



Schriftliche Abiturprüfung Schuljahr 2022/2023

Mathematik auf grundlegendem Anforderungsniveau an allgemeinbildenden gymnasialen Oberstufen

Haupttermin
Mittwoch, 3. Mai 2023, 9:00 Uhr

Unterlagen für die Prüflinge
Wahlschwerpunkt Lineare Algebra

Allgemeine Arbeitshinweise

- Überprüfen Sie diese Unterlagen auf Vollständigkeit.
- Schreiben Sie auf alle Prüfungsunterlagen Ihren Namen und zusätzlich auf dieses Deckblatt Ihre Kursnummer.
- Kennzeichnen Sie bitte Ihre Entwurfsblätter (Kladde) und Ihre Reinschrift.

Fachspezifische Arbeitshinweise¹

- Die Arbeitszeit einschließlich der Auswahlzeit beträgt insgesamt **300 Minuten**².
- Sie erhalten zuerst die Aufgabe **I** zur Bearbeitung.
- Nach Abgabe der Aufgabe **I** und der zugehörigen Lösungen erhalten Sie die Aufgabe **II** und zwei Aufgaben aus **III, IV** oder **V** sowie die zugelassenen Hilfsmittel. Sie bearbeiten diese **drei** Aufgaben in der restlichen Arbeitszeit.
- Erlaubte Hilfsmittel: CAS-System, zugelassene Formelsammlung, Rechtschreibwörterbuch

Aufgabenauswahl

- Sie erhalten zuerst die Aufgabe **I** zur Bearbeitung. Wählen Sie aus den Unteraufgaben **I.5.1, I.5.2** oder **I.5.3** eine Unteraufgabe aus. Die Unteraufgaben **I.1, I.2, I.3** und **I.4** müssen bearbeitet werden, insgesamt also **fünf** Unteraufgaben von Aufgabe **I**.
- Vermerken Sie auf dem Deckblatt und der Reinschrift, welche Unteraufgaben (**I.5.1, I.5.2** oder **I.5.3**) Sie bearbeitet haben.
- Nach Abgabe der Aufgabe **I** und der zugehörigen Lösungen erhalten Sie die restlichen **drei** Aufgaben (**II** und zwei Aufgaben aus **III, IV** oder **V**) sowie Ihr CAS-System und die Formelsammlung.
- Überprüfen Sie anhand der Seitenzahlen, ob Sie alle Unterlagen vollständig erhalten haben.
- Beginnen Sie mit der Bearbeitung dieser **drei** Aufgaben. Hierzu steht Ihnen die restliche Arbeitszeit zur Verfügung.

Ausgewählt wurde :

I.5.1	I.5.2	I.5.3

¹ Entsprechend der „Richtlinie über die Gewährung von Erleichterungen für neu zugewanderte Schülerinnen, Schüler und Prüflinge bei Sprachschwierigkeiten in der deutschen Sprache“ (MBISchul Nr. 08, 7. Oktober 2016, S. 60) werden für die betroffenen Prüflinge die folgenden Erleichterungen gewährt:

- Die Bearbeitungszeit wird um 30 Minuten auf **330 Minuten** erhöht.
- Ein nicht-elektronisches Wörterbuch Deutsch – Herkunftssprache / Herkunftssprache – Deutsch wird bereitgestellt.

² Gemäß Entscheidung vom 5. Januar 2023.

Bewertung

Prüfungsteil A (hilfsmittelfreier Teil): 25 Bewertungseinheiten (BE)

Prüfungsteil B: 75 BE (3 komplexe Aufgaben, Aufgabe II mit 35 BE, zwei Aufgaben aus Aufgabe III mit 20 BE, Aufgabe IV mit 20 BE und Aufgabe V mit 20 BE)

Insgesamt sind 100 BE erreichbar.

Bei der Festlegung von Notenpunkten gilt die folgende Tabelle.

Erbrachte Leistung (in BE)	Notenpunkte
≥ 95	15
≥ 90	14
≥ 85	13
≥ 80	12
≥ 75	11
≥ 70	10
≥ 65	9
≥ 60	8

Erbrachte Leistung (in BE)	Notenpunkte
≥ 55	7
≥ 50	6
≥ 45	5
≥ 40	4
≥ 33	3
≥ 27	2
≥ 20	1
< 20	0

Für die Erteilung der **Note „gut“** (11 Notenpunkte) ist mindestens erforderlich, dass annähernd vier Fünftel der erwarteten Gesamtleistung sowie Leistungen in allen drei Anforderungsbereichen erbracht wurden.

Für die Erteilung der **Note „ausreichend“** (5 Notenpunkte) ist mindestens erforderlich, dass annähernd die Hälfte der erwarteten Gesamtleistung und über den Anforderungsbereich I hinaus Leistungen in einem weiteren Anforderungsbereich erbracht wurden.

Die erbrachte Gesamtleistung ergibt sich aus der Summe der Bewertungseinheiten in den vier Aufgaben.

Bei erheblichen Mängeln in der sprachlichen Richtigkeit und der äußeren Form sind bei der Bewertung der schriftlichen Prüfungsleistung je nach Schwere und Häufigkeit der Verstöße bis zu zwei Notenpunkte abzuziehen. Dazu gehören auch Mängel in der Gliederung, Fehler in der Fachsprache, Ungenauigkeiten in Zeichnungen sowie falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text.

Aufgabe I: Hilfsmittelfreier Prüfungsteil

I.1 Analysis

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten linearen Funktion f .

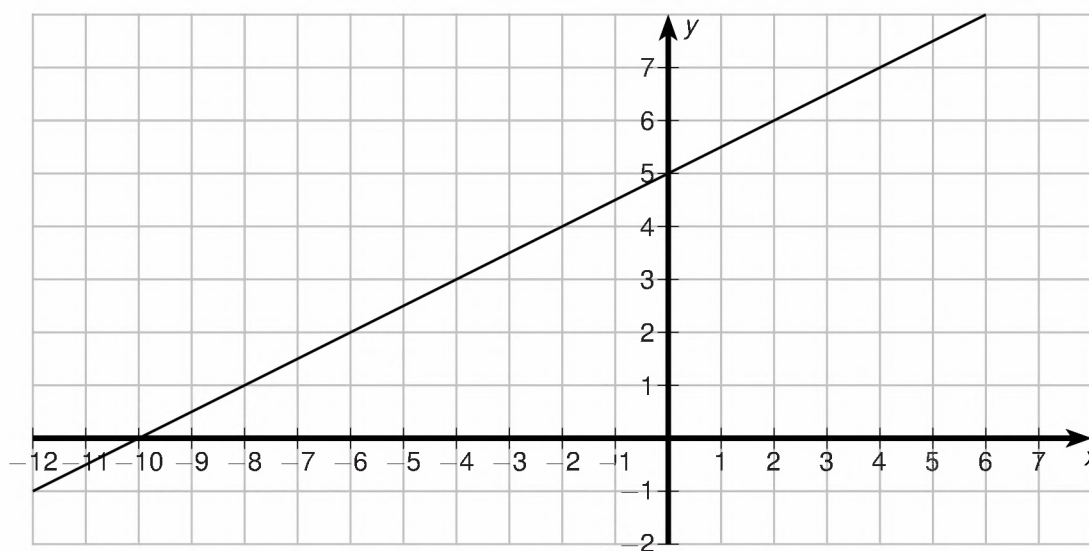


Abbildung 1

a) **Bestimmen** Sie die Funktionsgleichung von f .

(Zur Kontrolle: $f(x) = \frac{1}{2}x + 5$)

(2 BE)

b) **Bestimmen** Sie die Funktionsgleichung einer linearen Funktion g , deren Graph parallel zum Graphen von f verläuft, so dass der Flächeninhalt, den der Graph von g im zweiten Quadranten mit den Koordinatenachsen einschließt, 9 Flächeneinheiten beträgt.

(3 BE)

I.2 Analysis

Die Abbildung 2 zeigt eine in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale Funktion f .

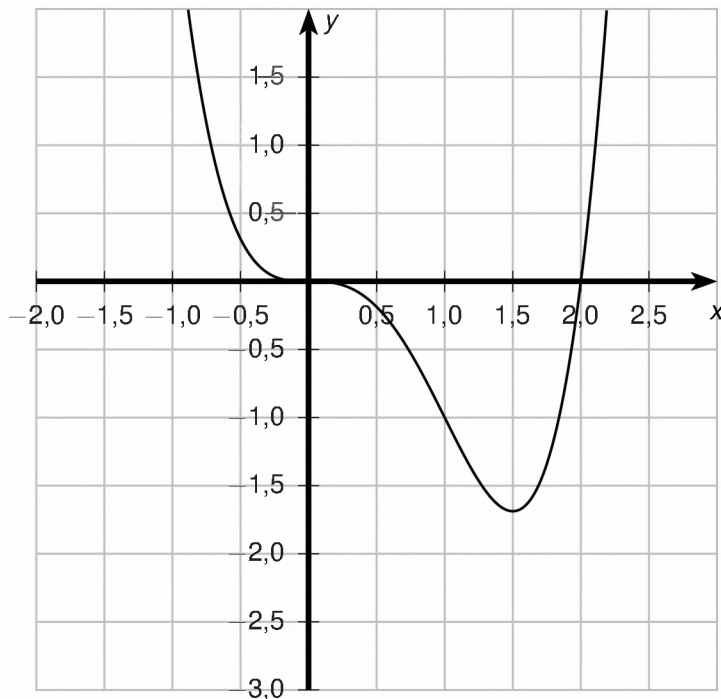


Abbildung 2

a) **Geben** Sie **an** welchen Grad die Funktion f mindestens haben muss und **begründen** Sie Ihre Angabe.

(2 BE)

b) **Skizzieren** Sie den Graphen der ersten Ableitung von f in die Abbildung 2.

(3 BE)

I.3 Lineare Algebra

Gegeben ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) **Entscheiden** Sie, ob es einen Vektor $\vec{u}$ gibt, für den

$$M \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gilt, und **begründen** Sie Ihre Entscheidung.

(2 BE)

b) **Untersuchen** Sie, für welche reellen Werte von a , b und c mit $c \neq 0$ die Vektoren

$$\vec{v} = M \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

kollinear sind.

(3 BE)

I.4 Stochastik

In einem Behälter befinden sich zwei Kugeln mit der Beschriftung (-1) und eine Kugel mit der Beschriftung $(+2)$.

Es werden zwei Kugeln gleichzeitig gezogen. Die Zufallsgröße X entspricht der Summe der Zahlen auf den beiden Kugeln.

Bestimmen Sie den Erwartungswert von X . (5 BE)

I.5.1 Analysis

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = e^{(x^2)}$.

a) **Geben** Sie die Wertemenge von f an. (2 BE)

b) Für die erste Ableitungsfunktion f' von f gilt $f'(x) = 2x \cdot f(x)$.

Die Graphen von f und f' schneiden sich in einem Punkt.

Bestimmen Sie die Steigung des Graphen von f in diesem Punkt. (3 BE)

I.5.2 Lineare Algebra

Gegeben ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, für die eine reelle Zahl t existiert mit

$$M \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

(5 BE)

I.5.3 Stochastik

Bei einem Spiel werfen ein Spieler A und ein Spieler B jeweils einmal ein regelmäßiges Tetraeder, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 4 durchnummeriert sind.

Ist die vom Spieler B erzielte Zahl um mindestens 2 größer als die vom Spieler A erzielte, so zahlt der Spieler A den Betrag x an den Spieler B aus.

Erzielen beide Spieler die gleiche Zahl, erfolgt keine Zahlung.

In allen anderen Fällen zahlt der Spieler B den Betrag y an den Spieler A aus. Bei sehr häufiger Durchführung des Spiels ist zu erwarten, dass sich die Auszahlungen zwischen den Spielern ausgleichen.

Berechnen Sie das Verhältnis von x und y . (5 BE)

Aufgabe II: Analysis 1

1. Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen

$$p: x \mapsto -x^2 - x + 1$$

und

$$q: x \mapsto e^{-x}.$$

Die Graphen von p und q haben genau einen gemeinsamen Punkt; dieser Punkt liegt auf der y -Achse. Für die erste Ableitungsfunktion von q gilt $q'(x) = -q(x)$.

a) **Beschreiben** Sie, wie der Graph von q' aus dem Graphen von q erzeugt werden kann.

Geben Sie die Wertemenge von q' an. (2 BE)

b) **Berechnen** Sie die Größe des Winkels, in dem der Graph von q die Gerade mit der Gleichung $y = 4$ schneidet. (3 BE)

c) **Zeigen** Sie, dass die Graphen von p und q in ihrem gemeinsamen Punkt eine gemeinsame Tangente haben, und geben Sie eine Gleichung dieser Tangente an. (3 BE)

d) **Geben** Sie die geometrische Bedeutung der Gleichung

$$\int_0^b (q(x) - p(x)) dx = 4$$

an und **bestimmen** Sie den Wert von b . (3 BE)

2. Für jeden Wert von $a \in \mathbb{R}$ ist eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion

$$h_a: x \mapsto (x^2 - x - a) \cdot e^{-x}$$

gegeben.

a) **Berechnen** Sie den Abstand der beiden Extrempunkte des Graphen von h_1 . (4 BE)

b) Für jeden Wert von a mit $a > -\frac{5}{4}$ hat der Graph von h_a zwei Extrempunkte.

Bestimmen Sie die x -Koordinaten dieser beiden Extrempunkte in Abhängigkeit von a .

Begründen Sie, dass es zu jeder Stelle $x > \frac{3}{2}$ einen Wert von a gibt, für den der Graph von h_a im Punkt $(x | h_a(x))$ einen Hochpunkt hat. (5 BE)

3. Ein Bewässerungskanal wird durch Öffnen einer Schleuse in Betrieb genommen. Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion

$$w : x \rightarrow 4 \cdot (x^2 - x - 1) \cdot e^{-x} + 4$$

beschreibt für $x \geq 0$ die zeitliche Entwicklung der momentanen Durchflussrate des Wassers an einer Messstelle. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Sekunden und $w(x)$ die momentane Durchflussrate in Kubikmetern pro Sekunde.

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen von w .

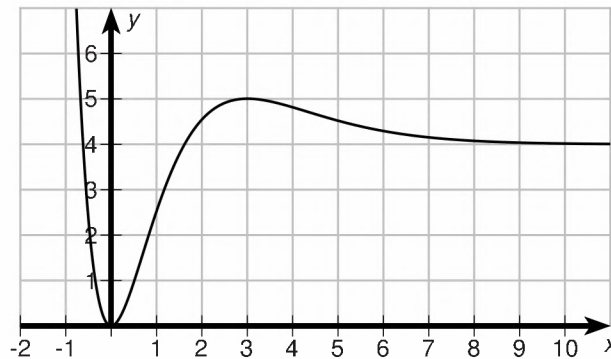


Abbildung 1

- a) **Geben** Sie den Wert des Terms

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} w(x)$$

sowie die Bedeutung dieses Werts im Sachzusammenhang **an**.

(2 BE)

- b) **Bestimmen** Sie die momentane Durchflussrate für denjenigen Zeitpunkt, zu dem sie am stärksten abnimmt.

(3 BE)

- c) Betrachtet wird der Zeitraum der ersten zehn Sekunden nach Beobachtungsbeginn.

Beschreiben Sie unter Verwendung geeigneter Flächen die graphische Bedeutung der folgenden Aussage:

Für den betrachteten Zeitraum beträgt die mittlere Durchflussrate etwa $4 \text{ m}^3/\text{s}$.

(3 BE)

- d) Die Tangente an den Graphen von w im Punkt $(1|w(1))$ wird durch die Gleichung $y = t(x)$ dargestellt.

Interpretieren Sie die folgende Aussage im Sachzusammenhang:

Für alle Werte von $x \in [0,7; 1,4]$ gilt $\left| \frac{t(x) - w(x)}{w(x)} \right| < 0,05$.

(3 BE)

- e) An der Messstelle fließen in einem Zeitraum von drei Sekunden dreizehn Kubikmeter Wasser vorbei.

Berechnen Sie die dafür infrage kommenden Zeiträume.

(4 BE)

Aufgabe III: Lineare Algebra

1. In einem Tierpark werden an drei verschiedenen Stationen A , B und C Handwagen vermietet, in denen Besucher beispielsweise mitgebrachte Taschen transportieren können. Ein Wagen, der an einer der drei Stationen ausgegeben wurde, kann an einer beliebigen der drei Stationen zurückgegeben werden.

Die Verteilung der Wagen am Morgen jedes Tages kann durch einen Vektor der Form $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ beschrieben werden, wobei a , b und c die Anzahlen der Wagen an den Stationen A , B bzw. C sind. Die Entwicklung der Verteilung von einem Morgen n zum nächsten wird modellhaft durch die Gleichung

$$\vec{v}_{n+1} = M \cdot \vec{v}_n$$

mit

$$M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$$

beschrieben.

- a) **Stellen** Sie die beschriebene Entwicklung der Verteilung der Wagen in einem Übergangsdiagramm dar. (3 BE)

- b) Insgesamt stehen 160 Wagen zur Verfügung. An einem Samstagmorgen befanden sich an den Stationen A und B zusammen ebenso viele Wagen wie an der Station C .
Am folgenden Morgen befanden sich 70 Wagen an der Station C .

Ermitteln Sie die Anzahl der Wagen an der Station A für den genannten Samstagmorgen. (3 BE)

- c) Die Wagen werden regelmäßig gewartet. Dazu werden einige der Wagen morgens abgeholt und am Abend des folgenden Tags zurückgebracht.

An einem Morgen befanden sich 50 Wagen an der Station A , 46 an der Station B und 64 an der Station C . An diesem Morgen wurde an jeder der drei Stationen die gleiche Anzahl x von Wagen zur Wartung abgeholt. Sowohl unmittelbar danach als auch am folgenden Morgen standen an der Station A weniger als 47 Wagen zur Verfügung, zu beiden Zeitpunkten an jeder der drei Stationen aber mindestens 26 Wagen.

Bestimmen Sie alle Werte, die für x infrage kommen. (5 BE)

2. Das Viereck $EFGH$ mit

$$E(-6|6|1), F(-10|10|4) \text{ und } H(-2|2|4)$$

ist eine Raute. Die Diagonalen schneiden sich im Punkt $J(-6|6|4)$.

a) **Bestimmen** Sie die Seitenlänge der Raute sowie die Koordinaten des Punkts G . (3 BE)

b) Mit

$$\cos \varphi_1 = \frac{\vec{EF} \circ \vec{EH}}{|\vec{EF}| \cdot |\vec{EH}|}$$

ergibt sich

$$\varphi_2 = 180^\circ - \varphi_1 \approx 56^\circ.$$

Geben Sie eine Bedeutung von φ_2 im Zusammenhang mit der Raute **an** und **begründen** Sie Ihre Angabe. (3 BE)

c) Betrachtet wird die Pyramide mit der Grundfläche $EFGH$ und der Spitze

$$S(-6 + k|6 + k|4).$$

Für jeden Wert von $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ steht die Strecke $\overline{JS}$ senkrecht zur Grundfläche.

Bestimmen Sie diejenigen Werte von k , für die das Volumen der Pyramide 112 ist. (3 BE)

Aufgabe IV: Stochastik

Hinweis: In den folgenden Aufgaben sollen die relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten betrachtet werden.

1. Von den Lehrkräften eines Landes arbeiten 25% an einem Gymnasium. 15 % der Lehrkräfte sind weiblich und arbeiten an einem Gymnasium. Insgesamt sind 72 % der Lehrkräfte weiblich.

a) **Stellen** Sie den Sachzusammenhang in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel **dar**. (3 BE)

b) **Ermitteln** Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Lehrkraft weiblich ist oder an einem Gymnasium arbeitet. (2 BE)

c) Eine zufällig ausgewählte Lehrkraft ist weiblich.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie an einem Gymnasium arbeitet. (2 BE)

100 Lehrkräfte werden zufällig ausgewählt.

d) **Bestimmen** Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter diesen 100 Lehrkräften die Anzahl derer, die nicht am Gymnasium arbeiten, mindestens viermal so groß ist, wie die Anzahl derer, die am Gymnasium arbeiten. (3 BE)

e) **Geben** Sie die Bedeutung des Terms

$$\sum_{k=75}^{100} \binom{100}{k} \cdot 0,75^k \cdot 0,25^{100-k}$$

im Sachzusammenhang **an**.

(2 BE)

2. In einem Behälter befinden sich fünf Kugeln, die jeweils mit einer der Zahlen eins bis fünf beschriftet sind. Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Die Zufallsvariable S beschreibt die Summe der beiden Kugelwerte.

a) **Bestätigen** Sie, dass der Erwartungswert von S sechs ist. (4 BE)

b) Die Varianz von S wird folgendermaßen berechnet:

$$\text{Var}(S) = \frac{1}{20} \cdot 8 \cdot 1^2 + \frac{1}{20} \cdot 4 \cdot 2^2 + \frac{1}{20} \cdot 4 \cdot 3^2$$

Erläutern Sie den ersten Summanden des Terms.

(4 BE)

Aufgabe V: Analysis 2

1. Tomatenpflanzen sind beliebte Pflanzen, die man zu Hause anbauen kann. Zu Beobachtungsbeginn hat eine Pflanze die Höhe von 2 cm erreicht. Das weitere Wachstum kann der Tabelle 1 entnommen werden:

Anzahl der Tage	Höhe der Pflanze (in cm)
0	2
4	2,4
55	31

Tabelle 1

Das Wachstum der Pflanze wird im Folgenden mit der Funktion f mit

$$f(t) = 2 \cdot e^{0,05t}$$

modelliert, dabei ist t die Zeit in Tagen seit Beobachtungsbeginn und $f(t)$ die Höhe der Pflanze in Zentimetern.

- a) **Zeigen** Sie, dass die Funktion f die Messdaten aus Tabelle 1 näherungsweise beschreibt. (2 BE)
- b) **Entscheiden** Sie, ob exponentielles Wachstum das Pflanzenwachstum einer Tomatenpflanze langfristig angemessen beschreibt. (2 BE)
- c) **Ermitteln** Sie, nach wie viel Tagen die Pflanze eine Höhe von 1 m überschritten hat. (2 BE)

Tomatenpflanzen werden oft von Trauermücken befallen. Das ist ein Schädling, der in der Erde lebt und sich von der Wurzel der Tomatenpflanze ernährt.

Die Bekämpfung des Trauermückenbestandes soll auf biologischem Wege mit Nützlingen erfolgen. Nützlinge sind Organismen, die die Trauermücken als Nahrung brauchen und somit vernichten. Die Nützlinge werden von Beginn der Beobachtung an hinzugegeben.

Die folgende Funktion S mit

$$S(t) = (30 - e^{0,07t}) \cdot e^{0,07t} = 30e^{0,07t} - e^{0,14t}$$

beschreibt die Menge der Trauermücken unter dem Einfluss der Nützlinge in Abhängigkeit von der Zeit t (siehe Abbildung 1). Dabei gibt t die Anzahl der Tage nach dem Einsetzen der Nützlinge an und $S(t)$ die Anzahl der Trauermücken.

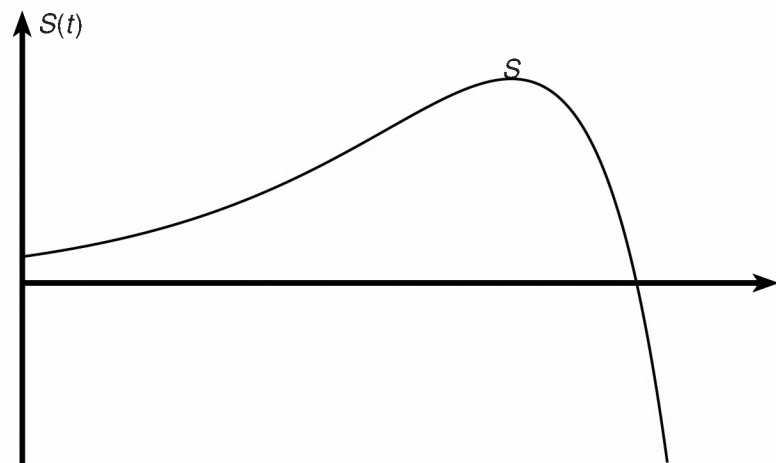


Abbildung 1

- d) Die Funktion S besitzt einen Hochpunkt.

Berechnen Sie die maximale Anzahl an Trauermücken.

(4 BE)

- e) Wenn die Trauermücken nach einer bestimmten Anzahl an Tagen noch nicht vollständig verschwunden sind, gibt der Hersteller eine „Geld-Zurück-Garantie“.

Bestimmen Sie für die Funktion S , nach wie vielen Tagen die Garantie eintritt.

(3 BE)

- f) **Interpretieren** Sie die Bedeutung der Lösung der folgenden Gleichung im Sachkontext:

$$\frac{1}{2} \int_0^2 S(t) dt = \frac{1}{b} \int_{48}^{48+b} S(t) dt$$

(3 BE)

2. a) Gegeben ist die Gleichung der reellen Funktion g_t mit

$$g_t(x) = x \cdot (2x^2 - 12x + t),$$

für $t \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass G_t mit

$$G_t(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^3 + \frac{t}{2}x^2 + c$$

eine Stammfunktion der Funktion g_t ist.

(2 BE)

- b) Die Nullstellen einer der Funktion g_t sind $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 5$.

Überprüfen Sie, für welches t mit $t \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\int_0^1 g_t(x) dx = 1,5$$

gilt.

(2 BE)