Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1:** (hilfsmittelfreier Teil)

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	5	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: a, b, c, ... $\in \mathbb{R}$ und die Variablen: x, t, ... $\in \mathbb{R}$.

a) Gegeben ist der folgende Graph einer ganzrationalen Funktion f, der punktsymmetrisch zum Ursprung verläuft:

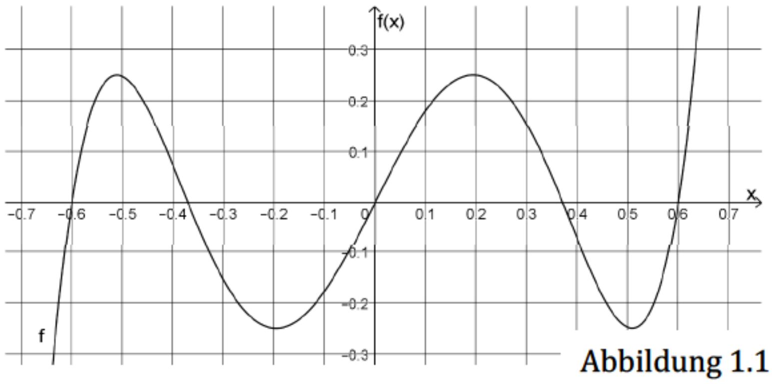

Abbildung 1.1

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
$f(-0{,}4) = f(0{,}4)$		
Für den Grad n der ganzrationalen Funktion f gilt: $n \geq 4$.		
$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$		
$f''(x) < 0$ für $x \in [-0{,}3; -0{,}1]$		
$\int_{0}^{0{,}3} f(x)dx \approx 0{,}6$ [FE]		

b) Ist F eine beliebige Stammfunktion zu einer Funktion f im Intervall I = [2; 5], so gilt:

$$\int_{2}^{\_\_} (\_\_\_\_\_\_)\, d\_\_\_ = F(5) - F(\_\_\_)$$

b1) Ergänzen Sie die fehlenden vier Angaben in der obigen Gleichung.

In Abbildung 1.2 ist der Graph der Funktion f dargestellt.

b2) Skizzieren Sie den Verlauf einer möglichen Stammfunktion F in das untere Koordinatensystem (Abbildung 1.3).

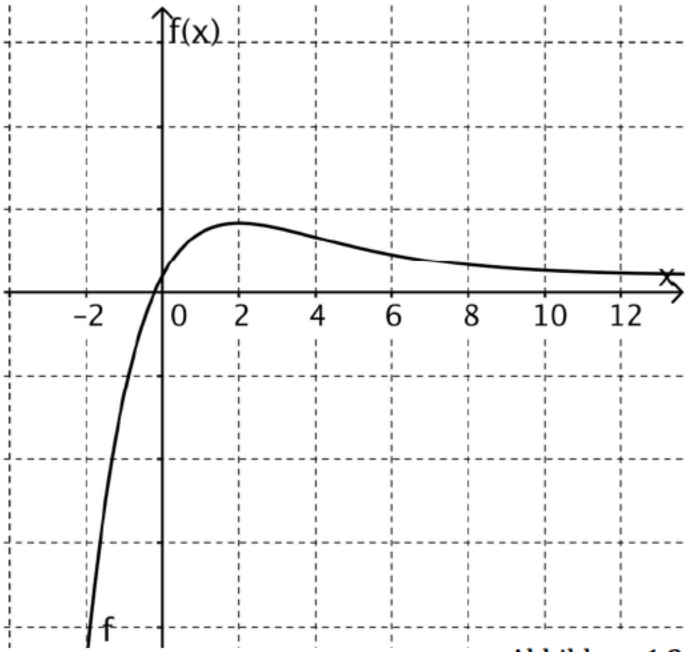

Abbildung 1.2

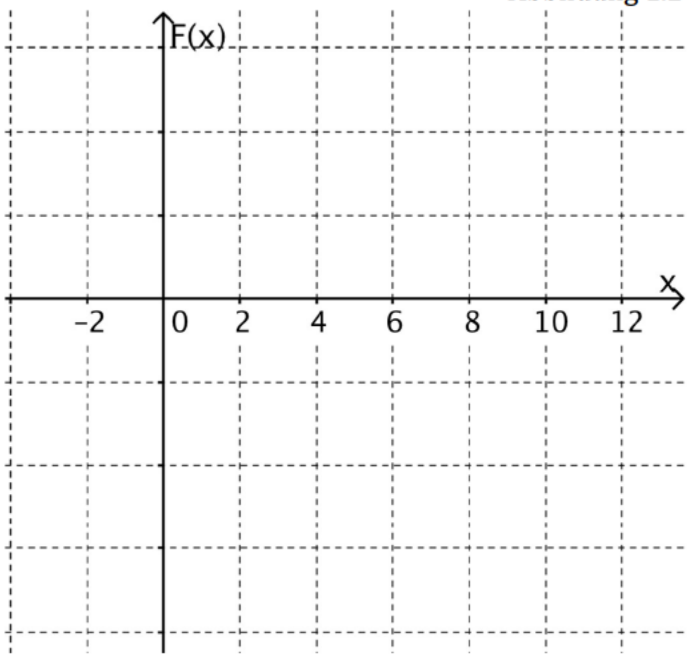

Abbildung 1.3

c) Bestimmen Sie den Wert für den Parameter k für die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f_k(x) = -4x^2 + 2k \cdot x \qquad \text{mit } k > 0$$

so, dass der Graph der Funktion f mit der Abszissenachse eine Fläche von $\frac{2}{3}$ Flächeneinheiten (FE) einschließt.

d) Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung :

$$f(x) = x^2 \cdot \cos(x).$$

d1) Geben Sie die Gleichung der ersten Ableitung der Funktion f an:

$\boxed{}$

d2) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Der Graph der Funktion g mit $g(x) = 2 \cdot \cos(\pi \cdot x)$ ist identisch mit dem Graphen der Funktion h mit $h(x) = -2 \cdot \cos\big(\pi(x-1)\big)$.	
Der Graph der Funktion k mit $k(x) = 1{,}5 \cdot \cos(2x) + 1{,}5$ hat im Intervall $I = [0; \pi]$ genau eine Nullstelle.	

e) Gegeben ist die Ebene $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$

e1) Entscheiden Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

Hinweis: Für ein richtiges Kreuz gibt es einen Punkt, für ein falsches Kreuz gibt es null Punkte.	wahr	falsch
Für jeden Wert des Parameters a liegt der Punkt $P(1\|b\|3)$ auf der Ebene E_1.		

e2) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Für keinen Wert des Parameters b liegen die Richtungsvektoren der Ebene orthogonal zueinander.	
Es gibt einen Wert des Parameters b, so dass die Gleichung E_1 eine Gerade beschreibt.	

f) Gegeben sind die Gerade g_1 mit der Geradengleichung

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und der Punkt $P(1|4|3)$.

f1) Prüfen Sie, ob der Punkt P auf der Geraden g_1 liegt.

f2) Berechnen Sie den minimalen Abstand des Punktes P zu der Geraden g_1 und erläutern Sie ihr Vorgehen.

g) Gegeben sind die Punkte $A(1|1|1)$, $B(3|3|2)$ und $C(4|1|1)$.

g1) Zeigen Sie, dass es sich bei dem von den drei Punkten aufgespannten Dreieck nicht um ein gleichseitiges Dreieck handelt.

g2) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden, die durch den Punkt A und den Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ verläuft.

h) Gegeben sind die Ebene E_2 mit der Ebenengleichung

$$E_2: a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = 10$$

und die Darstellung des zugehörigen Ebenenabschnitts mit den Achsenschnittpunkten P1, P2 und P3.

Bestimmen Sie die Parameter a, b und c so, dass der in Abbildung 1.4 dargestellte Ebenenabschnitt Teil der Ebene E_2 ist.

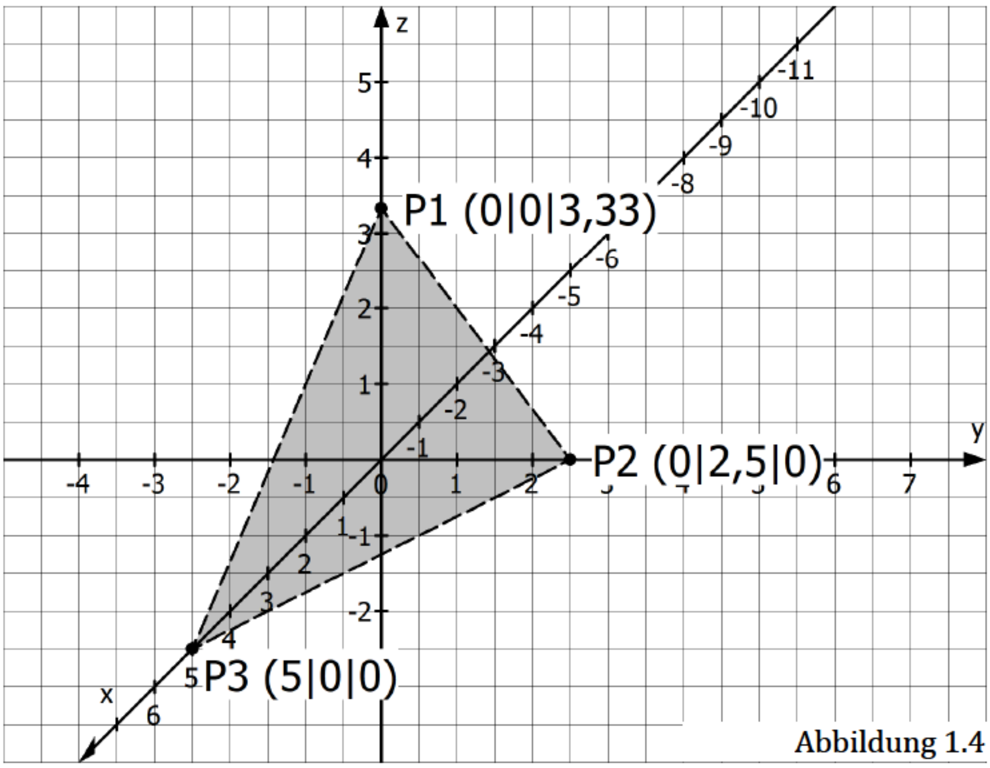

Abbildung 1.4

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 2: Radiotherapie**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	i	gesamt
Erreichbar	5	4	3	3	4	4	4	5	8	40
Erstkorrektur										
Zweitkorrektur										

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter:
$a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Die Strahlentherapie (Radiotherapie) ist neben Operation und Chemotherapie eine der zentralen Säulen der Krebstherapie. Bei jedem zweiten Krebspatienten kommt im Laufe seiner Erkrankung eine Strahlentherapie zum Einsatz. Im Gegensatz zur medikamentösen, im ganzen Körper wirkenden („systemischen“) Chemotherapie ist die Strahlenbehandlung eine rein lokale Maßnahme, die Wirkung tritt also nur innerhalb des Bestrahlungsfeldes auf[1].

Im Laufe der Jahre wurde eine ganze Reihe von unterschiedlichen Strategien entwickelt. Eine sehr patientenschonende Methode, die allerdings hohe Anforderungen an die Präzision stellt, ist die Stereotaktische Bestrahlung („Gamma Knife, CyberKnife, Strahlenchirurgie“) mit mehreren Strahlenquellen, sogenannten Linearbeschleunigern.

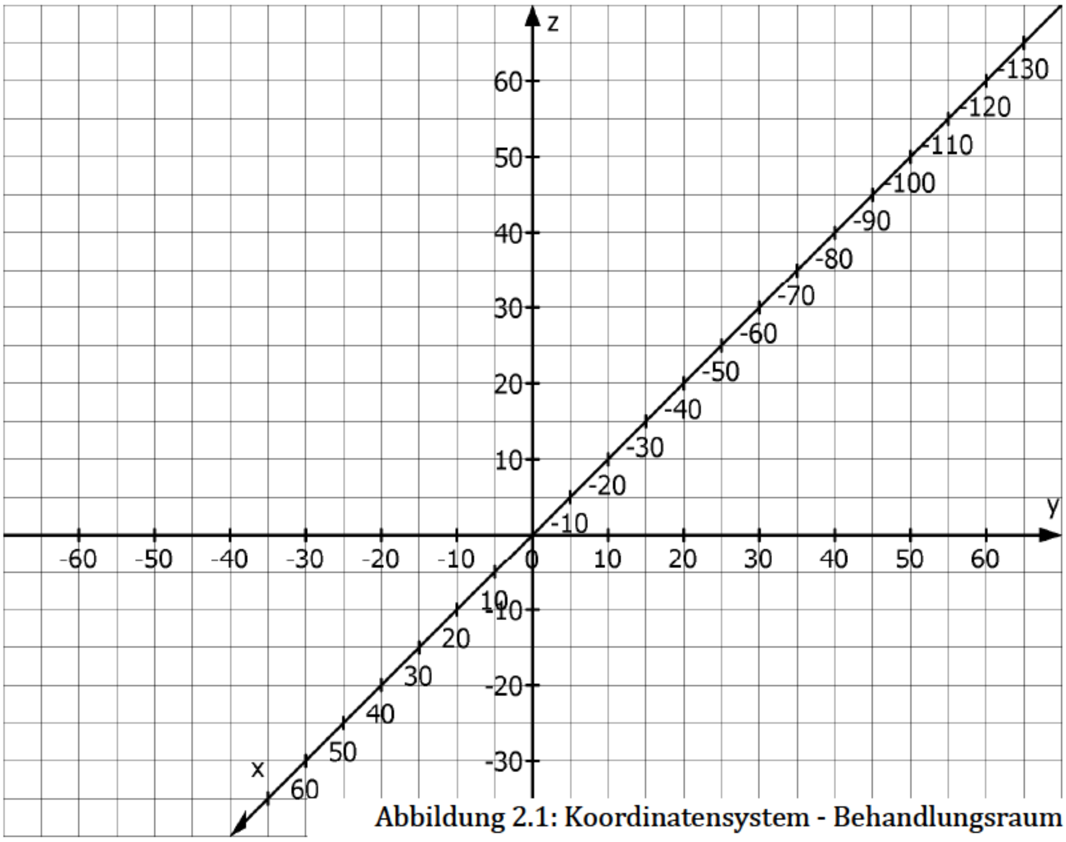

Abbildung 2.1: Koordinatensystem - Behandlungsraum

[1] Quelle: https://www.krebsgesellschaft.de/onko-internetportal/ Zugriff 26.02.2017 17:00 Uhr

Hierbei treffen die Behandlungsstrahlen aus verschiedenen Richtungen punktgenau auf die zu behandelnde Stelle, wobei der Patient entweder fixiert wird oder seine spontanen Lageveränderungen und Atembewegungen automatisch ausgeglichen werden. Auf das gesunde Gewebe entlang der Einstrahlbahnen trifft nur eine geringe Strahlendosis, sodass das Bestrahlungsziel punktuell mit hohen Energiedosen bestrahlt werden kann.

Im Nachfolgenden ist von einem im Koordinatensystem im Punkt B $(10|5|25)$ fixierten Bestrahlungsziel auszugehen.

Alle Längen sind in Zentimeter angegeben.

Die Ausgänge der drei Linearbeschleuniger haben die Koordinaten $L_1(30|0|50)$, $L_2(-30|0|50)$ und $L_3(0|-50|50)$.

a) Zeichnen Sie die Punkte L_1, L_2 und L_3 in das dreidimensionale Koordinatensystem (Abbildung 2.1) ein und

erläutern Sie im Allgemeinen die Schwierigkeit, Koordinaten von Punkten aus einem dreidimensionalen, kartesischen Koordinatensystem abzulesen, wenn keine der Koordinaten bekannt sind.

Die Steuerungseinheit des Bestrahlungsgerätes errechnet für einen der Behandlungsstrahlen die Gerade g mit der Gleichung:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -30 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

b) Ordnen Sie den Behandlungsstrahl einem der Linearbeschleuniger zu und

prüfen Sie, ob der Behandlungsstrahl durch diese Geradengleichung beschrieben werden kann.

c) Berechnen Sie die Länge des Behandlungsstrahls vom Austritt des Linearbeschleunigers 2 bis zum Bestrahlungsziel.

Mit zunehmendem Abstand zum Bestrahlungsziel lässt die Fokussierung der Behandlungsstrahlen nach und die Strahlen beginnen vermehrt zu streuen. Damit die Behandlungsstrahlen sich möglichst gebündelt treffen, darf der Abstand des Bestrahlungsziels zu den einzelnen Ausgängen der Linearbeschleuniger nicht zu groß sein. Die Abbildung 2.2 zeigt den Grad der Fokussierung in Prozent in Abhängigkeit vom Abstand zu den Ausgängen der Linearbeschleuniger.

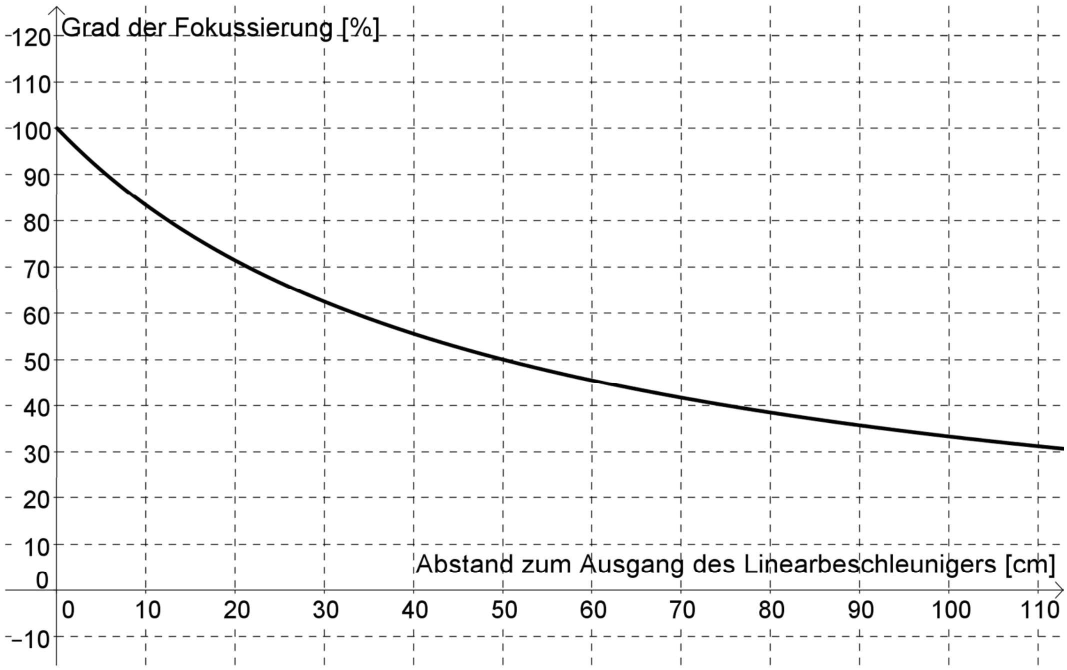

Abbildung 2.2: Grad der Fokussierung in Prozent

Der Abstand des Linearbeschleunigers 1 (Austrittspunkt $L_1(30|0|50)$) zum Bestrahlungsziel ist mit ca. 32 cm bekannt. Damit die Therapie erfolgsversprechend ist, sollte die Fokussierung des Strahls nicht unter 50 % fallen.

d) Beurteilen Sie, ob die Therapie für den Linearbeschleuniger 1 als erfolgsversprechend eingeschätzt werden kann (siehe Abbildung 2.2).

Bei einer zu großen Streuung und einem zu kleinen Winkel zwischen den einzelnen Behandlungsstrahlen kann es bei dem an das Bestrahlungsziel angrenzenden Gewebe zu unerwünschten Schädigungen kommen. Daher darf der Winkel zwischen zwei Behandlungsstrahlen nicht kleiner als 30° sein.

e) Prüfen Sie, ob diese Voraussetzung für den Linearbeschleuniger 1 und den Linearbeschleuniger 3 gegeben ist.

Die Ebenen $E_1\colon x = 180$, $E_2\colon x = -180$, $E_3\colon y = 150$ und $E_4\colon y = -150$ begrenzen den Behandlungsbereich. In diesem Bereich ist der Aufenthalt von Begleitpersonen oder Behandlungspersonal während der Behandlung aus Sicherheitsgründen untersagt. Der strahlungsundurchlässige Fußboden befindet sich in der Ebene $E_5\colon z = -60$, die Decke des Behandlungsraumes liegt in den Ebenen $E_6\colon z = 240$ und

$$E_7\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -180 \\ -150 \\ 50 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 360 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 190 \\ 190 \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \le r \le 1 \text{ und } 0 \le s \le 1 \text{ (Dachschräge).}$$

Um eine Gefährdung des Behandlungspersonals auszuschließen, soll der Gefährdungsbereich um den Patienten durch Markierungen auf dem Fußboden (Ebene E_5) gut sichtbar gekennzeichnet werden.

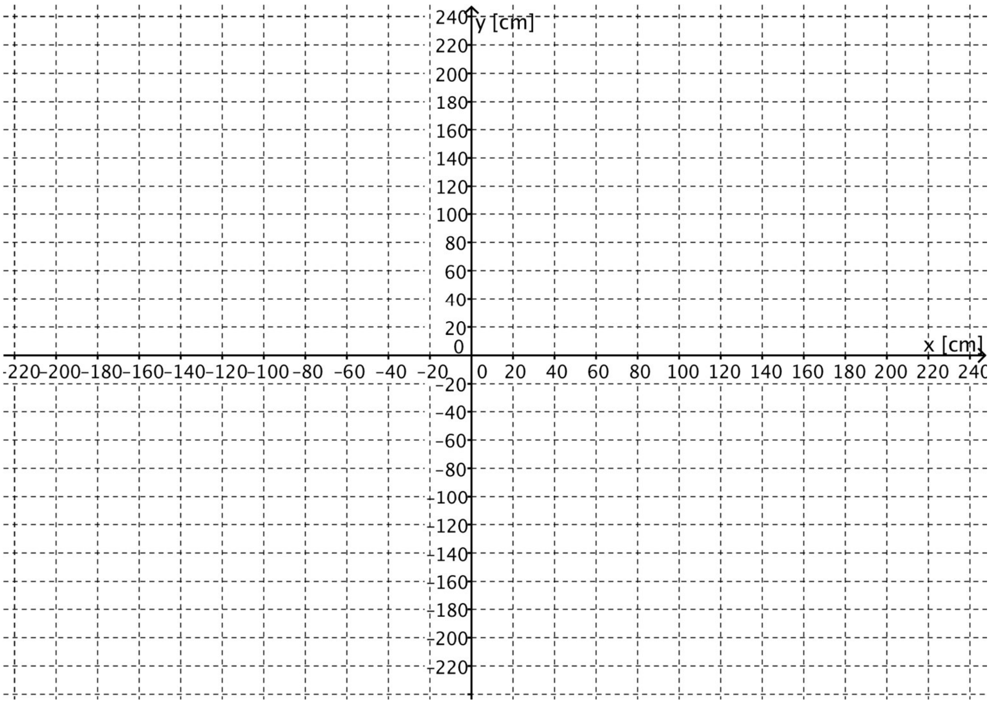

Abbildung 2.3: Gefahrenbereich auf dem Fußboden

f) Skizzieren Sie die Grenzen des Gefahrenbereiches in der Abbildung 2.3.

g) Zeigen Sie, dass die Ebene E_1 durch die Ebenengleichung

$$E_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 180 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden kann.

Eine Gefährdung des Behandlungspersonals kann nur ausgeschlossen werden, wenn die Behandlungsstrahlen innerhalb des Gefahrenbereiches in den geschützten Fußboden eindringen können.

h) Ermitteln Sie den Schnittpunkt des Behandlungsstrahls des Linearbeschleunigers 1 mit dem Fußboden und

prüfen Sie, ob eine Gefährdung gegeben ist.

Wegen der Wärmeentwicklung der Linearbeschleuniger wird ein Abstand von mehr als einem Meter zur nächsten Wand bzw. Decke gefordert. Andernfalls muss eine zusätzliche Wärmeisolierung vorgesehen werden.

i) Berechnen Sie den Abstand von der Ebene E_7 (Dachschräge) zum Ausgang des Linearbeschleunigers 3.

Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1:** (hilfsmittelfreier Teil)

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	5	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

a) Gegeben ist der folgende Graph einer ganzrationalen Funktion f, der punktsymmetrisch zum Ursprung verläuft:

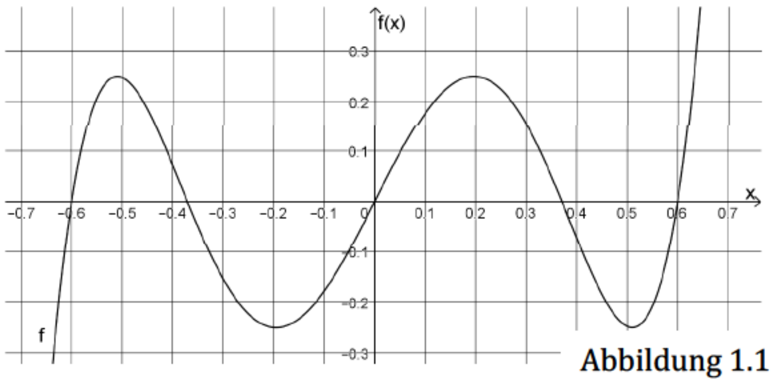

Abbildung 1.1

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

<u>Hinweis:</u> Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
$f(-0{,}4) = f(0{,}4)$		
Für den Grad n der ganzrationalen Funktion f gilt: $n \geq 4$.		
$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$		
$f''(x) < 0$ für $x \in [-0{,}3; -0{,}1]$		
$\int_{0}^{0{,}3} f(x)dx \approx 0{,}6$ [FE]		

b) Ist F eine beliebige Stammfunktion zu einer Funktion f im Intervall $I = [2; 5]$, so gilt:

$$\int_{2}^{\_\_} (\_\_\_\_\_\_)\,d\_\_\_ = F(5) - F(\_\_\_)$$

b1) Ergänzen Sie die fehlenden vier Angaben in der obigen Gleichung.

In Abbildung 1.2 ist der Graph der Funktion f dargestellt.

b2) Skizzieren Sie den Verlauf einer möglichen Stammfunktion F in das untere Koordinatensystem (Abbildung 1.3).

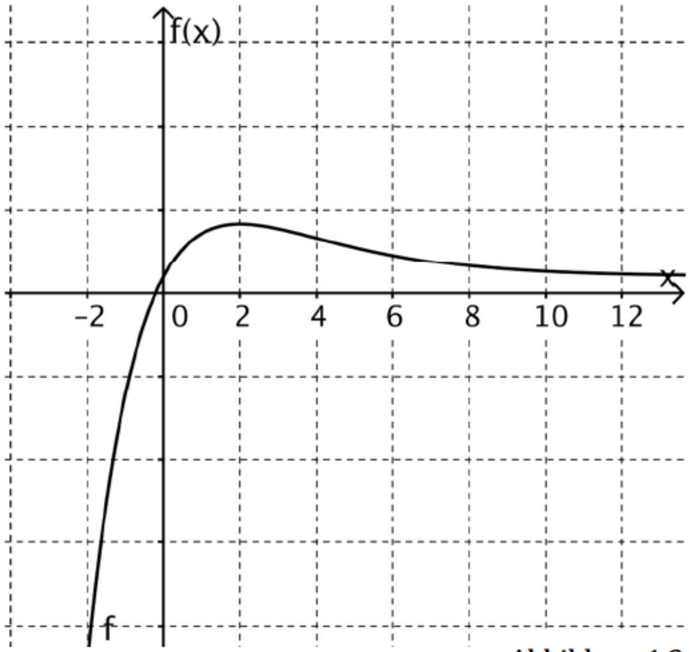

Abbildung 1.2

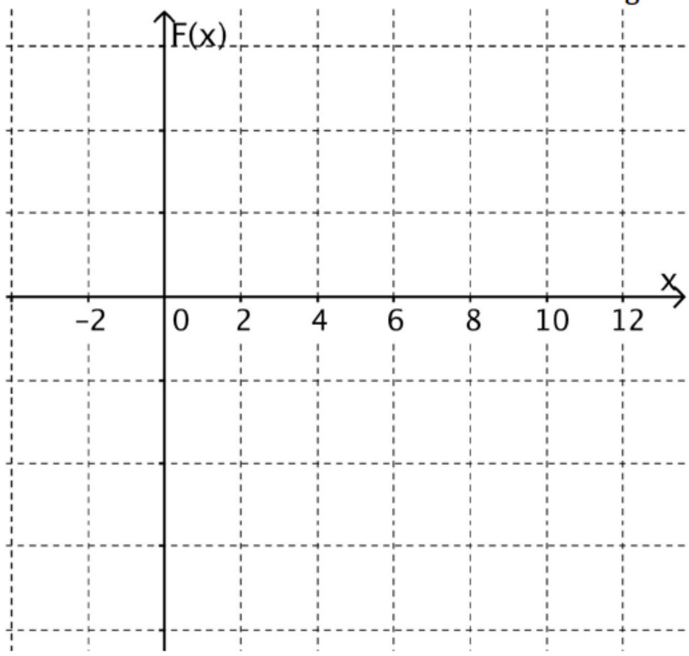

Abbildung 1.3

c) Bestimmen Sie den Wert für den Parameter k für die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f_k(x) = -4x^2 + 2k \cdot x \qquad \text{mit } k > 0$$

so, dass der Graph der Funktion f mit der Abszissenachse eine Fläche von $\frac{2}{3}$ Flächeneinheiten (FE) einschließt.

d) Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung :

$$f(x) = x^2 \cdot \cos(x).$$

d1) Geben Sie die Gleichung der ersten Ableitung der Funktion f an:

d2) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Der Graph der Funktion g mit $g(x) = 2 \cdot \cos(\pi \cdot x)$ ist identisch mit dem Graphen der Funktion h mit $h(x) = -2 \cdot \cos\big(\pi(x-1)\big)$.	
Der Graph der Funktion k mit $k(x) = 1{,}5 \cdot \cos(2x) + 1{,}5$ hat im Intervall $I = [0; \pi]$ genau eine Nullstelle.	

e) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Hinweis: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Es gilt: $\begin{pmatrix} a & b \\ 0{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b-a \\ 0{,}5 & -1 \end{pmatrix}$		
Es gilt: $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$		
Ist A eine Matrix vom Typ 2x3 und B eine Matrix vom Typ 2x4, so ist $A^T \cdot B$ eine Matrix vom Typ 3x4.		
Zu einem Übergangsprozess mit der Grenzmatrix $G = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ ist der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$ ein Fixvektor.		
Wenn die Matrix A die Inverse zur Matrix B ist, gilt: $A^2 \cdot B^2 = E$		

f) Gegeben sind die quadratischen, invertierbaren Matrizen A, B, C und X (alle Matrizen sind vom gleichen Typ).

f1) Stellen Sie die Matrizengleichung $A \cdot X = 3 \cdot X + C$ nach der Matrix X um.

f2) Begründen Sie, warum im Allgemeinen folgende Aussagen gelten:

$$A \cdot B \cdot A \neq A^2 \cdot B \text{ und } 3 \cdot A \cdot 3 = 9 \cdot A$$

g) Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & y \end{pmatrix}$.

g1) Untersuchen Sie, ob es reelle Zahlen für x und y gibt, so dass B die zu Matrix A inverse Matrix ist.

g2) Weisen Sie nach, dass für $x = -8$ keine inverse Matrix zur Matrix A existiert.

h) In den Tabellen 1.1 und 1.2 sind die Stücklisten eines Produktionsprozesses gegeben, die den Materialbedarf je Einheit von den Rohstoffen R1, R2, R3 über die Zwischenprodukte Z1, Z2 zu den Endprodukten E1, E2, E3 beschreiben.

	Z1	Z2
R1	3	3
R2	4	2
R3	a	b

Tabelle 1.1

	Z1	Z2
E1	3	2
E2	2	1
E3	3	3

Tabelle 1.2

h1) Zeichnen Sie das zugehörige Materialverflechtungsdiagramm.

h2) Bestimmen Sie die Elemente a und b so, dass für die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C gilt:

$$C = \begin{pmatrix} 15 & 9 & 18 \\ 16 & 10 & 18 \\ 7 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

h3) Erläutern Sie die Aussage des Elementes c_{23}.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 2: Gelbverzwergungsvirus**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	i	gesamt
Erreichbar	6	5	4	5	5	3	5	3	4	40
Erstkorrektur										
Zweitkorrektur										

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: a, b, c, ... $\in \mathbb{R}$ und die Variablen: x, t, ... $\in \mathbb{R}$.

Ein Problem beim Anbau von Getreide sind Erkrankungen der Pflanzen durch Viren. Der sogenannte Gelbverzwergungsvirus hat in den letzten Jahren an Bedeutung zugenommen. Dieser Virus wird durch infizierte Blattläuse übertragen und tritt vornehmlich in der Getreideart Gerste auf.

Je nachdem, in welchem Entwicklungsstadium sich die Pflanze befindet, kommt es zu verschiedenen Symptomen: Eine ganz junge mit dem Virus infizierte Pflanze wird gelb und in ihrem Wuchs gehemmt. Unter ungünstigen Bedingungen kann die Pflanze auch vollständig absterben. Eine sehr vitale größere Pflanze weist eine gewisse Toleranz gegenüber der Infizierung auf und entwickelt sich trotz Infizierung relativ normal. Allerdings kann es sein, dass dann die Pflanze als Wirt dient und dadurch den Virus an eine Blattlaus weitergibt, ohne selbst Krankheitssymptome zu zeigen.

Die Pflanzen lassen sich also in folgende Gruppen einteilen: Gesunde (G), Infizierte (I), Erkrankte (E) und Tote (T).

Wintergerste wird im Herbst eines Jahres gesät und im darauffolgenden Sommer im Juni oder Juli geerntet. Die Infizierung der Pflanzen beginnt mit dem Erscheinen der ersten Blätter im Oktober und dauert bis in den Juni des Folgejahres.

Schüler eines beruflichen Gymnasiums mit der Fachrichtung Agrarwirtschaft werten während eines Projektes die vorliegenden Daten zu einigen Versuchsfeldern aus.

Aus den Daten zu Versuchsfeld I wollen die Schüler eine stochastische Übergangsmatrix entwickeln, die die wöchentlichen Übergänge im Frühjahr in der Pflanzenpopulation darstellen soll.

Die im Folgenden dargestellten Matrizen zeigen die unterschiedlichen Ergebnisse, zu denen drei Schülergruppen gekommen sind.

$$A = \text{zu:}\begin{array}{c} \\ G\\ I\\ E\\ T\end{array}\!\!\begin{array}{c}\text{von:}\quad G \quad I \quad E \quad T\\ \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}15 & 0{,}6 & 0{,}2 & 0\\ 0{,}05 & 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}5\\ 0 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5\end{pmatrix}\end{array} \quad B = \text{zu:}\begin{array}{c} \\ G\\ I\\ E\\ T\end{array}\!\!\begin{array}{c}\text{von:}\quad G \quad I \quad E \quad T\\ \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 & 0\\ 0{,}05 & 0{,}35 & 0{,}55 & 0\\ 0 & 0{,}05 & 0{,}1 & 1\end{pmatrix}\end{array} \quad C = \text{zu:}\begin{array}{c} \\ G\\ I\\ E\\ T\end{array}\!\!\begin{array}{c}\text{von:}\quad G \quad I \quad E \quad T\\ \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0 & 0\\ 0{,}15 & 0{,}6 & 0{,}3 & 0\\ 0{,}05 & 0{,}3 & 0{,}6 & 0\\ 0 & 0{,}1 & 0{,}1 & 1\end{pmatrix}\end{array}$$

a) Erläutern Sie die Bedeutung der Elemente b_{13} und b_{44} der Matrix B im Sachzusammenhang.

Entscheiden Sie begründet, welche der Matrizen keine geeigneten Übergangsmatrizen für den oben beschriebenen Prozess darstellen können.

Für das Versuchsfeld II ist die Veränderung in der Pflanzenpopulation durch den Gelbverzwergungsvirus besonders gut dokumentiert.

Zu Beginn der Untersuchung im April sind von den vorhandenen 20 000 Pflanzen insgesamt 10 % infiziert und alle anderen sind gesund, es gibt also keine erkrankten oder toten Pflanzen.

Durch die folgende Übergangsmatrix M können die wöchentlichen Veränderungen auf Feld II beschrieben werden:

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}35 & 0{,}65 & 0 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}05 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie die Zusammensetzung des Pflanzenbestandes auf Feld II eine Woche nach Untersuchungsbeginn.

Untersuchen Sie, ob die Aussage richtig ist: „Nach 4 Wochen sind nach diesem Modell noch mehr als $\frac{9}{10}$ der Pflanzen lebendig".

Gegeben ist die folgende Gleichung: $M^{-1} \cdot \vec{w} = \vec{v}$.
$\vec{w}$ und $\vec{v}$ stellen Bestandsvektoren der Pflanzenpopulation dar.

c) Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen den Vektoren $\vec{w}$ und $\vec{v}$ in dieser Gleichung und

berechnen Sie den Vektor $\vec{w}$ für $\vec{v} = \begin{pmatrix} 11\,520 \\ 3\,990 \\ 4\,115 \\ 375 \end{pmatrix}$.

Ein Schüler behauptet: „Die langfristige Entwicklung, die durch die Matrix M vorgegeben wird, bildet nicht die Realität ab."

d) Beschreiben Sie die langfristige Entwicklung, die durch die Matrix M vorgegeben wird, und

beurteilen Sie die Behauptung des Schülers.

Ein Problem bei Viruserkrankungen ist, dass keine Pflanzenschutzmittel existieren, die den Virus bekämpfen könnten. Es ist nur möglich, den Virusüberträger, also die Blattläuse, mittels eines Insektizids zu eliminieren und somit eine weitere Verbreitung einzudämmen.

Auf dem Versuchsfeld III sind zu Beginn von den insgesamt 20 000 Pflanzen etwa 16 000 gesund, 2 000 infiziert und 2 000 erkrankt.
Eine Woche später, nach Einsatz eines Insektizids werden 15 200 gesunde, 3 600 infizierte und
1 200 erkrankte Pflanzen auf Feld III gezählt, abgestorbene (tote) Pflanzen gibt es nicht.
Diese Entwicklung kann durch die stochastische Übergangsmatrix N beschrieben werden,

die nur unvollständig bekannt ist: $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0{,}6 & 0 \\ 0 & d & 0{,}4 & 0 \\ 0 & e & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

e) Bestimmen Sie die fehlenden Werte in der Matrix N.

Ein Schüler stellt fest: Wenn die Werte $a = 0{,}92;\ b = 0{,}08;\ c = 0{,}8;\ d = 0{,}2$ und $e = 0$ in die Matrix N eingesetzt werden, gibt es Verteilungen $\vec{v}$ mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} g \\ i \\ e \\ t \end{pmatrix}$ für die $N \cdot \vec{v} = \vec{v}$ gilt.

($\vec{v}$ ist nicht der Nullvektor.)

f) Erläutern Sie die Aussage der Gleichung $N \cdot \vec{v} = \vec{v}$ im Sachzusammenhang.

g) Bestimmen Sie für Versuchsfeld III eine allgemeine Lösung für den Vektor $\vec{v}$ sowie die Lösung für $t = 0$ und insgesamt 20 000 Pflanzen.

Insektizide werden zurzeit sehr kritisch betrachtet, da ein Rückgang der Insektenpopulationen zu verzeichnen ist, so dass sowohl die Vielfalt von Wild- und Nutzpflanzen bedroht ist wie auch die Nahrungsmittelproduktion.

Die Population einer bestimmten Insektenart entwickelt sich vereinfacht dargestellt in drei Stufen. Aus den Eiern schlüpfen Larven (relativer Anteil: a mit $0 < a \leq 1$) und aus den Larven entwickeln sich die erwachsenen Insekten (relativer Anteil: b mit $0 < b \leq 1$), die jeweils etwa 80 Eier legen.

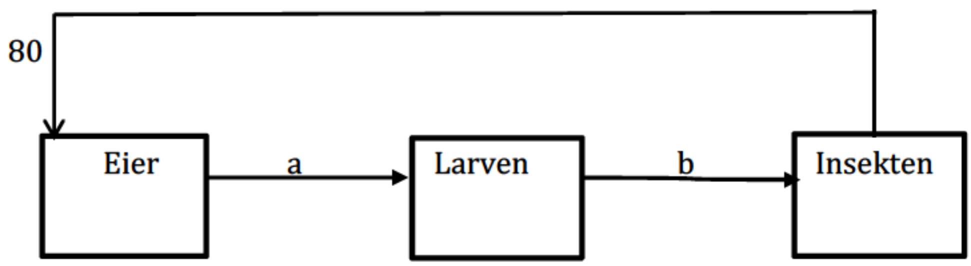

Abbildung 2.1

Wenn $a \cdot b \cdot 80 = 1$ ist, dann beschreibt die oben dargestellte Entwicklung einen zyklisch periodischen Prozess, bei dem die Gesamtpopulation weder wächst noch schrumpft.

h) Begründen Sie, warum dieser Zusammenhang gilt.

i) Geben Sie an, wie groß a in diesem Fall mindestens sein muss, damit dieser Prozess möglich ist, und

nennen Sie ein Beispiel für mögliche Werte von a und b.

Name des Prüflings:	
Zeitpunkt der Abgabe:	

Punkteverteilung **Aufgabe 1:** (hilfsmittelfreier Teil)

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	5	5	5	5	5	5	5	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

a) Gegeben ist der folgende Graph einer ganzrationalen Funktion f, der punktsymmetrisch zum Ursprung verläuft:

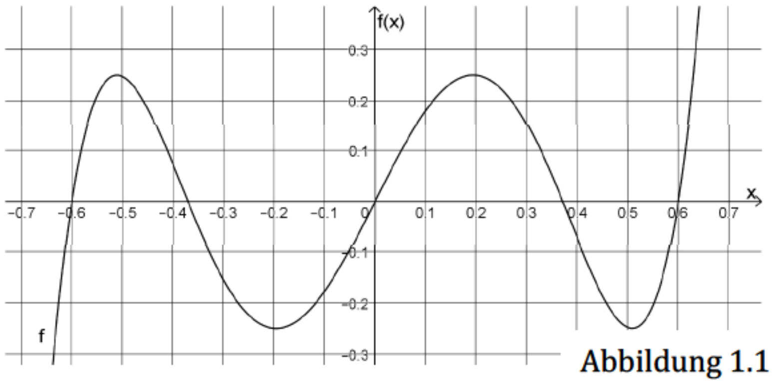

Abbildung 1.1

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

<u>Hinweis:</u> Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
$f(-0{,}4) = f(0{,}4)$		
Für den Grad n der ganzrationalen Funktion f gilt: $n \geq 4$.		
$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$		
$f''(x) < 0$ für $x \in [-0{,}3; -0{,}1]$		
$\int_{0}^{0{,}3} f(x)dx \approx 0{,}6$ [FE]		

b) Ist F eine beliebige Stammfunktion zu einer Funktion f im Intervall $I = [2; 5]$, so gilt:

$$\int_{2}^{\_\_\_} (\_\_\_\_\_\_\_\_)\,d\_\_\_ = F(5) - F(\_\_\_)$$

b1) Ergänzen Sie die fehlenden vier Angaben in der obigen Gleichung.

In Abbildung 1.2 ist der Graph der Funktion f dargestellt.

b2) Skizzieren Sie den Verlauf einer möglichen Stammfunktion F in das untere Koordinatensystem (Abbildung 1.3).

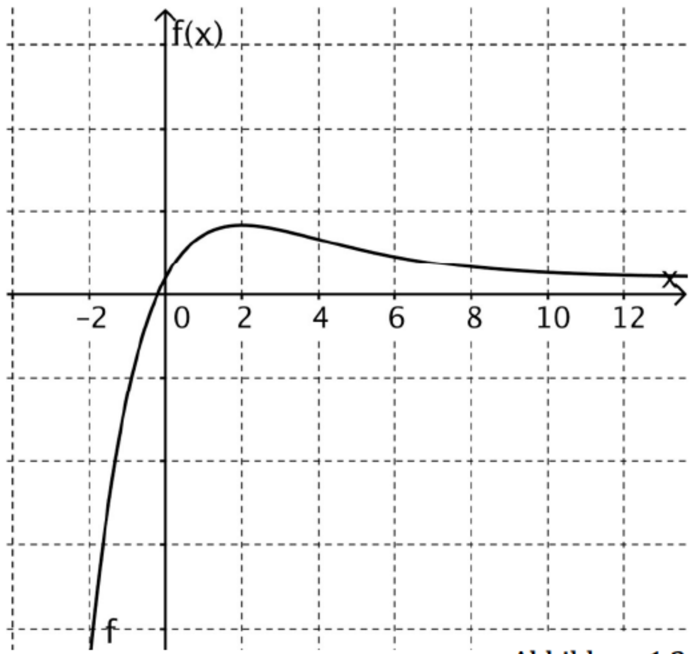

Abbildung 1.2

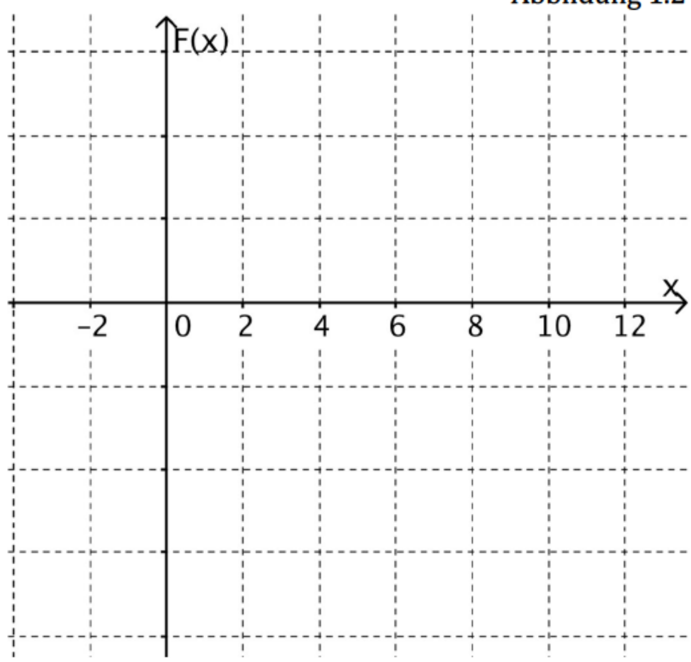

Abbildung 1.3

c) Bestimmen Sie den Wert für den Parameter k für die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f_k(x) = -4x^2 + 2k \cdot x \qquad \text{mit } k > 0$$

so, dass der Graph der Funktion f mit der Abszissenachse eine Fläche von $\frac{2}{3}$ Flächeneinheiten (FE) einschließt.

d) Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung :

$$f(x) = x^2 \cdot \cos(x).$$

d1) Geben Sie die Gleichung der ersten Ableitung der Funktion f an:

d2) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aussage	Entscheidung und Begründung
Der Graph der Funktion g mit $g(x) = 2 \cdot \cos(\pi \cdot x)$ ist identisch mit dem Graphen der Funktion h mit $h(x) = -2 \cdot \cos\big(\pi(x-1)\big)$.	
Der Graph der Funktion k mit $k(x) = 1{,}5 \cdot \cos(2x) + 1{,}5$ hat im Intervall $I = [0; \pi]$ genau eine Nullstelle.	

e) Dem in Abbildung 1.4 unvollständig dargestellten Baumdiagramm liegt ein zweistufiges Zufallsexperiment zugrunde.

Das gleiche Zufallsexperiment lässt sich auch in einer Vierfeldertafel darstellen.

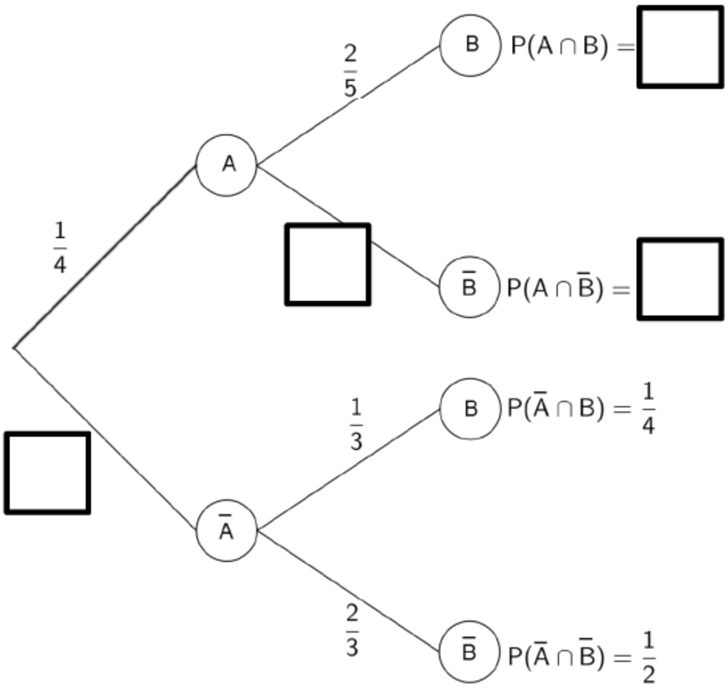

Abbildung 1.4

P	A	$\bar{A}$	Summen
B			
$\bar{B}$			
Summen			

Tabelle 1.1

e1) Ergänzen Sie im Baumdiagramm (Abb. 1.4) sowie in der Vierfeldertafel (Tab. 1.1) die fehlenden Wahrscheinlichkeiten.

e2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $P(A|B) = P_B(A)$.

e3) Zeigen Sie, dass die Ereignisse A und B voneinander abhängig sind.

f) Von einer Binomialverteilung mit den Parametern $n = 4$ und $p = 0{,}5$ sind die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse bekannt:

$P(X = 1) = 25\,\%$, $P(1 < X \leq 4) = 68{,}75\,\%$ und $P(X \leq 3) = 93{,}75\,\%$.

$P(X = 0)$	$P(X = 1)$	$P(X = 2)$	$P(X = 3)$	$P(X = 4)$

Tabelle 1.2

f1) Berechnen Sie die Höhe der Standardabweichung σ.

f2) Ergänzen Sie die fehlenden Wahrscheinlichkeiten in Tabelle 1.2.

f3) Zeichnen Sie ein Stab- oder Säulendiagramm dieser Binomialverteilung.

g) Ein Glücksrad hat drei Sektoren (Kreisausschnitte) A, B und C. Die Größe des Winkels von Sektor A beträgt 90°. Der Winkel von Sektor B ist variabel und die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis „Sektor B“ auftritt, beträgt p_B. Somit ist auch die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Sektor C“ von der Wahrscheinlichkeit p_B abhängig.
Nach einmaligen Drehen des Glücksrades erhält der Spieler beim Stopp in Sektor A 2,00 Euro ausgezahlt, bei Sektor B 3,00 Euro ausgezahlt und bei Sektor C 4,00 Euro ausgezahlt.

g1) Geben Sie den Definitionsbereich der Wahrscheinlichkeit p_B an.

g2) Ermitteln Sie den von einem Spieler langfristig zu erwartenden Gewinn pro Spiel, wenn für $p_B = 0{,}25$ gilt und der Einsatz für ein Spiel 2,00 Euro beträgt.

g3) Bestimmen Sie die Größe der Winkel der Sektoren B und C, wenn der Einsatz für ein faires Spiel (ein Spieler macht auf lange Sicht weder Gewinn noch Verlust) 3,00 Euro beträgt.

h) Gegeben ist für eine normalverteilte Zufallsgröße X der Erwartungswert mit $\mu=10$ und die Standardabweichung mit $\sigma = 2$.

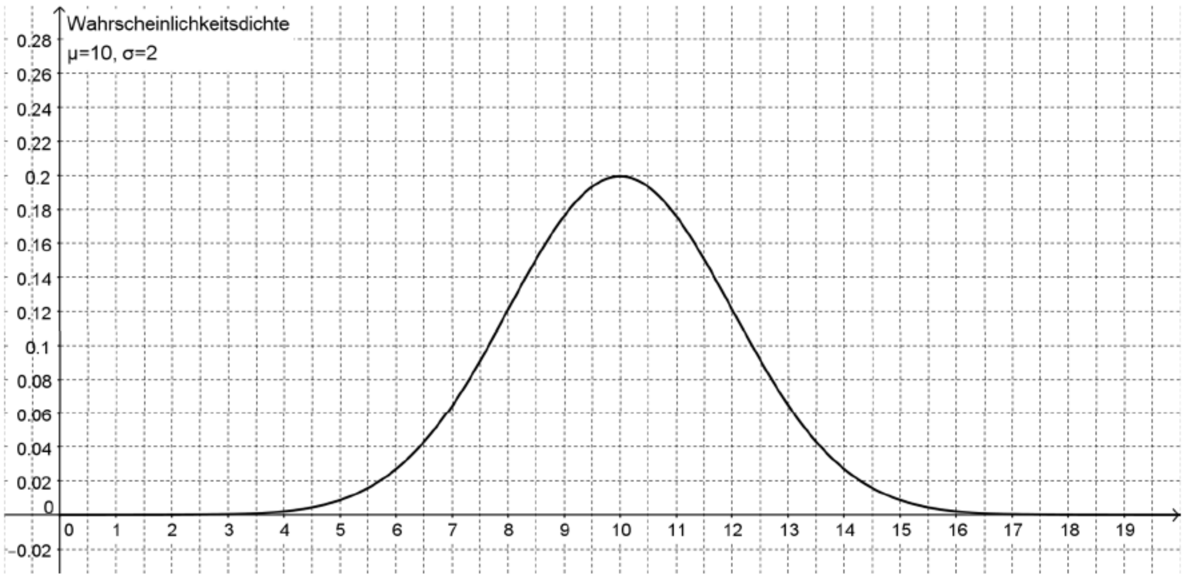

Abbildung 1.5

h1) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

<u>Hinweis</u>: Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt, für jedes falsche Kreuz gibt es null Punkte, nicht angekreuzte Zeilen bleiben neutral (null Punkte).	wahr	falsch
Es gilt $P(X \geq 11) > 50\ \%$.		
Es gilt $P(X \leq 5) = P(X \geq 15)$.		
Es gilt $P(X \geq 12) \approx 30\ \%$.		

h2) Ermitteln Sie näherungsweise den Wert von k, für den $P(X \leq k) = 40\ \%$ gilt, und erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 2: Essstörungen**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	6	4	3	3	6	4	8	6	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Studierende aus dem Fachbereich Ökotrophologie der Uni Kiel haben im Rahmen ihrer Bachelorarbeit eine Umfrage zum Thema Essstörungen durchgeführt. Dazu wurden an unterschiedlichen Schulen in Schleswig-Holstein 1 500 Jugendliche im Alter zwischen 11 und 17 Jahren befragt. Mit Hilfe der Befragung kann ein Verdacht auf eine Essstörung mit hinreichender Sicherheit erkannt werden.

Die erste geschlechterspezifisch getrennte Datenerhebung hierzu fand an zwei Schulen einer schleswig-holsteinischen Kleinstadt statt. Ein besonderes Augenmerk legten die Studierenden zunächst auf die bei den 11- bis 17-jährigen Jungen gewonnenen Daten.

Die befragten Jungen der Leonhard-Euler-Schule (LES) wiesen die in Tabelle 2.1 dargestellte Altersstruktur auf.

Lebensalter in Jahren	11	12	13	14	15	16	17
Anzahl befragter Schüler	16	20	24	14	17	12	23

Tabelle 2.1

Die Altersstruktur der befragten Jungen der Carl-Friedrich-Gauß-Schule (CFGS) ist in Abbildung 2.1 als Boxplot dargestellt.

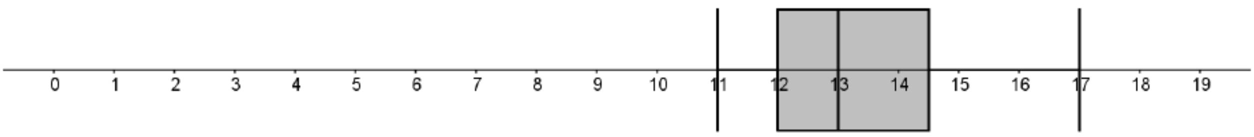

Abbildung 2.1

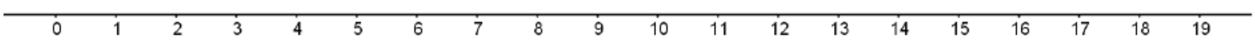

Abbildung 2.2

a) Zeichnen Sie einen zu Tabelle 2.1 passenden Boxplot zur Altersstruktur der LES in Abbildung 2.2 ein und

vergleichen Sie im Sachzusammenhang exemplarisch zwei Kennzahlen beider Altersverteilungen miteinander.

Nach der Auswertung der bezüglich des Essverhaltens gewonnenen Daten an der LES ergab sich folgendes Säulendiagramm:

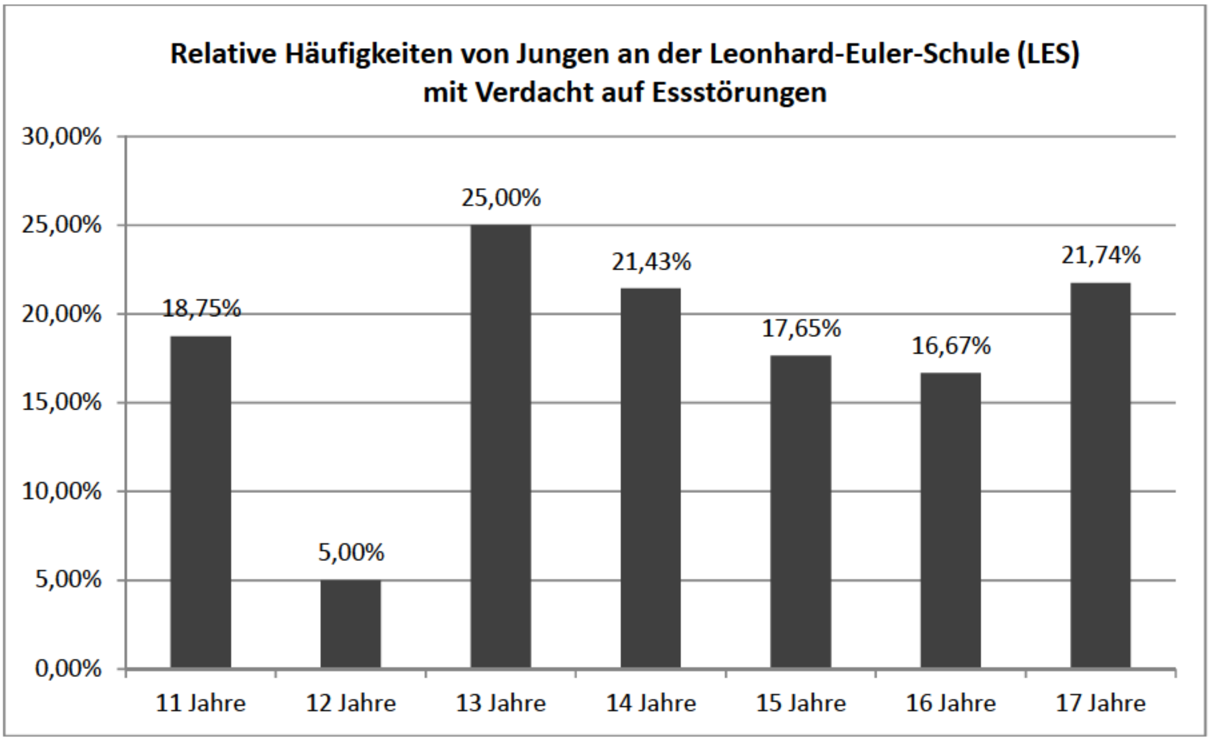

Abbildung 2.3

b) Berechnen Sie, wie hoch der durchschnittliche Anteil der Jungen mit Verdacht auf eine Essstörung an allen Jungen der LES ist. Nutzen Sie hierbei die Tabelle 2.1 und die Abbildung 2.3.

An beiden Schulen zusammen wurden insgesamt 80 Jungen befragt, die 12 bis 13 Jahre alt waren. Der prozentuale Anteil der 12 bis 13-jährigen Jungen mit einem Verdacht auf eine Essstörung an den befragten Jungen dieses Alters an beiden Schulen betrug 16,25 %. Bei vier der 12-jährigen Jungen der CFGS lag ein Verdacht auf eine Essstörung vor.

c) Ermitteln Sie die absolute Häufigkeit der 13-jährigen Jungen mit Verdacht auf eine Essstörung an der CFGS. Nutzen Sie auch hierbei die Tabelle 2.1 und die Abbildung 2.3.

Bei den 1 500 jugendlichen Schülerinnen und Schülern in Schleswig-Holstein, die von den Studierenden befragt worden sind, wies ca. ein Fünftel der Jugendlichen einen Verdacht auf eine Essstörung auf. Aus der Gruppe dieser 1 500 bereits befragten Jugendlichen sollen zwecks weiterer Untersuchungen zufällig Personen ausgewählt werden.

d) Erläutern Sie, unter welchen Annahmen die Anzahl der Jugendlichen mit einem Verdacht auf eine Esstörung als binomialverteilte Zufallsvariable betrachtet werden kann.

Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die Zufallsvariable X: „Anzahl der Jugendlichen mit Verdacht auf eine Essstörung“ binomialverteilt ist und die Eintrittswahrscheinlichkeit von 20 % weiterhin gilt. Es wird eine repräsentative Stichprobe von 95 Jugendlichen zwecks weiterer Befragung ausgewählt.

e) Ermitteln Sie die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten dafür, dass sich in dieser Stichprobe

- genau 21 Jugendliche,
- mindestens zwei Jugendliche mehr als der Erwartungswert μ und
- mehr als 10 aber weniger als 24 Jugendliche

mit einem Verdacht auf eine Essstörung befinden.

f) Bestimmen Sie, wie viele Jugendliche mindestens befragt werden müssen, damit in der Umfrage mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens zwei Jugendliche sind, die einen Verdacht auf eine Essstörung aufweisen.

Den Studierenden liegt auch eine große Studie aus dem Jahr 2012 vor. Gemäß dieser Studie betrug der relative Anteil der 11- bis 17-jährigen Mädchen mit Verdacht auf eine Essstörung 28,9 % und der bei den Jungen 15,2 %.

Die Studierenden vermuten, dass der Anteil der Mädchen mit einem Verdacht auf eine Essstörung in Schleswig-Holstein sich bis heute erhöht hat. Unter den von den Studierenden 1 500 befragten Jugendlichen sind 730 Mädchen. Die Studierenden führen einen Hypothesentest mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 5\ \%$ durch.

g) Geben Sie die Nullhypothese H_0 sowie die Gegenhypothese H_1 an,

begründen Sie mithilfe des Annahme- und des Ablehnungsbereich, für welchen Bereich die Nullhypothese H_0 beibehalten werden kann,

ermitteln Sie darüber hinaus die Wahrscheinlichkeit, dass Ihre Nullhypothese nach der Befragung beibehalten wird, obwohl der tatsächliche Anteil der Mädchen mit Verdacht auf eine Essstörung mittlerweile 35 % beträgt.

Die Studierenden bestimmen im Rahmen ihrer Studie auch den Body-Mass-Index (BMI) der Jugendlichen. Der BMI ist eine Maßzahl für die Bewertung des Körpergewichts eines Menschen in Relation zu seiner Körpergröße.

Die Auswertung der Körpergrößen der Jugendlichen ergab, dass diese normalverteilt sind und die Durchschnittsgröße in etwa 166,3 cm beträgt. Nur rund 5 % der Jugendlichen überschreiten eine Körpergröße von 176,8 cm.

h) Zeigen Sie, dass die Standardabweichung $\sigma \approx 6{,}38$ beträgt und

prüfen Sie die folgenden Behauptungen:

- Weniger als die Hälfte der Jugendlichen sind größer als 1,51 m und kleiner als 1,65 m.
- Ein zufällig ausgewählter Jugendlicher kann nicht kleiner als 1,40 m sein.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 3: Hochwasserschutzmaßnahmen im Rheingebiet**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	7	4	6	4	5	4	5	5	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Aufgrund der Klimaerwärmung häufen sich extreme Wettersituationen, die in den letzten Jahren häufiger zu Extremhochwasser im Rheingebiet geführt haben. Im Juni 2013 führte Dauerregen zu mehrtägigen schweren Überflutungen, bei denen ganze Ortschaften evakuiert werden mussten.

In Abbildung 3.1 ist der Verlauf der Hochwasserwelle im Juni 2013 am Pegel Worms graphisch dargestellt. Die Aufzeichnungen am Pegel Worms begannen am 02.06.2013 um 0:00 Uhr ($t = 0$) und der maximale Wasserstand lag bei ca. 720 cm (über NN).

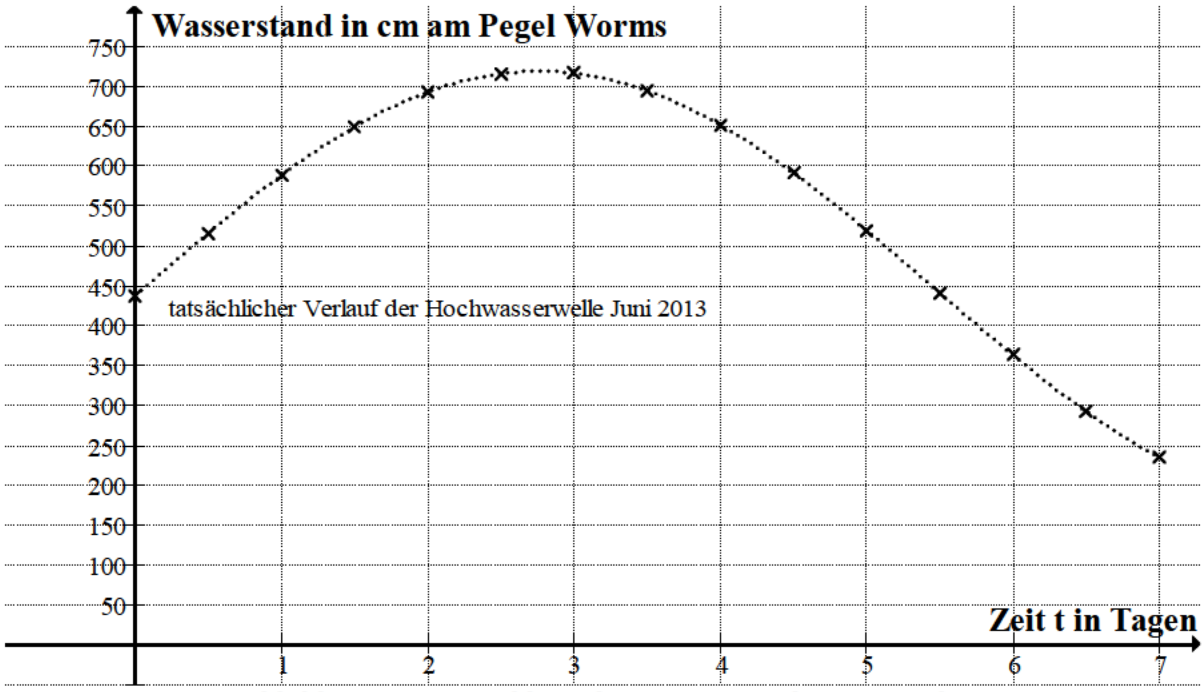

Abbildung 3.1 Entwicklung des Wasserstandes am Pegel Worms im Juni 2013

Um zukünftig die am Rhein anliegenden Ortschaften zu schützen, hat die Bundesregierung verschiedene mögliche Schutzmaßnahmen geprüft und durchgeführt. Eine mögliche Schutzmaßnahme wäre die Einrichtung sogenannter Flutpolder. Flutpolder sind durch „Hinterlanddeiche" eingedeichte natürliche Überschwemmungsgebiete. Diese Gebiete liegen in Flussniederungen oder Senken und sollen bei Extremhochwasser gezielt geflutet werden und damit die Sicherheit der Hochwasserschutzanlagen in den unterhalb liegenden Flussabschnitten erhöhen.

Um die Wirksamkeit solcher Schutzmaßnahmen zu prüfen, wurde im Verlauf der Planungen eine Computersimulation zukünftiger Hochwasserverläufe in Auftrag gegeben. Eine konkrete Computersimulation ergibt, dass der Verlauf des Pegelstandes unter Nutzung der Schutzmaßnahmen am Pegel Worms näherungsweise durch die Funktion h modelliert werden kann. Es gilt:

$$h(t) = -53 \cdot \sin(1{,}74 \cdot t + 3{,}2) - 265 \cdot \sin(0{,}58 \cdot t - 3{,}2) + 445$$

mit $0 \leq t \leq 7$. Dabei wird die Zeit t in Tagen (d) und der Pegelstand h(t) in cm angegeben.

a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion h in das gegebene Koordinatensystem in Abbildung 3.1.

Vergleichen Sie die beiden Verläufe des Pegelstandes anhand zweier Aspekte.

Während der Hochwasserwelle im Juni 2013 war der Rhein bei Worms für die Schifffahrt ca. 42 Stunden lang gesperrt, da dort der Wasserstand die Hochwassermarke II von 6,65 m überschritten hatte.

b) Prüfen Sie, ob sich in der Simulation die Dauer der Sperrung durch die Schutzmaßnahmen voraussichtlich verkürzt.

Um verschiedene Hochwasserszenarien simulieren zu können wird der Parameter a eingeführt. Dieser hängt von den vor dem Pegel Worms gewählten Schutzmaßnahmen ab. Für die Funktionenschar h_a (allgemeine Simulation) gilt:

$$h_a(t) = -a \cdot \sin(1{,}74 \cdot t + 3{,}2) - 5a \cdot \sin(0{,}58 \cdot t - 3{,}2) + 445$$

mit $0 \leq t \leq 7$ und $0 < a \leq 100$. Dabei wird die Zeit t in Tagen (d) und der Pegelstand $h_a(t)$ in cm angegeben.

c) Zeigen Sie, dass in der allgemeinen Simulation h_a zwei Maximalstellen bei $t_{e1} \approx 1{,}70758$ und $t_{e2} \approx 3{,}81337$ liegen.

Geben Sie den Tag, die Uhrzeit und den Pegelstand des absoluten Maximums der allgemeinen Simulation an.

Berechnen Sie, um wieviel cm der maximale Pegelstand durch die Schutzmaßnahmen für die konkrete Simulation mit $a = 53$ abgesenkt würde.

Ab dem Beobachtungsbeginn bis zum Erreichen der ersten Maximalstelle bei t_{e1} steigt der Wasserstand immer langsamer an.

d) Berechnen Sie für die Zeit vor dem 03.06. in der allgemeinen Simulation h_a die maximale Steigung und

interpretieren Sie den Wert dieser Steigung für $a = 53$ im Sachzusammenhang.

Im weiteren Verlauf der Planungen wurde nach möglichen Gebieten für die Flutpolder gesucht und das zuständige Amt wurde u. a. in einem Naherholungsgebiet auf der deutschen Rheinseite in der Nähe von Wyhl am Kaiserstuhl zwischen dem Altrhein und dem aktuellen Rheinverlauf (siehe Abbildung 3.2) fündig.

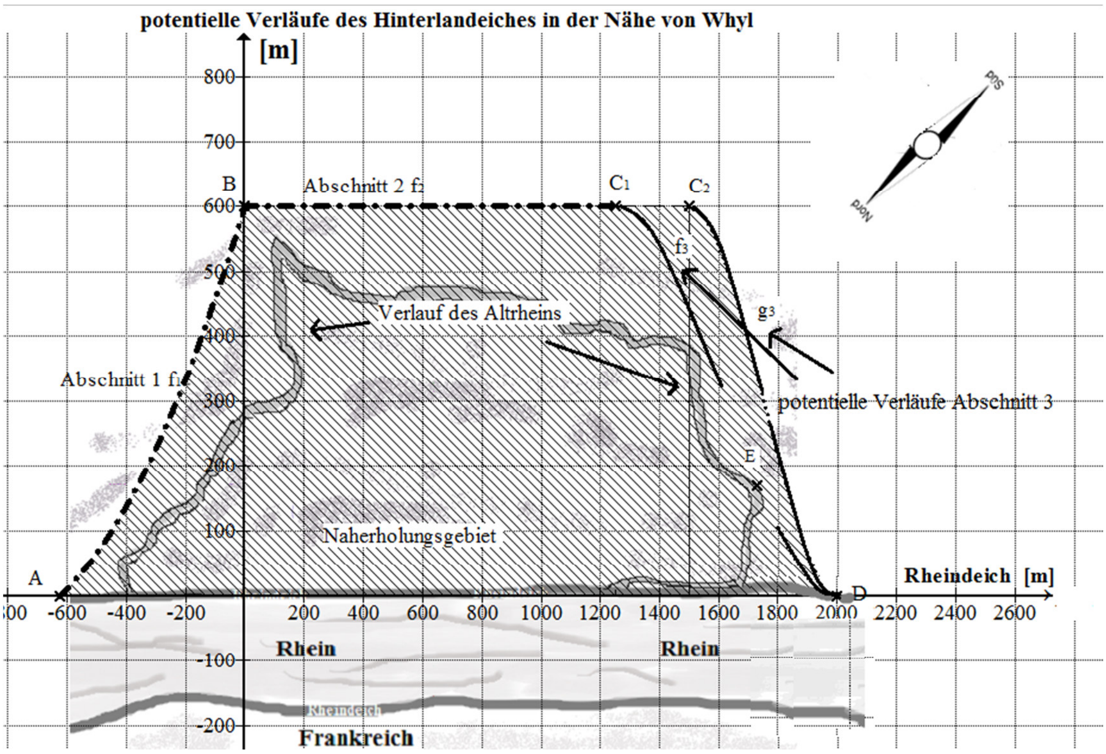

Abbildung 3.2 Karte des Naherholungsgebietes in der Nähe der Gem. Whyl

In Abbildung 3.2 sehen Sie zwei potentielle Entwürfe. Die grobe Planung der beiden ersten Abschnitte des Hinterlanddeiches liegt vor und ist bereits eingezeichnet.

Die Deichkrone des bereits vorhandenen Rheindeichs liegt näherungsweise auf der Abszissenachse.

Der zweite Abschnitt $\overline{BC_1}$ hat eine Länge von 1 250 m bzw. $\overline{BC_2}$ eine Länge von 1 500 m und verläuft in einem Abstand von 600 m parallel zum Rheindeich bzw. der Abszissenachse.

Im ersten Entwurf soll der noch zu planende dritte Abschnitt ohne Knick im Punkt $C_1(1\,250|600)$ in den zweiten Abschnitt übergehen und im Punkt $D(2\,000|0)$ tangential in den bereits vorhandenen Rheindeich münden.

e) Erläutern Sie, warum unter Berücksichtigung der Vorgaben der Verlauf des dritten Deichabschnitts vom Punkt C_1 bis zum Punkt D durch eine ganzrationale Funktion mindestens 3. Grades beschrieben werden kann.

Leiten Sie die Bedingungsgleichungen her, die für den ganzrationalen Funktionsabschnitt f_3 gelten müssen, damit der Graph knick- und sprungfrei im Punkt C_1 in den zweiten Abschnitt übergeht.

In den Planungsunterlagen des ersten Entwurfes wird der Verlauf des dritten Deichabschnittes durch den Funktionsabschnitt f_3 modelliert. Es gilt:

$$f_3(x) = \frac{2}{703\,125} \cdot x^3 - \frac{26}{1\,875} \cdot x^2 + \frac{64}{3} \cdot x - \frac{89\,600}{9}$$

mit $1250 \leq x \leq 2000$. Dabei werden x und $f_3(x)$ in Metern (m) angegeben.

f) Prüfen Sie, ob sich der im äußeren Verlauf des wasserführenden Altrheins befindliche Punkt $E(1\,750|170)$ im eingedeichten Gebiet befinden würde und

begründen Sie auf dieser Grundlage, dass der Verlauf des dritten Deichabschnittes f_3 nicht wie geplant umgesetzt werden kann.

Im zweiten Entwurf wird der Verlauf des Hinterlanddeiches in den Planungsunterlagen durch den Graphen der abschnittweise definierten Funktion g beschrieben. Der zweite Deichabschnitt wurde auf 1 500 m bis zum Punkt C_2 verlängert. Der dritte Deichabschnitt g_3 beginnt also im Punkt $C_2(1\,500|600)$ und endet weiterhin im Punkt D. Es gilt:

$$g(x) = \begin{cases} 0{,}000864 \cdot x^2 + 1{,}5 \cdot x + 600 & \text{für } -625 \leq x < 0 \\ 600 & \text{für } 0 \leq x < 1\,500 \\ 300 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{500} \cdot x - 3\pi\right) + 300 & \text{für } 1\,500 \leq x \leq 2\,000 \end{cases}$$

Dabei werden x und g(x) in Metern (m) angegeben.

g) Prüfen Sie, ob der Polder ungefähr 6 000 000 m^3 Wasser aufnehmen kann. Lassen Sie vereinfachend die Deichform unberücksichtigt und gehen Sie von einer maximalen Höhe des Gesamtdeiches von 5 m aus.

Tatsächlich haben Flussdeiche aber eine schräge Böschung mit einem Böschungswinkel von ca. 30°. (siehe Abbildung 3.3)

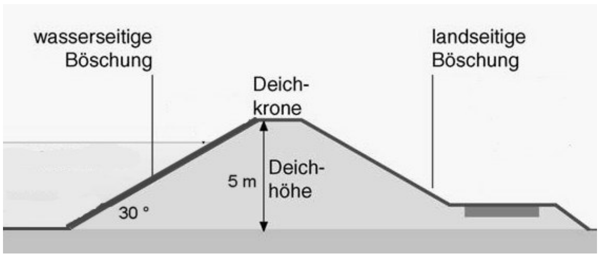

Abbildung 3.3 Querschnitt durch einen Flussdeich

h) Erläutern Sie eine mögliche Vorgehensweise, wie die tatsächliche maximal aufnehmbare Wassermenge unter Berücksichtigung der Deichform des insgesamt 5 800 m langen Gesamtdeiches berechnet werden könnte. Explizite Berechnungen sind nicht notwendig.

Begründen Sie im Sachzusammenhang, warum der so neu berechnete Wert nach wie vor die tatsächliche maximale Wassermenge nur ungefähr wiedergibt.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 3: Medikation**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	3	7	4	2	5	6	7	6	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Ein Pharmaunternehmen hat ein neuartiges Medikament A entwickelt. Um die Aufnahme und den Abbau des Medikaments im menschlichen Körper zu untersuchen, wird mehreren Probanden jeweils eine Tablette verabreicht. Durch regelmäßige Blutabnahmen und die anschließende Feststellung der im Plasma enthaltenen Wirkstoffkonzentrationen sowie Beobachtungen von Wirkungen und Nebenwirkungen lassen sich Rückschlüsse auf eine geeignete Dosierung ziehen.

Eine Testreihe nach der Einnahme des Medikaments A mit 24 Teilnehmern liefert die folgenden Mittelwerte für die Medikamentenkonzentration C in Mikrogramm pro Milliliter Blutplasma $\left(\frac{\mu g}{ml}\right)$ in Abhängigkeit von der Zeit t in Stunden (h). Dabei gibt $t = 0$ den Zeitpunkt der Einnahme an:

t in h	0	0,33	0,67	1	1,33	1,67	2	2,5	3
C in $\frac{\mu g}{ml}$	0	5,43	16,52	21,96	23,91	24,35	24,35	23,91	22,83

t in h	3,5	4	4,5	5	6	8	10	12	14
C in $\frac{\mu g}{ml}$	21,74	18,48	16,09	13,91	9,13	5,22	2,61	1,39	0,87

Tabelle 3.1: Medikation

In Abbildung 3.1 sind die Wertepaare aus Tabelle 3.1 abgebildet.

a) Beschreiben Sie die Entwicklung der Medikamentenkonzentration C in Abbildung 3.1 anhand von drei Aspekten.

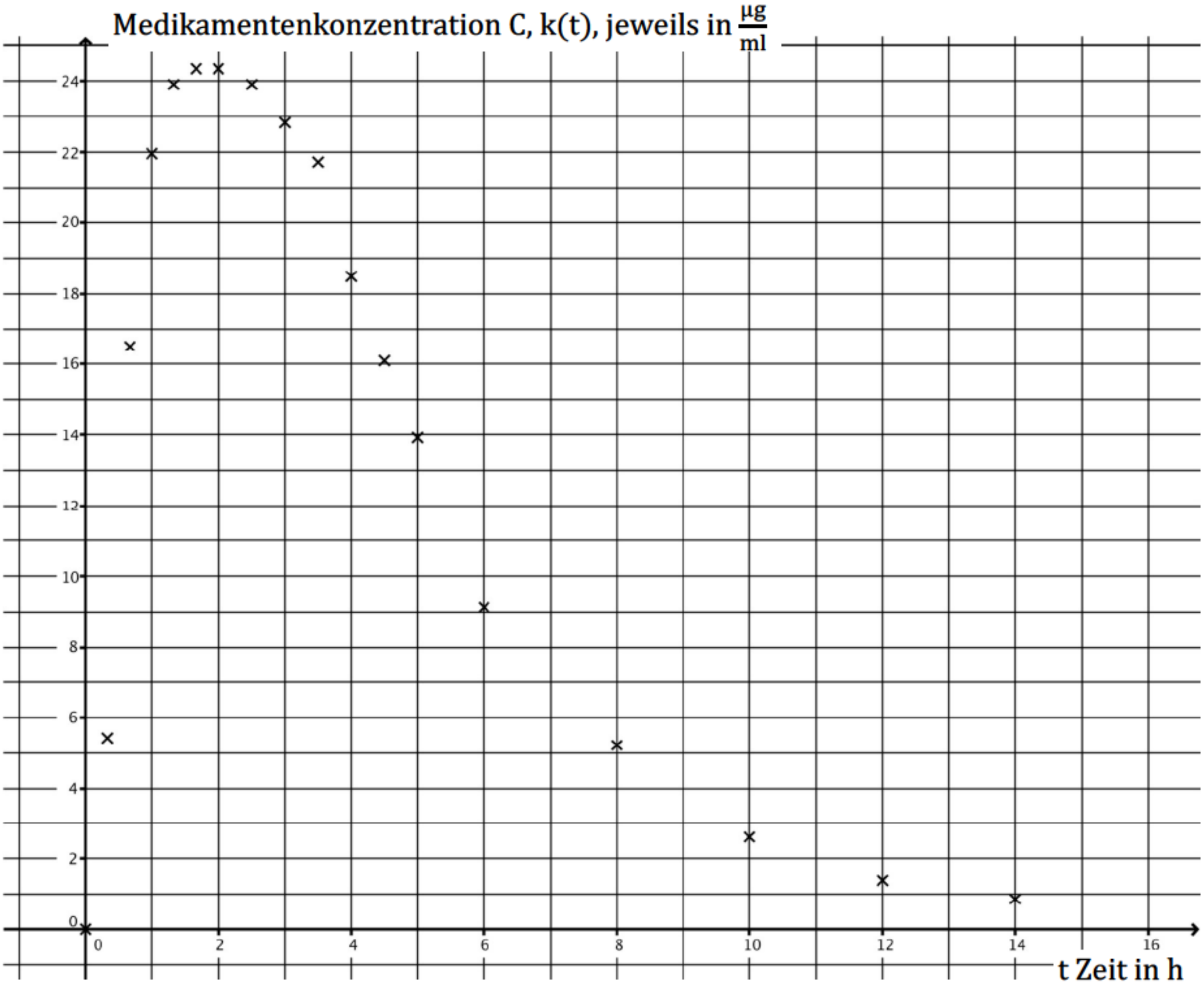

Abbildung 3.1

Das Pharmaunternehmen behauptet, dass der Verlauf der Werte dieser Testreihe (Tabelle 3.1) durch die Funktion k mit der folgenden Gleichung modelliert werden kann, wobei k(t) die Medikamentenkonzentration in Mikrogramm pro Milliliter Blutplasma $\left(\frac{\mu g}{ml}\right)$ und t die Zeit in Stunden (h) nach Einnahme des Medikaments angibt:

$$k(t) = 33{,}1 \cdot t \cdot e^{-0{,}5 \cdot t} \quad \text{mit } t \geq 0;\ \text{e ist die Eulersche Zahl}$$

b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion k in das vorhandene Koordinatensystem (Abbildung 3.1) ein.

Erläutern Sie eine Möglichkeit, die Güte der Modellierung anhand der Grafik oder der Tabelle zu beurteilen und

beurteilen Sie die Güte der Modellierung durch die Funktion k für die gegebene Testreihe anhand von zwei Aspekten.

Im Folgenden geht das Pharmaunternehmen davon aus, dass die Medikamentenkonzentration durch die Funktion k hinreichend gut modelliert werden kann.

c) Berechnen Sie den Zeitpunkt der maximalen Konzentration und

geben Sie die maximale Medikamentenkonzentration im Blutplasma an.

Gegeben ist die Aussage $\frac{1}{12} \cdot \int_0^{12} k(t)dt \approx 10{,}84$.

d) Interpretieren Sie diese Aussage im Sachzusammenhang und

geben Sie dabei auch die Einheit an.

Für Medikament A gehen Wissenschaftler des Pharmaunternehmens davon aus, dass nach zehn Stunden der Konzentrationsabbau im Blutplasma linear erfolgt. Somit ist die Konzentration im Blutplasma besser mit der folgenden abschnittsweise definierten Funktion a darstellbar:

$$a(t) = \begin{cases} k(t) & \text{für } 0 \leq t \leq 10 \\ a_2(t) & \text{für } t > 10 \end{cases}$$

e) Leiten Sie den Funktionsterm a_2 für den linearen Abschnitt her, dessen Graph näherungsweise knick- und sprungfrei an k anschließt.

Bestimmen Sie, nach welcher Zeit in Stunden und Minuten das Medikament A dann vollständig abgebaut wäre.

Die Entwicklung des nichtlinearen Bereichs einer Medikamentenkonzentration unterschiedlicher Medikamente im Körper lässt sich allgemein durch eine Funktion mit der folgenden Gleichung modellieren:

$$k_{a,b}(t) = a \cdot t \cdot e^{-b \cdot t} \quad \text{mit } a, b > 0 \text{ und } t \geq 0; \text{ e ist die Eulersche Zahl.}$$

f) Prüfen Sie, ob für die Funktion $k_{a,b}$ ein Wendepunkt existiert (es ist nur die notwendige Bedingung erforderlich), der unabhängig vom Parameter a ist.

Erläutern Sie die Bedeutung der Wendestelle im Sachzusammenhang.

In der Studie wurde festgestellt, dass Medikamente mit diesem Wirkstoff ab einer Konzentration von 10 $\frac{\mu g}{ml}$ ausreichend wirken. Medikament A wirkt ausreichend über eine Dauer von ca. fünf Stunden und 36 Minuten. Ein konkurrierendes Pharmaunternehmen behauptet, dass es ein verträglicheres Medikament B mit demselben Wirkstoff, jedoch mit weniger Nebenwirkungen entwickelt hat. Bei Medikament B soll die maximale Konzentration im Blut niedriger sein als bei Medikament A sowie eine noch längere Wirksamkeit des Inhaltstoffes vorliegen. Die maximale Konzentration des Medikaments B im Blutplasma wird nach drei Stunden und 20 Minuten erreicht und beträgt ca. 19,62 $\frac{\mu g}{ml}$.

g) Zeigen Sie, dass die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(t) = 16 \cdot t \cdot e^{-0{,}3 \cdot t} \quad \text{mit } t \geq 0; \text{ e ist die Eulersche Zahl}$$

die oben genannten Bedingungen erfüllt und

beurteilen Sie, ob das Medikament B der Konkurrenz tatsächlich länger wirkt und aufgrund einer geringeren Maximalkonzentration im Blutplasma weniger Nebenwirkungen haben könnte.

Jährlich erkranken unterschiedlich viele Menschen an der Krankheit neu, gegen die die Medikamente A und B entwickelt wurden. Der über mehrere Jahre betrachtete Verlauf der jährlichen Neuerkrankungen weist dabei folgende Eigenschaften auf:

In den Jahren 1990, 2000 sowie 2010 wurde in Deutschland die minimale Anzahl an Neuerkrankungen von etwa 5 000 Patienten pro Jahr registriert. Im Gegensatz dazu kam es in den Jahren 1995, 2005 sowie 2015 zu den höchsten Zahlen mit 25 000 Neuerkrankungen pro Jahr.

Der Zusammenhang zwischen der Anzahl der Neuerkrankten pro Jahr $\left(\frac{\text{Personen}}{\text{Jahr}}\right)$ und der Zeit x in Jahren (x = 0 entspricht dem Jahr 1990) kann mittels der folgenden Funktionsgleichung beschrieben werden:

$$n(x) = 10\,000 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5}(x - 2{,}5)\right) + 15\,000 \quad \text{mit } x \geq 0$$

h) Erläutern Sie, warum eine trigonometrische Funktion näherungsweise geeignet sein kann, diesen Zusammenhang zu beschreiben und

leiten Sie die Zahlenwerte in n(x) her.

Berechnen Sie, wie viele Neuerkrankungen es nach diesem Modell insgesamt innerhalb eines Zeitraumes von zehn Jahren gibt.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 3: Photovoltaik**

Aufgabenteil	a	b	c	d	e	f	g	h	gesamt
Erreichbar	4	4	4	4	7	6	5	6	40
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

Mit Hilfe einer Photovoltaikanlage kann Licht in elektrische Energie umgewandelt werden. Ein „Solarlog" erfasst die elektrische Leistung einer Photovoltaikanlage im Tagesverlauf. Die Anlage schaltet sich bei einer bestimmten Lichtmenge automatisch ein, liefert aber erst bei direkter Sonneneinstrahlung nennenswerte Leistungswerte, die in den Mittagsstunden maximal werden. Gegen Nachmittag sinkt die Leistung, bis sich die Anlage in der Dämmerung wieder automatisch abschaltet.

Die Photovoltaikanlage auf dem Dach einer Schule in Kiel liefert für einen Frühlingstag im April folgende gerundete Leistungswerte (in Watt), von denen einige in der Abbildung 3.1 eingezeichnet sind.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Uhrzeit	05:00	08:00	09:00	10:00	11:00	12:00	13:30	15:00	16:00	20:00
Leistung in Watt	0	100	1 630	2 725	3 400	3 600	3 100	1 630	100	0

Tabelle 3.1

a) Ergänzen Sie die fehlenden Wertepaare aus der Tabelle 3.1 im Koordinatensystem (Abbildung 3.1) und

erläutern Sie anhand von zwei Aspekten, inwiefern der oben im Text beschriebene Leistungsverlauf durch diese Werte abgebildet wird. Dabei entspricht t der Zeit in Stunden und $t = 0$ dem Zeitpunkt 00:00 Uhr.

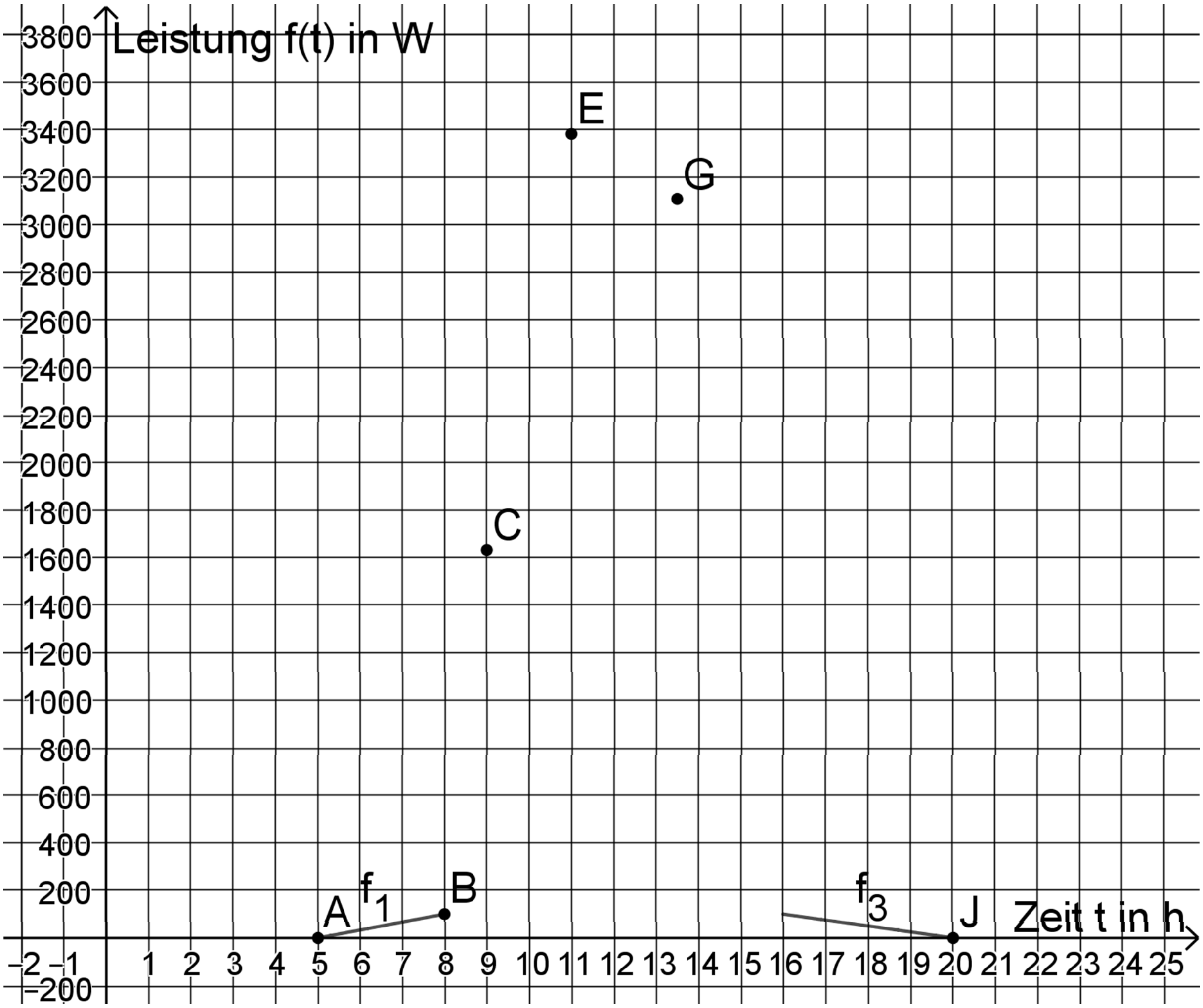

Abbildung 3.1

Der Leistungsverlauf der Photovoltaikanlage für diesen Frühlingstag im April kann durch die abschnittsweise definierte Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = \begin{cases} \frac{100}{3} \cdot t - \frac{500}{3} & \text{für} \quad 5 \leq t < 8 \\ -\frac{875}{4} \cdot (t-8) \cdot (t-16) + 100 & \text{für} \quad 8 \leq t \leq 16 \\ -25 \cdot t + 500 & \text{für} \quad 16 < t \leq 20 \end{cases}$$

annähernd beschrieben werden. Dabei gibt t die Zeit in Stunden (h) seit Mitternacht und f(t) die Leistung der Anlage in Watt (W) an.

b) Prüfen Sie rechnerisch, ob der Graph der Funktion f am Übergang vom ersten Abschnitt f_1 in den zweiten Abschnitt f_2 sprung- und knickfrei ist.

c) Zeigen Sie, dass die maximale momentane Änderungsrate der Leistung um 08:00 Uhr morgens mit einer Höhe von 1 750 $\frac{W}{h}$ erreicht wurde.

Am oben beschriebenen Tag im April wird die ab 08:00 Uhr morgens erzeugte Energie zu 100 % von der Schule genutzt. Beim örtlichen Energieversorger kostet eine Kilowattstunde (1 kWh = 1 000 Wh) 28 Cent.

d) Ermitteln Sie die Uhrzeit, zu der die Schule eine Kostenersparnis von 5,00 Euro erreicht.

Auf einem Nebengebäude der Schule soll ebenfalls eine Photovoltaikanlage installiert werden. Eine Schülergruppe des Physikkurses will dabei den optimalen Neigungswinkel der Anlage gegenüber der Horizontalen bestimmen und führt mit einem kleinen Solarmodul aus einem Experimentierkasten mehrere Messungen durch. Als Ergebnis lässt sich der Zusammenhang zwischen dem Neigungswinkel im Bogenmaß und dem Leistungsverlauf der Anlage näherungsweise durch die Funktionenschar g_p mit der Gleichung

$$g_p(t) = (-0{,}5 \cdot t^2 + 12{,}4 \cdot t - 62{,}5) \cdot \sin\left(\frac{45}{17} \cdot p\right) \quad \text{mit } 8 \leq t \leq 16 \text{ und } 0 < p < 1$$

beschreiben. Dabei gibt t die Zeit in Stunden, $g_p(t)$ die Leistung des Solarmoduls in Watt und der Parameter p den Neigungswinkel der Anlage im Bogenmaß an.

e) Zeigen Sie, dass der Zeitpunkt der maximalen Leistung unabhängig vom Parameter p ist und

ermitteln Sie den Neigungswinkel α des Moduls in Grad, bei dem die maximale Leistung erreicht wird.

Ein Einflussfaktor für die Lichtmenge und damit für den Ertrag einer Photovoltaikanlage an verschiedenen Orten der Erde ist die Tageslänge, also die Zeit zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang.
Die Schülergruppe untersucht nun die verschiedenen Tageslängen in Kiel und in München aus dem Schaltjahr 2016 (Tag 1 ist der 01. Januar 2016, das Jahr 2016 hatte 366 Tage). Die Wertepaare aus München sind als Punkte in Abbildung 3.2 dargestellt. Dabei ist am 172. Tag die Tageslänge maximal und am 355. Tag minimal.

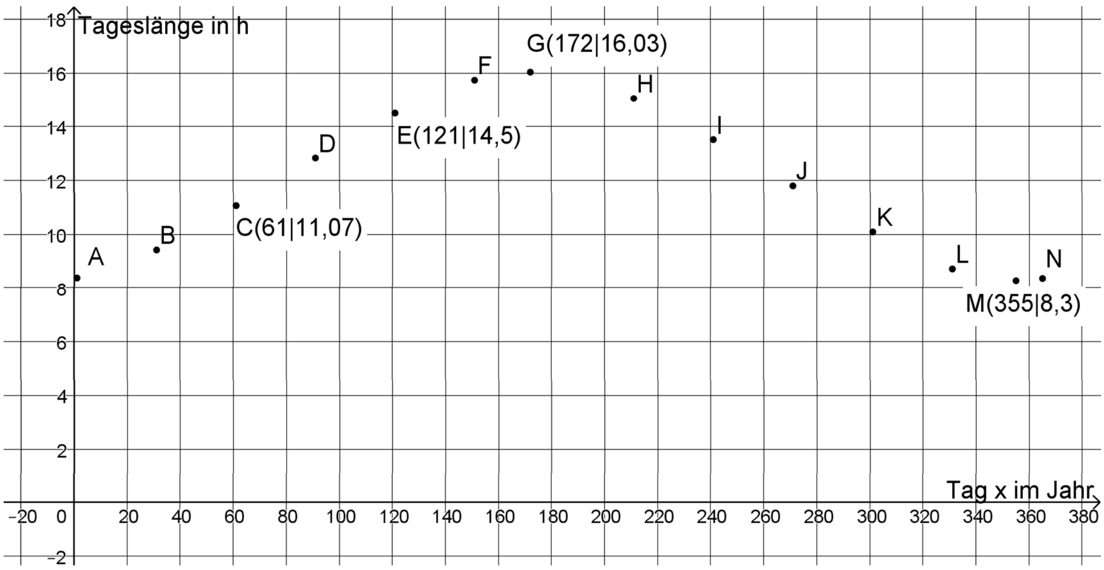

Abbildung 3.2

f) Erläutern Sie anhand von zwei Aspekten, inwiefern zur funktionalen Beschreibung der Wertepaare eine trigonometrische Funktion näherungsweise geeignet scheint und

ermitteln Sie aus der Graphik die Werte der Parameter a, b, c und d der Funktion m mit der Gleichung

$$m(x) = a \cdot \cos\big(b \cdot (x - c)\big) + d \quad \text{mit } 1 \leq x \leq 366,$$

die die Tageslänge in München in Abhängigkeit vom Tag im Jahr annähernd beschreibt. Dabei gibt x den Tag im Jahr und m(x) die Tageslänge am Tag x in Stunden in München an.

Zum Vergleich mit Kiel hat die Schülergruppe eine entsprechende Modellierung der Tageslängen in Kiel als Funktion k mit der Gleichung

$$k(x) = 5 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{366} \cdot (x - 80)\right) + 12 \quad \text{mit } 1 \leq x \leq 366$$

aufgestellt. Dabei gibt x den Tag im Jahr und k(x) die Tageslänge am Tag x in Stunden in Kiel an.

g) Vergleichen Sie im Sachzusammenhang die mittlere Änderungsrate aus München zwischen dem 61. Tag und dem 121. Tag (siehe Abbildung 3.2) mit der mittleren Änderungsrate aus Kiel im gleichen Zeitintervall.

Ein Schüler der Gruppe möchte die gesamten Tageslichtstunden in Kiel von Anfang Mai bis Ende August ermitteln und stellt folgenden mathematischen Ausdruck auf:

$$\int_{122}^{244} k(x)\,dx$$

h) Berechnen Sie den Ausdruck,

begründen Sie die Wahl der Integrationsgrenzen und

nehmen Sie zum mathematischen Ansatz kritisch Stellung.

Name des Prüflings:	

Punkteverteilung **Aufgabe 3: Schülerfirma**

Aufgabenteil	a	b	c	D	e	f	g	h	i	gesamt
Erreichbar	6	4	5	4	2	6	5	4	4	40
Erstkorrektur										
Zweitkorrektur										

Im Folgenden gilt, sofern nicht anders angegeben, für die verwendeten Parameter: $a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ und die Variablen: $x, t, \ldots \in \mathbb{R}$.

An einem Beruflichen Gymnasium findet im Profil „Wirtschaft“ für die Schülerinnen und Schüler des 12. Jahrgangs eine Projektwoche zum Thema „Wir begleiten ein Start-Up“ statt. Zunächst sollen alle Arbeitsgruppen eine Modellrechnung für ihr zu begleitendes Start-up durchführen.

Eine Arbeitsgruppe begleitet das Start-up „Protect“, das kreative Schutzhüllen für Tablets und Smartphones selbst herstellt und verkauft. Nach Wunsch des Käufers können die Schutzhüllen mit Monogrammen oder selbst entwickelten Emblemen individuell gestaltet werden.

Zunächst sichtet die Arbeitsgruppe ihre Unterlagen aus dem BWL-Unterricht und stellt folgende Formel- und Begriffsammlung zusammen:

x Absatzmenge bzw. Produktionsmenge in Stück. Dabei entspricht die Absatzmenge der Produktionsmenge, die im Folgenden nur noch als Menge bezeichnet werden.

$p(x)$ Stückpreis in EUR in Abhängigkeit von der Menge x.

$E(x)$ Erlös in EUR in Abhängigkeit von der Menge x. Der Erlös ergibt sich aus dem Produkt aus Preis und Menge.

$K(x)$ Gesamtkosten in EUR in Abhängigkeit von der Menge x. Diese setzen sich aus den Fixkosten (mengenunabhängig) und den variablen Kosten (mengenabhänigig) zusammen.

$G(x)$ Gewinn in EUR in Abhängigkeit von der Menge x. Es gilt: $G(x) = E(x) - K(x)$

Zunächst nimmt die Arbeitsgruppe eine Monopolstellung des Start-ups an und findet in einem BWL-Buch die in Abbildung 3.1 dargestellte Erlössituation eines Monopolisten (Alleinanbieters).

Verschiedene Wertepaare der dazugehörigen, ganzrationalen Kostenfunktion dritten Grades sind in der Tabelle 3.1 dargestellt.

x in Stück	0	3	12	18	25
K(x) in EUR	3 300	4 000	4 500	5 000	8 000

Tabelle 3.1

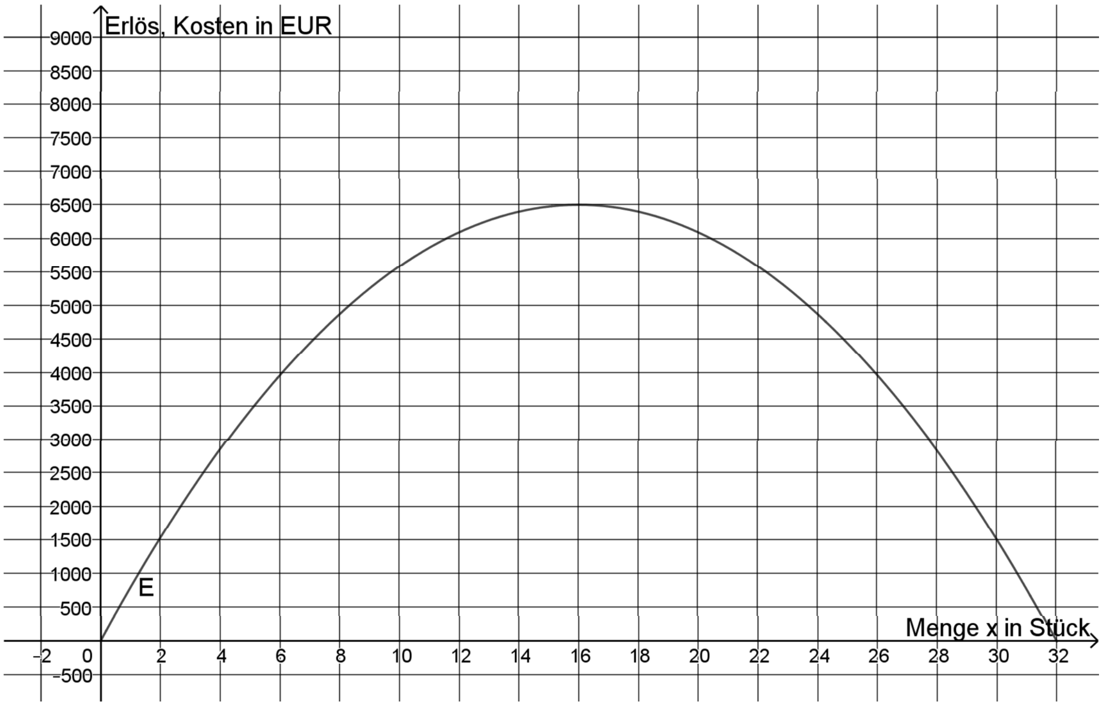

Abbildung 3.1

a) Geben Sie die erlösmaximale Menge sowie den maximalen Erlös an,

skizzieren Sie mithilfe der Wertepaare aus Tabelle 3.1 den Graphen der Kostenfunktion in Abbildung 3.1 und

kennzeichnen Sie in der Graphik die Gewinnzone.

Da auch andere Unternehmen Schutzhüllen anbieten, tritt das Start-up nicht als Monopolist auf. Somit kann die gefundene Graphik nicht für die Modellrechnungen herangezogen werden.

Die Arbeitsgruppe trifft folgende Annahmen:

Die Kostenfunktion K_1 ist eine streng monoton steigende ganzrationale Funktion dritten Grades. Die Fixkosten belaufen sich auf 450,00 EUR (beispielsweise für Mieten, Arbeitsanleitungen, Schablonen usw.). Für 100 verkaufte Schutzhüllen kalkuliert die Arbeitsgruppe mit Gesamtkosten in Höhe von 950,00 EUR. Der geringste Kostenanstieg beträgt 0,2 $\frac{\text{EUR}}{\text{Stück}}$ und wird bei 700 verkauften Schutzhüllen erreicht.

b) Stellen Sie die Bedingungsgleichungen auf, mit denen sich die Funktionsgleichung der Funktion K_1 bestimmen ließe.
Hinweis: Die Lösung des Gleichungssystems ist nicht erforderlich.

Der Stückpreis für die Schutzhüllen soll einheitlich 4,95 EUR betragen. Aus den getroffenen Annahmen ermittelt die Arbeitsgruppe die Gewinnfunktion G_1 mit der Gleichung:

$$G_1(x) = -\frac{3}{793\,750} \cdot x^3 + \frac{126}{15\,875} \cdot x^2 - \frac{2\,047}{2\,540} \cdot x - 450 \quad \text{mit } x \geq 0$$

Dabei gibt x die Menge in Stück und $G_1(x)$ den Gesamtgewinn in EUR an.

Die Break-Even-Analyse untersucht, ab welcher Menge das Unternehmen erstmals keinen Verlust mehr erwirtschaftet.

c) Bestimmen Sie die Menge x_s, ab der bei der Schutzhüllenproduktion erstmals Gewinn erwirtschaftet wird,

berechnen Sie $G_1'(x_s)$ und

interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

d) Berechnen Sie die gewinnmaximale Menge und den maximalen Gewinn, den das Start-up aus dem Schutzhüllenverkauf erzielt.

Nach einer genaueren Internetrecherche stellt die Arbeitsgruppe fest, dass die von ihnen kalkulierten Fixkosten zu niedrig angesetzt waren und ein höherer Wert angenommen werden muss.

Eine Mitschülerin behauptet, dass dieser Umstand keinen Einfluss auf die gewinnmaximale Menge und das Gewinnmaximum hat.

e) Beurteilen Sie die Aussage der Mitschülerin.

Die Arbeitsgruppe empfiehlt, den Stückpreis auf 7,95 EUR anzuheben. Zu Werbezwecken soll der alte Stückpreis von 4,95 EUR für die ersten 400 verkauften Schutzhüllen gelten.

f) Stellen Sie die Gleichung der abschnittsweise definierten Erlösfunktion E_2 auf, die die neuen Überlegungen berücksichtigt und

begründen Sie, warum der daraus resultierende sprungfreie Graph der Gewinnfunktion G_2 an der Stelle $x = 400$ nicht knickfrei sein kann.

Ein Schüler findet nicht alle Voraussetzungen bei der Kostenfunktion K_1 ausreichend berücksichtigt und pflegt einen Parameter a mit $a > 0$ in die Kostenfunktion ein, so dass die neue Kostenfunktion K_a lautet:

$$K_a(x) = \frac{1}{264\,000} \cdot x^3 - \frac{7}{880} \cdot x^2 + a \cdot x + 450 \quad \text{mit } x \geq 0$$

Dabei gibt x die Menge in Stück und $K_a(x)$ die Gesamtkosten in EUR an.

Allerdings stellt die Arbeitsgruppe fest, dass für kleinere a die Kostenfunktion K_a in einem gewissen Bereich fällt oder sogar negative Werte annimmt. Da die Gruppe einen solchen Kostenverlauf für realitätsfremd hält, soll der Parameter a weiter eingeschränkt werden.

g) Bestimmen Sie, für welche Werte des Parameters a der Kostenverlauf s-förmig und durchgehend steigend wäre.

Die Verkaufszahlen der Schutzhüllen lassen sich zu Beginn mit der Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = 112 \cdot e^{-0{,}056 \cdot t} \qquad \text{mit } t \geq 0$$

beschreiben. Dabei gibt t die Zeit in Tagen ($t = 0$ entspricht dem Verkaufsstart) und $f(t)$ die verkaufte Stückzahl pro Tag $\left(\frac{\text{Stück}}{\text{Tag}}\right)$ an.

h) Berechnen Sie den Ausdruck

$$\frac{1}{20} \cdot \int_0^{20} f(t)\,dt \qquad \text{mit } t \geq 0$$

und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Der Gesamtabsatz F in Stück kann durch eine beschränkte Wachstumsfunktion der Form

$$F(t) = S - 2\,000 \cdot e^{-0{,}056 \cdot t} \quad \text{mit } t \geq 0$$

beschrieben werden.

i) Begründen Sie, dass $S = 2\,000$ gelten muss und

ermitteln Sie den Tag, an dem die ersten 400 Schutzhüllen verkauft wurden und somit der Stückpreis auf 7,95 EUR angehoben werden muss.