k.
Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl k, die die folgende Ungleichung erfüllt.
$$\begin{aligned} P(X_p \geq k) &\leq 0{,}05 \\ \Leftrightarrow \quad 1 - P(X_p \leq k-1) &\leq 0{,}05 \\ \Leftrightarrow \quad P(X_p \leq k-1) &\geq 0{,}95 \end{aligned}$$
Wenn p kleiner als 0,7 ist, gilt $P(X_p \leq k-1) > P(X_{0{,}7} \leq k-1)$.
Aus $P(X_{0{,}7} \leq 76) \approx 0{,}9245$ und $P(X_{0{,}7} \leq 77) \approx 0{,}9521$ ergibt sich $k - 1 = 77 \Leftrightarrow k = 78$.
Wenn also mindestens 78 der 100 Samen keimen, kann man davon ausgehen, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Samenkorn der verbesserten Qualitätsstufe B keimt, größer als 70 % ist. Dies stützt dann die Behauptung des Großhändlers.</td><td>2
1</td><td>2
3
1</td><td></td></tr>
<tr><td>Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art beträgt, wenn $p = 0{,}8$ ist, $P(X_{0{,}8} \leq 77) \approx 26{,}1\%$.</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2">Erwartete Schülerleistung</th><th colspan="3">Bewertung Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>

Teilaufgabe d)

X_p sei nun eine mit den Parametern p und $n = 50$ binomialverteilte Zufallsgröße. X_p gebe die Anzahl der keimenden Samenkörner bei 50 ausgesäten Samenkörnern der Qualitätsstufe C an.

Die Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}6$ ist mit dem Testergebnis 27 verträglich, wenn $P(X_{0,6} \leq 26) \geq 0{,}025$ und $P(X_{0,6} \leq 27) \leq 0{,}975$ gelten. Wegen $P(X_{0,6} \leq 26) \approx 0{,}1561$ und $P(X_{0,6} \leq 27) \approx 0{,}2340$ sind diese Bedingungen erfüllt.

</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td>

Die größte Wahrscheinlichkeit p_{max} des 95 %-Konfidenzintervalls ist die Wahrscheinlichkeit, für die $P(X_{p_{max}} \leq 26) = 0{,}025$ gilt. Durch systematisches Probieren mit dem TR erhält man:

<table>
<tr><th>p</th><th>$P(X_p \leq 26)$</th></tr>
<tr><td>0,66</td><td>0,02821</td></tr>
<tr><td>0,67</td><td>0,01960</td></tr>
<tr><td>0,663</td><td>0,02536</td></tr>
<tr><td>0,664</td><td>0,02446</td></tr>
<tr><td>0,6634</td><td>0,024995</td></tr>
</table>

Damit liegt die Obergrenze des 95 %-Konfidenzintervalls etwa bei 66,3 %.

Alternativ: (Aufstellen einer Gleichung für die obere Intervallgrenze nach Näherung von X_p durch die Normalverteilung):

$$\begin{aligned} P(X_{p_{max}} \leq 26) &= 0{,}025 \\ \Phi\left(\tfrac{26{,}5-\mu}{\sigma}\right) &= 0{,}025 \\ \tfrac{26{,}5-\mu}{\sigma} &= \Phi^{-1}(0{,}025) \approx -1{,}96 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 26{,}5 &\approx \mu - 1{,}96\sigma = 50 \cdot p_{max} - 1{,}96\sqrt{50 \cdot p_{max} \cdot (1 - p_{max})} \\ p_{max} &\approx 0{,}661 \end{aligned}$$

Für dieses p ist die Laplace-Bedingung wegen $\sigma = \sqrt{50 \cdot 0{,}661 \cdot (1 - 0{,}661)} \approx 3{,}35 > 3$ erfüllt, so dass die Näherung gerechtfertigt ist.

Dabei kann die Gleichung mit Hilfe des TR gelöst werden. Die Abweichung zum obigen Ergebnis ist durch die Näherung begründet.

</td><td></td><td></td><td>4</td></tr>
<tr><td>Punktsummen</td><td>12</td><td>18</td><td>10</td></tr>
</table>