Name: ____________________

Abiturprüfung 2021

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Aufgabenstellung:

a) Gegeben ist eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = x^4 - k \cdot x^2$, wobei k eine positive reelle Zahl ist. *Abbildung 1* zeigt den Graphen von f.

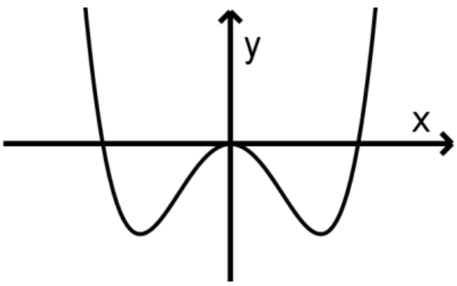


Abbildung 1

(1) *Zeigen Sie, dass* $f'(x) = 2x \cdot (2x^2 - k)$ *eine Gleichung der ersten Ableitungsfunktion von f ist.*

(2) Die beiden Tiefpunkte des Graphen von f haben jeweils die *y*-Koordinate -1.

Ermitteln Sie den Wert von k.

(1 + 4 Punkte)

Name: ____________________

b) Die Funktion *f* ist gegeben durch $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 23x + 15$, $x \in \mathbb{R}$. Die Funktion F ist eine Stammfunktion zur Funktion f. Der Graph von *f* ist in *Abbildung 2* dargestellt.

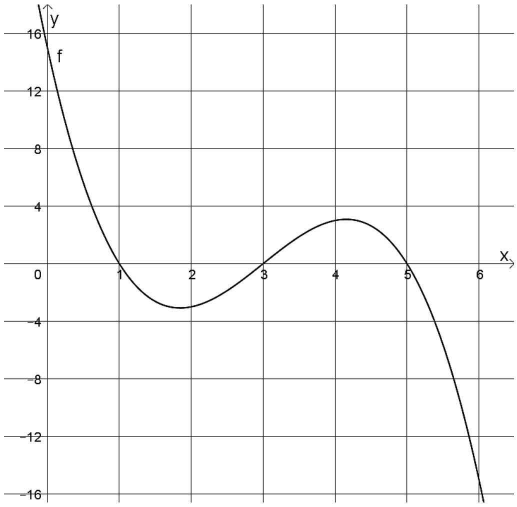


Abbildung 2

(1) *Interpretieren Sie die Aussage* $F(5) - F(1) = 0$ *in Bezug auf den Graphen von f.*

(2) *Berechnen Sie* $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(2 + 3 Punkte)

Name: ____________________

c) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \left(x^2 + 2x\right) \cdot e^{-x+4}$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Der Graph von f ist in *Abbildung 3* dargestellt.

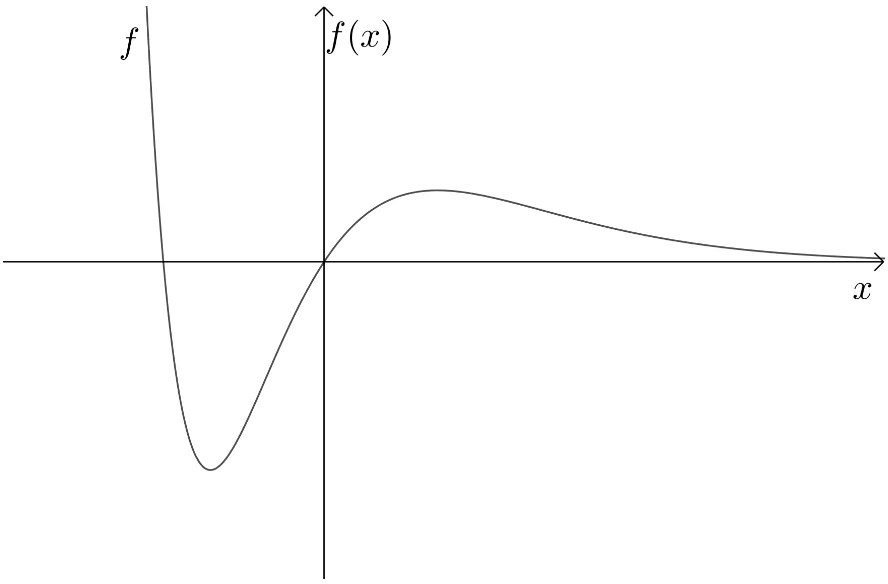


Abbildung 3

(1) Die Funktion f besitzt genau zwei Extremstellen.

Ermitteln Sie die beiden Extremstellen von f.

Hinweis: Ein Nachweis der hinreichenden Bedingung ist nicht erforderlich.

(2) *Skizzieren Sie in Abbildung 3 den Graphen der ersten Ableitungsfunktion von f.*

Hinweis: Die Größe der y-Werte kann dabei unberücksichtigt bleiben.

(3 + 2 Punkte)

Name: ____________________

d) Für jedes $a \in I\!R$ ist durch die Gleichung

$$f_a(x) = \frac{1}{2}(x+2)(3x+a)^2 e^x, \; x \in I\!R,$$

eine Funktion f_a gegeben.

In *Abbildung 4* ist der Graph der Funktion f_a für $a = 0$ abgebildet.

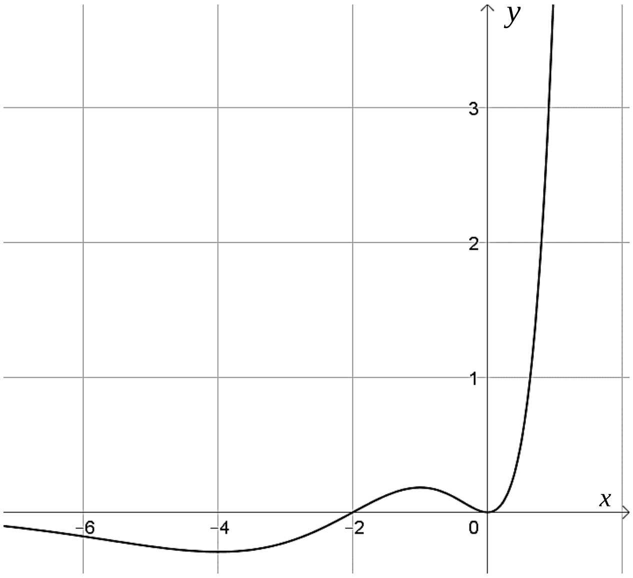


Abbildung 4

(1) Es gibt genau einen Wert von *a*, sodass die Funktion f_a nur eine Nullstelle besitzt.
Ermitteln Sie diesen Wert von a.

(2) *Ermitteln Sie, für welche Werte von* a *der Punkt* $P\left(3 \mid 90e^3\right)$ *auf dem Graphen der Funktion* f_a *liegt.*

(2 + 3 Punkte)

Name: ____________________

e) Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 100$ und p.

Der Erwartungswert von X ist 50.

(1) *Berechnen Sie die Standardabweichung von X.*

(2) Die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 61)$ beträgt etwa 2 %.

Bestimmen Sie unter Verwendung dieses Wertes den zugehörigen Wert für die Wahrscheinlichkeit $P(40 \leq X \leq 60)$.

(3 + 2 Punkte)

f) Bei einem Gewinnspiel beträgt der Einsatz für die Teilnahme 3 Euro. Die Auszahlung in Euro wird durch die Zufallsgröße A beschrieben. *Abbildung 5* zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von A.

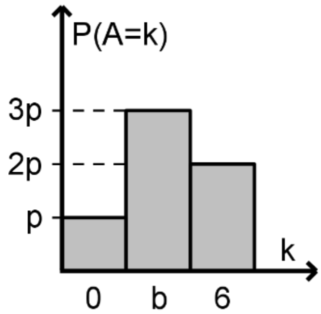


Abbildung 5

(1) *Zeigen Sie, dass p den Wert* $\frac{1}{6}$ *hat.*

(2) Bei wiederholter Durchführung des Spiels ist zu erwarten, dass sich auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgleichen.
Berechnen Sie den Wert von b.

(3) *Beschreiben Sie, wie das Gewinnspiel unter Verwendung eines Behälters sowie roter, grüner und blauer Kugeln durchgeführt werden könnte.*

(1 + 2 + 2 Punkte)

Hinweis:

Zugelassen sind
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Herkunftssprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Herkunftssprache nicht Deutsch ist

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2021

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

1. Aufgabenart

Hilfsmittelfrei zu bearbeitende Aufgabe

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2021 (Stand: August 2020)

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

   Stochastik
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung und Normalverteilung
   - Testen von Hypothesen

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Hinweis

Zugelassen sind

- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Herkunftssprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Herkunftssprache nicht Deutsch ist

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) $f'(x) = 4x^3 - 2kx = 2x \cdot (2x^2 - k)$.

(2) Die Tiefpunkte liegen nicht bei $x = 0$.

Für $x \neq 0$ ergibt sich: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - k = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{\tfrac{k}{2}} \vee x = \sqrt{\tfrac{k}{2}}$.

Für $k > 0$ gilt: $f\left(\sqrt{\tfrac{k}{2}}\right) = \tfrac{k^2}{4} - k \cdot \tfrac{k}{2} = -\tfrac{k^2}{4}$ und $-\tfrac{k^2}{4} = -1 \Leftrightarrow k = 2$.

Teilaufgabe b)

(1) Die Fläche, die im Intervall $[1;3]$ vom Graphen von *f* und der *x*-Achse eingeschlossen wird, ist genauso groß wie die Fläche, die im Intervall $[3;5]$ vom Graphen von *f* und der *x*-Achse eingeschlossen wird.

(2) $F(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^3 - \frac{23}{2}x^2 + 15x$.

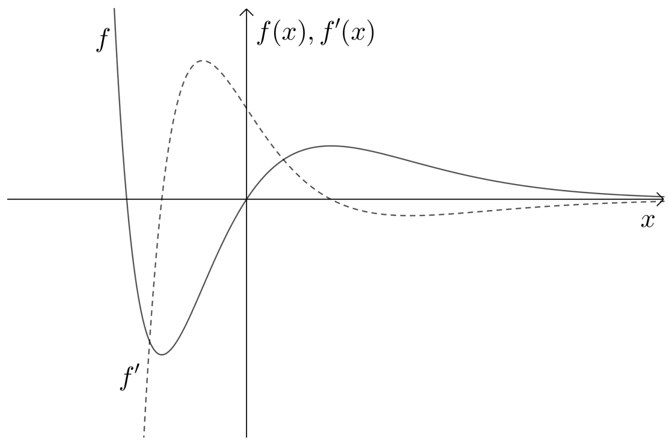
$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = -\frac{1}{4} + \frac{12}{4} - \frac{46}{4} + \frac{60}{4} = \frac{25}{4}.$$

Teilaufgabe c)

(1) $f'(x) = (2x+2) \cdot e^{-x+4} + (x^2+2x) \cdot e^{-x+4} \cdot (-1) = -(x^2-2) \cdot e^{-x+4}$.

Da $e^{-x+4} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, sind die beiden Extremstellen $x = -\sqrt{2}$ und $x = \sqrt{2}$.

(2)



Teilaufgabe d)

(1) $f_a(x) = 0 \Leftrightarrow x+2=0 \vee (3x+a)^2 = 0 \Leftrightarrow x=-2 \vee x = -\frac{1}{3}a$.

Damit f_a nur eine Nullstelle hat, muss gelten: $-\frac{1}{3}a = -2 \Leftrightarrow a = 6$.

(2) $f_a(3) = 90e^3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (9+a)^2 \cdot e^3 = 90e^3 \Leftrightarrow (9+a)^2 = 36$.

Damit gilt: $a = -3$ oder $a = -15$.

Teilaufgabe e)

(1) $100 \cdot p = 50 \Leftrightarrow p = 0{,}5$.

Damit ergibt sich für die Standardabweichung $\sqrt{100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 5$.

(2) Wegen $p = 0{,}5$ ist die binomialverteilte Wahrscheinlichkeitsverteilung symmetrisch zum Erwartungswert.

Es folgt: $P(40 \le X \le 60) \approx 1 - 2 \cdot 0{,}02 = 0{,}96$.

Teilaufgabe f)

(1) $p + 3p + 2p = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{6}$.

(2) $E(A) = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{6} \cdot b + \frac{2}{6} \cdot 6 = 3 \Leftrightarrow b = 2$.

(3) In den Behälter werden eine rote, drei grüne und zwei blaue Kugeln gelegt.
Die Spielerin / der Spieler entnimmt dem Behälter zufällig eine Kugel. Ist die entnommene Kugel rot, erfolgt keine Auszahlung, ist sie grün, werden 2 Euro ausgezahlt, ist sie blau, 6 Euro.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass $f'(x) = 2x \cdot (2x^2 - k)$ eine Gleichung der ersten Ableitungsfunktion von *f* ist.	1			
2	(2) ermittelt den Wert von *k*.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**5**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) interpretiert die Aussage in Bezug auf den Graphen von *f*.	2			
2	(2) berechnet das Integral.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**5**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) ermittelt die beiden Extremstellen.	3			
2	(2) skizziert den Graphen der Ableitungsfunktion.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**5**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) ermittelt den Wert von a, sodass die Funktion nur eine Nullstelle besitzt.	2			
2	(2) ermittelt, für welche Werte von a der Punkt P auf dem Graphen der Funktion liegt.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**5**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) berechnet die Standardabweichung von X.	3			
2	(2) bestimmt den zugehörigen Wert für die Wahrscheinlichkeit $P(40 \leq X \leq 60)$.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**5**			

Teilaufgabe f)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass p den Wert $\frac{1}{6}$ hat.	1			
2	(2) berechnet den Wert von b.	2			
3	(3) beschreibt, wie das Gewinnspiel unter Verwendung eines Behälters sowie roter, grüner und blauer Kugeln durchgeführt werden könnte.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe f)	**5**			

	Summe insgesamt	**30**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2021

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Die Funktion f ist gegeben durch die Gleichung

$$f(x) = 10 \cdot (x-1) \cdot e^{-x}\ ,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Der Graph von f ist in *Abbildung 1* dargestellt.

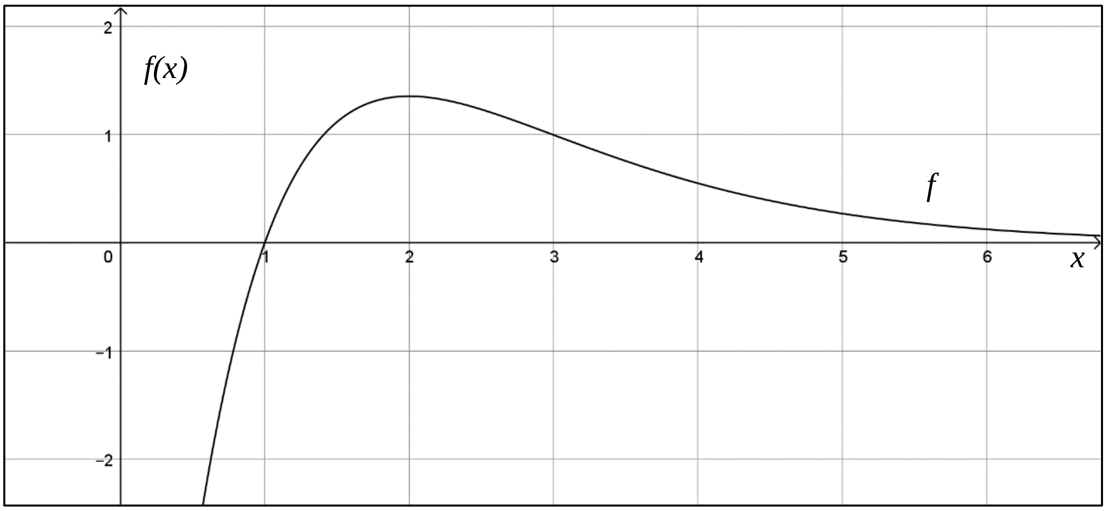


Abbildung 1

Name: ____________________

a) (1) *Begründen Sie, dass $x = 1$ die einzige Nullstelle von f ist.*

(2) *Untersuchen Sie f rechnerisch auf lokale Extremstellen.*

(1 + 3 Punkte)

b) (1) Gegeben ist die Funktion t mit $t(x) = -10 \cdot e^{-3} \cdot x + 50 \cdot e^{-3}$, $x \in \mathbb{R}$, und der Wendepunkt $W(3 \mid f(3))$ des Graphen von f.

Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph von t die Tangente an den Graphen von f im Punkt W ist.

(2) Die Schnittpunkte der in b) (1) gegebenen Tangente mit den beiden Koordinatenachsen legen eine Strecke fest.

Berechnen Sie die Länge dieser Strecke.

(3) Im Intervall $[1;5]$ begrenzen der Graph von f und die in b) (1) gegebene Tangente zusammen mit der x-Achse eine Fläche F (siehe *Abbildung 2*).

Bestimmen Sie den Flächeninhalt von F auf vier Nachkommastellen gerundet.

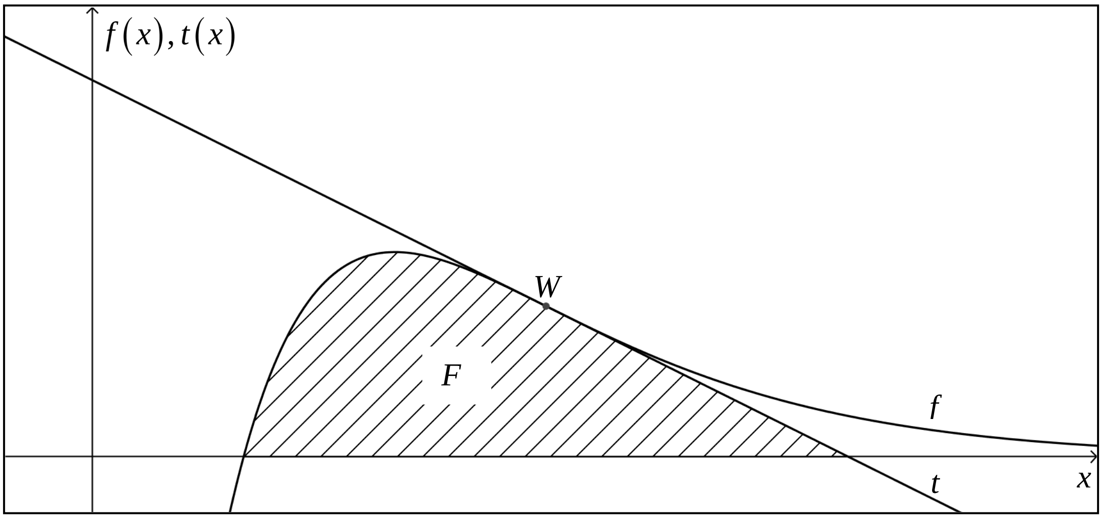


Abbildung 2

(3 + 3 + 3 Punkte)

Name: ____________________

c) Die Gerade g ist die Parallele zur x-Achse durch den Hochpunkt $H\left(2\,|\,f(2)\right)$ des Graphen von f. Die y-Achse, g und der Graph von f schließen eine Fläche ein (siehe grau gefärbte Fläche in *Abbildung 3*).

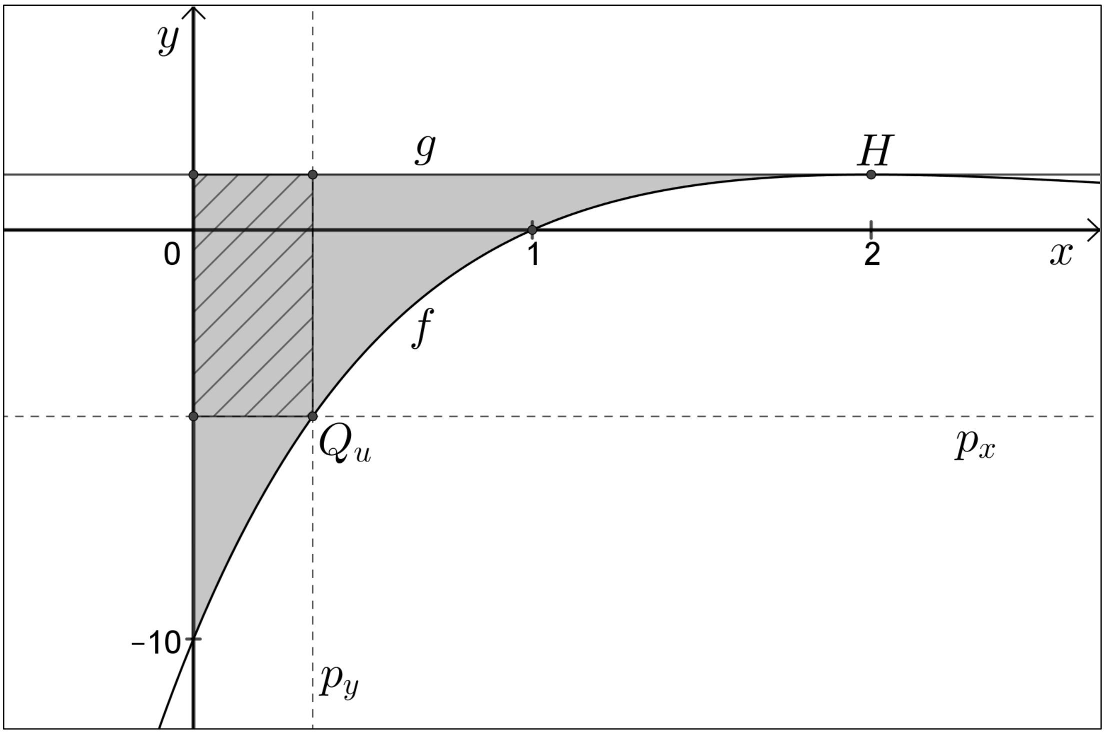


Abbildung 3

(1) *Ermitteln Sie den Inhalt dieser Fläche.*

$Q_u\left(u\,|\,f(u)\right)$, $0 < u < 2$, ist ein Punkt auf dem Graphen von f. Die Parallelen durch Q_u zu den beiden Koordinatenachsen werden mit p_x und p_y bezeichnet. Die y-Achse, g, p_x und p_y begrenzen ein Rechteck (siehe schraffierte Fläche in *Abbildung 3*).

(2) *Ermitteln Sie den Flächeninhalt dieses Rechtecks für den Fall, dass Q_u mit dem Schnittpunkt übereinstimmt, den der Graph von f mit der x-Achse hat.*

(3) *Untersuchen Sie, um wie viel Prozent sich der Wert aus* (2) *maximal vergrößern lässt, wenn für $Q_u\left(u\,|\,f(u)\right)$ eine andere Position mit $0 < u < 2$ gewählt wird.*

(3 + 2 + 5 Punkte)

Name: ____________________

Die Funktion f gehört zur Schar h_a, die gegeben ist durch

$$h_a(x) = 10 \cdot (x-a) \cdot e^{-x}\ ,\ x \in \mathbb{R}\ ,\ a \in \mathbb{R}.$$

Der Graph von h_a besitzt genau einen Wendepunkt W_a.

d) (1) *Ermitteln Sie die Wendestelle.*

[Hinweis: Ein Nachweis der hinreichenden Bedingung ist hier nicht erforderlich.]

(2) t_a ist die Tangente im Wendepunkt $W_a\left(a+2 \mid h_a(a+2)\right)$. Eine Gleichung für t_a ist

$$y = -10 \cdot e^{-a-2} \cdot x + 10 \cdot (a+4) \cdot e^{-a-2}.$$

Für $a \neq -4$ begrenzt t_a mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck.

Leiten Sie einen Term für den Flächeninhalt A_D des Dreiecks her.

[Mögliche Lösung: $A_D(a) = 5 \cdot (a+4)^2 \cdot e^{-a-2}$]

(3) *Ermitteln Sie alle Werte von a, für die die Dreiecksfläche die Größe* 10 FE *hat.*

(3 + 4 + 2 Punkte)

e) Die Gerade l_a ist die Gerade, die im Wendepunkt $W_a\left(a+2 \mid h_a(a+2)\right)$ senkrecht auf der Tangente t_a steht.

(1) *Ermitteln Sie eine Gleichung für l_a.*

[Mögliche Lösung: $y = \frac{e^{a+2}}{10} \cdot x + \frac{200-(a+2)e^{2a+4}}{10 \cdot e^{a+2}}$]

[Hinweis: Ohne Nachweis können Sie den folgenden Sachverhalt nutzen:
Zwei Geraden stehen senkrecht aufeinander genau dann, wenn für ihre Steigungen gilt: $m_1 \cdot m_2 = -1$.]

(2) N_a ist der Schnittpunkt des Graphen von h_a mit der x-Achse.

Ermitteln Sie den Wert von a, für den die Gerade l_a durch N_a verläuft.

(4 + 4 Punkte)

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Herkunftssprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Herkunftssprache nicht Deutsch ist

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2021

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Innermathematische Argumentationsaufgabe / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2021 (Stand: August 2020)

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
     - Behandlung von ganzrationalen Funktionen, natürlicher Exponential- und Logarithmusfunktion und deren Verknüpfungen bzw. Verkettungen mit Untersuchung von Eigenschaften in Abhängigkeit von Parametern
     - notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Herkunftssprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Herkunftssprache nicht Deutsch ist

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) Da für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $e^{-x} \neq 0$, ist die Nullstelle $x = 1$ des linearen Faktors die einzige Nullstelle von f.

(2) $f'(x) = 10 \cdot (2 - x) \cdot e^{-x}$.

Aus der notwendigen Bedingung $f'(x) = 0$ für lokale Extremstellen ergibt sich als einzige Lösung $x = 2$.

Da zusätzlich $f'(1) = 10 \cdot 1 \cdot e^{-1} > 0$ und $f'(3) = 10 \cdot (-1) \cdot e^{-3} < 0$ gilt, liegt an der Stelle $x = 2$ ein Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen Funktionswerten von f' vor, $x = 2$ ist daher eine lokale Maximalstelle und die einzige lokale Extremstelle von f.

Teilaufgabe b)

(1) Beim Graphen von *t* handelt es sich um eine Gerade.

Es ist $f'(3) = -10 \cdot e^{-3} = t'(3)$, die Steigungen der Graphen von f und *t* an der Stelle $x = 3$ sind also gleich.

Zusätzlich gilt $f(3) = 20 \cdot e^{-3} = t(3)$, $W(3 \mid f(3))$ ist daher ein gemeinsamer Punkt der Graphen von f und *t*.

Zusammen gilt: Der Graph von *t* ist die Tangente an den Graphen von f im Punkt $W(3 \mid f(3))$.

(2) Es ist $t(0) = 50 \cdot e^{-3}$.

$t(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

Wegen des Satzes des Pythagoras hat die gesuchte Strecke eine Länge *l* von

$l = \sqrt{\left(50 \cdot e^{-3}\right)^2 + 5^2} \approx 5{,}5854$ [LE].

(3) Mit den bereits bekannten Integrationsgrenzen gilt für den Inhalt der Fläche *F*:

$A_F = \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_3^5 t(x)\,\mathrm{d}x \approx 2{,}1852 + 0{,}9957 = 3{,}1809$ [FE].

Teilaufgabe c)

(1) Die Gerade g hat die Gleichung $y = f(2)$. Für die Funktion *d* mit $d(x) = f(2) - f(x)$ liefert der TR für den gesuchten Flächeninhalt $\int_0^2 d(x)\,\mathrm{d}x \approx 5{,}4134$ [FE].

(2) Das Rechteck hat einen Flächeninhalt von $1 \cdot f(2) \approx 1{,}3534$ [FE].

(3) Für $Q_u(u \mid f(u))$, $0 < u < 2$ hat das Rechteck einen Flächeninhalt von

$A_R(u) = u \cdot d(u)$ [FE].

Eine graphische Analyse zeigt, dass der Graph von A_R für $0 < u < 2$ ein absolutes Maximum von 2,1942 hat. Wegen $\frac{2{,}1942}{1{,}3534} \approx 1{,}6213$ kann man den Wert aus (2) maximal um ca. 62 % vergrößern.

Teilaufgabe d)

(1) $h_a''(x) = 10 \cdot (x - a - 2) \cdot e^{-x}$.

Aus der notwendigen Bedingung $h_a''(x) = 0$ für Wendestellen ergibt sich als einzige Lösung $x = a + 2$. Da es genau einen Wendepunkt gibt (siehe Aufgabentext), liegt an der Stelle $a + 2$ ein Wendepunkt vor.

(2) t_a schneidet die *y*-Achse bei $10 \cdot (a+4) \cdot e^{-a-2}$ und die *x*-Achse an der Stelle $x = a + 4$.

Für den Flächeninhalt $A_D(a)$ des Dreiecks ergibt sich:

$A_D(a) = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (a+4) \cdot e^{-a-2} \cdot (a+4) = 5 \cdot (a+4)^2 \cdot e^{-a-2}$ [FE].

(3) Das CAS liefert für $A_D(a) = 10$ drei Lösungen:

$a_1 \approx -4{,}4214,\ a_2 \approx -3{,}2388,\ a_3 \approx 0{,}1559$.

Teilaufgabe e)

(1) l_a hat im Wendepunkt $W_a\left(a+2 \mid h_a(a+2)\right) = W_a\left(a+2 \mid 20 \cdot e^{-a-2}\right)$ die Steigung

$m_a = -\frac{1}{h'_a(a+2)} = \frac{e^{a+2}}{10}$.

Für den *y*-Achsenabschnitt *b* von l_a gilt: $\frac{e^{a+2}}{10} \cdot (a+2) + b = 20 \cdot e^{-a-2}$. Damit ist

$b = 20 \cdot e^{-a-2} - \frac{e^{a+2}}{10} \cdot (a+2)$.

Eine Gleichung für l_a ist daher

$y = \frac{e^{a+2}}{10} \cdot x + 20 \cdot e^{-a-2} - \frac{e^{a+2}}{10} \cdot (a+2)$.

(2) Als Schnittstelle von l_a mit der *x*-Achse liefert der TR $x = e^{-2 \cdot a - 4} \cdot \left((a+2) \cdot e^{2 \cdot a + 4} - 200\right)$.

Die Schnittstelle von h_a mit der *x*-Achse ist $x = a$.

Für die Gleichung $e^{-2 \cdot a - 4} \cdot \left((a+2) \cdot e^{2 \cdot a + 4} - 200\right) = a$ liefert der TR die Lösung

$a = \ln(10) - 2 \approx 0{,}3026$.

Daher verläuft für $a = \ln(10) - 2 \approx 0{,}3026$ die Gerade l_a durch den Schnittpunkt N_a des Graphen von h_a mit der *x*-Achse.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) begründet, dass $x = 1$ die einzige Nullstelle von f ist.	1			
2	(2) untersucht f rechnerisch auf lokale Extremstellen.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**4**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) weist rechnerisch nach, dass der Graph der Funktion t die Tangente an den Graphen von f im Punkt W ist.	3			
2	(2) berechnet die Länge der Strecke zwischen den Achsenschnittpunkten.	3			
3	(3) bestimmt den Flächeninhalt von F auf vier Nachkommastellen gerundet.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**9**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt den Inhalt der beschriebenen Fläche.	3			
2	(2) ermittelt den Flächeninhalt des Rechtecks, wenn Q_u genau in den *x*-Achsenschnittpunkt von *f* gelegt wird.	2			
3	(3) untersucht, um wie viel Prozent sich der Wert aus (2) für $0 < u < 2$ maximal vergrößern lässt.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (10) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**10**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt die Wendestelle.	3			
2	(2) leitet einen Term für den Flächeninhalt des Dreiecks her.	4			
3	(3) ermittelt alle Werte von *a*, für die die Dreiecksfläche die Größe 10 FE hat.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**9**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt eine Gleichung für l_a.	4			
2	(2) ermittelt den Wert von a, für den die Gerade l_a durch N_a verläuft.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (8) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**8**			

	Summe insgesamt	**40**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2021

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a und g_a mit

$$f_a(x) = -\frac{a}{250}x^4 + \frac{1}{25}x^3,\ a \in \mathbb{R}, a > 0 \text{ sowie}$$

$$g_a(x) = f_a(x) - \frac{3}{5}x.$$

Abbildung 1 zeigt den Graphen von g_1.

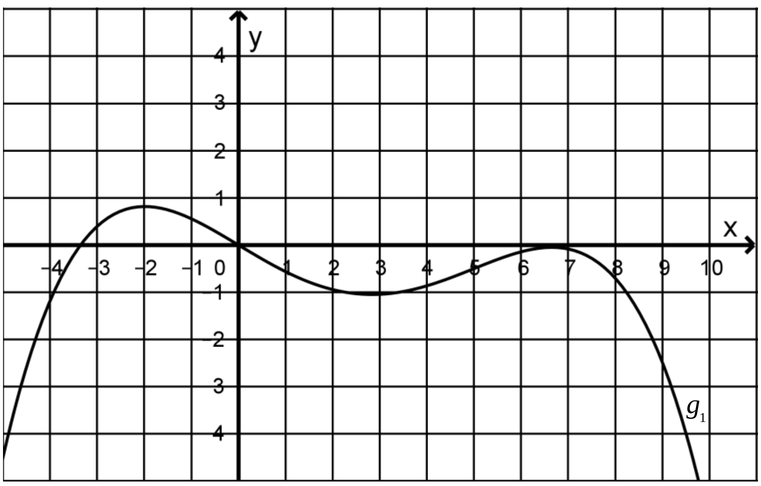


Abbildung 1

a) (1) *Berechnen Sie für den Graphen von f_1 die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sowie die Koordinaten des Extrempunktes.*
Zeichnen Sie den Graphen von f_1 in die Abbildung 1 ein.

(2) *Geben Sie an, für welche Werte von x der Graph von f_1 oberhalb des Graphen von g_1 verläuft und für welche unterhalb. Begründen Sie Ihre Angabe.*

Name: ____________________

(3) Für jeden Wert von a gilt:

I Die Funktionsterme von f_a und g_a unterscheiden sich nur um den Summanden $-\frac{3}{5}x$.

II Der Graph von f_a hat genau zwei Wendepunkte, deren x-Koordinaten 0 und $\frac{5}{a}$ sind.

Geben Sie an, was sich aus I *und* II *hinsichtlich der Anzahl und der Lage der Wendepunkte des Graphen von g_a im Vergleich zu den Wendepunkten des Graphen von f_a folgern lässt. Begründen Sie Ihre Angabe ausgehend von* I *und* II.

(6 + 3 + 5 Punkte)

b) Die Tangente t_{f_a} an den Graphen von f_a im Punkt $\left(\frac{5}{a} \middle| f_a\left(\frac{5}{a}\right)\right)$ hat die Steigung $\frac{1}{a^2}$, die Tangente t_{g_a} an den Graphen von g_a im Punkt $\left(\frac{5}{a} \middle| g_a\left(\frac{5}{a}\right)\right)$ hat die Steigung $\frac{5-3a^2}{5a^2}$.

Der Schnittpunkt dieser beiden Tangenten wird mit S_a bezeichnet.

(1) *Weisen Sie nach, dass S_a für jeden Wert von a auf der y-Achse liegt.*

(2) Die Gerade mit der Gleichung $x = \frac{5}{a}$ schneidet t_{f_a} im Punkt F_a und t_{g_a} im Punkt G_a. Das Dreieck $S_aG_aF_a$ hat für keinen Wert von a einen rechten Winkel beim Punkt S_a. [Nachweis nicht erforderlich.]

Untersuchen Sie, für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ das Dreieck $S_aG_aF_a$ rechtwinklig ist.

(3 + 5 Punkte)

Name: ____________________

c) *Abbildung 2* zeigt schematisch die Profillinie des Längsschnittes einer Skipiste in einer Skihalle. Die Piste ist in Querrichtung nicht geneigt und durchgehend 30 m breit.

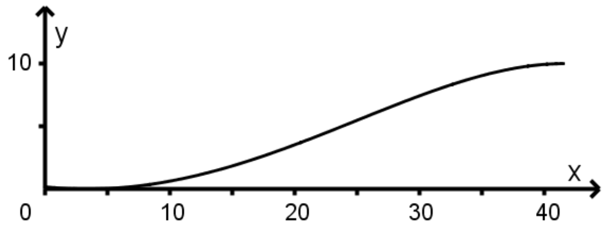


Abbildung 2

Die Profillinie wird für $0 \le x \le 41{,}5$ modellhaft durch den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion p mit $p(x) = -0{,}000\,004x^4 + 0{,}015x^2 - 0{,}1x + 0{,}1875$ dargestellt.

Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x-Achse die Horizontale; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 10 m in der Realität.

(1) *Berechnen Sie die größte Neigung der Piste gegenüber der Horizontalen in Prozent.*
[Hinweis: Die Randwerte müssen nicht betrachtet werden.]

Über der Piste verläuft in deren Längsrichtung ein Seil. Die beiden Enden des Seils werden im Modell durch $A(5\,|\,2{,}31)$ und $B(37\,|\,10{,}68)$ dargestellt; der Verlauf des Seils kann mithilfe einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h mit $h(x) = b \cdot c^x,\ \ b > 0, c > 0$ beschrieben werden.

(2) *Bestimmen Sie die Werte von b und c.*
[Zur Kontrolle: $b \approx 1{,}818$, $c \approx 1{,}049$]

(3) *Untersuchen Sie, in welchen Bereichen der vertikale Abstand des Seils zur Piste mindestens* 3 m *beträgt.*

Ermitteln Sie die Höhendifferenz, um die die beiden Enden des Seils gemeinsam mindestens angehoben werden müssten, damit das Seil an jeder Stelle von der Piste einen vertikalen Abstand von mindestens 3 m *hat.*

Name: ____________________

Abbildung 3 zeigt grau markiert die Schneeauflage im unteren Bereich der Piste; dazu wurde *Abbildung 2* in Richtung der y-Achse stärker vergrößert als in Richtung der x-Achse. Der Untergrund, auf dem der Schnee aufgebracht ist, wird für $0 \le x \le 5$ durch die x-Achse dargestellt. Für den übrigen Teil der Piste soll davon ausgegangen werden, dass die in vertikaler Richtung gemessene Schneehöhe 60 cm beträgt.

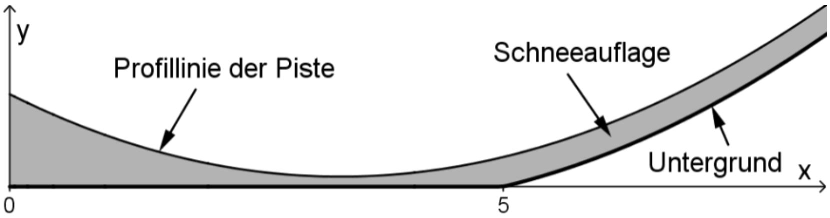


Abbildung 3

(4) *Bestimmen Sie das Volumen der Schneeauflage der gesamten Piste.*

(4 + 2 + 7 + 5 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Herkunftssprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Herkunftssprache nicht Deutsch ist

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2021

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2021 (Stand: August 2020)

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
     - Behandlung von ganzrationalen Funktionen, natürlicher Exponential- und Logarithmusfunktion und deren Verknüpfungen bzw. Verkettungen mit Untersuchung von Eigenschaften in Abhängigkeit von Parametern
     - notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Herkunftssprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Herkunftssprache nicht Deutsch ist

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

(1) $f_1(x) = -\frac{1}{250}x^4 + \frac{1}{25}x^3$. $f_1(0) = 0$.

$-\frac{1}{250}x^4 + \frac{1}{25}x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 10$.

Die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sind $(0|0)$ und $(10|0)$.

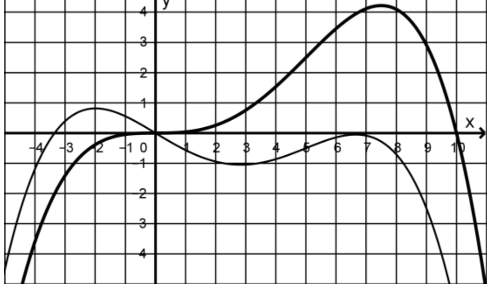
Bestimmung der Koordinaten des Extrempunktes:

$f_1'(x) = -\frac{2}{125}x^3 + \frac{3}{25}x^2 = \frac{1}{25}x^2 \cdot \left(-\frac{2}{5}x + 3\right)$.

Mit der notwendigen Bedingung $f_1'(x) = 0$ für lokale Extrema ergeben sich die beiden möglichen Extremstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 7{,}5$.

Da zusätzlich $f_1'(-5) = 5 > 0$, $f_1'(5) = 1 > 0$ und $f_1'(10) = -4 < 0$ gilt, liegt an der Stelle $x_2 = 7{,}5$ ein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte von f' vor, an der Stelle $x_1 = 0$ jedoch nicht.

Der Extrempunkt ist ein Hochpunkt mit den Koordinaten $\left(7{,}5 \middle| \frac{135}{32}\right)$.



(2) Der Funktionsterm von g_1 unterscheidet sich vom Term von f_1 nur um den Summanden $-\frac{3}{5}x$, welcher für $x<0$ positiv ist. Daher verläuft der Graph von f_1 hier unterhalb des Graphen von g_1. Für $x>0$ gilt hingegen: $-\frac{3}{5}x<0$. Daher verläuft der Graph von f_1 dort oberhalb des Graphen von g_1.

(3) Der Summand $-\frac{3}{5}x$, durch den sich die Funktionsterme unterscheiden, hängt linear von x ab. Somit gilt: $f_a\,''(x)=g_a\,''(x)$. Daher hat der Graph von g_a dieselbe Anzahl von Wendepunkten wie der Graph von f_a und deren x-Koordinaten stimmen überein. Die y-Koordinate an der Stelle $x = 0$ ist wegen $-\frac{3}{5}\cdot 0=0$ bei beiden Graphen identisch. Die y-Koordinate an der Stelle $\frac{5}{a}$ ist beim Graphen von g_a [um $\frac{3}{a}$] kleiner als beim Graphen von f_a.

Teilaufgabe b)

(1) Wegen $f_a\left(\frac{5}{a}\right)=\frac{5}{2a^3}$ und $\frac{5}{2a^3}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{5}{a}+n \Leftrightarrow n=-\frac{5}{2a^3}$ wird t_{f_a} durch die Gleichung $y=\frac{1}{a^2}x-\frac{5}{2a^3}$ beschrieben.

Wegen $g_a\left(\frac{5}{a}\right)=\frac{5-6a^2}{2a^3}$ und $\frac{5-6a^2}{2a^3}=\frac{5-3a^2}{5a^2}\cdot\frac{5}{a}+n \Leftrightarrow n=-\frac{5}{2a^3}$ wird t_{g_a} durch die Gleichung $y=\frac{5-3a^2}{5a^2}x-\frac{5}{2a^3}$ beschrieben.

Damit schneiden beide Tangenten die y-Achse im Punkt $\left(0\middle|-\frac{5}{2a^3}\right)$. Der Schnittpunkt der beiden Tangenten liegt somit für jeden Wert von a auf der y-Achse.

(2) Der Punkt F_a ist der Schnittpunkt der Tangente t_{f_a} mit der zur y-Achse parallelen Geraden mit der Gleichung $x=\frac{5}{a}$. Daher ergäbe sich bei F_a ein rechter Winkel, wenn die Tangente t_{f_a} parallel zur x-Achse verliefe, ihre Steigung also 0 wäre. Wegen $\frac{1}{a^2}>0$ für alle $a>0$ ist dies jedoch nicht möglich.

Der Punkt G_a ist der Schnittpunkt der Tangente t_{g_a} mit der Geraden mit der Gleichung $x=\frac{5}{a}$. Es ergibt sich dann ein rechter Winkel bei G_a, wenn die Tangente t_{g_a} die Steigung 0 hat, also $\frac{5-3a^2}{5a^2}=0$. Mit $a>0$ folgt daraus, dass nur für $a=\frac{\sqrt{15}}{3}\approx 1,29$ das Dreieck $S_aG_aF_a$ rechtwinklig ist.

Teilaufgabe c)

(1) Zu berechnen ist die maximale Steigung der Profillinie der Skipiste.

$p'(x)=-0,000\,016x^3+0,03x-0,1$. $\quad p''(x)=-0,000\,048x^2+0,03$.

$-0,000\,048x^2+0,03=0 \Leftrightarrow x=-25 \vee x=25$.

Die notwendige Bedingung liefert $x=25$ als einzig mögliche Extremstelle des Graphen von p' im untersuchten Bereich. Da der Graph von p'' eine nach unten geöffnete Parabel mit zwei Nullstellen ist, liegt bei $x=25$ die maximale Neigung von $p'(25)=0,4$ vor. Dies entspricht einer Neigung von 40 %.

(2) Durch Einsetzen der Koordinaten der gegebenen Punkte erhält man

$2,31=b\cdot c^5 \Leftrightarrow b=\frac{2,31}{c^5}$ und $10,68=b\cdot c^{37}$. Für $c>0$ liefert das CAS die Lösungen $c\approx 1,049$ und $b\approx 1,818$.

(3) Der vertikale Abstand des Seils zur Piste kann für jeden Punkt der Profillinie mithilfe der Differenzfunktion d mit $d(x) = h(x) - p(x)$ angegeben werden. Die Gleichung $d(x) = 0{,}3$ hat für $5 \le x \le 37$ im Bereich des Seils die Lösungen $x_3 \approx 27{,}24$ und $x_4 \approx 32{,}64$. Die grafische Darstellung der Differenzfunktion *d* zeigt, dass der vertikale Abstand im Modellierungsbereich nur zwischen diesen Werten kleiner als 3 m ist.
Für $5 \le x \le x_3$ und für $x_4 \le x \le 37$ beträgt der vertikale Abstand mindestens 3 m.
Der TR liefert für $5 \le x \le 37$ das absolute Minimum von *d* mit den ungefähren Koordinaten $(30{,}09 \mid 0{,}19)$. Der minimale vertikale Abstand des Seils von der Piste beträgt demnach ca. 1,9 m. Es wäre demnach eine gemeinsame Anhebung der beiden Enden des Seils um mindestens ca. 1,1 m notwendig.

(4) Die Größe der Querschnittsfläche der Schneeauflage ergibt sich aus dem Integral der Funktion p über dem Intervall $[0;5]$ und der Fläche zwischen dem Graphen von *p* und dem 0,06 darunter liegenden Graphen des Untergrundes der Schneeauflage über dem Intervall $[5;41{,}5]$.

$\int_0^5 p(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}31$ und $\int_5^{41{,}5} \left(p(x) - \left(p(x) - 0{,}06\right)\right)\mathrm{d}x = 2{,}19$.

Die Größe der Querschnittsfläche der Schneeauflage beträgt damit
31 m^2 + 219 m^2 = 250 m^2.
Bei einer Pistenbreite von 30 m ergibt sich ein Schneevolumen von 7500 m^3.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.	1			
2	(1) berechnet die Koordinaten des Extrempunktes.	3			
3	(1) zeichnet den Graphen von f_1 ein.	2			
4	(2) gibt begründet an, für welche Werte von x der Graph von f_1 oberhalb bzw. unterhalb des Graphen von g_1 verläuft.	3			
5	(3) gibt die Folgerungen zu Anzahl und Lage der Wendepunkte an und begründet diese.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (14) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**14**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) weist nach, dass S_a für jeden Wert von a auf der y-Achse liegt.	3			
2	(2) untersucht, für welche Werte von a das Dreieck $S_aG_aF_a$ rechtwinklig ist.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (8) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**8**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) berechnet die größte Neigung in Prozent.	4			
2	(2) bestimmt die Werte von b und c.	2			
3	(3) untersucht, in welchen Bereichen der vertikale Abstand mindestens 3 m beträgt.	4			
4	(3) ermittelt die gesuchte Höhendifferenz.	3			
5	(4) bestimmt das Volumen der Schneeauflage.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (18) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**18**			

	Summe insgesamt	**40**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2021

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Bei einem Secret-Sharing-Verfahren wird ein Geheimnis in Teilgeheimnisse auf verschiedene Personen aufgeteilt, um die Verantwortung in mehrere Hände zu legen. Es kann sinnvoll sein, dass ein geheimer Code, z. B. zum Öffnen eines Tresors, nicht einer Person allein bekannt ist, sondern lediglich von mehreren Personen gemeinsam ermittelt werden kann.

Unternehmen können ein solches Verfahren beispielsweise auf geometrischer Basis realisieren. Hierbei kann eine Auswahl von Mitarbeitenden mit Kenntnissen über notwendige Teilgeheimnisse den geheimen Code ermitteln, indem sie ihre Teilgeheimnisse in ein Computersystem eingeben, welches mit den Eingaben geometrische Fragestellungen löst.

Vereinfachend wird im Folgenden angenommen, dass der zu ermittelnde geheime Code immer aus drei Ziffern besteht.

a) (1) Das Computersystem kennt die Gerade g mit $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}4\\-2\\-1\end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$.

Die Punkte $A(0\,|\,-3\,|\,-1)$, $B(4\,|\,2\,|\,1)$ und $C(1\,|\,-1\,|\,-1)$ liegen in einer Ebene H. Drei eingeweihte Mitarbeiter kennen als Teilgeheimnisse die Koordinaten von jeweils einem dieser Punkte. Der geheime Code wird durch die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g mit der Ebene H ermittelt.

(i) Die Koordinaten der Punkte A, B und C werden ins System eingegeben.

Berechnen Sie den geheimen Code.

(ii) Der Punkt S liegt nicht auf der Geraden durch A und B. Ein vierter Mitarbeiter erhält den Punkt $D(12\,|\,12\,|\,5)$ als Teilgeheimnis. Der Punkt D liegt in der Ebene H.

Begründen Sie, warum bei der Eingabe der Koordinaten der Punkte A, B und D das System den geheimen Code trotzdem nicht ermitteln kann.

Name: ____________________

(2) Es ist nicht nur möglich, die Koordinaten von Punkten von Ebenen in das System einzugeben, das System kann auch andere Informationen über die Ebene verarbeiten, z. B. die Koordinaten eines Normalenvektors. Eine Geschäftsführerin kennt als Teilgeheimnis die Koordinaten eines Normalenvektors der Ebene H.

(i) *Begründen Sie, warum die Geschäftsführerin bereits zusammen mit einem beliebigen der vier eingeweihten Mitarbeiter den geheimen Code ermitteln kann.*

(ii) *Berechnen Sie einen Normalenvektor von H.*

(7 + 4 Punkte)

b) Ein anderes Unternehmen verwendet als geheimen Code die ersten drei Ziffern der ungerundeten Dezimaldarstellung des Volumens einer quadratischen Pyramide. Die quadratische Grundfläche der Pyramide liegt in der dem System bekannten Ebene Q: $-3x_1 + 4x_3 = 9$. Eine Geschäftsführerin kennt $(1{,}5\,|\,3{,}5\,|\,6{,}5)$ als Koordinaten der Spitze der Pyramide. Die Mitarbeitenden kennen als Teilgeheimnisse die Koordinaten von jeweils einem Eckpunkt der Grundfläche.

Drei Mitarbeitende und die Geschäftsführerin geben ihre Teilgeheimnisse $(1\,|\,1\,|\,3)$, $(1\,|\,6\,|\,3)$, $(5\,|\,1\,|\,6)$ und $(1{,}5\,|\,3{,}5\,|\,6{,}5)$ ein.

Berechnen Sie den geheimen Code.

(5 Punkte)

c) Ein weiteres Unternehmen verwendet als geheimen Code die ersten drei Nachkommastellen der ungerundeten Länge der Höhe $h_{\overline{IJ}}$ eines gleichschenkligen Dreiecks IJK mit der Basis $\overline{IJ}$.

Zwei Mitarbeitende kennen als Teilgeheimnisse mit $I(4\,|\,3\,|\,2)$ bzw. $J(8\,|\,6\,|\,-1)$ jeweils die Koordinaten eines der beiden Endpunkte der Basis $\overline{IJ}$, ein dritter eingeweihter Mitarbeitender kennt mit $K(6\,|\,5\,|\,1)$ die Koordinaten der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks IJK.

(1) *Zeigen Sie, dass I, J und K die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Basis $\overline{IJ}$ sind.*

(2) *Berechnen Sie den geheimen Code.*

[Zur Kontrolle: Der geheime Code ist 707.]

Name: ____________________

(3) Der Punkt $L(6\,|\,4\,|\,0)$ ergibt sich durch Spiegelung des Punktes K an der Geraden IJ [Ein Nachweis ist nicht erforderlich]. Mit den Koordinaten von L kann ein anderer Mitarbeitender zusammen mit den Mitarbeitenden, die die Koordinaten von I und J kennen, den geheimen Code ermitteln.

Ein weiterer Mitarbeitender soll die Koordinaten eines Punktes P erhalten, der wie K bzw. L zusammen mit den Punkten I und J ein gleichschenkliges Dreieck IJP mit der Basis $\overline{IJ}$ bildet. Auch aus den Koordinaten von I, J und P soll sich in gleicher Weise wie oben beschrieben der in c) (2) berechnete geheime Code ergeben.

(i) *Beschreiben Sie die Lage geeigneter Punkte.*

(ii) Aus Sicherheitsgründen sollen sich die Koordinaten des Punktes P von den Koordinaten der beiden Punkte K und L unterscheiden.
Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten eines geeigneten Punktes P.
[Hinweis: Die Koordinaten des Punktes P müssen nicht ganzzahlig sein.]

(2 + 2 + 5 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Herkunftssprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Herkunftssprache nicht Deutsch ist

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2021

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Vektorielle Geometrie

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2021 (Stand: August 2020)

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Analytische Geometrie und Lineare Algebra
   - Lineare Gleichungssysteme
   - Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
   - Lagebeziehungen und Abstände
   - Skalarprodukt

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Herkunftssprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Herkunftssprache nicht Deutsch ist

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

(1) (i) $H:\vec{x}=\overrightarrow{OA}+k\cdot\overrightarrow{AB}+l\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0\\-3\\-1\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}+l\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $k,l\in\mathbb{R}$ ist eine Gleichung der Ebene H in Parameterform.

Aus $\begin{pmatrix}0\\-3\\-1\end{pmatrix}+k\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}+l\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4\\-2\\-1\end{pmatrix}$ ergibt sich das Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{l}4k+l-4t=1\\5k+2l+2t=6\\2k+t=5\end{array}\right|.$$

Der TR liefert die Lösung $k=2$, $l=-3$ und $t=1$.

Einsetzen von $t=1$ in die Parametergleichung von g liefert $S(5\,|\,1\,|\,3)$ als Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene H und damit 513 als geheimen Code.

(ii) $h:\vec{x}=\overrightarrow{OA}+i\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0\\-3\\-1\end{pmatrix}+i\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}$, $i\in\mathbb{R}$, ist die Gerade durch A und B.

Aus $\overrightarrow{OD}=\begin{pmatrix}12\\12\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-3\\-1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}$ folgt, dass der Punkt D auf h liegt und damit A, B und D auf einer Geraden liegen. Also wird die Ebene H durch A, B und D nicht festgelegt. Der Schnittpunkt S kann somit nicht ermittelt werden.

(2) (i) Durch einen Normalenvektor und einen beliebigen Punkt von H ist diese Ebene eindeutig festgelegt.

(ii) Die Orthogonalitätsbedingungen $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ liefern das lineare Gleichungssystem $\left| \begin{matrix} 4n_1 + 5n_2 + 2n_3 = 0 \\ n_1 + 2n_2 = 0 \end{matrix} \right|$.

Die Wahl von $n_2 = 2$ liefert $\vec{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ als möglichen Normalenvektor von H.

Teilaufgabe b)

Aus $\left| \begin{pmatrix} 1-1 \\ 6-1 \\ 3-3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 5$, $\left| \begin{pmatrix} 5-1 \\ 1-1 \\ 6-3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = 5$ und $\left| \begin{pmatrix} 5-1 \\ 1-6 \\ 6-3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = 5 \cdot \sqrt{2}$ folgt, dass die quadratische Grundfläche einen Flächeninhalt von 25 [FE] hat.

Die Höhe der Pyramide ergibt sich als Abstand des Punktes $(1{,}5 \mid 3{,}5 \mid 6{,}5)$ von der Ebene Q: $-3x_1 + 4x_3 = 9$, also $\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{9+16}} \begin{pmatrix} 1{,}5-1 \\ 3{,}5-1 \\ 6{,}5-3 \end{pmatrix} \right| = 2{,}5$ [LE].

Daraus folgt $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot 2{,}5 = 20{,}8\overline{3}$ [VE].

Damit ergibt sich 208 als geheimer Code.

Teilaufgabe c)

(1) Aus $\left|\overrightarrow{IK}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9} = 3$ und $\left|\overrightarrow{JK}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9} = 3$ folgt, dass IJK ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $\overline{IJ}$ ist.

(2) Der Punkt $M_{\overline{IJ}}(6 \mid 4{,}5 \mid 0{,}5)$ ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{IJ}$.

$\left|\overrightarrow{M_{\overline{IJ}}K}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0{,}5} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$ ist die Länge der Höhe $h_{\overline{IJ}}$ und damit ist 707 der geheime Code.

(3) (i) Geeignet sind alle Punkte in der Ebene, die $M_{\overline{IJ}}$ enthält und senkrecht zur Strecke $\overline{IJ}$ verläuft, und die auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt $M_{\overline{IJ}}$ und dem Radius 0,707 liegen.

(ii) Ein Vektor, der nicht linear abhängig von $\overrightarrow{M_{\overline{IJ}}K}$ ist und der senkrecht zu $\overrightarrow{IJ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ verläuft, ist z. B. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Der Ortsvektor eines geeigneten Punktes P ergibt sich dann durch

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM_{IJ}} + 0{,}707 \cdot \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + 0{,}707 \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}4242 \\ 4{,}5 \\ 1{,}0656 \end{pmatrix},$$

d. h. $P(6{,}4242 \mid 4{,}5 \mid 1{,}0656)$.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) (i) berechnet den geheimen Code.	5			
2	(1) (ii) begründet, warum bei der Eingabe der Koordinaten der Punkte *A*, *B* und *D* das System den geheimen Code nicht ermitteln kann.	2			
3	(2) (i) begründet, warum die Geschäftsführerin bereits zusammen mit einem beliebigen der vier eingeweihten Mitarbeiter den geheimen Code ermitteln kann.	1			
4	(2) (ii) berechnet einen Normalenvektor von *H*.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**11**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet den geheimen Code.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) ……………………………………………………………………… ………………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**5**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass *I*, *J* und *K* die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Basis $\overline{IJ}$ sind.	2			
2	(2) berechnet den geheimen Code.	2			
3	(3) (i) beschreibt die Lage geeigneter Punkte.	2			
4	(3) (ii) ermittelt rechnerisch die Koordinaten eines geeigneten Punktes *P*.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**9**			

	Summe insgesamt	**25**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer weiteren Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2021

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Im Jahr 2018 wurden in Nordrhein-Westfalen etwa 390 000 praktische Führerscheinprüfungen abgelegt. Der relative Anteil von bestandenen Prüfungen lag in dem Jahr bei etwa 70 %.

Für eine Fahrschule, in der n praktische Prüfungen durchgeführt werden, beschreibt im Folgenden die Zufallsgröße X jeweils die Anzahl an bestandenen Prüfungen. Es wird vereinfachend angenommen, dass X stets binomialverteilt ist.

a) Bei einer Fahrschulkette geht man am Standort Düsseldorf für das Jahr 2021 von insgesamt 250 praktischen Führerscheinprüfungen aus. Im Modell wird angenommen, dass X binomialverteilt mit $p = 0,7$ ist.

(1) *Ermitteln Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:*

E1: „Es werden höchstens 160 *praktische Prüfungen bestanden."*

E2: „Es werden mehr als 80 % *der praktischen Prüfungen bestanden."*

E3: „Die Anzahl der bestandenen praktischen Prüfungen ist um fünf größer als der Erwartungswert."

(2) (i) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens* 165 *praktische Prüfungen bestanden werden.*

(ii) *Ermitteln Sie, wie groß die Zahl k mindestens gewählt werden muss, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens k bestandene praktische Prüfungen kleiner oder gleich* 60 % *ist.*

(7 + 4 Punkte)

Name: ____________________

b) Die Fahrschulkette plant für das Jahr 2022 die Eröffnung einer Filiale in Soest. Im Jahr 2022 sollen die ersten praktischen Prüfungen stattfinden. Die Zentrale hat viel Geld in die digitale Ausstattung des Standorts investiert. Sie ist zuversichtlich, dass an dem neuen Standort die Ausbildungsstandards so gut sind, dass im Schnitt mehr als 70 % der praktischen Prüfungen bestanden werden. Um einen Anhaltspunkt dafür zu bekommen, ob die Qualität diesen Erwartungen entspricht, soll die Nullhypothese „Der Anteil der bestandenen praktischen Führerscheinprüfungen liegt bei höchstens 70 %“ auf einem Signifikanzniveau von 5 % untersucht werden.

(1) *Erläutern Sie, für welchen Fehler die Zentrale mit der Wahl der Nullhypothese die zugehörige Wahrscheinlichkeit klein halten möchte.*

(2) Die Zentrale geht davon aus, dass 200 Prüfungen im Jahr 2022 abgelegt werden.

Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

(3) *Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Zentrale zu der Einschätzung kommt, dass die Ausbildungsqualität nicht den Erwartungen entspricht, obwohl die Ausbildungsqualität dazu führt, dass jede Prüfung sogar mit einer Wahrscheinlichkeit von* 75 % *bestanden wird.*

(2 + 4 + 3 Punkte)

c) Eine andere Fahrschulkette führt für den Standort Bielefeld eine Prognose für das Jahr 2021 durch. Für die Prognose wurde mithilfe der Sigma-Regeln ermittelt, dass die Anzahl der bestandenen praktischen Fahrprüfungen mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95 % im Intervall $[242{,}6;\, 267{,}4]$ liegen wird.

(1) *Bestimmen Sie den zugehörigen Erwartungswert* μ *und die zugehörige Standardabweichung* σ.

(2) *Ermitteln Sie mithilfe der Werte aus* (1) *den Stichprobenumfang n und die Wahrscheinlichkeit p einer dazu passenden binomialverteilten Zufallsgröße.*

(2 + 3 Punkte)

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Herkunftssprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Herkunftssprache nicht Deutsch ist

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2021

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Stochastik

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2021 (Stand: August 2020)

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Stochastik
   - Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
   - Binomialverteilung und Normalverteilung
   - Testen von Hypothesen

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Herkunftssprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Herkunftssprache nicht Deutsch ist

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung").

Teilaufgabe a)

(1) zu *E1*: $P_{250;0,7}\left(X \le 160\right) \approx 0,0240$.

zu *E2*: $P_{250;0,7}\left(X > 200\right) = P_{250;0,7}\left(X \ge 201\right) \approx 0,0001$.

zu *E3*: $\mu = 0,7 \cdot 250 = 175$, $P_{250;0,7}\left(X = 180\right) \approx 0,0441$.

(2) (i) $P_{250;0,7}\left(X \ge 165\right) \approx 0,9251$.

(ii) Da $P_{250;0,7}\left(X \ge 173\right) \approx 0,6380$ und $P_{250;0,7}\left(X \ge 174\right) \approx 0,5854$, folgt $k \ge 174$.

Der Wert von *k* muss mindestens 174 betragen.

Teilaufgabe b)

(1) Die Zentrale möchte die Wahrscheinlichkeit für den Fehler klein halten, dass sie aufgrund der Daten einen höheren Ausbildungsstandard annimmt $\left(p > 0,7\right)$, als es tatsächlich der Fall ist $\left(p \le 0,7\right)$.

(2) Es ist $P_{200;0,7}\left(X \ge 151\right) \approx 0,0506$ und $P_{200;0,7}\left(X \ge 152\right) \approx 0,0360$. Damit ergibt sich als Annahmebereich $\left[0;151\right]$ und als Ablehnungsbereich $\left[152;200\right]$. Die Entscheidungsregel lautet daher: „Lehne die Nullhypothese ab, wenn 152 oder mehr der 200 prognostizierten praktischen Prüfungen bestanden werden."

(3) $P_{200;0,75}\left(X \le 151\right) \approx 0,5917$.

Teilaufgabe c)

(1) Es ist $\mu = \frac{242,6 + 267,4}{2} = 255$.

Eine Wahrscheinlichkeit von ca. 95 % wird mit einem 2σ-Intervall erreicht. Damit gilt $\sigma = \frac{267,4 - 242,6}{4} = \frac{24,8}{4} = 6,2$.

(2) Es ist $\mu = p \cdot n = 255$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 6,2$.

Das CAS liefert $n \approx 299,92$ und $p \approx 0,8502$.

[Die Prognose wird mit $n = 300$ und $p = 0,85$ durchgeführt worden sein.]

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:________________________________ Kursbezeichnung:_________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) ermittelt die Wahrscheinlichkeit für Ereignis *E1*.	2			
2	(1) ermittelt die Wahrscheinlichkeit für Ereignis *E2*.	2			
3	(1) bestimmt den Erwartungswert.	1			
4	(1) ermittelt die Wahrscheinlichkeit für Ereignis *E3*.	2			
5	(2) (i) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	1			
6	(2) (ii) ermittelt, wie groß k mindestens gewählt werden muss, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens k bestandene Prüfungen kleiner oder gleich 60 % ist.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (11) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**11**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) erläutert, für welchen Fehler die Zentrale mit der Wahl der Nullhypothese die Wahrscheinlichkeit klein halten möchte.	2			
2	(2) bestimmt die zugehörige Entscheidungsregel.	4			
3	(3) ermittelt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (9) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**9**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) bestimmt μ und σ.	2			
2	(2) ermittelt den Stichprobenumfang und die Wahrscheinlichkeit einer dazu passenden binomialverteilten Zufallsgröße.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**5**			

	Summe insgesamt	**25**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil A	**30**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: erste Aufgabe	**40**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: zweite Aufgabe	**25**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: dritte Aufgabe	**25**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**120**			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 17 Abs. 5 APO-WbK				
Paraphe				

Berechnung der Endnote nach Anlage 4 der Abiturverfügung auf der Grundlage von § 52 APO-WbK

Die Klausur wird abschließend mit der Note ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	120 – 114
sehr gut	14	113 – 108
sehr gut minus	13	107 – 102
gut plus	12	101 – 96
gut	11	95 – 90
gut minus	10	89 – 84
befriedigend plus	9	83 – 78
befriedigend	8	77 – 72
befriedigend minus	7	71 – 66
ausreichend plus	6	65 – 60
ausreichend	5	59 – 54
ausreichend minus	4	53 – 48
mangelhaft plus	3	47 – 40
mangelhaft	2	39 – 33
mangelhaft minus	1	32 – 24
ungenügend	0	23 – 0

Name: ____________________

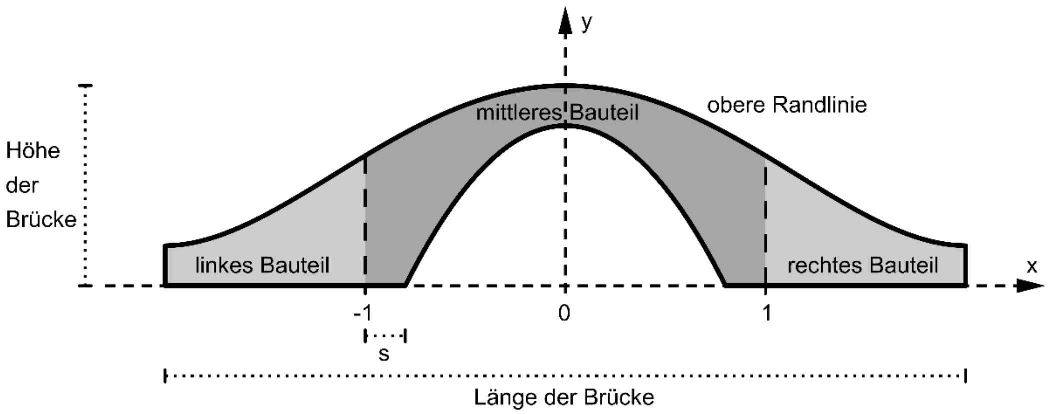
Abiturprüfung 2021

Mathematik, Leistungskurs
weitere (kurze) Analysisaufgabe mit 25 BE

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Die *Abbildung* zeigt modellhaft den Längsschnitt einer dreiteiligen Brücke aus Holz für eine Spielzeugeisenbahn. Die Züge können sowohl über die Brücke fahren als auch darunter hindurch.



Abbildung

Die obere Randlinie des Längsschnitts der Brücke kann mithilfe des achsensymmetrischen Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{20}x^4-\frac{2}{5}x^2+1$ beschrieben werden.

Dabei werden die Endpunkte dieser Randlinie durch die beiden Tiefpunkte des Graphen von f dargestellt. Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x-Achse die Horizontale; eine Längeneinheit entspricht einem Dezimeter in der Realität.

Name: ____________________

a) *Bestimmen Sie rechnerisch die Höhe und die Länge der Brücke.*

[Kontrolllösung: Ein Tiefpunkt des Graphen von *f* hat die *x*-Koordinate 2.]

(5 Punkte)

b) Betrachtet wird derjenige Punkt der oberen Randlinie, der sich am Übergang vom mittleren zum rechten Bauteil befindet.

Prüfen Sie, ob dieser Punkt auf halber Höhe zwischen dem höchsten Punkt der oberen Randlinie und deren rechtem Endpunkt liegt.

(3 Punkte)

c) *Bestimmen Sie die größte Steigung der Brücke, die beim Überfahren zu überwinden ist.*

(2 Punkte)

Der parabelförmige Teil der unteren Randlinie des Längsschnitts der Brücke kann mithilfe des Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion q_a mit $q_a(x) = 0{,}8 - a \cdot x^2$ mit $a \in \mathbb{R}, a > 0$ beschrieben werden.

d) In der *Abbildung* ist die Länge einer der beiden Bodenflächen des mittleren Bauteils mit *s* bezeichnet.
Bestimmen Sie alle Werte von a, die für diese Länge mindestens 0,1 dm *liefern.*

(4 Punkte)

e) *Begründen Sie im Sachzusammenhang, dass für die Beschreibung der unteren Randlinie beliebig große Werte von a nicht infrage kommen.*

(2 Punkte)

f) Für die Brücke gilt $a = 1{,}25$. Die drei Bauteile der Brücke werden aus massivem Holz hergestellt; 1 dm^3 des Holzes hat eine Masse von 800 Gramm. Die Brücke ist 0,4 dm breit.
Ermitteln Sie die Masse des mittleren Bauteils.

(5 Punkte)

Name: ____________________

Während der Planung der Brückenform kamen zur Beschreibung der oberen Randlinie für das linke Bauteil eine Funktion g_l und für das rechte Bauteil eine Funktion g_r infrage. Auch bei Verwendung dieser Funktionen wäre die obere Randlinie achsensymmetrisch gewesen.

g) *Entscheiden Sie jeweils begründet, welche der folgenden Eigenschaften auf die Funktionen g_l und g_r zutreffen.*

(1) $-g_l(x) = g_r(-x)$ für $-2 \le x \le -1$

(2) $g_l(x-1) = g_r(-x+1)$ für $-1 \le x \le 0$

(4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Herkunftssprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Herkunftssprache nicht Deutsch ist

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2021

Mathematik, Leistungskurs
weitere (kurze) Analysisaufgabe mit 25 BE

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

1. Aufgabenart / Inhaltsbereich

Aufgabe mit realitätsnahem Kontext / Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zum Kernlehrplan und zu den Vorgaben 2021 (Stand: August 2020)

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu den Kompetenzerwartungen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.
Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen.

1. *Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte*
   Funktionen und Analysis
   - Funktionen als mathematische Modelle
   - Fortführung der Differentialrechnung
     - Behandlung von ganzrationalen Funktionen, natürlicher Exponential- und Logarithmusfunktion und deren Verknüpfungen bzw. Verkettungen mit Untersuchung von Eigenschaften in Abhängigkeit von Parametern
     - notwendige Ableitungsregeln (Produkt-, Kettenregel)
   - Grundverständnis des Integralbegriffs
   - Integralrechnung

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Zugelassene Hilfsmittel

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Herkunftssprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Herkunftssprache nicht Deutsch ist

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Teilaufgabe a)

Es ist $f'(x) = \frac{1}{5}x^3 - \frac{4}{5}x$.

Der Ansatz $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}x^3 - \frac{4}{5}x = 0$ liefert $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 2$ als mögliche Extremstellen. Mit $f'(-3) = -3 < 0$, $f'(-1) = 0{,}6 > 0$, $f'(1) = -0{,}6 < 0$ und $f'(3) = 3 > 0$ folgt, dass bei $x_2 = 0$ ein Hochpunkt des Graphen und bei $x_1 = -2$ und $x_3 = 2$ Tiefpunkte des Graphen von *f* vorliegen. Die Brücke ist also 4 dm lang.
Mit $f(0) = 1$ ergibt sich, dass die Brücke eine Höhe von 1 dm besitzt.

Teilaufgabe b)

Es ist $f(1) = \frac{13}{20}$. Für die halbe Höhe zwischen dem höchsten und tiefsten Punkt gilt

$\frac{f(0)+f(2)}{2} = \frac{1+\frac{1}{5}}{2} = \frac{3}{5} \neq \frac{13}{20}$. Die beschriebene Bedingung ist also nicht erfüllt.

Teilaufgabe c)

Die größte Steigung entspricht dem Maximum von $f\,'$ auf dem Intervall $[-2;2]$. Der TR liefert als absoluten Hochpunkt des Graphen von $f\,'$ auf dem Intervall $[-2;2]$ näherungsweise den Punkt $(-1{,}155\,|\,0{,}616)$ [exakt $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\,\middle|\,\frac{16}{45}\sqrt{3}\right)$]. Der y-Wert dieses Punktes des Graphen von $f\,'$ entspricht der größten Steigung auf dem betrachteten Intervall.

Beim Überfahren ist eine maximale Steigung von ca. 0,616 zu überwinden.

[Die Fahrtrichtung des Zuges ist aufgrund der Achsensymmetrie des Graphen von f irrelevant für den Wert der größten Steigung.]

Teilaufgabe d)

Betrachtet wird zunächst der Fall, dass die Länge genau 0,1 dm beträgt. Dann muss q_a eine Nullstelle bei $-0{,}9$ [bzw. bei 0,9] besitzen. Der Ansatz $q_a(-0{,}9) = 0$ liefert $a \approx 0{,}988$ [exakt $a = \frac{80}{81}$].

Für $a \in \mathbb{R}, a > 0$ ist der Graph von q_a eine nach unten geöffnete Parabel. Wird der Wert von a vergrößert, so wird der Abstand der beiden Nullstellen kleiner und somit die Länge s größer. Also ist für $a \geq 0{,}988$ die Länge s mindestens 0,1 dm lang.

Teilaufgabe e)

Je größer der Wert von a ist, desto schmaler ist der Graph von q_a und damit die Durchfahrt der Brücke. Wird der Wert von a zu groß, kann kein Zug mehr hindurchfahren.

Teilaufgabe f)

$q_{1,25}(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0,8 - 1,25x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -0,8 \vee x = 0,8$.

Für die Längsschnittfläche $A_{\text{mittleres Bauteil}}$ des mittleren Bauteils gilt:

$$A_{\text{mittleres Bauteil}} = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-0,8}^{0,8} q_{1,25}(x)\mathrm{d}x = 0,9 \ [\mathrm{dm}^2]$$

Für die Masse folgt: $0,9\,\mathrm{dm}^2 \cdot 0,4\,\mathrm{dm} \cdot 800\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{dm}^3} = 288\,\mathrm{g}$.

Die Masse des mittleren Bauteils beträgt 288 g.

Teilaufgabe g)

(1) Durch die Gleichung wird eine Punktsymmetrie zum Ursprung der Graphen von g_l und g_r in den Intervallen $[-2;-1]$ und $[1;2]$ beschrieben. Die Graphen sind aber nicht punktsymmetrisch zum Ursprung, daher ist die Eigenschaft falsch.

(2) Durch die Gleichung wird eine Achsensymmetrie zur y-Achse der Graphen von g_l und g_r in den Intervallen $[-2;-1]$ und $[1;2]$ beschrieben. Dies passt zur beschriebenen Bedingung für die obere Randlinie, daher ist die Eigenschaft richtig.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:___________________________________ Kursbezeichnung:________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	bestimmt rechnerisch die Höhe und Länge der Brücke.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**5**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	prüft die angegebene Bedingung.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (3) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**3**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt die größte Steigung.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (2) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**2**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	bestimmt alle Werte von a, für die die angegebene Bedingung erfüllt ist.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**4**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	begründet im Sachzusammenhang, dass für die Beschreibung der unteren Randlinie beliebig große Werte von a nicht infrage kommen.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (2) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**2**			

Teilaufgabe f)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	ermittelt die Masse des mittleren Bauteils.	5			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe f)	**5**			

Teilaufgabe g)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	entscheidet jeweils begründet, welche der Eigenschaften auf die angegebenen Funktionen zutreffen.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe g)	**4**			

	Summe insgesamt	**25**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil A	**30**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: erste Aufgabe	**40**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: zweite Aufgabe	**25**			
Übertrag der Punktsumme aus Prüfungsteil B: dritte Aufgabe	**25**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**120**			
aus der Punktsumme resultierende Note gemäß nachfolgender Tabelle				
Note ggf. unter Absenkung um bis zu zwei Notenpunkte gemäß § 17 Abs. 5 APO-WbK				
Paraphe				

Berechnung der Endnote nach Anlage 4 der Abiturverfügung auf der Grundlage von § 52 APO-WbK

Die Klausur wird abschließend mit der Note ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum:

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	120 – 114
sehr gut	14	113 – 108
sehr gut minus	13	107 – 102
gut plus	12	101 – 96
gut	11	95 – 90
gut minus	10	89 – 84
befriedigend plus	9	83 – 78
befriedigend	8	77 – 72
befriedigend minus	7	71 – 66
ausreichend plus	6	65 – 60
ausreichend	5	59 – 54
ausreichend minus	4	53 – 48
mangelhaft plus	3	47 – 40
mangelhaft	2	39 – 33
mangelhaft minus	1	32 – 24
ungenügend	0	23 – 0