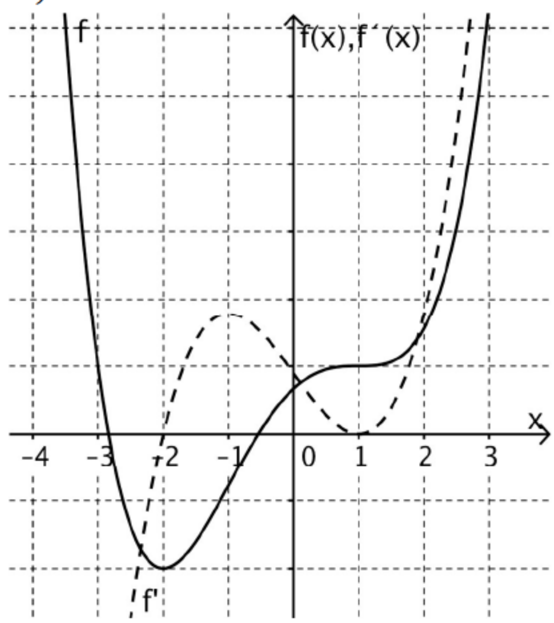
Aufgabe 1 mit Analytischer Geometrie:

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>A1</td><td>Der Prüfling …</td><td>Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:
Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.
<u>Bemerkung</u>:
Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.</td><td></td></tr>
<tr><td>1a</td><td>entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td><td>
<table>
<tr><th></th><th>wahr</th><th>falsch</th></tr>
<tr><td>$f(-0{,}4) = f(0{,}4)$</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Für den Grad n der ganzrationalen Funktion f gilt: $n \geq 5$.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>$f'(-0{,}4) < 0$</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>$f''(0) = 0$</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>$\int_0^{0,3} f(x)dx \approx 0{,}6$ [FE]</td><td></td><td>X</td></tr>
</table>
</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1b</td><td>b1)
ergänzt die fehlenden Angaben und

b2)
skizziert den Verlauf der Ableitungsfunktion f′.</td><td>b1)
$\int_2^{\mathbf{5}} (\mathbf{f}(\mathbf{x}))d\mathbf{x} = F(5) - F(\mathbf{2})$

b2)

</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1c</td><td>c1)
gibt die Gleichung der ersten Ableitung von f an und</td><td>c1)
$f'(x) = \cos(x) - x \cdot \sin(x)$

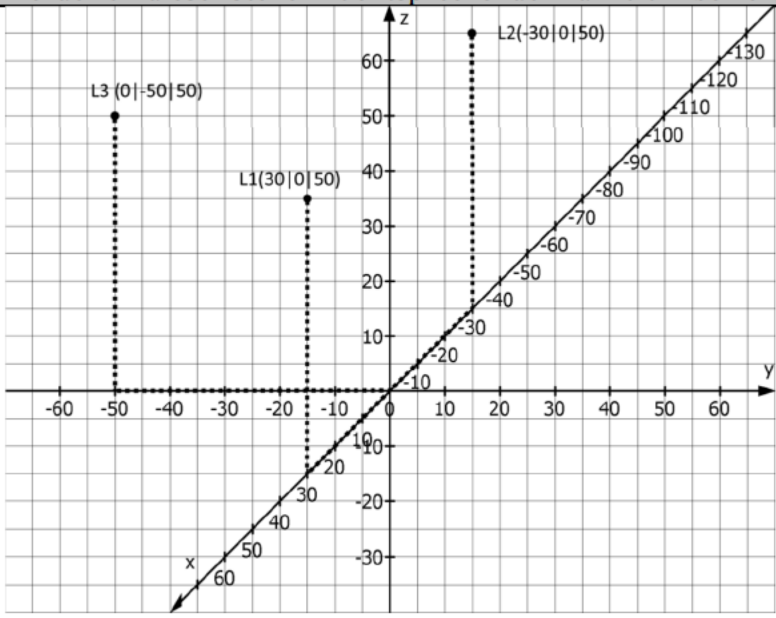
Fortsetzung nächste Seite</td><td>5</td></tr>
</table>

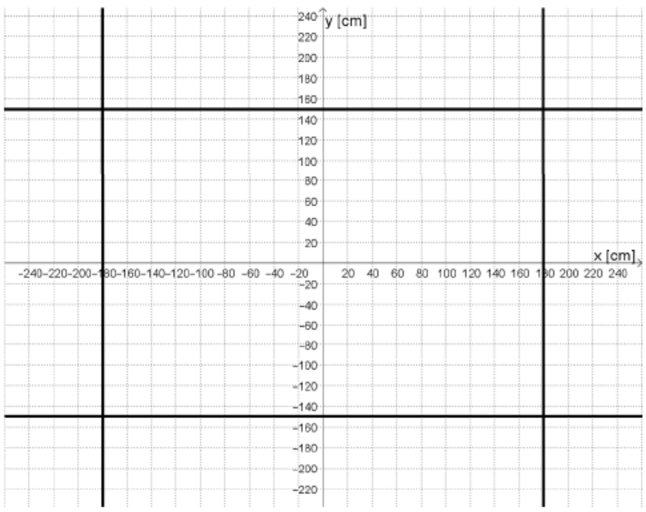
<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>zu 1c</td><td>c2)
entscheidet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründet die Entscheidung.</td><td>c2)
<table>
<tr><th>Aussage</th><th>Entscheidung und Begründung</th></tr>
<tr><td>Der Graph der Funktion g mit $g(x) = \sin(\pi \cdot x)$ ist identisch mit dem Graphen der Funktion h mit $h(x) = \cos\big(\pi(x - 0,5)\big)$.</td><td>Die Aussage ist wahr.
Die Periodenlänge sowohl von g als auch von h ist $p = 2$. Eine Sinusfunktion kann auch durch eine Kosinusfunktion dargestellt werden, indem man sie entlang der Abszissenachse verschiebt.
In diesem Fall muss der Graph vom Funktionsterm $\cos(\pi \cdot x)$ noch um ein Viertel der Periodenlänge nach rechts verschoben werden, somit entsteht $h(x) = \cos\big(\pi(x - 0,5)\big)$.</td></tr>
<tr><td>Die Funktion k mit $k(x) = 2 \cdot \sin(3 \cdot x) + 1$ hat den Wertebereich
$W = [-1; 3]$.</td><td>Die Aussage ist wahr.
Verantwortlich für die Wertemenge einer Sinusfunktion sind die Amplitude sowie die Verschiebung des Graphen in Ordinatenrichtung.
Bei k ist der Graph um eine LE in Ordinatenrichtung verschoben im Vergleich zur Funktion $f(x) = \sin(x)$. Die Amplitude beträgt $a = 2$, somit befinden sich die Ordinatenwerte von k zwischen
$y_{min} = 1 - 2 = -1$ und
$y_{max} = 1 + 2 = 3$.
Damit gilt für die Wertemenge $W = [-1; 3]$.</td></tr>
</table></td><td></td></tr>
<tr><td>1d</td><td>d1)
entscheidet, ob die Aussage wahr oder falsch ist, und</td><td>d1)
<table>
<tr><th></th><th>wahr</th><th>falsch</th></tr>
<tr><td>Der Punkt $P_1(1|0|1)$ liegt in der Ebene E_1.</td><td>X</td><td></td></tr>
</table>
Fortsetzung nächste Seite</td><td>5</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
zu 1d	d2) entscheidet und begründet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.	d2) <table><tr><th>Aussage</th><th>Entscheidung und Begründung</th></tr><tr><td>Aus dem Ausdruck $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=0$ ist abzuleiten, dass die Richtungs-vektoren der Ebene E_1 orthogonal zueinander liegen.</td><td>Es handelt sich bei dem Ausdruck um das Skalarprodukt, das, sofern es Null wird, immer auf eine orthogonale Lage der beteiligten Vektoren schließen lässt. Da dies hier gegeben ist, ist diese Aussage wahr.</td></tr><tr><td>Die beiden Richungsvektoren der Ebene E_1 weisen die gleiche Länge auf.</td><td>Die Aussage ist falsch, da $\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{1^2}=1$ $\left\|\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ ungleich ist.</td></tr></table>	
1e	e1) gibt eine Geradengleichung für die Gerade g an und e2) untersucht, ob die Gerade g parallel zur xy-Ebene verläuft.	e1) $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}+t\cdot\left(\begin{pmatrix}0\\8\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}\right)$ $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-4\\8\\0\end{pmatrix}$ e2) Die Gerade g muss parallel zur xy-Ebene verlaufen, da die Punkte P1 und P2 die gleiche z-Koordinaten aufweisen. Folglich muss die Gerade auf der Höhe $z=3$ verlaufen und ist damit parallel zur xy-Ebene.	5
1f	f1) zeigt, dass es sich bei dem von den drei Punkten aufgespannten Dreieck nicht um ein gleichseitiges Dreieck handelt.	f1) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\lvert\overrightarrow{AC}\rvert\neq\lvert\overrightarrow{BC}\rvert$ kein gleichseitiges Dreieck $3=3\neq\sqrt{6}$ *Fortsetzung nächste Seite*	5

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
zu 1f	f2) bestimmt eine Gleichung der Geraden, die durch den Punkt A und den Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ verläuft.	f2) $\overrightarrow{OP}_{Mitte} = \begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3{,}5\\2\\1{,}5\end{pmatrix}$ $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1-3{,}5\\1-2\\1-1{,}5\end{pmatrix}$ $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-2{,}5\\-1\\-0{,}5\end{pmatrix}$	
			30

Aufgabe 2: Radiotherapie

	Anforderungen	Modelllösungen	
A2	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
2a	zeichnet die Punkte ein und erläutert die Schwierigkeit, Koordinaten von Punkten aus einem dreidimensionalen, kartesischen Koordinatensystem abzulesen.	 Durch die Darstellung in 3D auf einem 2D Medium werden Punkte mit unterschiedlichen 3D-Koordinaten in der 2D-Darstellung an der gleichen Position dargestellt. Folglich ist der Rückgriff von der 2D-Darstellung auf die Koordinaten in der 3D-Darstellung nicht eindeutig möglich.	5
2b	ordnet den Behandlungsstrahl einem der Linearbeschleuniger zu und prüft, ob der Behandlungsstrahl durch diese Geradengleichung beschrieben werden kann.	Der Ortsvektor des Ausgangs von Linearbeschleunigers 2 lautet ebenfalls $\overrightarrow{OL_2} = \begin{pmatrix} -30 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix}$. Folglich muss es der Linearbeschleuniger 2 sein. Der Richtungsvektor des Behandlungsstrahles müsste sich aus der Differenz der Ortsvektoren des Behandlungszieles und des Ausgangs von Linearbeschleuniger 2 ergeben: $\overrightarrow{L_2B} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -30 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 5 \\ -25 \end{pmatrix}$ Der Richtungsvektor der Geraden g entspricht genau einem Fünftel des Vektors $\overrightarrow{BL_2}$. $\frac{\overrightarrow{L_2B}}{5} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 5 \\ -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ Folglich kann der Behandlungsstrahl von Linearbeschleuniger 2 durch die Geradengleichung beschrieben werden.	4

	Anforderungen	Modelllösungen	
2c	berechnet die Länge des Behandlungsstrahls bis zum Bestrahlungsziel.	Betrag des Richtungsvektors des Behandlungsstrahlens des Linearbeschleunigers 2: $\lvert\overrightarrow{L_2B}\rvert = \left\lvert \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -30 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} \right\rvert \approx 47{,}43$ [cm]	3
2d	beurteilt, ob die Therapie als erfolgsversprechend eingeschätzt werden kann.	Entnommen aus der Grafik: Der Fokussierungsgrad liegt bei einem Abstand von 32 cm bei ca. 61 %. Da der Fokussierungsgrad des Behandlungsstrahls mit ca. 61 % deutlich über dem Grenzwert von 50 % liegt, kann mit einem erfolgreichen Therapieverlauf gerechnet werden. (61 % > 50 %)	3
2e	prüft, ob diese Voraussetzung für den Linearbeschleuniger 1 und den Linearbeschleuniger 3 gegeben ist.	Richtungsvektoren der Behandlungsstrahlen der Linearbeschleuniger: $\overrightarrow{L_1B} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 5 \\ -25 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{L_3B} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -50 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 55 \\ -25 \end{pmatrix}$ Winkel zwischen den Richtungsvektoren der Behandlungsstrahlen: $\cos\alpha = \dfrac{\begin{pmatrix} -20 \\ 5 \\ -25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 55 \\ -25 \end{pmatrix}}{\left\lvert \begin{pmatrix} -20 \\ 5 \\ -25 \end{pmatrix} \right\rvert \cdot \left\lvert \begin{pmatrix} 10 \\ 55 \\ -25 \end{pmatrix} \right\rvert}$ $\alpha \approx 69{,}34° > 30°$ Da der Schnittwinkel größer als 30° ist, ist keine Schädigung zu erwarten.	4
2f	skizziert die Grenzen des Gefahrenbereiches in der Abbildung.		4
2g	prüft, ob der Punkt A in der Ebene E_7 liegt.	Ebene E_7 in Koordinatendarstellung: $E_7: -y + z = 200$ Einsetzen von A in die Ebenengleichung: $-(-150) + 50 = 200$ $200 = 200$ Damit liegt der Punkt A in der Ebene E_7.	2

	Anforderungen	Modelllösungen	
2h	ermittelt den Schnittpunkt des Behandlungs-strahls des Line-arbeschleunigers 1 mit dem Fuß-boden und	Geradengleichung des Behandlungsstrahls (Linearbeschleuniger 1): $g_{L_1}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 5 \\ -25 \end{pmatrix}$ Schnittpunkt des Behandlungsstrahls (Linearbeschleuniger 1) mit dem Fußboden: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ -60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 5 \\ -25 \end{pmatrix}$ $x = -58 \quad y = 22 \quad u = \frac{22}{5}$ $S(-58\| 22\| -60)$	5
	prüft, ob eine Gefährdung ge-geben ist.	Da die Koordinaten innerhalb des Gefahrenbereichs liegen, ist eine Gefährdung ausgeschlossen.	
			30

Aufgabe 1 mit Linearer Algebra:

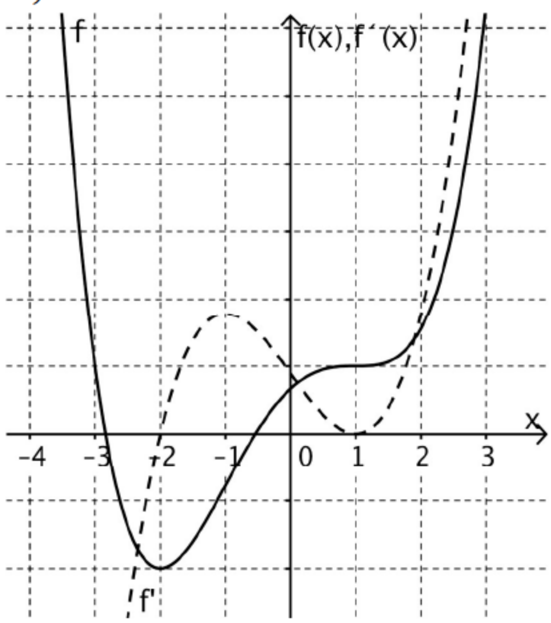
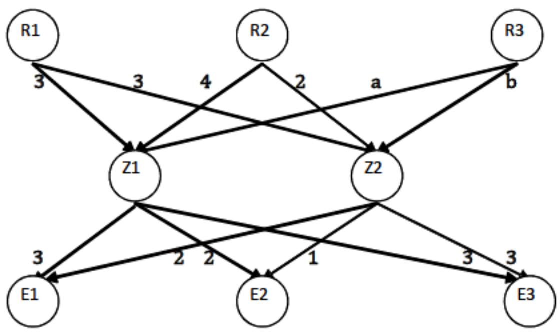
	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A1	Der Prüfling …	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. <u>Bemerkung</u>: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	
1a	entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.	(siehe Tabelle unten)	5
1b	b1) ergänzt die fehlenden Angaben und b2) skizziert den Verlauf der Ableitungsfunktion f'.	b1) $\int_2^5 (\mathbf{f}(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x} = F(5) - F(\mathbf{2})$ b2) 	5
1c	c1) gibt die Gleichung der ersten Ableitung von f an und	c1) $f'(x) = \cos(x) - x \cdot \sin(x)$ *Fortsetzung nächste Seite*	5

Tabelle zu 1a:

	wahr	falsch
$f(-0{,}4) = f(0{,}4)$		X
Für den Grad n der ganzrationalen Funktion f gilt: $n \geq 5$.	X	
$f'(-0{,}4) < 0$	X	
$f''(0) = 0$	X	
$\int_0^{0,3} f(x)dx \approx 0{,}6$ [FE]		X

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>zu 1c</td><td>c2)
entscheidet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründet die Entscheidung.</td><td>c2)
<table>
<tr><th>Aussage</th><th>Entscheidung und Begründung</th></tr>
<tr><td>Der Graph der Funktion g mit
$g(x) = \sin(\pi \cdot x)$
ist identisch mit dem Graphen der Funktion h mit
$h(x) = \cos\big(\pi(x - 0{,}5)\big)$.</td><td>Die Aussage ist wahr.
Die Periodenlänge sowohl von g als auch von h ist $p = 2$. Eine Sinusfunktion kann auch durch eine Kosinusfunktion dargestellt werden, indem man sie entlang der Abszissenachse verschiebt.
In diesem Fall muss der Graph vom Funktionsterm $\cos(\pi \cdot x)$ noch um ein Viertel der Periodenlänge nach rechts verschoben werden, somit entsteht $h(x) = \cos\big(\pi(x - 0{,}5)\big)$.</td></tr>
<tr><td>Die Funktion k mit
$k(x) = 2 \cdot \sin(3 \cdot x) + 1$
hat den Wertebereich
$W = [-1; 3]$.</td><td>Die Aussage ist wahr.
Verantwortlich für die Wertemenge einer Sinusfunktion sind die Amplitude sowie die Verschiebung des Graphen in Ordinatenrichtung.
Bei k ist der Graph um eine LE in
Ordinatenrichtung verschoben im Vergleich zur Funktion $f(x) = \sin(x)$. Die Amplitude beträgt $a = 2$, somit befinden sich die Ordinatenwerte von k zwischen
$y_{min} = 1 - 2 = -1$ und
$y_{max} = 1 + 2 = 3$.
Damit gilt für die Wertemenge $W = [-1; 3]$.</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>1d</td>
<td>entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.</td>
<td>
<table>
<tr><th></th><th>wahr</th><th>falsch</th></tr>
<tr><td>Es gilt: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0,5 & -0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Es gilt:
$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0,5 & -0,5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1,5 & -0,5 \end{pmatrix}$</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Ist A eine Matrix vom Typ 2x3 und B eine Matrix vom Typ 3x2, so ist $A \cdot B$ eine Matrix vom Typ 2x2.</td><td>X</td><td></td></tr>
<tr><td>Seien A, B, C und X quadratische Matrizen vom gleichen Typ.
Dann hat die Matrizengleichung
$A \cdot X \cdot B = C$ die Lösung $X = A^{-1} \cdot B^{-1} \cdot C$.</td><td></td><td>X</td></tr>
<tr><td>Wenn die Matrix A die Inverse zur Matrix B ist, gilt: $A \cdot B = B \cdot A$.</td><td>X</td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td>5</td>
</tr>
<tr>
<td>1e</td>
<td>untersucht, ob es reelle Zahlen für x und y gibt, so dass B die zu A inverse Matrix ist.</td>
<td>
Es muss gelten: $A \cdot B = E$
also: $\begin{pmatrix} x & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,8 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Es folgt das Gleichungssystem:
I. $0,2x + 1,6 = 1$
II. $0,8 - 0,8 = 0$
III. $0,4x + 2y = 0$
IV. $1,6 - y = 1$
mit den Lösungen $x = -3$ und $y = 0,6$.
Für diese Zahlen ist B die inverse Matrix zu A.
</td>
<td>5</td>
</tr>
<tr>
<td>1f</td>
<td>f1)
zeichnet das zugehörige Materialverflechtungsdiagramm und

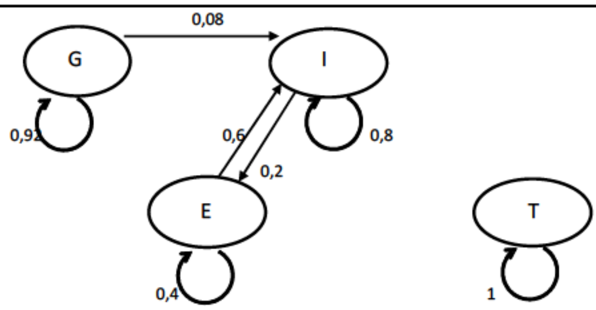
erstellt die zugehörende Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix A und die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B.</td>
<td>
f1)


Aus den Tabellen ergeben sich die Matrizen:
$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \\ a & b \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
Fortsetzung nächste Seite
</td>
<td>5</td>
</tr>
</table>

zu 1f	f2) bestimmt die Elemente a und b so, dass für die Rohstoff-Endprodukt-Matrix C gilt: $C = \begin{pmatrix} 15 & 9 & 18 \\ 16 & 10 & 18 \\ 7 & 4 & 9 \end{pmatrix}$,	f2) Es muss gelten: $A \cdot B = C$, also $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 9 & 18 \\ 16 & 10 & 18 \\ 7 & 4 & 9 \end{pmatrix}$. Es folgt das Gleichungssystem: I. $3a + 2b = 7$ II. $2a + b = 4$ III. $3a + 3b = 9$ mit den Lösungen: $a = 1$ und $b = 2$.	
	f3) erläutert die Aussage des Elementes c_{23}.	f3) Das Element $c_{23} = 18$ besagt, dass 18 ME des Rohstoffes R2 für die Produktion einer ME des Endproduktes E3 benötigt werden.	
			30

Aufgabe 2: Gelbverzwergungsvirus

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A2	Der Prüfling ...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	
2a	erläutert die Bedeutung der Elemente b_{13} und b_{44} im Sachzusammenhang, entscheidet begründet, welche der Matrizen keine geeigneten Übergangsmatrizen darstellen können.	Das Element $b_{13} = 0$ besagt, dass innerhalb einer Woche keine erkrankten Pflanzen wieder gesund werden, das Element $b_{44} = 1$ beschreibt den Übergang von den toten Pflanzen zu den toten Pflanzen. 100 % der Toten bleiben auch nach einer Woche tot. Es müsste $a_{44} = 1$ gelten, da dies bei A nicht der Fall ist, ist A keine geeignete Übergangsmatrix. B ist nicht geeignet, da die Spaltensumme der 1. und 3. Spalte nicht 1 beträgt, und sie somit nicht stochastisch sein kann. Nur C erfüllt beide Bedingungen und ist geeignet.	6
2b	bestimmt die Zusammensetzung des Pflanzenbestandes auf Feld II eine Woche nach Untersuchungsbeginn. untersucht, ob die Aussage richtig ist.	Gegeben ist $\overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 18\,000 \\ 2\,000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es gilt: $\overrightarrow{v_1} = M \cdot \overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 14\,400 \\ 3\,000 \\ 2\,500 \\ 100 \end{pmatrix}$. Nach einer Woche gibt es nach dem Modell 14 400 gesunde Pflanzen, 3 000 infizierte, 2 500 erkrankte und 100 abgestorbene. Nach 4 Wochen gilt: $\overrightarrow{v_4} = M^4 \cdot \overrightarrow{v_0} \approx \begin{pmatrix} 7\,373 \\ 5\,357 \\ 5\,990 \\ 1\,280 \end{pmatrix}$. Also sind insgesamt 1 280 Pflanzen abgestorben. Das sind weniger als $\frac{1}{10}$ von 20 000. Es sind also mehr als $\frac{9}{10}$ der Pflanzen noch lebendig. Die Aussage ist wahr.	5
2c	erläutert den Zusammenhang zwischen den Vektoren $\vec{w}$ und $\vec{v}$ und berechnet den Vektor $\vec{w}$ für $\vec{v} = \begin{pmatrix} 11\,520 \\ 3\,990 \\ 4\,115 \\ 375 \end{pmatrix}$.	Durch Multiplikation der Matrix M^{-1} mit dem Bestandsvektor $\vec{w}$ wird der Bestandsvektor $\vec{v}$ der Vorwoche berechnet. Aus der Gleichung folgt: $\vec{w} = M \cdot \vec{v}$. Aus $\vec{w} = M \cdot \begin{pmatrix} 11\,520 \\ 3\,990 \\ 4\,115 \\ 375 \end{pmatrix}$ folgt $\vec{w} = \begin{pmatrix} 9\,216 \\ 4\,780{,}5 \\ 5\,223{,}25 \\ 780{,}25 \end{pmatrix}$.	4

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
2d	stellt ein Gleichungssystem auf und bestimmt die fehlenden Werte der Matrix N.	Es muss gelten: $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0{,}6 & 0 \\ 0 & d & 0{,}4 & 0 \\ 0 & e & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16\,000 \\ 2\,000 \\ 2\,000 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15\,200 \\ 3\,600 \\ 1200 \\ 0 \end{pmatrix}$ Es folgt das Gleichungssystem: I. $a \cdot 16\,000 = 15\,200$ II. $b \cdot 16\,000 + c \cdot 2\,000 + 0{,}6 \cdot 2\,000 = 3\,600$ III. $d \cdot 2\,000 + 0{,}4 \cdot 2\,000 = 1\,200$ IV. $e \cdot 2\,000 = 0$ V. $a + b = 1$ mit den Lösungen: $a = 0{,}95$; $b = 0{,}05$; $c = 0{,}8$; $d = 0{,}2$ und $e = 0$. Es gilt also: $N = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.	5
2e	stellt den Übergangsgraphen zur Matrix N mit den vom Schüler genannten Werten dar und begründet, ob die Behauptung zutrifft.	 Es wird deutlich, dass Übergänge zwischen den Bereichen G, I und E stattfinden, während der Bereich T isoliert ist. Im Sachzusammenhang bedeutet das, dass sich die Anzahl der toten Pflanzen laut Modell nicht verändern wird, sie bleibt also bei 0, die Aussage des Schülers trifft zu,	5
2f	gibt die zugehörige Populationsmatrix P an und beschreibt, wie sich die Population in diesem Fall entwickeln wird, und bestimmt Werte für a und b so, dass die oben dargestellte Entwicklung einen zyklisch periodischen Prozess beschreibt, bei dem die Gesamtpopulation weder wächst noch schrumpft.	Die Populationsmatrix lautet: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 80 \\ 0{,}025 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$ Da $80 \cdot 0{,}025 \cdot 0{,}4 = 0{,}8 < 1$ ist, beschreibt die Matrix einen Prozess, bei dem die Populationsgröße schrumpft. Damit ein zyklisch periodischer Prozess beschrieben wird, bei dem die Gesamtpopulation weder wächst noch schrumpft, muss gelten: $80 \cdot a \cdot b = 1$ und damit $a = \frac{1}{80 \cdot b}$. Das ist beispielsweise für die Werte $a = 0{,}025$ und $b = 0{,}5$ erfüllt.	5
			30

Aufgabe 1 Analysis mit Stochastik:

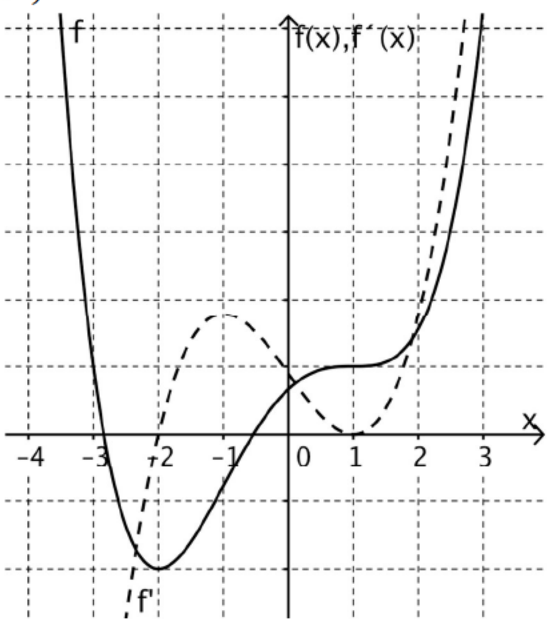
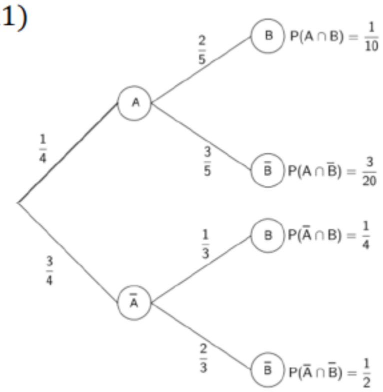
	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A1	Der Prüfling...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. Bemerkung: Bei Multiple-Choice-Aufgaben gilt der jeweils angegebene Hinweis.	
1a	entscheidet, ob die Aussagen wahr oder falsch sind.	(siehe Tabelle unten)	5
1b	b1) ergänzt die fehlenden Angaben und b2) skizziert den Verlauf der Ableitungsfunktion f'.	b1) $\int_2^5 (\mathbf{f(x)})d\mathbf{x} = F(5) - F(\mathbf{2})$ b2) 	5
1c	c1) gibt die Gleichung der ersten Ableitung von f an und	c1) $f'(x) = \cos(x) - x \cdot \sin(x)$ *Fortsetzung nächste Seite*	5

Tabelle zu 1a:

	wahr	falsch
$f(-0{,}4) = f(0{,}4)$		X
Für den Grad n der ganzrationalen Funktion f gilt: $n \geq 5$.	X	
$f'(-0{,}4) < 0$	X	
$f''(0) = 0$	X	
$\int_0^{0,3} f(x)dx \approx 0{,}6$ [FE]		X

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>zu 1c</td><td>c2)
entscheidet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründet die Entscheidung.</td><td>c2)
<table>
<tr><th>Aussage</th><th>Entscheidung und Begründung</th></tr>
<tr><td>Der Graph der Funktion g mit
$g(x) = \sin(\pi \cdot x)$
ist identisch mit dem Graphen der Funktion h mit
$h(x) = \cos\big(\pi(x - 0{,}5)\big)$.</td><td>Die Aussage ist wahr.
Die Periodenlänge sowohl von g als auch von h ist $p = 2$. Eine Sinusfunktion kann auch durch eine Kosinusfunktion dargestellt werden, indem man sie entlang der Abszissenachse verschiebt.
In diesem Fall muss der Graph vom Funktionsterm $\cos(\pi \cdot x)$ noch um ein Viertel der Periodenlänge nach rechts verschoben werden, somit entsteht $h(x) = \cos\big(\pi(x - 0{,}5)\big)$.</td></tr>
<tr><td>Die Funktion k mit
$k(x) = 2 \cdot \sin(3 \cdot x) + 1$
hat den Wertebereich
$W = [-1; 3]$.</td><td>Die Aussage ist wahr.
Verantwortlich für die Wertemenge einer Sinusfunktion sind die Amplitude sowie die Verschiebung des Graphen in Ordinatenrichtung.
Bei k ist der Graph um eine LE in Ordinatenrichtung verschoben im Vergleich zur Funktion $f(x) = \sin(x)$. Die Amplitude beträgt $a = 2$, somit befinden sich die Ordinatenwerte von k zwischen
$y_{min} = 1 - 2 = -1$ und
$y_{max} = 1 + 2 = 3$.
Damit gilt für die Wertemenge $W = [-1; 3]$.</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
<tr><td>1d</td><td>d1)
ergänzt die die fehlenden Wahrscheinlichkeiten.</td><td>d1)



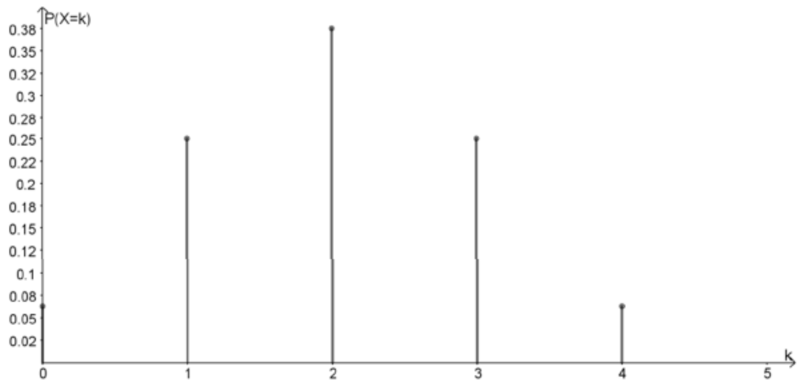
<table>
<tr><th>P</th><th>A</th><th>$\overline{A}$</th><th>Summen</th></tr>
<tr><td>B</td><td>0,1</td><td>0,25</td><td>0,35</td></tr>
<tr><td>$\overline{B}$</td><td>0,15</td><td>0,5</td><td>0,65</td></tr>
<tr><td>Summen</td><td>0,25</td><td>0,75</td><td>1</td></tr>
</table>

Fortsetzung nächste Seite</td><td>5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>zu 1d</td><td>d2)
zeigt, dass
$P_B(A) \neq P(A)$gilt.</td><td>d2)
$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{7}{20}} = \frac{2}{7}$$
$$P(A) = \frac{1}{4}$$
Somit gilt $P_B(A) \neq P(A)$.</td><td></td></tr>
<tr><td>1e</td><td>e1)
berechnet die Höhe der Standardabweichung σ,

e2)
ergänzt die fehlenden Wahrscheinlichkeiten in Tabelle 1.2 und

e3)
zeichnet ein Diagramm dieser Binomialverteilung.</td><td>e1)
$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 1$

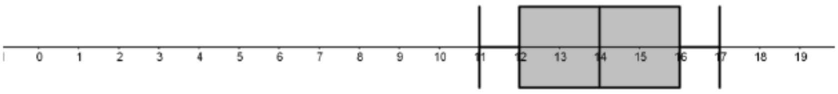
e2)
<table><tr><th>$P(X = 0)$</th><th>$P(X = 1)$</th><th>$P(X = 2)$</th><th>$P(X = 3)$</th><th>$P(X = 4)$</th></tr><tr><td>6,25 %</td><td>25 %</td><td>37,5 %</td><td>25 %</td><td>6,25 %</td></tr></table>
e3)

</td><td>5</td></tr>
<tr><td>1f</td><td>f1)
gibt die Größe der Winkel der Sektoren B und C an,

f2)
ermittelt den von einem Spieler langfristig zu erwartenden Gewinn und
f3)
bestimmt die Höhe des Einsatzes für ein faires Spiel.</td><td>f1)
$180° + 2 \cdot \beta = 360° \Leftrightarrow \beta = 90°(= \gamma)$
Die Größen beider Winkel betragen 90°.

f2)
$\mu = 0{,}5 \cdot 0 + 0{,}25 \cdot 1 + 0{,}25 \cdot 2 = 0{,}75$ [Euro]
Der Spieler muss kann somit langfristig einen durchschnittlichen Gewinn in Höhe von 0,75 Euro erwarten.

f3)
$\mu = 0$
$0{,}5 \cdot (2 - k) + 0{,}25 \cdot (3 - k) + 0{,}25 \cdot (4 - k)$
$\Leftrightarrow k = 2{,}75$ [Euro]
Die Höhe des Einsatzes für ein faires Spiel beträgt 2,75 Euro.</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>**30**</td></tr>
</table>

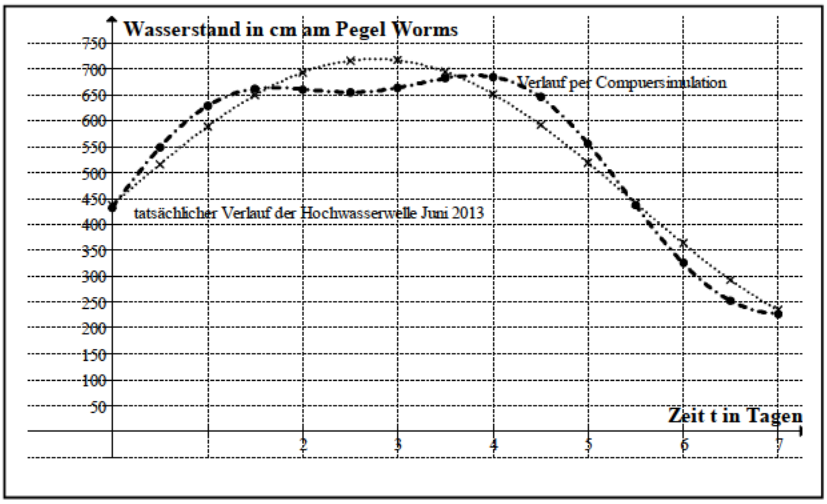
Aufgabe 2: Essstörungen

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
A2	Der Prüfling...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	
2a	zeichnet ein Boxplot zur Altersstruktur der LES ein und vergleicht zwei Kennzahlen miteinander.	 Die Spannweite beider Boxplot-Diagramme beträgt $x_{min} - x_{max} = 17 - 11 = 6$. Da Schüler gleicher Altersgruppen befragt worden sind, beträgt der maximale Altersunterschied bei allen befragten Schülern an beiden Schulen sechs Jahre. Der Median, also der Wert, der die Stichprobe in zwei gleich große Gruppen teilt, beträgt bei der LES 13 Jahre und bei der CFGS 14 Jahre. Des Weiteren können alternativ auch die Interquartilsabstände sowie die oberen und die unteren Quartile beider Schulen miteinander verglichen werden.	6
2b	berechnet, wie hoch der durchschnittliche Anteil der Jungen mit Verdacht auf eine Essstörung an allen Jungen der LES ist.	Wenn $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}$ und x_{17} aus Tabelle 2.1 die Anzahlen der 11- jährigen, 12-jährigen usw. Jungen darstellt, dann berechnet sich der durchschnittliche Anteil an essgestörten Jungen durch: $\frac{0{,}1875\,x_{11} + 0{,}05\,x_{12} + 0{,}25\,x_{13} + 0{,}2143\,x_{14} + 0{,}1765\,x_{15} + 0{,}1667\,x_{16} + 0{,}2174\,x_{17}}{x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17}}$ $\approx 18{,}3\,\%$ Der durchschnittliche Anteil der Jungen mit Verdacht auf eine Essstörung an allen Jungen der LES beträgt ca. 18,3 %.	4
2c	weist nach, dass an der LES sieben Jungen, die 12 bis 13 Jahre alt waren, einen Verdacht auf eine Essstörung aufwiesen und ermittelt die absolute Häufigkeit eines Verdachts auf eine Essstörung bei den 13-jährigen Jungen an der CFGS.	An der LES gibt es $20 \cdot 5\,\% + 24 \cdot 25\,\% = 7$ Jungen mit einem Essstörungsverdacht. Bei beiden Schulen existieren zusammen $80 \cdot 16{,}25\,\% = 13$ Jungen mit einem Verdacht auf eine Essstörung. Somit beträgt die absolute Häufigkeit eines Essstörungsverdachts an der CFGS $13 - 7 - 4 = 2$ Schüler.	4

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
2d	erläutert, unter welchen Annahmen die Anzahl der Jugendlichen mit einem Verdacht auf eine Esstörung als binomialverteilte Zufallsvariable betrachtet werden kann.	Die Verteilung der Zufallsvariablen X: „Anzahl der Jugendlichen mit Verdacht auf eine Essstörung“ kann als binomialverteilt angenommen werden, wenn bei einer Stichprobe nur zwei mögliche Ergebnisse zugelassen sind (Erfolg: Verdacht auf eine Essstörung und Misserfolg: kein Verdacht auf eine Essstörung). Des Weiteren müssten die Jugendlichen unabhängig voneinander sein und die Eintrittswahrscheinlichkeit von $p = 0{,}2$ müsste somit von Stufe zu Stufe konstant bleiben. Außerdem ist die Anzahl der Jugendlichen mit einem Verdacht auf eine Essstörung diskret verteilt.	3
2e	ermittelt die gesuchten Wahrscheinlichkeiten.	Die Zufallsvariable X mit $X \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 95\}$ ist die Anzahl der Jugendlichen mit einem Verdacht auf eine Essstörung. X ist binomialverteilt mit der Kettenlänge $n = 95$ und die Eintrittswahrscheinlichkeit beträgt $p = 0{,}2$. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Befragung … • bei genau 21 Jugendlichen ein Verdacht auf eine Essstörung vorliegt, beträgt $P(X = 21) \approx 8{,}64\ \%$. • bei höchstens 21 Jugendlichen ein Verdacht auf eine Essstörung vorliegt, beträgt $P(X \leq 21) \approx 74{,}41\ \%$. • bei mehr als 10, aber weniger als 24 Jugendlichen ein Verdacht auf eine Essstörung vorliegt, beträgt $P(10 < X < 24) \approx 86{,}39\ \%$.	6
2f	erläutert die Bedeutung der Gleichung im Sachzusammenhang.	Mithilfe dieser Gleichung kann die Wahrscheinlichkeit einer Bernoulli-Kette der Kettenlänge $n = 95$ berechnet werden. Hiermit kann mithilfe der (Gegen-) Wahrscheinlichkeit 80 % das Ereignis, dass genau $k = 82$ Jugendliche von 95 Befragten keinen Verdacht auf eine Essstörung aufweisen berechnet werden.	3
2g	zeigt, dass mindestens 22 Jugendliche befragt werden müssen, berechnet den Erwartungswert dieser Binomialverteilung und erläutert dessen Bedeutung im Sachzusammenhang.	Bedingung: $P(X \geq 2) \geq 0{,}95$ $B_{22;0,2}$ – Verteilung: $P(X \geq 2) \approx 0{,}9520$ $B_{21;0,2}$ – Verteilung: $P(X \geq 2) \approx 0{,}9424$ Somit gilt die Aussage. $\mu = 22 \cdot 0{,}2 = 4{,}4$ Bei sehr vielen Befragungen von Gruppen mit je 22 Jugendlichen können im Mittel ca. 4,4 Jugendliche mit Verdacht auf eine Essstörung erwartet werden.	4
			30

Aufgabe 3: Hochwasserschutzmaßnahmen im Rheingebiet

<table>
<tr><th></th><th>Anforderungen</th><th>Modelllösungen</th><th>BE</th></tr>
<tr><td>A3</td><td>Der Prüfling…</td><td>Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung:
Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.</td><td></td></tr>
<tr><td>3a</td><td>zeichnet den Graphen der Funktion h in das gegebene KS in Abbildung 3.1 und

vergleicht die beiden Verläufe des Pegelstandes anhand von zwei Aspekten.</td><td>Erstellt gegebenenfalls Tabelle und nutzt noch weitere markante Punkte
<table>
<tr><th>t</th><th>h(t)</th></tr>
<tr><td>0</td><td>≈433</td></tr>
<tr><td>1</td><td>≈629</td></tr>
<tr><td>2</td><td>≈661</td></tr>
<tr><td>3</td><td>≈664</td></tr>
<tr><td>4</td><td>≈685</td></tr>
<tr><td>5</td><td>≈556</td></tr>
<tr><td>6</td><td>≈325</td></tr>
<tr><td>7</td><td>≈227</td></tr>
</table>


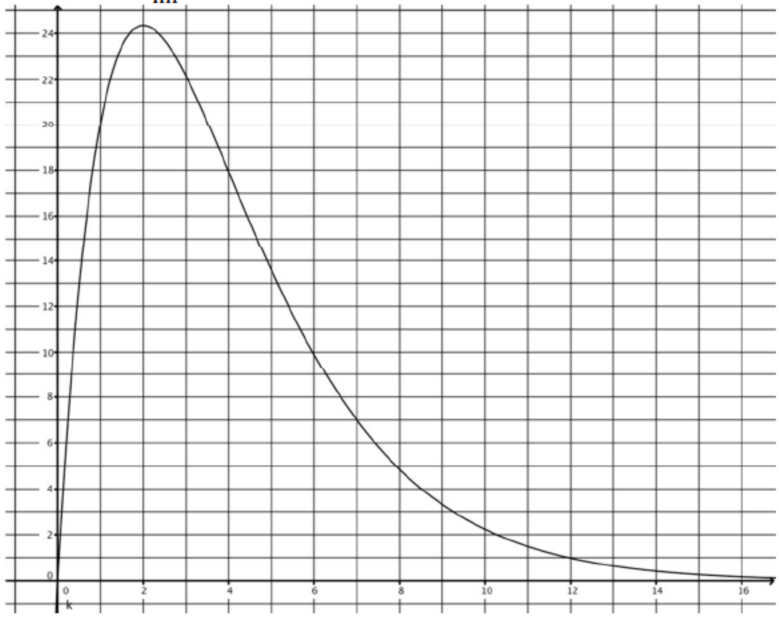
Zu Beginn der Messung sind die Wasserstände nahezu identisch und in der Computersimulation verläuft der Hochwasserpegel in den ersten 1,5 Tagen zunächst höher, erreicht im Laufe des zweiten Tages bereits einen ersten Hochwasserscheitel, anders als im tatsächlichen Verlauf, dort wird der höchste Stand im Laufe des dritten Tages erreicht. Das maximale Hochwasser beträgt in der Computersimulation ca. 6,90 m und wird erst am Ende des dritten Tages erreicht, es ist also deutlich niedriger.</td><td>7</td></tr>
<tr><td>3b</td><td>prüft, ob sich in der Simulation die Dauer der Sperrung durch die Schutzmaßnahmen voraussichtlich verkürzt.</td><td>$h(t) = 665$
für $0 \leq t \leq 7$ gilt:
$\Rightarrow t_1 \approx 3{,}0 \vee t_2 \approx 4{,}3$
(auch graphische und tabellarische Lösungswege sind zulässig)
Berechnung der Dauer der Sperrung s:
$s = t_2 - t_1 \approx 1{,}3$ [Tage]
Umrechnung in h: $s \cdot 24 \approx 30{,}84$
Die Dauer der Sperrung würde von ca. 42 Stunden auf ca. 31 Stunden verkürzt.</td><td>4</td></tr>
<tr><td>3c</td><td>zeigt, dass in der Simulation zwei Maximalstellen bei t_{e1} und t_{e2} liegen,</td><td>Notwendige Bedingung $h'(t) = 0$
$h'(t) = -92{,}22 \cdot \cos(1{,}74 \cdot t + 3.2) - 153{,}7 \cdot \cos(0{,}58 \cdot t - 3{,}2)$

Fortsetzung nächste Seite</td><td>6</td></tr>
</table>

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
zu 3c		$h'(1{,}70758) \approx 0$ $h'(3{,}81337) \approx 0$ Auf einen Nachweis des Maximums kann verzichtet werden, wenn Bezug zur Zeichnung genommen wird. Berechnung der zugehörigen Funktionswerte: $h(t_{e1}) \approx 663{,}7$ $h(t_{e2}) \approx 687{,}4 \Rightarrow$ das absolute Maximum liegt bei ca. $H_2(3{,}81\|687{,}4)$	
	gibt den Tag, die Uhrzeit und den maximalen Pegelstand an und	Der maximale Pegelstand von ca. 687,4 cm würde am 05.06. um ca. 19:31 Uhr erreicht werden.	
	berechnet um wie viel cm der maximale Pegelstand durch die Schutzmaßnahmen abgesenkt würde.	Berechnung von $h(t_{e2}) \approx 687{,}4$ $720 - 687{,}4 = 32{,}6$ [cm] Der maximale Pegelstand würde durch diese Schutzmaßnahmen um ca. 32,6 cm gesenkt.	
3d	leitet die Bedingungsgleichungen her, die für den ganzrationalen Funktionsabschnitt 3.Grades f_3 gelten müssen.	Allgemeine Gleichung einer Funktion 3. Grades sowie deren Ableitung: $f_3(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ $f_3'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$ Herleitung der Bedingungsgleichungen: Sprungfreiheit in $C_1 \Rightarrow f_3(1\,250) = 600$ Knickfreiheit in $C_1 \Rightarrow f_3'(1\,250) = 0$	4
3e	prüft, ob sich der im äußeren Verlauf des Altrheins befindliche Punkt E im eingedeichten Gebiet befinden würde.	$f_3(x) = \frac{2}{703\,125}x^3 - \frac{26}{1\,875}x^2 + \frac{64}{3}x - \frac{89\,600}{9}$ $E\,(1\,750\|170)$ $f_3(1\,750) \approx 156$ Da $170 > f_3(1\,750)$ ist, liegt der Punkt nicht im eingedeichten Gebiet.	3
3f	prüft, ob der Polder ungefähr 6 000 000 m^3 Wasser aufnehmen kann und	Berechnung der Summe beider Integrale und der Rechteckfläche. $A_1 = \int_{-625}^{0} (0{,}000864x^2 + 1{,}5x + 600)dx \approx 152\,344\,[m^2]$ Berechnung der Rechteckfläche $A_2 = 1\,500 \cdot 600 = 900\,000[m^2]$ $A_3 = \int_{1\,500}^{2\,000} \left(300 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{500}(x-1500)\right) + 300\right) dx = 150\,000[m^2]$ *Fortsetzung nächste Seite*	6

	Anforderungen	Modelllösungen	BE
zu 3f		$152\,344 + 900\,000 + 150\,000 = 1\,202\,344[\mathrm{m}^2]$ Berücksichtigung der Höhe von 5 m: $V = 1\,202\,344 \cdot 5 = 6\,011\,720[\mathrm{m}^3]$ Ja, das Rückhaltebecken kann ungefähr 6 000 000 m^3 Wasser fassen.	
	begründet im Sachzusammenhang. warum der so berechnete Wert die tatsächliche maximale Wassermenge nur ungefähr wiedergibt.	Da die Bodenbeschaffenheit und die Deichform (Hügel, Senken etc.) des Naturschutzgebietes nicht bekannt sind, ist der Wert ungenau.	
			30

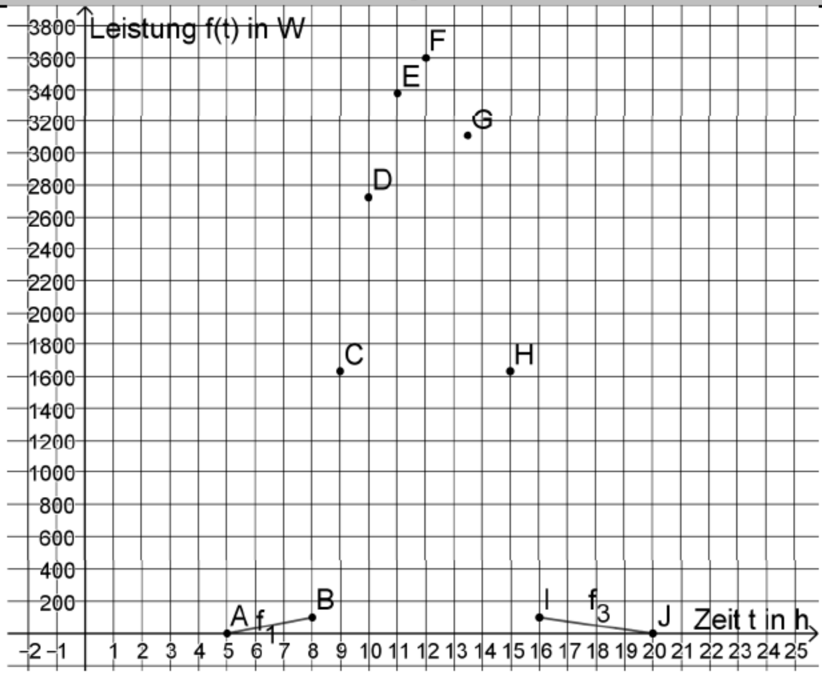
Aufgabe 3: Medikation

	Anforderungen	Modelllösungen	
A3	Der Prüfling…	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
3a	zeichnet k ins Koordinatensystem (Abb. 3.1), beschreibt die Entwicklung der Konzentration (drei Aspekte).	 Mögliche Aspekte der Entwicklung • Nach Beginn der Messung ($t = 0$) steigen die Werte der Medikamentenkonzentration auf das Maximum bei $t_e = 2$ [h] und $k(2) \approx 24 \left[\frac{\mu g}{ml}\right]$ an. • Nach zwei Stunden fallen die Werte der Medikamentenkonzentration $k(t)$ langsamer ab, als sie angestiegen sind. • Nach 14 Stunden gibt es nur noch sehr geringe Konzentrationen.	7
3b	berechnet den Zeitpunkt der maximalen Konzentration, gibt die maximale Medikamentenkonzentration an.	$k'(t) = (33{,}1 - 16{,}55t)e^{-0{,}5\cdot t}$ $k''(t) = (-33{,}1 + 8{,}275t)e^{-0{,}5\cdot t}$ Notwendige Bedingung: $k'(t) = 0 \iff t_e = 2$ Hinreichende Bedingung: $k''(2) = -16{,}55e^{-1} < 0$, also liegt ein Maximum bei t_e vor. $k(2) = 33{,}1 \cdot 2e^{-1} = \frac{66{,}2}{e} \approx 24{,}35$ Die maximale Konzentration liegt zwei Stunden nach der Einnahme bei ca. $24{,}35 \frac{\mu g}{ml}$.	4
3c	ermittelt die mittlere Konzentration des Medikaments im Blutplasma in den ersten zwölf Stunden.	$\frac{1}{12} \cdot \int_0^{12} k(t)dt \approx 10{,}84$ Die mittlere Konzentration des Medikaments im Blutplasma der Probanden in den ersten zwölf Stunden nach Einnahme der Tablette beträgt ca. $10{,}84 \frac{\mu g}{ml}$.	2

	Anforderungen	Modelllösungen	
3d	prüft rechnerisch, ob für k eine Wendestelle existiert, und erläutert die Bedeutung dieser Stelle im Sachzusammenhang.	$k''(t) = 33{,}1e^{-0{,}5\cdot t} \cdot \left(\frac{1}{4}t - 1\right)$ Notwendige Bedingung: $k''(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}t - 1 = 0 \Leftrightarrow t_w = 4$ Dass eine Wendestelle existiert, ist in der Zeichnung erkennbar (Prüfung der hinreichenden Bedingung mit der Zeichnung). Vier Stunden nach Einnahme der Tablette erfolgt die größtmögliche Abnahme der Medikamentenkonzentration im Blutplasma des Probanden.	4
3e	leitet den Funktionsterm für den linearen Abschnitt her, bestimmt, nach welcher Zeit das Medikament vollständig abgebaut wäre.	I. $k(10) \approx 2{,}23$ II. $k'(10) \approx -0{,}89$ $a_2(t) = m \cdot t + n$ $m \approx -0{,}89$ $k(10) \approx m \cdot 10 + n$ $n \approx 11{,}15$ $a_2(t) \approx -0{,}89 \cdot t + 11{,}15$ $a_2(t) = 0$ $t = 12{,}5$ Nach 12 Stunden und 30 Minuten wäre das Medikament vollständig abgebaut.	5
3f	prüft, ob das Konkurrenzprodukt länger wirkt.	Wirkungsdauer: $f(t) = 10 \Rightarrow t_1 \approx 0{,}79$, $t_2 \approx 8{,}83$ Somit beträgt die Zeitspanne, in der die Wirkstoffkonzentration größer als 10 $\frac{\mu g}{ml}$ ist, ca. 8 h. Diese Zeitspanne ist fast 2,5 Stunden länger als bei Medikament A. Die Wirkungsdauer ist tatsächlich länger.	3
3g	erläutert, warum eine trigonometrische Funktion geeignet ist, leitet die Zahlenwerte in n(x) her und	Die Werte der Hoch- und Tiefpunkte der Zahlen aller Neuerkrankungen kehren in gleichen Zeitabständen in derselben Höhe wieder, somit kann eine periodisch verlaufende trigonometrische Funktion geeignet sein. $\frac{y_{max} - y_{min}}{2} = \frac{25\,000 - 5\,000}{2} = 10\,000$ $p = 10 \Rightarrow \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$ $-\frac{1}{4} \cdot p = -2{,}5$ $\frac{y_{max} + y_{min}}{2} = \frac{25\,000 + 5\,000}{2} = 15\,000$ *Fortsetzung nächste Seite*	5

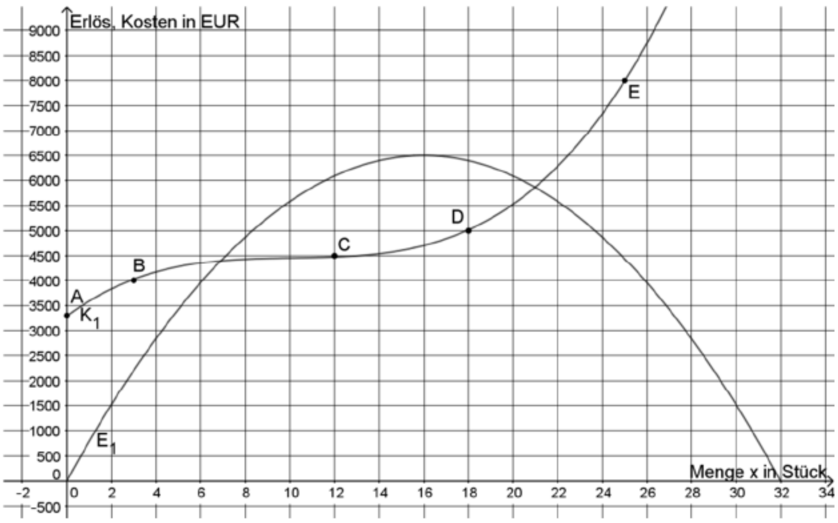
	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 3g	berechnet die Anzahl der Neuerkrankungen innerhalb von 10 Jahren.	$\int_0^{10} n(x)dx = 150\,000$ Nach diesem Modell kommt es in zehn Jahren insgesamt zu 150 000 Neuerkrankungen.	
			30

Aufgabe 3: Solaranlage

	Anforderungen	Modelllösungen	
A3	Der Prüfling	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
3a	ergänzt die fehlenden Wertepaare aus der Tabelle 3.1 in die Abbildung 3.1 und erläutert den Leistungsverlauf.	 Es ist zu erkennen, dass die ersten Leistungswerte sehr niedrig sind, die Anlage ist eingeschaltet, erzeugt aber noch kaum Leistung. In den Mittagsstunden, wenn die Sonneneinstrahlung am höchsten ist, erreicht die Anlage ihre maximalen Leistungswerte für den Tag. Ab 16:00 Uhr ist die Leistung wieder niedrig, bis sich die Anlage um 20:00 Uhr abschaltet.	5
3b	prüft, ob der Graph am Übergang vom ersten Abschnitt f_1 in den zweiten Abschnitt f_2 sprung- und knickfrei ist.	$f_1(8) = \frac{100}{3} \cdot 8 - \frac{500}{3} = 100$ $f_2(8) = -\frac{875}{4} \cdot (8-8) \cdot (8-16) + 100 = 100$ Somit gilt: $f_1(8) = f_2(8)$ Der Übergang ist sprungfrei. $f_1'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{100}{3} \cdot t - \frac{500}{3}\right)$ $f_1'(8) = \frac{100}{3}$ $f_2'(t) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{875}{4} \cdot (t-8) \cdot (t-16) + 100\right)$ $f_2'(8) = 1\,750$ Somit gilt: $f_1'(8) \neq f_2'(8)$ Der Übergang ist nicht knickfrei.	5

	Anforderungen	Modelllösungen	
3c	berechnet die maximale Leistung und gibt die Uhrzeit an.	Notwendiges Kriterium: $f_2'(t) = 0$ $-437{,}5 \cdot t + 5250 = 0$ $t_e = 12$ Hinreichendes Kriterium: $f_2''(12) < 0$ $f_2''(12) = -437{,}5 < 0$ Es liegt eine Maximalstelle bei $t_e = 12$ vor. Berechnung der maximalen Leistung: $f_2(12) = 3600$ Die Anlage erreicht ihre maximale Leistung von 3600 Watt um 12:00 Uhr mittags.	5
3d	ermittelt den Betrag in Euro, um den die Kosten gesenkt werden.	$\frac{1}{1000}\int_8^{16} f(t)\,dt \approx 19{,}47$ [kWh] $19{,}47 \cdot 0{,}28 \approx 5{,}45$ Der Rechnungsbetrag wird an diesem Tag um 5,45 Euro gesenkt.	5
3e	ermittelt die Parameter a, b, c und d.	$a \approx \frac{16{,}03-8{,}3}{2}$ $a \approx 3{,}87$ $b = \frac{2\cdot\pi}{p}$ mit $p = 366$ $b = \frac{2\cdot\pi}{366}$ c ist ablesbar aus der Verschiebung der Maximalstelle: $c = 172$ $d \approx \frac{16{,}03+8{,}3}{2}$ $d \approx 12{,}17$	4
3f	vergleicht im Sachkontext die mittleren Änderungsraten aus München und Kiel.	Die mittlere Änderungsrate in München beträgt $\frac{14{,}5-11{,}07}{121-61} \approx 0{,}057\left[\frac{h}{Tag}\right]$, die mittlere Änderungsrate in Kiel beträgt $\frac{k(121)-k(61)}{121-61} \approx 0{,}081\left[\frac{h}{Tag}\right]$. Im Sachkontext der Aufgabe bedeutet das, dass im betrachteten Zeitraum die Tageslänge in München durchschnittlich um ca. 3 Minuten und 26 Sekunden pro Tag zunimmt, in Kiel im gleichen Zeitraum um ca. 4 Minuten und 50 Sekunden pro Tag. Die Zeit zwischen dem Sonnenaufgang und dem Sonnenuntergang nimmt zwischen dem 61. Tag und dem 121. Tag in Kiel deutlicher zu als in München.	6
			30

Aufgabe 3: Schülerfirma

	Anforderungen	Modelllösungen	
A3	Der Prüfling...	Grundsätzlich gilt für jede Teilleistung: Der gewählte Lösungsansatz und Lösungsweg müssen nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.	BE
3a	gibt die erlösmaximale Absatzmenge und den maximalen Erlös an und skizziert den Graphen der Kostenfunktion.	Ablesen aus dem Graph: $x_{max} = 16$ und $E(x_{max}) = 6\,500$ Das Erlösmaximum in Höhe von 6 500 EUR wird bei einer Menge von 16 Stück erreicht. 	5
3b	stellt die Bedingungsgleichungen auf.	$K_1(0) = 450$ $K_1(100) = 950$ $K_1(730) = 1\,892{,}48$ $K_1''(700) = 0$	4
3c	bestimmt die Menge x_S, ab der erstmals Gewinn erwirtschaftet wird.	$G_1(x)=0$ $x_1 \approx -186{,}29;\ x_2 \approx 326{,}05;\ x_3 \approx 1\,960{,}24$ $\Rightarrow x_S = 327$ [Stück]. Die Menge x_S, ab der erstmals Gewinn erwirtschaftet wird, liegt bei 327 Stück.	3
3d	berechnet die gewinnmaximale Menge und	$G_1'(x) = -\frac{9}{793\,750}\cdot x^2 + \frac{252}{15\,875}\cdot x - \frac{2\,047}{2\,540}$ $G_1''(x) = -\frac{9}{396\,875}\cdot x + \frac{252}{15\,875}$ Notwendige Bedingung: $G_1'(x) = 0$ $x_{e1} \approx 52{,}76;\ x_{e2} \approx 1\,347{,}24$ Hinreichende Bedingung: $G_1''(x_e) \neq 0 \wedge G_1'(x_e) = 0$ $G_1''(52{,}76) \approx 0{,}015 > 0$ Somit ist x_{e1} Stelle eines Tiefpunktes. $G_1''(1\,347{,}24) \approx -0{,}015 < 0$ Somit ist x_{e2} Stelle eines Hochpunktes. *Fortsetzung nächste Seite*	4

	Anforderungen	Modelllösungen	
zu 3d	den maximalen Gewinn.	Da nur ganze Schutzhüllen verkauft werden, wird eine Fallunterscheidung durchgeführt: $G_1(1\,347) \approx 3\,628{,}22$ $G_1(1\,348) \approx 3\,628{,}22$ Die gewinnmaximale Absatzmenge liegt bei 1 347 Stück bzw. 1 348 Stück und der maximale Gewinn beträgt 3 628,22 EUR.	
3e	beurteilt die Aussage.	$G_f(x) = -\frac{3}{793\,750} \cdot x^3 + \frac{126}{15\,875} \cdot x^2 - \frac{2\,047}{2\,540} \cdot x - f$ Notwendige Bedingung: $G_f'(x) = 0$ $x_{e1} \approx 52{,}76;\ x_{e2} \approx 1\,347{,}24$ Da in den Ergebnissen x_1 und x_2 die Fixkosten f nicht mehr enthalten sind, haben sie keinen Einfluss auf die Lage der Extremstellen. $G_f(1\,347) \approx 4\,078{,}22 - f$ $G_f(1\,348) \approx 4\,078{,}22 - f$ Bei der Berechnung des Gewinns sind die Fixkosten f im Ergebnis enthalten, daher haben die Fixkosten Einfluss auf die Höhe des Gewinnmaximums. Die Mitschülerin hat also nur zum Teil Recht.	2
3f	stellt die abschnittsweise definierte Funktion auf.	Allgemein gilt: $E(x) = p(x) \cdot x$. Für den ersten Term gilt: $4{,}95 \cdot x$. Beim zweiten Term muss die Verschiebung in Ordinatenrichtung beachtet werden, damit der Graph sprungfrei ist. $(400 \cdot (4{,}95 - 7{,}95) = -1\,200)$. Mit dem veränderten Preis ergibt sich: $E_2(x) = \begin{cases} 4{,}95 \cdot x & \text{für } 0 \le x \le 400 \\ 7{,}95 \cdot x - 1\,200 & \text{für } x > 400 \end{cases}$	4
3g	berechnet den Ausdruck und interpretiert den Wert im Sachzusammenhang.	$\frac{1}{20} \cdot \int_0^{20} f(t)\,dt \approx 67{,}37$ Es wurden in den ersten 20 Tagen durchschnittlich ca. 67,4 Schutzhüllen pro Tag verkauft.	4
3h	gibt die maximal mögliche Verkaufsmenge an und ermittelt den Zeitpunkt, an dem der Preis angehoben werden muss.	Es können maximal 2 000 Schutzhüllen verkauft werden. $F(t) = 400$ $t \approx 3{,}985$ Am Ende des vierten Tages muss der Preis auf 7,95 EUR angehoben werden.	4
			30